REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD **P**EDAGÓGICA **E**XPERIMENTAL **L**IBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO "RAFAEL ALBERTO ESCOBAR LARA"
DOCTORADO EN **E**DUCACIÓN **M**ATEMÁTICA

APROXIMACIÓN TEÓRICA PARA LA DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES Y SU EFECTO EN EL RENDIMIENTO ACADÉMICO INMEDIATO.

Una Estrategia Didáctica Alternativa y la Modelación Matemática.

Tesis Doctoral presentada como requisito parcial ante la ilustre
Universidad **P**edagógica **E**xperimental **L**ibertador para optar al Grado Académico de
"**D**octor en **E**ducación **M**atemática"

Autor: Franzyuri Fernando Hernández Fajardo
Tutor: Esteban Marino Flores Revette

Maracay, 17 de junio de 2024

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
"INSTITUTO PEDAGÓGICO RAFAEL ALBERTO ESCOBAR LARA"
SUBDIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
COORDINACIÓN GENERAL DE ESTUDIOS DE POSTGRADO
Línea de Investigación: Didáctica del Cálculo

ACTA DE APROBACIÓN

Nosotros, Miembros del jurado designado. Para la evaluación de la Tesis Doctoral Titulada: **"APROXIMACIÓN TEÓRICA PARA LA DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES Y SU EFECTO EN EL RENDIMIENTO ACADÉMICO INMEDIATO. UNA ESTRATEGIA DIDÁCTICA ALTERNATIVA Y LA MODELACIÓN MATEMÁTICA".** Presentada por el Magíster: **Franzyuri Fernando Hernández Fajardo**, Titular de la cédula de identidad **N°10.732.822**. Para optar al título de Doctor en Educación Matemática, Estimamos que reúne los requisitos para ser considerada como:

Aprobada

Por generar una aproximación teórica para la descomposición en fracciones simples desarrollada con un modelo instruccional, para analizar su efecto sobre el rendimiento académico inmediato en estudiantes de Cálculo II de la FaCyT-UC.

En Maracay a los diecisiete días del mes de Junio del año dos mil veinticuatro.

Dra. Rocío Báez
C.I: 9.656.777

Dra. Gabriela Gardié
C.I: 9.676.689

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara
MARACAY
COORDINACIÓN DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Dr. José Chirinos
C.I: 4.403.805

Dr. Rolando García
C.I: 12.855.448

Dr. Esteban Flores
C.I: 6.999.346

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR

Dedicada a

Lola

Agradecimientos

Agradezco profundamente la colaboración, orientación y ayuda que me ha brindado mi director de Tesis Dr. Esteban Marino Flores Revette, quien encaminó de excelente forma esta Tesis Doctoral. Su disposición en todo momento, guía y consejos acertados fueron fundamentales para dar término a este trabajo de investigación.

Agradezco a la esposa de mi director de Tesis Lcda. María Lizett Tovar, quien siempre estuvo a la orden para lo que necesitáramos.

Agradezco al decano, y al director del Departamento de Matemática, de la Facultad de Ciencias y Tecnología (FaCyT) de la **U**niversidad de **C**arabobo (UC); Dr. José Gregorio Marcano Chivico y Dr. Luis Angel Rodríguez, quienes de forma desinteresada han entregado las facilidades para obtener una muestra estudiantil y hacer uso del campus universitario durante el desarrollo del experimento didáctico de este trabajo de investigación en momentos y días muchas veces inadecuados.

Agradezco al coordinador del **D**octorado en **E**ducación **M**atemática de la **U**niversidad **P**edagógica **E**xperimental **L**ibertador (UPEL), Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara" de Maracay (IPMAR), Dr. Rolando Antonio García Hernández, quien siempre fue de forma muy profesional una guía, un mentor y un amigo durante mis años de estudio en el programa doctoral.

Les deseo a todos;

"Larga vida y prosperidad"

TABLA DE CONTENIDOS

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD **P**EDAGÓGICA **E**XPERIMENTAL **L**IBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO "RAFAEL ALBERTO ESCOBAR LARA"
DOCTORADO EN **E**DUCACIÓN **M**ATEMÁTICA
Línea de Investigación: Didáctica del Cálculo

APROXIMACIÓN TEÓRICA PARA LA DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES Y SU EFECTO EN EL RENDIMIENTO ACADÉMICO INMEDIATO.
Una Estrategia Didáctica Alternativa y la Modelación Matemática.

Tesis Doctoral presentada como requisito parcial ante la ilustre
Universidad **P**edagógica **E**xperimental **L**ibertador para optar al Grado Académico de
"**D**octor en **E**ducación **M**atemática"

Autor: Franzyuri Hernández, M.Sc.
Tutor: Esteban Flores, Dr.
Fecha: Junio 17, 2024

RESUMEN

La Didáctica de la Matemática se ocupa de delimitar y estudiar problemas surgidos durante los procesos de organización, comunicación, transmisión, construcción y valoración del conocimiento matemático junto con su propia fundamentación teórica. Dentro de estos problemas de investigación se encuentran aquellos creados al desarrollar Técnicas Alternativas para la enseñanza de tópicos matemáticos. En ese sentido; el presente trabajo de investigación, tesis doctoral, busca generar un Modelo Axiomático para la Descomposición en Fracciones Simples, dicho modelo está basado en una Técnica Alternativa creada para evitar el uso de sistemas de ecuaciones durante el proceso de la descomposición. Esta investigación está fundada en un estudio de Causalidad y una vez obtenido los datos, después de aplicar el tratamiento didáctico y, luego, el instrumento de recolección, se realizó un estudio estadístico para confirmar que la Técnica Alternativa genera cambios significativos sobre el Rendimiento Académico Inmediato de los sujetos tratados. Como herramienta de apoyo en el proceso didáctico se usó la metodología de Modelación Matemática, ésta fue sustentada con la teoría de Educación Matemática Realista creada por Hans Freudenthal y la Técnica Alternativa de la investigación se respaldó con la teoría Acción, Proceso, Objeto y Esquema de Ed Dubinsky. Desde el punto de vista metodológico, la investigación se desarrolló bajo el paradigma Positivista, el enfoque Cuantitativo, haciendo uso del método Científico y se aplicó una investigación tipo Confirmatoria de Verificación Empírica con un diseño de Campo tipo Experimental de Grupo Control con Post-Test únicamente. En la recolección de datos se usó como técnica la Prueba de Evaluación y como instrumento una Prueba de Rendimiento Académico (prueba objetiva de opción múltiple). Para dar sustento a la presentación, procesamiento y tratamiento de los datos se utilizó la teoría de Estadística Descriptiva, junto con una técnica de remuestreo conocida como Bootstrap y, finalmente, para analizar las distintas Pruebas de Hipótesis que se realizaron en este estudio se utilizó la teoría de Estadística Inferencial.

Descriptores: bootstrap, descomposición en fracciones simples, modelo axiomático, rendimiento académico inmediato.

BOLIVARIAN REPUBLIC OF VENEZUELA
EXPERIMENTAL **P**EDAGOGICAL **U**NIVERSITY **L**IBERATOR
"RAFAEL ALBERTO ESCOBAR LARA" PEDAGOGICAL INSTITUTE
DOCTORATE IN **M**ATHEMATICS **E**DUCATION
Research Line: Didactics of Calculus

THEORETICAL APPROACH FOR THE DECOMPOSITION INTO SIMPLE FRACTIONS AND ITS EFFECT ON IMMEDIATE ACADEMIC PERFORMANCE.

An Alternative Didactic Strategy and Mathematical Modeling.

Doctoral Thesis presented as a partial requirement before the illustrious **E**xperimental **P**edagogical **U**niversity **L**iberator to obtain the Academic Degree of "**D**octor in **M**athematics **E**ducation"

Author: Franzyuri Hernández, M.Sc.
Advisor: Esteban Flores, Dr.
Date: June 17, 2024

ABSTRACT

The Didactics of Mathematics deals with delimiting and studying problems arising during the processes of organization, communication, transmission, construction, and assessment of mathematical knowledge along with its own theoretical foundation. Within these research problems are those created when developing Alternative Techniques for the teaching of mathematical topics. In that sense; the present research work, a doctoral thesis, seeks to generate an Axiomatic Model for Decomposition into Simple Fractions, said model is based on an Alternative Technique created to avoid the use of systems of equations during the decomposition process. This research is based on a Causality study and once the data was obtained, after applying the didactic treatment and, then, the collection instrument, a statistical study was carried out to confirm that the Alternative Technique generates significant changes in the Immediate Academic Performance of the treated subjects. As a support tool in the didactic process, the Mathematical Modeling methodology was used, this was supported by the Realistic Mathematics Education theory created by Hans Freudenthal and the Alternative Technique of the research was supported by the Action, Process, Object and Scheme theory of Ed Dubinsky. From a methodological point of view, the research was developed under the Positivist paradigm, the Quantitative approach, making use of the Scientific method and a Confirmatory Empirical Verification type research was applied with a Field design of the Experimental Control Group type with Post-Test only. In the data collection, the Evaluation Test technique was used and as an instrument an Academic Performance Test (multiple-choice objective test). To support the presentation, processing, and treatment of the data, the theory of Descriptive Statistics was used, along with a resampling technique known as Bootstrap and, finally, to analyze the different Hypothesis Tests that were carried out in this study, the theory of Inferential Statistics was used.

Keywords: bootstrap, decomposition into simple fractions, axiomatic model, immediate academic performance.

INTRODUCCIÓN

La matemática como área poderosa de la cultura, se origina con el fin de resolver problemas cotidianos del hombre, permitiendo a éste comprender, explicar y predecir situaciones y fenómenos de la vida real, razón por la cual se considera una de las ciencias que cobra mayor relevancia en cualquier ámbito de la sociedad.

Por la antes expuesto y por interacciones propias (durante más de 20 años) del autor de la presente investigación, dentro del aula de clase y discusiones con colegas; el mismo ha reflexionado acerca de las formas en que se enseña y se aprende la matemática.

En ese sentido; el autor ha observado un bajo rendimiento académico y la poca motivación que tienen algunos estudiantes hacia el aprendizaje de la matemática, incluyendo estudiantes que pertenecen al área de Ingeniería y Ciencias. Lo cual pudiera estar causado por la percepción de los discentes sobre el nivel de dificultad de esta ciencia, la poca pertinencia de esta asignatura con su entorno, la situación socioeconómica de las instituciones educativas o las estrategias de enseñanza aplicadas por los docentes en sus clases.

Es por esto que la labor del docente que imparte asignaturas del área de las matemáticas, es buscar formas de mostrarle al discente la importancia y lo fascinante que puede llegar a ser esta disciplina, utilizando estrategias metodológicas u orientaciones didácticas que lo mantengan motivado, interesado en la clase y, además, comprenda la profundidad de los conceptos matemáticos, sus conexiones y sus aplicaciones en la vida cotidiana. Es decir; se busca una forma de hacer matemática que permita ir más allá de su contenido, integrando en el proceso de aprendizaje las habilidades propias de la comprensión matemática aplicada a la realidad.

Siguiendo la misma idea, una de las metodologías que se ha desarrollado buscando dar respuesta a lo anterior es la metodología basada en la «*Modelación Matemática*». Dicho proceso permite a los estudiantes: observar, reflexionar, discutir, experimentar, evaluar, aplicar y de esta manera, construir los conocimientos matemáticos en forma significativa, consolidándose así a la modelación, como una estrategia de enseñanza de la matemática.

Adicional a la metodología de modelación matemática, el autor también propone una «*Estrategia Didáctica Alternativa*», en un tópico específico de la matemática, para sustituir métodos que utilizan *sistemas de ecuaciones* durante su desarrollo, los procesos de estos métodos tradicionales son: mecánicos, memorísticos, engorrosos, titánicos y hasta agotadores para el discente novel, ver (Huang, 1991) y (Chrystal, 1961).

Con esta investigación, se ha llegado a la conclusión de que, estas dos estrategias didácticas favorecen en los estudiantes el tratamiento y la resolución de problemas de un tópico particular de la matemática y, adicional, mejoran el aprendizaje de la misma teniendo un efecto positivo en el «*Rendimiento Académico Inmediato*» de los sujetos de estudio.

En otro orden de ideas; las memorias de este estudio se presentan en orden secuencial de los elementos de un trabajo de investigación parecido al descrito por Arias (2012) y, en ese sentido, a continuación, se muestra una breve descripción del contenido de cada capítulo.

En el *Capítulo I*, se plantea el *Problema a Investigar*, mostrando un panorama global sobre la problemática referente al uso de «*Sistemas de Ecuaciones*» durante el desarrollo del objeto matemático de estudio, a saber; la «*Descomposición en Fracciones Simples*», por parte del discente novel. Se presentan las interrogantes que surgen en la formulación del problema, los objetivos de investigación, la justificación y la delimitación de la misma.

En el *Capítulo II*, se muestran los *Antecedentes de la Investigación* organizados por grupos, a saber; relacionados con: el objeto matemático de estudio, el enfoque de investigación, el método, el diseño y las teorías de entrada en «*Educación Matemática*» que fueron usadas en esta investigación. Las bases legales, el *Marco Teórico* de las variables de estudio y las definiciones básicas requeridas para esta investigación.

En el *Capítulo III*, se muestra la *Metodología de Investigación* usada durante el desarrollo del presente trabajo, detallando y sustentando con autores de obras conocidas todos los elementos metodológicos que se requirieron para llevar a feliz término esta investigación.

En el *Capítulo IV*, se muestra el desarrollo de la *Técnica Alternativa* creada para esta investigación, a saber; los algoritmos de la misma implementados en cada caso de la *descomposición en fracciones simples* y una gama de ejemplos donde esta técnica es aplicada, entre ellos se puede mencionar; el cálculo de *Primitivas para Funciones Racionales*, el cálculo de *series Telescópicas* y el uso de las *Transformadas de Laplace* al momento de resolver circuitos eléctricos de corriente alterna.

En el *Capítulo V*, se muestra la asociación de la *Técnica Alternativa* y la teoría APOE.

En el *Capítulo VI*, se muestra la asociación de la *Técnica Alternativa* y la *Modelación Matemática* (fundamentada con la teoría EMR).

En el *Capítulo VII*, se muestra el *Análisis Estadístico* desarrollado en el presente trabajo, a saber; el *análisis estadístico descriptivo* después de la recogida de los datos y el *análisis estadístico inferencial* con las distintas pruebas de hipótesis que se realizaron.

En el *Capítulo VIII*, se desarrolla el *Corpus Teórico* de este trabajo, el mismo está basado en la construcción de un *modelo axiomático formal* para la *descomposición en fracciones simples* desarrollada con la *técnica alternativa* creada en esta investigación.

En el *Capítulo IX*, se muestran las *Conclusiones y Recomendaciones* generadas a partir del análisis estadístico de los datos recogidos y la construcción del modelo axiomático formal.

Hay un capítulo dedicado a los *Anexos*, en él se presenta el instrumento de recolección de datos (prueba de rendimiento académico) diseñado para esta investigación, se muestran y desarrollan los procesos de validación y confiabilidad del mismo. En esta sección se muestra una síntesis curricular de cada uno de los treinta (30) jueces expertos que ayudaron a validar el instrumento. Se muestra el modelo de la prueba diagnóstica aplicada para el estudio de homogeneidad de los grupos de investigación, se muestra la autorización emitida por la entidad competente para la toma de la muestra estudiantil utilizada en este estudio y, finalmente, se presentan los artículos de revistas científicas que se han generado a partir de este trabajo de investigación.

Después del apartado de los *Anexos* se muestran las *Referencias* utilizadas en la investigación y, para finalizar, se presenta el *Resumen Curricular* del autor y tutor de la presente Tesis Doctoral.

CAPÍTULO I

“*Un científico debe tomarse la libertad de plantear cualquier cuestión, de dudar de cualquier afirmación, de corregir errores*”.
Julius Robert Oppenheimer

EL PROBLEMA

Planteamiento del Problema

El *Álgebra* y el *Pensamiento Algebraico* como herramientas son áreas cuyos contenidos se encuentran entre las primeras asignaturas del ámbito matemático que tiene un estudiante de la carrera de ingeniería, ciencias o afines, éstas son consideradas fundamentales dentro de los estudios básicos, ya que, cumplen un rol esencial para el desarrollo de asignaturas avanzadas como, por ejemplo, *Cálculo Integral* y/o *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, entre otras, debido a su naturaleza tanto unificadora como generalizadora (Dorier, 2003), pero, además son herramientas poderosas para resolver problemas de distintas áreas (Carlson, Johnson, Lay y Porter, 1993). Sin embargo; a pesar de su relevancia, la enseñanza del *Álgebra* y la adquisición de un *Pensamiento Algebraico* por parte de los estudiantes a nivel universitario es casi universalmente considerada como una experiencia frustrante tanto para profesores como estudiantes (Hillel, 2000) e independientemente de cómo se enseñe, el *Álgebra* es una asignatura difícil para algunos discentes tanto cognitiva como conceptualmente (Dorier y Sierpinska, 2001).

Siguiendo la idea anterior; con la finalidad de buscar alternativas para mejorar los procesos didácticos destinados a tópicos del *Álgebra* o asignaturas donde ésta sea aplicada como, por ejemplo, *Cálculo Integral*, se han diseñado y realizado experiencias didácticas, entre ellas, la realización de variaciones a las clases magistrales, ya sea incorporando el uso de tecnología, utilizando *métodos alternativos* a los tradicionales, creando aplicaciones o *modelados matemáticos*, realizando trabajos en grupo o creando un ambiente colaborativo donde el profesor tras haber explicado un tema nuevo debate con los estudiantes (Day y Kalman, 1999).

Precisamente, en lo que se refiere a las aplicaciones y/o modelación Kaiser (2010) expone que; en las últimas décadas, tanto el aprendizaje como la enseñanza de éstas se han convertido en dos temas importantes, no solo en la escuela, sino también en la universidad, debido a la creciente demanda en el mundo por el uso de las Matemáticas en la ciencia, la tecnología y la vida diaria. Sin embargo; son diversas las dificultades que se presentan al introducir la aplicación de las Matemáticas en las clases, entre ellas fundamentalmente la complejidad que exige la producción de un modelo (Trigueros, 2009) y el tiempo de convivencia tanto de los docentes como de los estudiantes con la enseñanza tradicional (Biembengut y Hein, 2004), lo que conlleva a una fuerte resistencia en la implementación de una nueva metodología de trabajo basada en la modelación matemática.

Como se ha ido develando en párrafos anteriores; el autor de la presente investigación centró su estudio entorno al desarrollo de un «*objeto matemático*» como aplicación del *Álgebra* al *Cálculo Integral* y/o *Ecuaciones Diferenciales*, éste es conocido con el nombre de «*Descomposición en Fracciones Simples*» (en adelante, DFS). El mismo es utilizado, por ejemplo, en un primer curso de *Cálculo Integral* donde, además de estudiar varios métodos para el cálculo de primitivas, se estudia la técnica de integración por *Fracciones Simples* (o parciales) para *Funciones Racionales* (en adelante, FR). Ésta consiste en descomponer una FR en una suma de fracciones más simples, utilizar la propiedad de linealidad del operador integral y luego, calcular la primitiva en cada integral resultante.

A continuación; se muestra el siguiente ejemplo para ilustrar una aplicación del proceso de la DFS.

Ejemplo $\mathbf{1.1}$. Supongamos que; se tiene una FR $:= (7x+3)/(x^2+3x-4)$ y se quiere calcular su primitiva. Es decir, se desea resolver la siguiente integral indefinida:

$$\int \left(\frac{7x+3}{x^2+3x-4}\right) dx \, .$$

Para este tipo de problema, se necesita realizar la DFS de la FR con una técnica adecuada. En ese sentido:

$$\underbrace{\frac{7x+3}{x^2+3x-4}}_{\mathbf{FR}} = \frac{7x+3}{(x+4)(x-1)} = \underbrace{\frac{\boldsymbol{A}}{x+4} + \frac{\boldsymbol{B}}{x-1}}_{\mathbf{DFS}} \quad . \qquad (\mathbf{1.1})$$

La expresión que aparece en el miembro derecho de ($\mathbf{1.1}$) es la DFS de la FR a integrar, pero esta descomposición no está completada hasta tanto se logre determinar a los coeficientes: $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, que aparecen en el numerador de cada una de las fracciones más simples.

Agregando a lo anterior; el proceso de DFS es fundamental para la integración de FR, pero también se encuentra en el estudio de las *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* al momento de querer obtener la ***T****ransformada* ***I****nversa de* ***L****aplace*.

A continuación; se muestra un ejemplo para ilustrar el proceso de esta aplicación.

Ejemplo $\mathbf{1.2}$. Evaluar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\right\}$. Para resolver este tipo de problema es necesario obtener la DFS del argumento del operador inverso de Laplace. En ese sentido:

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}=\underbrace{\frac{\boldsymbol{A}}{s-1}+\frac{\boldsymbol{B}}{s+2}+\frac{\boldsymbol{C}}{s+4}}_{\text{DFS}} \quad . \qquad (\mathbf{1.2})$$

La expresión que está en el lado derecho de $(\mathbf{1.2})$ es la DFS requerida. Ésta no está completada hasta tanto se determinen los coeficientes: $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$, que aparecen en el numerador de cada una de las fracciones más simples.

Adicional a las áreas anteriores; también se aplica el proceso de DFS en *Matemáticas Discretas*, *Teoría de Control*, el estudio de las *Series Telescópicas* y otras ramas de la *Matemática*.

Siguiendo la misma idea; durante el desarrollo del proceso de descomposición, como se pudo observar en los Ejemplos $(\mathbf{1.1})$ y $(\mathbf{1.2})$, aparecen en los numeradores de las fracciones más sencillas unos coeficientes que deben ser determinados para completar con éxito la DFS. En ese sentido; existen técnicas tradicionales basadas en la aplicación de *sistemas de ecuaciones* como, por ejemplo, el método de «*Coeficientes Indeterminados*» (en adelante, CI) y el método de «*Hermite-Ostrogradsky*» (en adelante, HO) que funcionan como una vía para calcular dichos coeficientes. Estos métodos, según Huang (1991), son tediosos y una fuente de complicadas identidades algebraicas, así lo expresa Chrystal (1961); confunden a algunos estudiantes de un primer curso de Cálculo Integral, sobre todo a aquellos con debilidades en sus conocimientos algebraicos.

Cuando, por ejemplo, un estudiante novel utiliza el método de CI o el de HO para obtener una DFS éstos lo conducen, mediante procesos algebraicos que pueden llegar a ser engorrosos, a generar y resolver un «*sistema de ecuaciones lineales*» del tipo $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. En ese sentido; el tamaño del sistema está estrechamente ligado a la cantidad de coeficientes, a determinar, que aparecen en el numerador de cada una de las fracciones resultante durante el desarrollo de la DFS. Es decir; a mayor cantidad de coeficientes a determinar el sistema a resolver será más grande y eso, por supuesto, otorga mayor dificultad en el proceso de descomposición, ya que, se requieren técnicas específicas, rara vez vistas en bachillerato, para resolver sistemas de ecuaciones de orden $\boldsymbol{n} > 3$.

Para que el lector tenga una mejor visión de la explicación anterior; se muestra el siguiente sistema de $\boldsymbol{n}$ ecuaciones lineales con $\boldsymbol{n}$ incógnitas (o sistema cuadrado de orden $\boldsymbol{n}$).

$$\begin{cases} a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + \cdots + a_{1n}A_n = b_1, \\ a_{21}A_1 + a_{22}A_2 + \cdots + a_{2n}A_n = b_2, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}A_1 + a_{n2}A_2 + \cdots + a_{nn}A_n = b_n, \end{cases} \qquad (\mathbf{1.3})$$

donde los $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (con $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, n$) son los coeficientes de la matriz asociada al sistema. Los $b_i \in \mathbb{R}$ (con $i = 1, \dots, n$) son las componentes del vector de términos independientes y los $A_j \in \mathbb{R}$ (con $j = 1, \dots, n$) son las componentes del vector de incógnitas; para el caso del estudio del presente trabajo, los A_j serán los coeficientes a determinar durante el proceso de DFS.

En ese sentido; el sistema $(\mathbf{1.3})$ puede ser reescrito matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \qquad (\mathbf{1.4})$$

Se puede observar que, el sistema $(\mathbf{1.4})$ es de la forma $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ donde:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = (A_1, A_2, \dots, A_n)^T \text{ y } \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T .$$

Si el tamaño del sistema $(\mathbf{1.4})$ supera el orden 3, el estudiante para calcular su solución deberá recurrir a técnicas más avanzadas a las vistas en el bachillerato y dependiendo de qué tan grande sea ese sistema, el cálculo de esa solución puede ser un trabajo colosal y agotador desde el punto de vista mental; incluso para un estudiante experimentado.

A continuación; se mostrarán los procesos algebraicos y los sistemas de ecuaciones que se generan al aplicar el método de CI en los Ejemplos $(\mathbf{1.1})$ y $(\mathbf{1.2})$.

Para el caso del Ejemplo $(\mathbf{1.1})$:

$$\frac{7x+3}{x^2+3x-4} = \frac{\boldsymbol{A}}{x+4} + \frac{\boldsymbol{B}}{x-1} \quad . \qquad (\mathbf{1.5})$$

Se realiza la suma de fracciones y se aplica la transitividad de la igualdad:

$$\frac{7x+3}{x^2+3x-4} = \frac{\boldsymbol{A}(x-1) + \boldsymbol{B}(x+4)}{(x+4)(x-1)} .$$

Luego; simplificando denominadores, aplicando la propiedad distributiva del producto con respecto a la adición, agrupando términos semejantes y sacando factor común, se obtiene la siguiente igualdad:

$$7x + 3 = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})x + (-\boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{B}) \ .$$

Finalmente; por igualdad de polinomios se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, dado por:

$$\begin{cases} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = 7, \\ -\boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{B} = 3. \end{cases} \qquad (\mathbf{1.6})$$

Al resolver el sistema $(\mathbf{1.6})$, por cualquier método, se obtienen los coeficientes para completar la DFS mostrada en $(\mathbf{1.5})$. La solución del sistema es $\boldsymbol{A} = \mathbf{5}$ y $\boldsymbol{B} = \mathbf{2}$.

Es decir;

$$\frac{7x+3}{x^2+3x-4} = \frac{\mathbf{5}}{x+4} + \frac{\mathbf{2}}{x-1} \,. \quad \square$$

Para el caso del Ejemplo $(\mathbf{1.2})$:

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} = \frac{\boldsymbol{A}}{s-1} + \frac{\boldsymbol{B}}{s+2} + \frac{\boldsymbol{C}}{s+4} \,. \qquad (\mathbf{1.7})$$

Realizando la suma de fracciones, se obtiene:

$$\frac{\boldsymbol{A}}{s-1} + \frac{\boldsymbol{B}}{s+2} + \frac{\boldsymbol{C}}{s+4} =$$

$$\frac{\boldsymbol{A}(s+2)(s+4) + \boldsymbol{B}(s-1)(s+4) + \boldsymbol{C}(s-1)(s+2)}{(s-1)(s+2)(s+4)} =$$

$$\frac{\boldsymbol{A}(s^2+6s+8) + \boldsymbol{B}(s^2+3s-4) + \boldsymbol{C}(s^2+s-2)}{(s-1)(s+2)(s+4)} \,.$$

Por transitividad de la igualdad, se tiene:

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} =$$

$$\frac{\boldsymbol{A}(s^2+6s+8) + \boldsymbol{B}(s^2+3s-4) + \boldsymbol{C}(s^2+s-2)}{(s-1)(s+2)(s+4)} \,. \qquad (\mathbf{1.8})$$

Luego; simplificando denominadores, aplicando la propiedad distributiva del producto con respecto a la adición, agrupando términos semejantes y sacando factor común, se obtiene la siguiente igualdad:

$$1 = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})s^2 + (6\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})s + (8\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{C}) \,.$$

Aplicando igualdad de polinomios, se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C} = 0, \\ 6\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C} = 0, \\ 8\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{C} = 1. \end{cases} \qquad (\mathbf{1.9})$$

Resolviendo el sistema $(\mathbf{1.9})$ se obtienen los coeficientes para completar la DFS mostrada en $(\mathbf{1.7})$. La solución de dicho sistema viene dada por $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{15}} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}} \end{pmatrix}^{\boldsymbol{T}}$.

Es decir;

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} = \frac{\mathbf{1}}{15(s-1)} - \frac{\mathbf{1}}{6(s+2)} + \frac{\mathbf{1}}{10(s+4)} \,. \quad \square$$

Aunado a lo anterior; una revisión minuciosa del tema de integración por *Fracciones Simples* en algunos textos de cálculo, utilizados en ciertas universidades, como el libro *Cálculo* de Smith y Minton (2003), el libro *Calculus* de Steward (2012), el libro *Cálculo de una variable conceptos y contextos* de Steward (2010), el libro *Cálculo* de Leithold (1998), el libro *Cálculo de una variable* de Zill (2011) y el libro *Cálculo de una variable* de Thomas (2010), entre otros, muestra que todos ellos utilizan el método de CI para descomponer una FR en una suma de fracciones más simples.

Por otro lado; en la literatura matemática se encuentran numerosos artículos relacionados con *técnicas alternativas* para desarrollar la descomposición de una FR en una suma de fracciones simples, algunos de esos artículos son: Huang (1991), Martínez (2006), Rose (2007), Schultz (1983) y Wiener (1986). Lo que parece sorprendente es que en algunos libros actualizados de cálculo no han sustituido el método de CI por *técnicas alternativas*, una excepción a esta observación son los libros de Zill (2011) y Thomas (2010) que, si bien utilizan el método de CI, al final de la sección del método de integración por fracciones parciales (o simples), presentan brevemente una técnica distinta para el caso más sencillo de una descomposición, a saber, el de *factores lineales no repetidos*.

En ese orden de ideas; es bien sabido que las técnicas tradicionales para la descomposición de una FR en una suma de fracciones más simples encontradas en los libros de cálculo antes mencionados, requieren esencialmente buscar la solución de «*sistemas de ecuaciones*» lineales. Esta búsqueda, como tal, implica una gran cantidad de cálculos algebraicos y toma desde el punto de vista numérico aproximadamente $\boldsymbol{n^3}$ pasos para determinar las constantes que aparecen en la descomposición, donde $\boldsymbol{n}$ es el grado del denominador de la función racional, ver (Joseph y Straight, 1984) y (Tong, 1977).

En ese sentido; al usar *técnicas alternativas* se puede probar que el número de pasos para determinar los coeficientes se reduce significativamente, adicional a eso, también se podría evitar enfrentarse a un posible *sistema de ecuaciones* (o problema) «*mal condicionado*» visto desde el análisis numérico (Nakamura, 1992), es decir, problemas donde para pequeñas variaciones en la entrada de datos se obtienen grandes variaciones en la salida de los mismos. Este tipo de situación es problemática y forman parte del estudio de una rama de las Matemáticas conocida como «*análisis numérico*».

A manera de ejemplo; se muestra un sistema de ecuaciones que forma parte de los problemas mal condicionados.

Ejemplo $\mathbf{1.3}$. Sea el sistema dado por las ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x + 6y = 8 \\ 2x + 6{,}00001y = 8{,}00001 \end{cases} \qquad (\mathbf{1.10})$$

El mismo tiene como solución exacta $\boldsymbol{x = y = 1}$. Si se hace un pequeño cambio en algunas de las entradas del sistema ($\mathbf{1.10}$), digamos, del orden de $\mathbf{10^{-5}}$ se obtiene como resultado el nuevo sistema:

$$\begin{cases} 2x + 6y = 8 \\ 2x + 5{,}99999y = 8{,}00002 \end{cases} \qquad (\mathbf{1.11})$$

En ese sentido; una persona que desconozca la existencia de los problemas *mal condicionados* pudiese decir que; los sistemas ($\mathbf{1.10}$) y ($\mathbf{1.11}$) son equivalentes y, por lo tanto, sus soluciones han de ser iguales. Sin embargo; la realidad es otra.

Al calcular la solución exacta del sistema ($\mathbf{1.11}$) se obtiene: $\boldsymbol{x = 10}$, $\boldsymbol{y = -2}$, se puede observar que, esta nueva solución ha cambiado drásticamente en comparación con la solución del sistema ($\mathbf{1.10}$), en otras palabras, hay una diferencia abismal producida entre las soluciones de ambos sistemas a pesar de que solo se efectuaron cambios muy sutiles en la entrada de algunos coeficientes. Es decir; la diferencia (casi imperceptible) en la entrada de dos (2) coeficientes del sistema ($\mathbf{1.10}$) es del orden de $\mathbf{10^{-5}}$, pero ésta da lugar a una diferencia (fuerte) del orden de $\mathbf{10^{1}}$ en la salida del sistema ($\mathbf{1.11}$).

Con todo lo expuesto en párrafos anteriores; se puede observar algunas dificultades (vistas desde el álgebra o desde el análisis numérico) a las que pudiese enfrentarse un estudiante al construir y resolver *sistemas de ecuaciones* después de aplicar técnicas como el método de CI o HO durante el proceso de DFS.

En vista de eso, el autor de la presente investigación piensa que; una solución posiblemente muy ostentosa, a la problemática presentada, sería ubicar el uso de los *sistemas de ecuaciones* y, por ende, los métodos de CI y HO en semestres más avanzados, donde los estudiantes presenten una mayor madurez cognitiva, y así puedan aprovechar al máximo tales herramientas al momento de resolver problemas matemáticos donde se necesiten.

Por otra parte; una solución menos ostentosa, porque, no requiere de la modificación del programa de una carrera universitaria y, además, se podría obtener un mayor provecho académico, ya que con ésta se pueden generar más opciones de tipo investigativa en el campo de la Educación

Matemática, sería crear «*métodos alternativos*» de enseñanza para desarrollar la DFS. Asimismo; estos métodos alternativos, al ser creados, deben estar sustentados con teorías del campo de la Educación Matemática para facilitar el camino de los procesos didácticos garantizando un aprendizaje significativo en el desarrollo del objeto matemático de interés.

De la mano con lo anterior; en la investigación se buscó profundizar, en primer lugar; con la creación y aplicación de un «*Modelo Instruccional*», constituido por una estrategia didáctica alternativa y la modelación matemática, para desarrollar el objeto matemático «*Descomposición en Fracciones Simples*». Como ya se mostró; este proceso de descomposición surge en la resolución de algunos problemas de distintas áreas de la Matemática como, por ejemplo, el Cálculo Integral y/o las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Siguiendo la idea anterior; la «*Estrategia Didáctica Alternativa*» del modelo instruccional que fue concebida para esta investigación busca realizar la DFS sin necesidad de usar *sistemas de ecuaciones* durante el proceso, es una técnica algebraica que se desarrolla por simple inspección y para darle rigor en el campo de la *Educación Matemática* fue sustentada con la teoría cognitivista «*Acción-Proceso-Objeto-Esquema*» (APOE), la cual, fue creada por el matemático especialista en Análisis Funcional Ed Dubinsky y desarrollada por el grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community). Esta teoría; se apoya en las ideas Piagetianas del concepto de *abstracción reflexiva* sobre el *razonamiento lógico* del niño con el objetivo de aplicarlas a nivel universitario, en otras palabras, Dubinsky adaptó ideas de Piaget para utilizarlas en el estudio del *pensamiento matemático avanzado* creando así la teoría APOE.

Como se mencionó en el párrafo anterior; la teoría APOE se basa en el concepto de «*abstracción reflexiva*» como clave de la construcción de los conceptos lógico matemáticos (Asiala, Brown, Devries, Dubinsky, Mathews y Thomas, 1996).

En ese sentido, Dubinsky menciona que:

> El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizando en esquemas a fin de manejar las situaciones. (1996: p. 31)

En segundo lugar; la investigación buscó conocer cómo el estudiante puede mejorar su «*Rendimiento Académico Inmediato*» en lo referente a minimizar el tiempo de trabajo, minimizar el esfuerzo invertido y maximizar la creatividad matemática usando un «*modelo instruccional*» durante los procesos de enseñanza y aprendizaje del objeto matemático «*Descomposición en Fracciones Simples*».

En tal sentido; según Vargas (2019), se puede evidenciar que los estudiantes dominan habilidades memorísticas como el cálculo y la resolución de problemas rutinarios. Es decir, induce a pensar que; pocos saben emplear los conocimientos básicos que poseen para solucionar problemas más complejos, o no son capaces de aplicar naturalmente lo que saben para resolver situaciones problemáticas dentro del contexto de la vida real. Les cuesta ir más allá del nivel memorístico de pensar en forma crítica y reflexiva. Esto muestra las deficiencias didácticas para acceder a un dominio conveniente de la Matemática. Estas debilidades implican marcos obsoletos de enseñanza que desestiman el enfoque del problema. Por otra parte; los docentes se guían de textos, por imposición institucional, y muchas de las veces, tal material está plagado de errores o no se ajusta al perfil que se desea alcanzar en la formación del discente (Vargas, ob. cit.).

Desde la misma perspectiva, Ortega (2018) comenta en su disertación doctoral que; la importancia de las matemáticas en nuestro día a día constituye una herramienta imprescindible a la hora de resolver multitud de problemas cotidianos, las mismas permiten: entender fenómenos de la naturaleza, representar información de una forma organizada y visual, realizar predicciones o, incluso, garantizar la seguridad de nuestros datos en la red. A pesar de ello; no es habitual estudiar las matemáticas relacionándolas con la realidad más cercana en el aula, donde éstas suelen trabajarse de forma abstracta a partir de tareas desligadas de contextos, basadas en situaciones *poco reales* o a través de ejercicios en los que se pide realizar transformaciones de expresiones algebraicas que los propios estudiantes aprenden como reglas mecanizadas, las cuales, ejecutan y reproducen sin sentido alguno.

Aunado a lo anterior; la metodología de «*Modelación Matemática*» es una herramienta que colabora en gran medida durante los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ya que, con ella un estudiante puede pasearse en forma natural de lo concreto a lo abstracto y viceversa. Sin embargo, se debe tener en cuenta que; son diversas las dificultades que se presentan al introducir la Modelación en las clases de Matemática, entre ellas fundamentalmente: la complejidad que exige la producción de un modelo (Trigueros, 2009) y el tiempo de convivencia tanto de los docentes como de los estudiantes con la enseñanza tradicional (Biembengut y Hein, 2004), lo que conlleva a que exista una fuerte resistencia a la implementación de una nueva metodología de trabajo.

Cabe destacar que; el autor de esta investigación ha acordado llamar «*Modelación Matemática*» al método de enseñanza-aprendizaje que utiliza el proceso de «*Modelización*». En ese sentido; tal como lo plantean Bassanezi y Biembengut (1997) "la palabra Modelación es una «contracción» de los términos Modelización y Educación" (p. 14). Es decir:

$$\boxed{\text{Modelación} = \text{Modelización} + \text{Educación}}$$

En otras palabras; este trabajo no pretende crear modelos matemáticos, ya que, esa es un área de las Matemáticas que se escapa del alcance de esta investigación. Al respecto; el autor utilizó modelos ya creados, que requieren del proceso de DFS, como herramienta para mejorar los procesos didácticos durante el experimento.

Sobre la base de estas ideas; Vanegas y Henao (2013) señalan que, frente a estas dificultades emerge una respuesta plausible que se refiere a la consideración de los contextos tal como se utiliza dentro de la teoría de *Educación Matemática Realista*, es decir, que promuevan el proceso de modelación matemática en las clases a la vez que se desarrollan puentes para pasearse entre lo concreto y lo abstracto, facilitando de esta manera, diversas conexiones matemáticas y mejores perspectivas de aprendizaje de los contenidos matemáticos.

En ese sentido, para efectos de esta investigación; el proceso de «*Modelación Matemática*» usado en el tratamiento didáctico fue fundamentado con la teoría de «*Educación Matemática Realista*» (EMR) creada por el matemático especialista en Topología Algebraica Hans Freudenthal.

Formulación del Problema

De la mano con lo anterior; en la presente investigación se pretende confirmar, en estudiantes de la "Facultad de Ciencias y Tecnología" de la Universidad de Carabobo, la dificultad que presenta el uso de *sistemas de ecuaciones* durante los procesos didácticos del contenido *Descomposición en Fracciones Simples*.

Reflexionando sobre esta idea surgen algunas preguntas: ¿Cómo modificar la práctica educativa con el propósito de mejorar el rendimiento de los estudiantes en matemáticas?, específicamente en el tema de interés, como es, la Descomposición en Fracciones Simples y algunas de sus aplicaciones. Un supuesto implícito en la pregunta anterior es el nexo entre modificaciones de la práctica educativa y elevar el rendimiento estudiantil con las construcciones mentales que debe realizar un estudiante para comprender estos conceptos matemáticos.

Preguntas de Investigación Generales

1.- ¿Cómo se puede lograr una mejora significativa en el rendimiento académico inmediato al momento de utilizar la descomposición en fracciones simples?

2.- ¿De qué manera se puede enseñar la descomposición en fracciones simples, sin aplicar sistemas de ecuaciones y usando situaciones de la vida real, con el plan de lograr una mejora significativa en el rendimiento académico inmediato?

Preguntas de Investigación Específicas

1.- ¿De qué manera la descomposición en fracciones simples, desarrollada con una estrategia didáctica alternativa, influye sobre el rendimiento académico inmediato en estudiantes de cálculo II de la FaCyT-UC?

2.- ¿De qué manera la descomposición en fracciones simples, desarrollada con la modelación matemática, influye sobre el rendimiento académico inmediato en estudiantes de cálculo II de la FaCyT-UC?

De las interrogantes anteriores queda anclada la «*hipótesis de investigación*» del presente trabajo. En otro orden de ideas, el investigador tiene la expectativa de indagar a cerca de; sí el nivel de desempeño del tratamiento didáctico difiere entre los estudiantes provenientes de instituciones públicas o privadas, así, de manera natural surge una «*hipótesis alternativa*» en la investigación.

Ahora bien; la hipótesis alternativa mencionada en el párrafo anterior se diseñó a partir de variables extrañas (o emergentes) y, en ese sentido, no se puede crear un objetivo específico ante una variable que no tiene operatividad. Es decir; un objetivo específico que no se articule por impacto con el general, no tiene sentido. Un objetivo específico, argumentado en una variable extraña por su imprevisibilidad, no es conducente a la concretud del objetivo general.

Objetivos de la Investigación

Objetivo General

Generar una aproximación teórica para la descomposición en fracciones simples desarrollada con un modelo instruccional, para analizar su efecto sobre el rendimiento académico inmediato en estudiantes de cálculo II de la FaCyT-UC durante el lapso académico $1 - 2023$.

Objetivos Específicos

1.- Determinar la homogeneidad de los sujetos de estudio mediante procesos estadísticos.

2.- Desarrollar una estrategia didáctica alternativa fundamentada con la teoría APOE, que no emplea sistemas de ecuaciones, para la descomposición en fracciones simples.

3.- Emplear la metodología de modelación matemática en problemas que utilicen el proceso de descomposición en fracciones simples.

4.- Describir el efecto de la descomposición en fracciones simples, desarrollada con un modelo instruccional; constituido por la estrategia didáctica alternativa y la modelación matemática, sobre el rendimiento académico inmediato.

5.- Confirmar que la descomposición en fracciones simples, desarrollada con un modelo instruccional; constituido por la estrategia didáctica alternativa y la modelación matemática, genera cambios significativos sobre el rendimiento académico inmediato.

6.- Construir un modelo axiomático formal para la descomposición en fracciones simples, desarrollada con la técnica alternativa.

Justificación de la Investigación

A continuación; se muestra algunas de las justificaciones basadas en los siguientes ámbitos: Implicación Práctica, Utilidad Metodológica, Relevancia Social y Relevancia Teórica. Éstas motivaron al autor a desarrollar el presente trabajo de investigación.

Uno de los motivos que condujo a la selección del tema, fue que; al momento de abordar una descomposición en fracciones simples con métodos como, por ejemplo, Coeficientes Indeterminados o Hermite-Ostrogradsky aparecen unos coeficientes a determinar, éstos son calculados utilizando sistemas de ecuaciones y en algunos casos; la búsqueda de la solución de estos sistemas resulta en procedimientos matemáticos laboriosos, mecánicos y propensos a errores humanos producto del agotamiento mental. Además, en ocasiones; se pueden presentar casos de sistemas cuyo tamaño es muy grande y, en ese sentido, es necesario para hallar su solución el uso de computadores, pero éstos también pudiesen fallar por razones de tipo numérico, ya que, los sistemas de ecuaciones pudiesen pertenecer a la familia de problemas mal condicionados.

En tal sentido; por qué limitarse a trabajar con técnicas tradicionales sin explorar otras opciones que pudieran ser suficientemente válidas y faciliten el camino con respuestas y soluciones satisfactorias. En ese orden de ideas; el interés práctico de esta investigación fue dar a conocer una estrategia didáctica alternativa donde se evita el uso o construcción de sistemas de ecuaciones y, por ende, el cálculo agotador en la etapa de la búsqueda de sus soluciones. Esto puede contribuir a resolver la problemática referente al bajo nivel de logro en el área de Matemática para estudiantes de los primeros semestres de carreras como Ingeniería, Ciencias, Educación Matemática o afines. Aportando una experiencia didáctica como es la utilización de una técnica alternativa para el proceso de enseñanza del objeto matemático descomposición en fracciones simples, sustentada con la teoría APOE y, basada en procedimientos de cálculo por inspección, nuevas estrategias de resolución y modelos matemáticos que buscan dar respuestas a una necesidad educativa integral.

En ese sentido; la práctica constante de la estrategia didáctica alternativa, creada para la presente investigación, pondrá de manifiesto la creatividad matemática y el pensamiento algebraico numérico del estudiante aumentándolos gradualmente, ya que, su aplicación desde el punto de vista matemático se da en forma natural y el estudiante no requiere memorizar procesos extensos ni engorrosos. Además, el uso de la metodología de modelación matemática tiene como propósito que el estudiante entienda en los primeros semestres de su carrera para qué le pudiese servir las Matemáticas en su vida cotidiana. Al mismo tiempo; lo ayuda a comprender el tránsito natural de lo concreto a lo abstracto y viceversa, así como lo plantea la teoría de Educación Matemática Realista.

Así mismo; el objeto matemático descomposición en fracciones simples presenta múltiples aplicaciones dentro de las Matemáticas y en todas aquellas carreras universitarias que presenten en su pensum de estudio un curso de, por ejemplo, Cálculo Integral o Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. De igual manera; el aprendizaje o apropiamiento de este contenido, por parte del estudiante o persona interesada en el tema, debería darse en forma amena, como un juego, y no mecanizando los procesos como usualmente se da en el caso de las técnicas tradicionales; todo esto a fin de contribuir al entendimiento de la necesidad de usar la metodología de modelación matemática como herramienta fundamental en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Agregando a lo anterior; el presente trabajo de investigación aporta las bases teóricas de la modelación matemática vista desde la Educación Matemática Realista. También, muestra los fundamentos de la teoría Acción-Proceso-Objeto-Esquema con la cual fue sustentada la estrategia didáctica alternativa. Además; durante el procesamiento y tratamiento de los datos recolectados se utilizó la teoría de la Estadística Descriptiva, la teoría de Muestreo Repetitivo y la teoría de la Estadística Inferencial. Todas estas teorías, permiten ampliar una gama de conocimientos teóricos a los docentes e investigadores en Educación Matemática y las orientaciones metodológicas para el proceso de enseñanza en algunos tópicos de la Matemática.

Alcance y Delimitación de la Investigación

La presente investigación se circunscribe dentro del contexto universitario, la misma, fue desarrollada dentro de la Universidad de Carabobo (UC) en la Facultad de Ciencias y Tecnología (FaCyT) y aplicada a $\mathbf{120}$ estudiantes de «*Cálculo II*» pertenecientes a todas las carreras de dicha Facultad.

Con respecto a la ubicación temporal de la investigación, ésta se desarrolló en el periodo académico $1 - 2023$.

Para el desarrollo de este trabajo se contó con el tiempo necesario, los recursos económicos, la tecnología apropiada, el acceso a las fuentes de información y las facilidades de los docentes involucrados (tesista-tutor), así como las autoridades (decano de la Facultad y director del dpto. de Matemática) pertinentes de la institución.

En relación al corpus teórico, de esta investigación, se presentó un modelo axiomático del objeto matemático de estudio, desarrollado con una técnica alternativa.

En relación a la línea de investigación donde se enmarca el presente trabajo; la misma lleva por nombre «*Didáctica del Cálculo*» siendo su código D0086, ésta fue aprobada en el 2018, su coordinador es el Dr. Rolando García y está adscrita al Núcleo de Investigación en Educación Matemática "Dr. Emilio Medina" (NIEM) del Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara" de Maracay. Con respecto al asunto de interés indagatorio, perteneciente a la línea, donde encaja la investigación; éste es la «*realización de estudios cuantitativos sobre la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo*» (Martínez, Iglesias y Rodríguez, 2022).

CAPÍTULO II

"*No hay que empezar siempre por la noción primera de las cosas que se estudian, sino por aquello que puede facilitar el aprendizaje*".

Aristóteles

EL MARCO REFERENCIAL

Antecedentes de la Investigación

En este apartado, se describe brevemente un conjunto de investigaciones que de alguna manera están vinculadas con el presente estudio. Para la selección de las mismas, se consideró aquellos autores que trabajaron, de manera similar a lo que se ha querido desarrollar en esta investigación, tomando en consideración algunos aspectos relacionados con las teorías utilizadas, metodología de investigación o el objeto matemático de estudio en cuestión. Se iniciará mostrando algunos trabajos relacionados con el objeto matemático de esta investigación, a saber, la *Descomposición en Fracciones Simples*. En primer lugar; se describirán algunas investigaciones donde se utilizó la metodología de *Modelación Matemática*, siendo ésta punto de interés dentro del objeto matemático de estudio.

Para comenzar, Gallart (2016) en su tesis doctoral desarrollada en España y titulada «*La modelización como herramienta de evaluación competencial*»; diseña nuevos instrumentos que permiten desarrollar la competencia matemática, entendida como la capacidad de los alumnos de matematizar situaciones de la vida real. En la citada tesis, el autor, propone estudiar el papel que la modelación puede desempeñar en el perfeccionamiento de la competencia matemática, en general, y en la resolución de problemas reales.

Siguiendo la misma idea, Infante (2016) expone en su disertación doctoral, desarrollada en España y titulada «*La enseñanza y aprendizaje de la modelización y las familias de funciones con el uso de Geogebra en un primer curso de ciencias administrativas y económicas en Colombia*»; que en la investigación sobre la enseñanza del Álgebra se han desarrollado varios enfoques en las últimas décadas, entre ellos se pueden destacar: el Álgebra como generalización de la Aritmética, el Álgebra como solución de problemas y ecuaciones, y, por último, el Álgebra a través del estudio y la Modelación.

De igual forma, Cárcamo (2017) obtuvo resultados en su tesis doctoral, desarrollada en España y titulada «*Una innovación docente basada en los modelos emergentes y la modelización matemática para conjunto generador y espacio generado*»; que dieron evidencia de que una innovación docente basada en los modelos emergentes y la metodología de modelación matemática favorece a los estudiantes en la construcción de Conjunto Generador y Espacio Generado, contenidos pertenecientes al Álgebra Lineal. En concreto, según la autora, la modelación matemática usada como herramienta contribuyó a activar los conocimientos previos de los estudiantes con la finalidad de aplicarlos hacia la construcción de los mencionados conjuntos en la asignatura de Álgebra Lineal.

En consecuencia; la relación existente entre la presente investigación y las tres (3) tesis doctorales citadas anteriormente, se centra alrededor del uso de la metodología de modelación matemática como herramienta fundamental para el buen desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, dentro y fuera del aula escolar. Con esta herramienta se busca que el estudiante viva la experiencia del uso de las Matemáticas en la vida cotidiana. Además, se observa en las dos (2) últimas tesis, que la modelación se adapta perfectamente a la enseñanza del Álgebra, siendo ésta el área que contiene al objeto matemático de estudio de esta investigación.

De modo similar, la investigación de Huincahue, Borromeo y Mena (2018) titulada «*El conocimiento de la modelación matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemática*»; muestra que la metodología de modelación matemática, así como su aprendizaje y su enseñanza en todos los niveles escolares, ha ido adquiriendo cada vez mayor relevancia en los sistemas educativos a nivel internacional. En el aula, la modelación matemática ha sido considerada de diversas maneras, desde una herramienta didáctica centrada en un objeto matemático, hasta el motor de una construcción social de conocimiento matemático, pero sin duda, es utilizada para que el aprendizaje se realice a partir de la realidad del estudiante y sea dirigido hacia el conocimiento matemático.

De ahí que, según Olarte (2020), en su investigación titulada «*Homogeneizar la práctica de la modelación: Un reto del sistema educativo colombiano*»; una de las mayores preocupaciones de la Educación Matemática es lograr que el alumnado encuentre sentido a los contenidos y lograr articular los conocimientos matemáticos con los contextos cotidianos que emanan de otras ciencias y con la misma aplicación de las Matemáticas. Es muy común que el estudiantado se pregunte constantemente ¿para qué sirven las Matemáticas?, en ese sentido; los contenidos de la enseñanza a través de fórmulas, algoritmos y definiciones no bastan para que entiendan el papel que desempeñan las Matemáticas en su sociedad, y la situación preocupa cuando no saben para qué se utilizan ni para qué la están aprendiendo. Si bien, existen metodologías que orientan la práctica docente, no todas permiten el desarrollo de las competencias matemáticas que requiere el alumnado para enfrentar los retos que la sociedad actual demanda.

Así pues, según Gallart, García-Raffi y Ferrando (2019), en su investigación titulada «*Modelización Matemática en la educación secundaria: Manual de uso*»; la demanda de actividades que fomenten el desarrollo de competencias es cada vez mayor en las aulas. Se trata de buscar tareas que potencien el papel del estudiante en la construcción del conocimiento, el aprendizaje significativo conectado a la realidad, al tiempo que muestren la aplicabilidad y funcionabilidad de las Matemáticas. Es, en este sentido, donde la metodología de modelación matemática puede jugar un papel importante.

Continuando con la tesis doctoral de Ortega (2018) desarrollada en España y titulada «*Un modelo de enseñanza de la Modelización para trabajar las funciones elementales con el uso de datos reales y tabletas*»; ésta muestra que el estudio de las funciones es un tema que ha causado muchas dificultades a los estudiantes, especialmente porque las funciones generalmente se enseñan de manera formal y abstracta en la mayoría de las clases de Matemáticas de educación superior. En este sentido, las tareas de modelado son un recurso útil para mostrar a los estudiantes la conexión entre los conceptos matemáticos y los contextos de la vida real, que pueden ser aún más explícitos cuando se tiene en cuenta las herramientas tecnológicas en diferentes momentos del proceso de modelado.

En esa investigación, Ortega, analiza el desempeño de los estudiantes mientras trabaja en un material de enseñanza diseñado para estudiar algunas familias de funciones a través de la metodología de modelación matemática de fenómenos físicos y el uso del iPads.

Por consiguiente; la relación existente entre las cuatro (4) investigaciones citadas anteriormente y el presente trabajo es, la importancia que tiene la metodología de modelación matemática como herramienta didáctica para que el estudiante conecte de forma natural lo abstracto de las Matemáticas con lo concreto de la vida real.

Manteniendo cierto orden jerárquico, ahora, se mostrarán algunas investigaciones relacionadas con el *Objeto Matemático de Estudio* del presente trabajo, a saber, el proceso de *Descomposición en Fracciones Simples*.

Así pues, muchos especialistas en el área saben, gracias a la literatura clásica matemática, que la descomposición de una fracción propia en una suma de fracciones parciales más simples, es una técnica utilizada en diversos temas de las Matemáticas y que, para determinar las constantes desconocidas que aparecen en los numeradores de las fracciones parciales, generalmente, se utilizan unos métodos bastante laboriosos como, por ejemplo, el método de *Coeficientes Indeterminados* o el método de *Hermite-Ostrogradsky*. En ellos se necesita construir y resolver sistemas de ecuaciones lineales, situación ésta que se busca evitar en el presente trabajo de investigación.

También se sabe, sin importar el nivel académico, que las fracciones utilizadas en cualquier contexto son conocidas por ser difíciles de aprender. Estudiantes de todo el mundo tienen dificultades para aprender las fracciones, aún en países donde la mayoría de los estudiantes obtienen una comprensión razonablemente buena de éstas, como Japón o China, ver (Lortie-Forgues, Tian y Siegler, 2015; Tian y Siegler, 2017). De la mano con esto, se han propuesto varias hipótesis para explicar por qué las fracciones son difíciles de aprender, por ejemplo, para comprender las fracciones el sujeto requiere de una reorganización conceptual respecto a los números naturales; además, las fracciones pueden denotar conceptos diferentes; y usar fracciones implica la articulación del conocimiento conceptual con la manipulación de procedimientos (Gabriel, Coché, Szucs, Carette, Rey y Content, 2013).

Por ende; el autor del presente trabajo citó las tres (3) investigaciones anteriores con el objeto de hacer notar al lector la dificultad que presentan algunos estudiantes al momento de trabajar con cualquier tipo de fracciones (a saber, en esta investigación se trabajó con las fracciones propias). Aunado a esa dificultad se encuentra la titánica labor de obtener los coeficientes a determinar que aparecen en los numeradores de las fracciones parciales más simples, ésto cuando se trabaja con métodos tradicionales como, por ejemplo, Coeficientes Indeterminados o Hermite-Ostrogradsky.

De la mano con lo anterior, la disertación doctoral de Rodríguez (2019), desarrollada en Chile y titulada «*El conocimiento del profesor como variable explicativa del aprendizaje del alumno en la conceptualización de las fracciones*»; consistió en explorar el conocimiento del docente como variable explicativa del aprendizaje del alumno, centrándose en el tema de las fracciones. Este estudio se enfocó en dos tipos de conocimientos de dicho docente: «conocimiento profundo» y «conocimiento sobre la enseñanza», visualizando así, la necesidad que tiene el profesor de aflorar sus conocimientos adquiridos tanto en el área específica de las Matemáticas como en el área de la Educación Matemática, con el objeto de generar nuevas técnicas de enseñanza para mejorar el proceso de aprendizaje del estudiante.

De acuerdo a lo anterior; la relación existente entre la tesis de Rodríguez y el presente trabajo de investigación consiste en mostrar la importancia para la Educación Matemática de combinar por parte del docente el conocimiento en Matemática con el conocimiento en Educación Matemática, para crear métodos alternativos donde los procesos matemáticos relacionados con las fracciones se den de forma más natural, con el único objeto de mejorar las técnicas de enseñanza y aprendizaje en ciertos tópicos de las Matemáticas.

Siguiendo la misma idea del objeto matemático de estudio del presente trabajo, se puede decir, por la experiencia del autor, que métodos como el de Coeficientes Indeterminados o Hermite-Ostrogradsky requieren de cierta destreza y madurez en el *Pensamiento Algebraico* por parte de los estudiantes que necesiten utilizarlos. Este tipo de requerimientos en la mayoría de los casos está ausente en los estudiantes de los primeros cursos (estudiantes noveles) de las asignaturas afines a la Matemática en sus respectivas carreras, generando en algunas ocasiones errores procedimentales y obstáculos cognitivos como lo muestra el trabajo de investigación realizado por Flores y Auzmendi (2016).

Como consecuencia de los errores presentados por los estudiantes en la Educación Matemática, Carrillo (2017) en su tesis doctoral desarrollada en España y titulada «*Enseñanza de los sistemas lineales en Secundaria: Una propuesta de mejora a través de la integración de tecnologías*»; indica que los mismos dan la oportunidad de explorar el razonamiento matemático. Esta autora, señala que es importante partir de los errores del alumno para planificar la enseñanza de las Matemáticas. Además, comenta que, la enseñanza no solo debe tratar cómo corregir los errores, también, ha de considerarlos como motor de debate y avance para todos; y aprender de los mismos para poder diseñar nuevas metodologías y escenarios de aprendizaje donde se realice la integración de tecnologías.

Para cerrar este apartado; se muestra la investigación titulada *Técnicas alternativas para el cálculo de fracciones parciales*; realizada por Díaz (2017), en ella se diseñaron nuevas metodologías relacionadas con el objeto matemático de estudio de esta investigación. Díaz, presenta técnicas alternativas al método de Coeficientes Indeterminados que son útiles en una variedad de casos para la determinación de las constantes que aparecen en los numeradores de las fracciones parciales.

En ese mismo sentido; el autor del presente trabajo busca relacionar las investigaciones de los párrafos anteriores con la propuesta de una *Técnica Alternativa* para trabajar el proceso de

Descomposición en Fracciones Simples donde no sea necesario el uso de *sistemas de ecuaciones* para obtener las constantes que aparecen en los numeradores de las fracciones parciales, evitando así, muchas veces, los errores cometidos por los estudiantes casi siempre producto del agotamiento mental cuando están en la etapa de buscar la solución de dichos sistemas de ecuaciones.

En otro orden de ideas; se expondrán algunos trabajos relacionados con las teorías de entrada de la *Educación Matemática* que fueron usadas para esta investigación, a saber, la teoría de «*Educación Matemática Realista*» y la teoría «*Acción-Proceso-Objeto-Esquema*».

Se iniciará con la teoría de «*Educación Matemática Realista*» (EMR), creada por el matemático Hans Freudenthal, en ese sentido, se tiene la investigación doctoral de Vargas (2019) desarrollada en Perú y titulada «*Educación Matemática Realista en el desarrollo de las competencias matemáticas en estudiantes de I ciclo de la carrera profesional de Educación Inicial, Trujillo* 2017»; ésta se realizó con el objetivo de determinar que la aplicación del programa de Educación Matemática Realista desarrolla las competencias matemáticas en los estudiantes del I ciclo de educación inicial del Instituto Superior Pedagógico "Indoamerica" de la ciudad de Trujillo 2017. La población de esta investigación estuvo conformada por 260 estudiantes, siendo la muestra 60 de ellos, seleccionados mediante un método no probabilístico e intencional. El estudio fue de tipo cuasi experimental y la investigación que se aplicó tuvo un enfoque Cuantitativo.

Los resultados arrojaron que el programa de *Educación Matemática Realista* desarrolla las competencias matemáticas en los estudiantes del I ciclo de educación inicial, encontrándose que al final de la propuesta el 60 % (21) de los estudiantes se encuentran en el nivel de logro alto, el 23 % (5) se ubican en el nivel de logro medio, mientras el 17 % (4) se ubican en el nivel bajo. De acuerdo a la prueba de hipótesis se concluye que existe una influencia altamente significativa del programa *Educación Matemática Realista* y éste desarrolla las competencias matemáticas. Así lo demuestra la prueba t de Student donde se obtiene que el valor tabulado (1,6772) es menor que el valor calculado (22,618). Se rechaza la hipótesis nula con un nivel de significancia al 0,5 %. Por lo tanto, se puede concluir que se determinó que el programa *Educación Matemática Realista* desarrolla las competencias matemáticas en los estudiantes del I ciclo de educación inicial del Instituto Superior Pedagógico "Indoamerica" de la ciudad de Trujillo 2017.

De acuerdo a lo anterior; la relación existente entre el presente trabajo de investigación y la tesis doctoral de Vargas es realmente muy estrecha, ya que, la autora, además de basar su investigación en los pilares de la teoría de *Educación Matemática Realista* con el objetivo de buscar que los estudiantes transiten de forma natural el puente de lo abstracto de las Matemáticas hacia lo concreto de la vida cotidiana, también, utilizó una metodología y un diseño de investigación similar con la metodología y el diseño que se utilizó en esta investigación.

Otra teoría de entrada en Educación Matemática que sirvió de base para esta investigación es la teoría «*Acción-Proceso-Objeto-Esquema*» (APOE) creada por el matemático Ed Dubinsky. Esta teoría actuó como sustento en el desarrollo de la estrategia didáctica alternativa, creada en la presente investigación, para trabajar el proceso de Descomposición en Fracciones Simples.

Al respecto, Maúrtua (2019) en su tesis doctoral desarrollada en Perú y titulada «*Estrategias metodológicas basadas en acción proceso objeto esquema y comprensión de la integral definida en estudiantes de los colegios de alto rendimiento*»; realizó un estudio científico que permitió alcanzar el objetivo general de la investigación, éste consistió en demostrar la influencia de la aplicación de las estrategias metodológicas basada en «*Acción-Proceso-Objeto-Esquema*» en la comprensión de la integral definida en los estudiantes del 5to grado de secundaria de los Colegios de Alto Rendimiento Perú, 2018. La investigación fue de tipo Cuantitativa con diseño Cuasiexperimental, el mismo fue aplicado a dos grupos de estudio conformado por 197 estudiantes. Para la prueba de hipótesis se utilizó el estadístico t *de Student*, con el propósito de comparar la diferencia de medias a partir del pre y pos test aplicados al grupo control y experimental.

Continuando con, Fuentealba (2017) en su disertación doctoral desarrollada en España y titulada «*Análisis del esquema de la derivada en estudiantes universitarios*»; se analizó el esquema de la derivada en estudiantes universitarios, por medio de la identificación y caracterización de los subniveles de desarrollo del esquema, y la posible tematización del mismo. Este estudio se hizo mediante un análisis Estadístico Descriptivo e Implicativo interpretando los resultados de estos análisis con el marco de la teoría APOE.

Cabe considerar, por otra parte, la metodología empleada en cualquier investigación, depende de los objetivos que se fijan y del tipo de experimentación que se pueda realizar. Pero, dada la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje, no existe una sola metodología ni una manera única de elaborar el diseño de investigación en el área educativa. En este apartado se mencionarán algunos trabajos donde se pone de manifiesto el uso de la metodología con enfoque Cuantitativo que es de interés para la presente investigación.

El primero a mencionar es la tesis doctoral de Vargas (ob. cit.), la cual fue citada anteriormente, y los resultados del análisis estadístico de su metodología fueron brevemente explicados, dentro de los antecedentes de la teoría de la EMR. El diseño de investigación, de dicha tesis, fue de tipo Cuasiexperimental y su metodología tuvo un enfoque único de tipo Cuantitativo.

Continuando con, Ferreira (2018) su disertación doctoral desarrollada en España y titulada «*Diseño, implementación y evaluación de un Modelo Pedagógico de Indagación Colaborativa de la Física*»; se realizó bajo un diseño cuasiexperimental, el investigador manipuló deliberadamente los valores de la variable independiente para evaluar los efectos que produce la manipulación en la variable dependiente, pero sin el control propio del método experimental. Otro aspecto que se tomó en cuenta para la selección del diseño, es que se buscaba una comparación entre sujetos (dos grupos), y adicional, debido a que los grupos de estudio ya se encontraban conformados, no fue posible garantizar una equivalencia de condiciones. De ese modo, el nivel de manipulación de la variable independiente fue de dos grados, ya que, se contó con un grupo experimental y un grupo control convirtiéndolo así en un diseño cuasiexperimental con una estrategia de recogida de datos de tipo transversal, según Judd y Kenny (1981). La modalidad de ese diseño fue Pretest-Tratamiento-Posttest.

Por otra parte, la investigación de Ferreira se llevó a cabo siguiendo un enfoque Cuantitativo ya que: los datos fueron producto de mediciones, se representaron mediante números y se analizaron por medio de técnicas estadísticas, los procedimientos utilizados se realizaron con el mayor grado de objetividad posible, se buscó generalizar los resultados encontrados en el grupo experimental a una colectividad mayor y en la interpretación de los datos se empleó un razonamiento deductivo para luego, tomar los resultados obtenidos y explicarlos a partir de los referentes teóricos.

Seguidamente con Llabata (2016), su tesis doctoral desarrollada en España y titulada «*Un enfoque de complejidad del aprendizaje. La metodología cooperativa en el ámbito universitario*»; presenta un estudio con metodología mixta dado que se trabajó tanto el enfoque Cualitativo como el enfoque Cuantitativo para la recogida y análisis de datos. El diseño es cuasiexperimental con una estrategia de recogida de datos de tipo transversal con grupos no equivalentes, puesto que los sujetos forman parte de grupos constituidos naturalmente y por tanto no han sido asignados al azar a los grupos experimental y control, algo que no asegura su equivalencia inicial. En concreto, se trata de un diseño de dos grupos con pretest y posttest, un diseño que permite realizar una comparación, entre sujetos (Judd y Kenny, ob. cit.), de la medida de la variable dependiente del grupo sometido a un nivel de la variable independiente con la medida obtenida por otro grupo que no ha recibido dicho nivel de la variable independiente.

Para Ayala (2017), su disertación doctoral desarrollada en Perú y titulada «*Habilidades directivas y gestión del conocimiento en el nivel de comunicación interna desde la percepción docente, Los Olivos,* 2016»; tuvo como finalidad determinar la influencia de las habilidades directivas y gestión del conocimiento en el nivel de comunicación interna desde la percepción docente en las instituciones educativas de la RED No. 17 de la UGEL 02 del distrito de Los Olivos, 2016.

Metodológicamente ese trabajo fue desarrollado bajo el diseño no experimental, siguiendo un enfoque Cuantitativo y el método Hipotético-Deductivo, siendo una investigación de tipo básica de nivel descriptivo y correlacional causal. La población estuvo compuesta por 333 docentes RED No. 17 de la UGEL 02 del distrito de Los Olivos, del cual se obtuvo una muestra probabilística de 178 docentes con un muestreo aleatorio simple y estratificado. Los instrumentos de recolección de datos que se utilizaron fueron tres; el primero, un cuestionario de 44 preguntas con escalas tipo Likert que permitió recolectar la información de las habilidades directivas, el segundo fue un instrumento de gestión del conocimiento conformado por 24 ítems y el tercero un cuestionario de comunicación interna que consta de 21 preguntas; cada uno de los instrumentos fue validado por jueces expertos y procesada la confiabilidad con el estadístico Alfa de Cronbach dando niveles de confiabilidad alta. Para la contrastación de hipótesis se utilizó estadística multivariada de regresión logística multinomial.

Siguiendo con la tesis doctoral de Chung (2017), desarrollada en Perú y titulada «*Impacto de la cultura organizacional en la relación entre el liderazgo y la gestión del conocimiento en las escuelas profesionales de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo*»; el trabajo tuvo como objetivo determinar si la cultura organizacional tiene relación entre el liderazgo y las prácticas de gestión del conocimiento en las escuelas profesionales de la UNPRG. Con el propósito de fundamentar el estudio, se trabajaron teorías, modelos y enfoques relacionados con la cultura organizacional, el liderazgo y la gestión del conocimiento. La investigación se desarrolló bajo un enfoque Cuantitativo, no experimental, de tipo correlacional, deductivo y analítico, con una muestra de 50 docentes y 100 trabajadores administrativos. Según los resultados obtenidos, los comportamientos de liderazgo transformacional y transaccional generan impactos significativos sobre las prácticas de gestión del conocimiento. Con lo cual, se ha demostrado que la influencia de los comportamientos de liderazgo transaccional sobre la gestión del conocimiento depende de los tipos de cultura organizacional.

Continuando a nivel nacional, se tiene que, Utrera (2017) en su disertación doctoral desarrollada en Venezuela y titulada «*Influencia de los Patrones de Aprendizaje en el Rendimiento Académico y en la Deserción Escolar de Estudiantes Universitarios de Nuevo Ingreso*»; efectuó un estudio con enfoque Cuantitativo no experimental de tipo transversal y con un alcance explicativo. Esta autora realizó un análisis a través de métodos estadísticos para determinar la relación causa-efecto de las variables de su investigación, siendo una de sus variables de estudio el rendimiento académico en estudiantes universitarios.

Otra investigación a nivel nacional es la realizada por Hernández (2017), su tesis doctoral desarrollada en Venezuela y titulada «*Fundamentos Teórico Metodológicos en Blended Learning para los Programas de la Dirección de Postgrado de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica Andrés Bello*»; se hizo bajo el enfoque Cuantitativo y una investigación de tipo descriptiva. La metodología que se desarrolló en la investigación se basó en un estudio proyectivo enmarcado dentro de la modalidad de proyecto factible sustentado en un proceso investigativo documental y de campo.

Siguiendo con otra tesis doctoral a nivel nacional, Rodríguez (2020) desarrolla su investigación en Venezuela y la titula «*Fundamentos Pedagógicos en la Formación Docente: Perspectivas y Retos de los Egresados de un Instituto Superior Pedagógico de Ecuador*»; la misma estuvo bajo el paradigma Positivista, con un enfoque Cuantitativo, estudio tipo campo, con nivel descriptivo crítico-analítico. El instrumento utilizado en la investigación fue validado por Juicios de Expertos y se calculó la confiabilidad del mismo mediante el estadístico Alfa de Cronbach.

Para finalizar se presenta el trabajo de Juárez y Aguilar (2018), el mismo, es el resultado de una investigación que se efectuó con la finalidad de contribuir a la mejora de los aprendizajes de las Matemáticas en educación primaria; a partir de la aplicación del método Singapur para la solución de problemas. La metodología de investigación utilizada estuvo desarrollada bajo el enfoque Cuantitativo y Cualitativo pues se emplearon métodos de recolección cuantitativos (Pretest y Posttest) y cualitativos (observación participante), el diseño fue cuasiexperimental y la muestra de trabajo fue de 31 niños de segundo año de una escuela primaria pública del estado de Puebla en México.

Los resultados de la investigación mostraron que a partir de la aplicación del método Singapur los niños mejoraron los aprendizajes en Matemáticas, pues siete (7) de cada diez (10) lograron resolver problemas de Matemáticas que implicaban realizar una suma o una resta.

La relación existente entre las investigaciones anteriores y el presente trabajo es el uso de una metodología de investigación con enfoque Cuantitativo, uso de grupos de comparación y la aplicación de un tratamiento al grupo experimental antes de aplicar un posttest.

Para terminar con las teorías pilares de esta investigación, se presenta una del área de Estadística que fue fundamental para darle rigor al análisis estadístico desde el punto de vista de las probabilidades. La misma lleva por nombre muestreo repetitivo o «*Remuestreo*». Es conveniente mencionar la existencia de distintas técnicas de remuestreo como, por ejemplo: Validación cruzada, Jackknife, Test de permutaciones, Bootstrap, entre otras ver (Rodríguez y Agnelli, 2014), siendo la de interés en esta investigación la metodología «*Bootstrap*».

Al respecto, Gil (2005) presentó en su investigación titulada «*Aplicación del método Bootstrap al contraste de hipótesis en la Investigación Educativa*»; que este método de remuestreo desde su formalización en 1979 ha llegado a constituirse en el más popular de los procedimientos de muestreo repetitivo. Este investigador presenta en su trabajo dos ejemplos de utilización en la Investigación Educativa que sirven al propósito de ilustrar el procedimiento y valorar este enfoque frente a los métodos clásicos de la estadística inferencial.

Continuando con Paolini (1999), en su trabajo se muestra el método Bootstrap como un paradigma en la enseñanza de la solución de los problemas de estimación y distribución en la clasificación de Fisher. También, se muestra que el método Bootstrap prescinde de la suposición de normalidad para determinar las distribuciones de los estadísticos y no requiere que se especifique un modelo paramétrico para las variables consideradas. Además, puede observarse como el supuesto de normalidad puede conducir a equívocos en el análisis de los datos.

Siguiendo con la investigación de Fernández y Martínez (2015), su estudio pretende medir la variación de la productividad en las universidades públicas españolas, tanto a nivel global como en las actividades docentes e investigadoras, así como conocer las causas de los cambios productivos observados. Para ello se parte de información relativa a una muestra de 39 universidades presenciales entre los cursos académicos $2002-03$ y $2008-09$ a fin de aplicar tanto el índice de productividad de Malmquist, que permite medir el cambio de productividad entre dos períodos de tiempo y determinar sus causas, como la técnica de remuestreo Bootstrap, que confirma si los cambios productivos encontrados son estadísticamente significativos.

Para finalizar, se presenta el trabajo de Calandra y Argeri (2009) en el mismo se enfocan en el problema del punto de cambio aplicado al control de calidad del proceso enseñanza-aprendizaje. Para su análisis se emplea un test de hipótesis y la metodología de remuestreo Bootstrap.

Bases Teóricas

En la edificación del conocimiento es necesario construir cimientos sólidos basados en teorías ya consolidadas y apartados que permitan dar sustento teórico a lo que se pretenda realizar, esto da a las investigaciones; solidez y robustez puesto que colabora a generar nuevos aportes desde el punto de vista científico. En ese sentido, se iniciará con las estrategias metodológicas ya que el núcleo de esta investigación se basa en la creación de un modelo instruccional para desarrollar el objeto matemático de estudio.

Estrategias Metodológicas

Según Sardón, (2014), las estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje;

> son secuencias integradas de procedimientos y recursos utilizados por el docente con el propósito de desarrollar en los estudiantes capacidades para la adquisición, interpretación y procesamiento de la información, y la utilización de estas, para la generación de nuevos conocimientos y su aplicación en las diversas áreas en las que se desempeña, promoviéndose los aprendizajes significativos. (p. 17)

Las estrategias metodológicas en su diseño deben estimular a los estudiantes a: observar, indagar, analizar, argumentar, plantear hipótesis, modelar, representar y descubrir conocimientos de manera autónoma. Además, incluye una serie de métodos, materiales y recursos que el docente hace uso dentro del aula de clases del día a día.

En ese sentido, las estrategias metodológicas son diversas y tienen como objetivo que los estudiantes logren desarrollar aprendizajes significativos. En esa interacción, la estrategia puede ser modificada o cambiada de acuerdo a los resultados de los aprendizajes esperados (Maúrtua, 2019).

Según (Cózar, 2004) citado por Serna (2013) señala que;

> […] es evidente que en el aprendizaje no basta con la memoria mecánica como herramienta para la adquisición de un conocimiento ya acabado, hoy se insiste que el alumno debe comprender, o sea, dar significado personal a sus aprendizajes y que aprenda a aprender. (p. 45)

En ese sentido, la comprensión de un concepto matemático demanda dinamizar estructuras internas o mentales de menor a mayor complejidad, y coordinar diversas representaciones del objeto matemático para establecer relaciones lógicas entre los conceptos matemáticos y sus diferentes representaciones.

En este apartado, se muestra un poco sobre las teorías que sustentaron esta investigación dividiéndolas en tres (3) grupos.

Siguiendo ese orden de ideas, a continuación, se mencionan los grupos en cuestión: **1**.- *Teoría de Entrada General*. Aquí está la teoría que actúa como base muy general de las teorías pilares de este trabajo. A saber, la teoría Constructivista, **2**.- *Teorías de Entrada en Educación Matemática*. En este grupo están las teorías pilares del presente trabajo: la primera a mencionar sustenta la manera de aplicar la estrategia didáctica alternativa dentro del aula de clases. A saber; la teoría «APOE», acrónimo de «Acción, Proceso, Objeto y Esquema» creada por el doctor Ed Dubinsky (matemático-analista estadounidense) en 1990, la segunda sustenta la metodología de modelación matemática, a saber, la teoría de «Educación Matemática Realista» «EMR» creada por el doctor Hans Freudenthal (matemático-topólogo alemán) en 1960 y **3**.- *Teoría de Entrada en Estadística*. Aquí entra una teoría muy particular que se utilizó en el estudio estadístico de este trabajo con el objetivo de darle mayor rigor desde el punto de vista de las probabilidades. A saber; la teoría de muestreo repetitivo o remuestreo, bajo la metodología «Bootstrap», introducida por el doctor Bradley Efron (matemático-estadístico estadounidense) en 1979.

Teoría de Entrada General

Múltiples corrientes han propuesto teorías con el fin de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje, entre ellas se encuentra, por ejemplo: el *Conductismo* y el *Cognitivismo*; donde la diferencia existente entre cada una es la perspectiva que tienen en cuanto a quién es el agente principal en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

De lo anterior; el aprendizaje desde la mirada del *Conductismo* no es más que un cambio de conducta, donde el papel protagonista lo posee el docente, quien da prioridad a las respuestas que genera un cierto estimulo, esto es, la repetición constante de una tarea.

Un nuevo enfoque, antagónico a los dos citados anteriormente, surge formalmente en la década de los 70, el *Constructivismo*; que tal como su nombre lo indica, la prioridad es la *construcción del conocimiento* por parte del alumno, buscando que éste entienda lo que aprende, es decir, que construya "activamente una representación mental con sentido" tal como lo expone Mayer (2004).

Constructivismo. El *Constructivismo* tal como muestra Santivañez (2004), no es un método ni una técnica, sino un enfoque o teoría que se sustenta en las teorías propuestas por Jean Piaget, David Ausubel, Jerome Bruner y Lev Vygotsky, de quienes se puede apreciar que es el docente quien propicia el aprendizaje creando y planificando situaciones experimentales, con algún grado relevante de dificultad, convenientemente adaptadas a las características de los alumnos que participan en la construcción del conocimiento de una manera activa.

De la mano con lo anterior; el sujeto construye el conocimiento de la realidad, ya que, ésta no puede ser conocida en sí misma, sino a través de los mecanismos cognitivos de que se dispone, mecanismos que, a su vez, permiten transformaciones de esa misma realidad. De manera que; el conocimiento se logra a través de la actuación sobre la realidad experimentando con situaciones y objetos y, al mismo tiempo, transformándolos (Araya, Alfaro y Andonegui, 2007).

Según, Henson y Eller (2000) el *Constructivismo* se basa principalmente en la exploración o experimentación de los entornos físicos y sociales, a lo que se le denomina educación basada en la experiencia.

Es por ello que hay quienes plantean que el aprendizaje se da de mejor manera cuando el alumno aprende en contextos más significativos para él, vale decir contextos que les sean cercanos y familiares, con el fin de que el alumno comprenda y le dé significado a lo que está aprendiendo, para que, de esta forma pueda usarlo de manera no arbitraria en los sucesivos ejercicios o problemas que se le planteen, tal como lo expone Ausubel (1983). Es así entonces que; por lo expuesto anteriormente surge un nuevo concepto, el de *Aprendizaje Significativo*.

Este tipo de aprendizaje busca que el alumno o aprendiz, establezca relaciones o vínculos entre lo que va a aprender y lo que ya él conoce de su experiencia, lo cual le permitirá generalizar situaciones, que a la postre conducirá a que los alumnos adquieran nuevos conocimientos, los que podrán ser conectados con otras áreas disciplinarias. Por otra parte; hay otro aspecto esencial de este aprendizaje y es que un aprendizaje es significativo cuando el alumno le da significado a lo que está aprendiendo, vale decir, entiende y comprende lo que aprende.

Según Ausubel (ob. cit.), el concepto *Aprendizaje Significativo* busca cambiar el paradigma *Conductista* en uno *Constructivista*, esto es, que el aprendizaje no sea repetitivo o arbitrario, sino más bien que sea comprensivo, donde el alumno le dé significado a lo que aprende y que lo relacione con lo que ya conoce.

A continuación; se mostrarán los orígenes de la teoría *Constructivista*.

Orígenes. Las primeras referencias no formales al enfoque *Constructivista* se encuentran entre los filósofos *presocráticos* y, en particular, en *Jenófanes* (570-478 a.C.), otro referente lo constituye el pensamiento de *Heráclito* (540-475 a.C.). Adicional a lo anterior; los *sofistas* constituyen otro colectivo de filósofos griegos a considerar, entre ellos, se menciona a *Protágoras* (485-410 a.C.) y *Gorgias* (483-375 a.C.). Algunas décadas después se encuentran en Grecia otros referentes, a saber, los *estoicos*, seguidores de *Zenón de Citia* (siglo IV a.C.), ver Araya *et al*., (ob. cit.).

Avanzando en la historia; está la figura de *Descartes* (1596-1650) considerado por algunos como el iniciador de las corrientes *constructivistas modernas*. Por su parte; *Galileo* (1564-1642) con su propuesta de método experimental representa la ratificación de estas tendencias (Araya *et al*., ob. cit.).

Siguiendo el desarrollo de la historia; según Ortiz (2015), dos posturas importantes que no se puede dejar de mencionar al hablar del origen del *Constructivismo* son las planteadas por: Vico y Kant en el siglo XVIII. El primero; fue un filósofo napolitano que escribió un tratado de filosofía (1710) en el cual sostenía que las personas son seres que elaboran explicaciones de lo que sucede en el mundo, pero, solo pueden conocer aquello que sus estructuras cognitivas les permiten construir.

Por otro lado; Kant (1724-1804) en su texto *Crítica de la razón pura* considera que el ser humano solo puede conocer los fenómenos o expresiones de las cosas; es decir, únicamente es posible acceder al plano fenomenológico no a la esencia de las 'cosas en sí'.

En el siguiente párrafo se mostrarán los principios básicos de la teoría *Constructivista*.

Principios básicos. Tomando de apoyo la idea, del *Constructivismo*, de que el ser humano es un activo constructor de su realidad, se establecieron algunos principios básicos para este enfoque, tal como lo expone Ortiz (ob. cit.): **1**.- *El conocimiento es una construcción del ser humano*: cada persona percibe la realidad, la organiza y le da sentido en forma de constructos, gracias a la actividad de su sistema nervioso central, lo que contribuye a la edificación de un todo coherente que da sentido y unicidad a la realidad, **2**.- *Existen múltiples realidades construidas individualmente y no gobernadas por leyes naturales*: cada persona percibe la realidad de forma particular dependiendo de sus capacidades físicas y del estado emocional en que se encuentra, así como también de sus condiciones sociales y culturales y **3**.- *La ciencia no descubre realidades ya hechas, sino que construye, crea e inventa escenarios*: de esta forma intenta dar sentido a lo que ocurre en el mundo, en la sociedad, en las personas. Esta construcción es fruto del avance logrado por la ciencia misma en campos tan diversos como la Astronomía, la Física, la Sociología, la Psicología, entre otras.

Siguiendo, ahora, con algunas teorías cercanas a la teoría *Constructivista*.

Teorías más cercanas. **1**.- *La Teoría Cognitiva de Piaget*: también se la conoce como evolutiva debido a que se trata de un proceso paulatino y progresivo que avanza, conforme el niño madura física y psicológicamente, **2**.- *El Aprendizaje Significativo de Ausubel*: afirma que el sujeto relaciona las ideas nuevas que recibe con aquellas que ya tenía previamente, de cuya combinación surge una significación única y personal. Este proceso se realiza mediante la combinación de tres aspectos esenciales: lógicos, cognitivos y afectivos y **3**.- *El Aprendizaje Social de Vygotsky*: sostiene que el aprendizaje es el resultado de la interacción del individuo con el medio. Cada persona adquiere la clara conciencia de quién es y aprende el uso de símbolos que contribuyen al desarrollo de un pensamiento cada vez más complejo dentro de la sociedad de la que forma parte (Ortiz, ob. cit.).

Ahora bien; se mostrarán enfoques educativos de la teoría *Constructivista*.

Enfoques en educación. Según Serrano y Pons (2011), se presentan cuatro (4) modelos en educación: **1**.- *Constructivismo Radical*: creado por: Heinz Von Foerster y Ernst Von Glasersfeld, éste se basa en la presunción de que el conocimiento, sin importar cómo se defina, está en la mente de las personas y el sujeto cognoscente no tiene otra alternativa que construir lo que conoce sobre la base de su propia experiencia, **2**.- *Constructivismo Cognitivo*: parte de la teoría Piagetiana y postula que el proceso de construcción del conocimiento es individual, realiza los análisis sobre estos procesos bajo tres (3) perspectivas: la que conduce al análisis macro genético de los procesos de construcción, la que intenta describir y analizar las micro génesis y la vertiente integradora de estas dos posiciones, **3**.- *Constructivismo Socio-Cultural*: tiene su origen en los trabajos de Vygotsky y postula que el conocimiento se adquiere, según la ley de doble formación, primero a nivel inter mental y posteriormente a nivel intrapsicológico, de esta manera el factor social juega un papel determinante en la construcción del conocimiento, aunque este papel no es suficiente porque no refleja los mecanismos de internalización y **4**.- *Construccionismo Social*: encabezado por Luckman y Berger, postula que la realidad es una construcción social y, por tanto, ubica el conocimiento dentro del proceso de intercambio social.

A continuación; el autor de este trabajo presenta la relación entre la teoría *Constructivista* y su investigación.

Relación con la presente investigación. Según como lo presenta Orcos (2019), en su disertación doctoral titulada *Diferentes experiencias de aprendizaje en ciencias y matemáticas a través de Tecnologías de la Información y la Comunicación*; es preciso romper las barreras ante las cuales el alumno se queda aislado y pasivo por miedo a cometer errores. Los alumnos deben aprender a pedir ayuda cuando la necesitan y saber otorgarla cuando se les es requerida. No hay que centrarse en evitar cometer errores, ya que el ser humano aprende a base de ellos, se trata de hacer óptima la forma de aprender y maximizar en ello los esfuerzos.

El docente pasa a tener un papel de ayuda y, por lo tanto, resulta crucial una buena relación maestro-alumno que promueva una actitud activa en la que el maestro tenga la misión de hacer que el alumno abra su mente para lograr un *Aprendizaje Significativo* basado en la reflexión.

Bajo tales premisas; resulta clave destacar que para la adquisición del conocimiento es fundamental la experiencia, el contacto con el mundo que nos rodea, puesto que es la única manera en la que el aprendizaje será significativo. Este aspecto es más patente aún en el aprendizaje de las ciencias y las matemáticas debido a que, aunque para la mayor parte del alumnado resulten más arduas de aprender, su carácter práctico hace que se comprendan mejor que las asignaturas meramente teóricas, tal como lo expone (Orcos, ob. cit.).

De lo anterior, es preciso mencionar que; la ciencia y la Matemática surgen de la necesidad del hombre de hacer representaciones de la realidad que le rodea y, por ello, su sentido máximo es la aplicabilidad de las mismas. Ésta es la relación principal de la teoría *Constructivista* con la presente investigación, adicional a eso, algunas de las teorías de entrada en «Educación Matemática» (EM) que serán la columna vertebral de esta investigación, a saber; la metodología de «Modelación Matemática» (MM) y la teoría «Acción-Proceso-Objeto-Esquema» (APOE) tienen sus pilares en la teoría *Constructivista*.

Teorías de Entrada en Educación Matemática

Rico y Sierra, (2000, pp. 77-131), consideran a la

> educación matemática como un conjunto de ideas, conocimientos, procesos, actitudes y, en general de actividades implicadas en la construcción, representación, transmisión y valoración del conocimiento matemático que tiene lugar con carácter intencional, y que se propone dar respuesta a los problemas y necesidades derivados de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.

Estos autores plantean que la *Educación Matemática* presenta tres (3) ámbitos de actuación:

1.- **Educación Matemática como conjunto de conocimientos**. Conocimiento matemático como objeto de enseñanza aprendizaje, diseño, desarrollo y evaluación del currículo de Matemáticas, **2**.- **Educación Matemática como actividad social**. Conocimiento profesional y formación del profesor de Matemáticas y **3**.- **Educación Matemática como disciplina científica**. Didáctica de la Matemática.

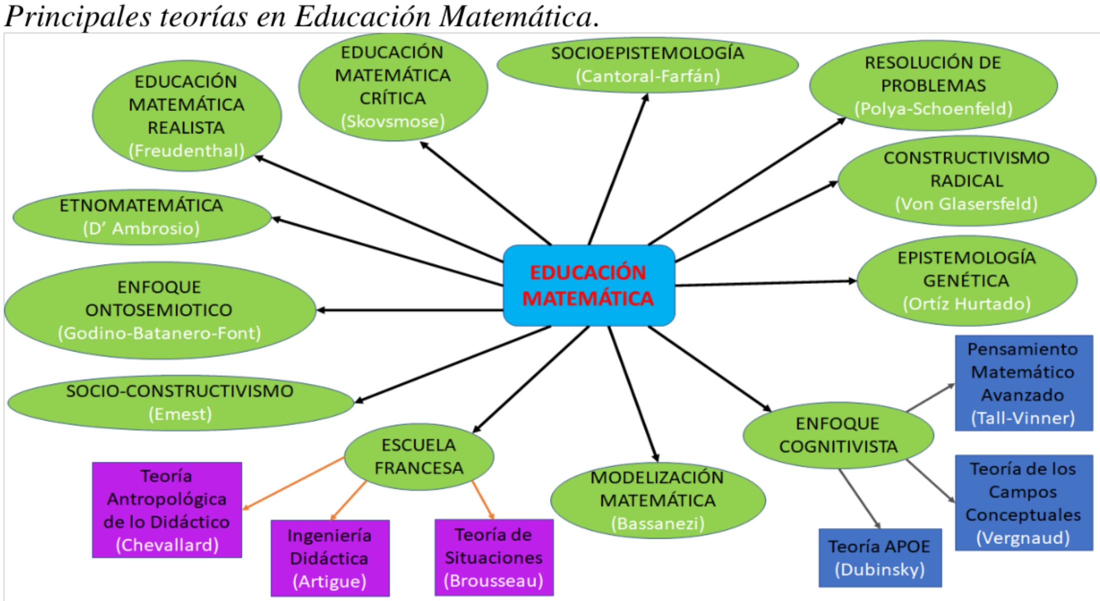
Es decir; al hablar de *Educación Matemática* se hace referencia a: **1**.- un objeto matemático de estudio, **2**.- un profesional dedicado socialmente a la formación matemática y **3**.- una ciencia que ofrece las herramientas necesarias para que el docente resuelva los problemas que se le presentan durante los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el aula de clase.

En este sentido; la *Didáctica de la Matemática* es la ciencia que se ocupa de estudiar e investigar los problemas de la *Educación Matemática* y proponer marcos explicativos para su resolución. Indaga metódica y sistemáticamente los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, y los planes de formación de los educadores matemáticos. Tiene como objeto delimitar y estudiar los problemas que surgen durante los procesos de organización, comunicación, transmisión, construcción y valoración del conocimiento matemático junto con su propia fundamentación teórica.

La siguiente figura muestra las principales teorías, actuales, en *Educación Matemática*.

Figura 1

Principales teorías en Educación Matemática.



Nota: aquí se presentan las principales teorías en Educación Matemática, en sus diferentes corrientes, que hay hasta la actualidad. Fuente: Rodríguez (2021).

De ese grupo de teorías, en la presente investigación, solo son de interés; la teoría de *Educación Matemática Realista* (EMR) de Freudenthal y, del enfoque cognitivista, la teoría *Acción, Proceso, Objeto y Esquema* (APOE) de Dubinsky.

Según Gallart, García-Raffi y Ferrando (ob. cit.) la demanda de actividades que potencien el desarrollo de competencias es cada vez mayor en las aulas. Se trata de buscar tareas que potencien el papel del alumno en la construcción del conocimiento, el aprendizaje significativo conectado a la realidad, al tiempo que muestren la aplicabilidad y funcionabilidad de las Matemáticas. Es en ese sentido donde la metodología de modelación matemática puede jugar un papel importante.

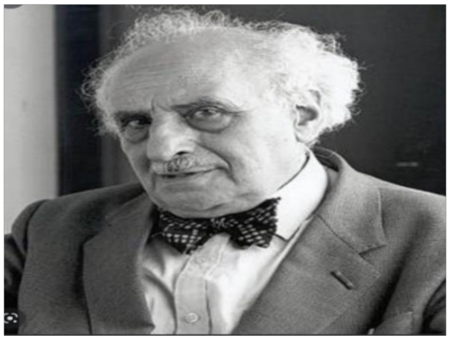
Agregando a lo anterior; la metodología de modelación matemática proporciona un espacio en el cual los estudiantes pueden aprender las Matemáticas curriculares de varias maneras. El aprendizaje que tiene lugar durante el proceso de modelación implica potencialmente una comprensión más profunda del conocimiento matemático y una motivación por construirlas (Zbiek y Conner, 2006).

Blomhøj (2004) plantea que la metodología de modelación matemática extiende puentes entre la experiencia de la vida cotidiana y las Matemáticas. Blum y Borromeo-Ferri (2009) identifican que contribuye a ayudar a los estudiantes a comprender mejor el mundo; apoyar el aprendizaje de las Matemáticas (motivación, formación de conceptos, comprensión), desarrollar diversas competencias matemáticas (e incluso, actitudes) y tener una imagen adecuada de las Matemáticas. Igualmente, gracias al proceso de modelación, las Matemáticas se vuelven más significativas para quienes las están aprendiendo, según (Cárcamo, ob. cit.).

A continuación; se mostrarán los orígenes, fases, principios, ventajas y dificultades de la teoría de «*Educación Matemática Realista*», la metodología de «*Modelación Matemática»* y la teoría «*Acción-Proceso-Objeto-Esquema*».

Educación Matemática Realista (EMR). Esta corriente didáctica reconoce como su fundador al doctor Hans Freudenthal (1905-1990), matemático especialista en Topología Algebraica, éste obtuvo su doctorado en matemáticas por la Universidad de Berlín, fue un educador (por vocación) alemán que realizó la mayor parte de su trabajo en Holanda. Fue un incansable propulsor de un cambio en la enseñanza tradicional de la matemática y mucha de su popularidad proviene de su amplia actuación como fundador y participante activo en el Grupo Internacional de Psicología y Educación Matemática (PME) y la Comisión Internacional para el Estudio y el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática (CIEAEM).

Figura 2
Foto del doctor Hans Freudenthal.



Nota: Fuente: Freudenthal (2008).

La EMR nace en los años 60, como reacción al enfoque mecanicista de la enseñanza de la aritmética que se sustentaba en ese país y a la aplicación en las aulas de la 'matemática moderna' o 'conjuntista'.

Una idea central, sino la más importante de la EMR, es que la enseñanza de la matemática debe estar conectada con la realidad, permanecer cercana a los alumnos y ser relevante para la sociedad en orden a constituirse en un valor humano.

En ese sentido, Freudenthal dice que; "la imagen de la matemática se enmarca dentro de la imagen del mundo, la imagen del matemático dentro de la del hombre y la imagen de la enseñanza de la matemática dentro de la sociedad" (1991, p. 32).

Para Freudenthal, una preocupación esencial frente a la realidad educativa y académica de su época era: "hay una cosa que necesitamos [decidir] urgentemente, si la imagen de la matemática es para una élite o para todos; una imagen de la matemática para la totalidad de la educación" (1973, p. 63).

Para él, lo importante es que todos los alumnos tengan alguna forma de contacto con el *quehacer matemático,* considerado éste como una actividad estructurante u organizadora de matematización que está al alcance de todos los seres humanos (Freudenthal, 1973, 1991) y define esta actividad como: "matematizar es organizar la realidad con medios matemáticos […] incluida la matemática misma" (1973, p. 44).

Matematizar. Es un proceso que involucra: «*reconocer*» características esenciales en situaciones, problemas, procedimientos, algoritmos, formulaciones, simbolizaciones y sistemas axiomáticos; «*descubrir*» características comunes, similitudes, analogías e isomorfismos; «*ejemplificar*» ideas generales; «*encarar*» situaciones problemáticas de manera paradigmática; la «*irrupción repentina*» de nuevos objetos mentales y operaciones; «*buscar*» atajos; «*abreviar*» estrategias y simbolizaciones iniciales con miras a esquematizarlas, algoritmizarlas, simbolizarlas y formalizarlas; y «*reflexionar*» acerca de la actividad matematizadora, considerando los fenómenos en cuestión desde diferentes perspectivas (1991, p. 30, pp. 35-36).

Niveles de matematización. Vargas, (ob. cit.), expone que los niveles de matematización para Freudenthal, se producen mediante dos procesos:

1.- **Matematización horizontal**. Los estudiantes logran hacer un intento de describir en forma particular la situación problema, a través de procedimientos informales o preformales. Tiene como punto de partida crear acciones que buscan entender la situación problema, que son; el reconocimiento de los datos, la esquematización, formulación y diversas formas de representación de un objeto o imagen. En este proceso se presenta el siguiente nivel.

Nivel situacional. Se relaciona con el uso de conocimientos informales, experiencias y formas propias de la matemática presente en el medio en que circunda.

2.- **Matematización vertical**. Los estudiantes alcanzan un nivel más formal de la matemática, aplican estrategias metacognitivas que los llevan a hacer más reflexivos de su realidad. Aquí se presentan los siguientes niveles:

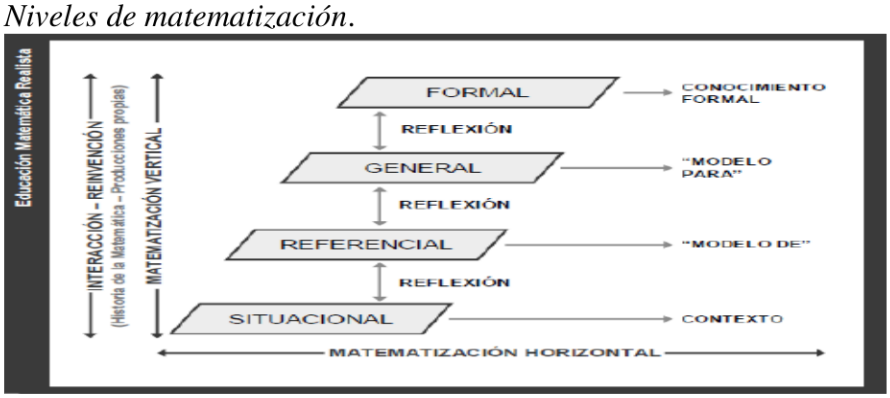
2.1) *Nivel referencial*. Se refiere a las representaciones o esquemas funcionales acerca del contexto real.

2.2) *Nivel general*. Se establece mediante la exploración, reflexión y generalización de las ideas matemáticas.

2.3) *Nivel formal*. Se establece el conocimiento formal: estructuras, definiciones, teorías, fórmulas generales, etc.

Figura 3

Niveles de matematización.



Nota: Fuente: Vargas (ob. cit.).

Principios de la educación matemática realista. La EMR no pretende ser una teoría general del aprendizaje (como lo es, por ejemplo, el Constructivismo), sino que más bien se trata de una teoría global que se basa en las siguientes ideas centrales:

• Pensar la matemática como una *actividad humana* (a la que Freudenthal denominó matematización), de modo tal que debe existir una matemática para todos.

• Aceptar que el desarrollo de la comprensión matemática pasa por distintos *niveles* donde los contextos y los modelos poseen un papel relevante y que ese desarrollo se lleva a cabo por el proceso didáctico denominado *reinvención guiada* en un ambiente de heterogeneidad cognitiva.

• Desde el punto de vista curricular, la reinvención guiada de la matemática en tanto actividad de matematización requiere de la *fenomenología didáctica* como metodología de la investigación, esto es, la búsqueda de contextos y situaciones que generen la necesidad de ser organizados matemáticamente, siendo las dos fuentes principales de esta búsqueda la historia de la matemática y las invenciones y producciones matemáticas espontáneas de los estudiantes (Freudenthal, ob. cit.).

Lo anterior dentro de la teoría de Freudenthal se conoce como principios de la *Educación Matemática Realista* y según Bressan, Zolkower y Gallego (2004), son:

1.- **Principio de actividad**. Se plantean situaciones las cuales desde la propia experiencia de los estudiantes deben ser resueltas, como afirma Vanegas y Henao (2013) “los estudiantes se enfrentan a situaciones problemas en las cuales ellos mismos a través de sus conocimientos informales «reinventan» las matemáticas como participantes activos durante el proceso de aprendizaje” (p. 2885). Es decir, que los estudiantes se involucran con las actividades propuestas las cuales deberían ser situaciones que se adapten a su realidad. Siguiendo la idea anterior, Bressan *et al*., (ob. cit.) dicen que; “la matemática es pensada como una actividad humana a la que todas las personas pueden acceder y puede ser mejor aprendida haciéndola” (p. 3).

2.- **Principio de realidad**. Aquí se plantea que los problemas propuestos deben ser obtenidos de la realidad, creando en los estudiantes la necesidad de matematizarlos y resolverlos, estos problemas deben plantearse desde el contexto de los estudiantes (Jiménez, 2022). Es decir; si se está trabajando con un grupo de estudiantes, por ejemplo, de ingeniería lo adecuado es plantear situaciones problémicas relacionadas con el área ingenieril en cuestión, de ese modo, el interés natural que esto crea en ese grupo hará la amalgama perfecta entre el mundo platónico y el real. Al respecto Bressan *et al*., (ob. cit.), expresan que; “esto no significa mantener a esta disciplina solo conectada al mundo real o existente sino también a lo realizable, imaginable o razonable para los alumnos" (p. 5).

Dice Freudenthal: "yo prefiero aplicar el término realidad a lo que la experiencia del sentido común toma como real en un cierto escenario" (1991, p. 17).

3.- **Principio de reinvención**. Como se expresa Freudenthal, la matemática no es otra cosa que una forma de sentido común, solo que más organizada.

> Para transformarlo en matemática genuina y para progresar, el sentido común debe ser sistematizado y organizado. Las experiencias del sentido común se cristalizan en reglas (por ejemplo, la conmutatividad de la suma) y estas reglas se transforman de nuevo en sentido común, pero a un nivel más alto, constituyendo así la base para una matemática de orden aún mayor, una jerarquía tremenda construida gracias a un notable interjuego de fuerzas. (ob. cit., p. 9)

Al respecto Bressan *et al*., (ob. cit.), expresan que:

> La educación matemática debe dar a los alumnos la oportunidad guiada por el maestro de reinventar la matemática (no crean, ni descubren, sino reinventan modelos, conceptos, operaciones y estrategias matemáticas con un proceso similar al que usan los matemáticos al inventarlas). Aquí el docente posee un papel bien definido, en tanto, sujeto que media entre los alumnos y las situaciones problemáticas en juego, entre los alumnos entre sí, entre las producciones informales de los alumnos y las herramientas formales, ya institucionalizadas, de la matemática como disciplina. (p. 6)

4.- **Principio de niveles**. Este tiene que ver con el nivel de modelación que poseen los estudiantes incluyendo su capacidad para analizar la situación dada, con el fin de matematizarla para posteriormente resolverla.

5.- **Principio de entrelazamiento**. Está vinculado con la variedad de conocimientos matemáticos que poseen los estudiantes y las capacidades que estos tienen para vincularlos y asociarlos a una misma situación, puesto que un problema puede involucrar varios contenidos matemáticos, los estudiantes deben estar en capacidad de asociarlos para poder resolver los planteamientos dados (Jiménez, ob. cit.).

6.- **Principio de interacción**. Consiste en las relaciones que poseen los estudiantes con las personas que los rodean, así lo indican Bressan *et al*., (ob. cit.) quienes afirman que; "en la EMR el aprendizaje de la matemática está considerado como una actividad social […]. La interacción lleva a la reflexión y a capacitar a los alumnos para llegar a niveles de comprensión más elevados" (p. 9). Es decir, entre los mismos estudiantes pueden cooperar entre sí para resolver los problemas que se plantean en clase.

7.- Principio de orientación. Según Jiménez (ob. cit.), este último principio habla sobre el papel del docente, el cual mediante sus conocimientos de matemática debe servir de guía para proporcionar el mejor aprendizaje entre sus estudiantes y que puedan alcanzar las competencias necesarias en su formación.

Ahora, se mostrará una herramienta didáctica empleada en esta investigación, ésta fue sustentada con la EMR. Es de hacer notar que, esta herramienta se utilizó como una metodología para desarrollar el trabajo didáctico.

Modelación Matemática (MM). Según Bosch, García, Gascón, he Higueras, (2006) desde los años 1980 se observa en la investigación en «Educación Matemática» un creciente interés por el papel que los procesos de *Modelación* pueden desempeñar en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en todos los niveles del sistema educativo. Durante mucho tiempo, la modelación ha estado restringida a la aplicación de un conocimiento matemático previamente construido a determinadas situaciones reales. Hoy día, perdura este uso del término modelación.

Al respecto, Peña y Morales (2016) señalan que; las investigaciones en modelación matemática y su relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, muestran que estos procesos son exitosos cuando los docentes utilizan los modelos como estrategia y componente central para abordar el currículo, no solo en el aspecto académico sino que abarca aspectos actitudinales y de percepción positiva, dado que los estudiantes disfrutan más cuando la enseñanza involucra actividades de modelación matemática.

Bassanezi (2002) define la modelación como el arte de convertir problemas de la realidad al lenguaje matemático, resolverlos, interpretarlos y traducir sus soluciones en el lenguaje del mundo real. Por otra parte; Barbosa (2001) entiende la modelación como un espacio de indagación y/o investigación en torno a hechos o fenómenos que se originan en otras áreas del mundo real mediada por las Matemáticas.

Hay quienes exponen que la modelación es solo la consecución de la expresión algebraica del problema, vale decir, el modelo, lo que dista mucho de lo que exponen autores como Bassanezi y Biembengut (1997), además de Biembengut y Hein (2004), para quienes la modelación es un proceso cíclico y dinámico en el cual los estudiantes se ven enfrentados a una problemática extraída de una situación real, a la cual deben dar solución.

Bassanezi y Biembengut (ob. cit.) expresan que: “la palabra Modelación es una «contracción» de los términos Modelización y Educación. Es decir; Modelación = Modelización

+ Educación" (p. 14). De ahí que, en adelante; cuando se utilice en esta investigación la expresión «*Modelación*» se estará haciendo énfasis a una herramienta didáctica para ser usada en el aula de clases con el objetivo de mejorar el proceso de enseñanza del contenido de Descomposición en Fracciones Simples.

Así también, en palabras de Blomhøj (ob. cit.) la modelación "puede ser vista como una práctica de enseñanza que coloca la relación entre el mundo real y la Matemática en el centro de la enseñanza y el aprendizaje". Por lo tanto, de las ideas anteriormente señaladas; se puede concluir que la modelación es más que la simple consecución de una fórmula, sino que es un proceso que permite dar solución a una problemática, pasando por la consecución de una fórmula. Más aun; se puede mencionar que se trata de una *Metodología de Enseñanza* que se basa en la resolución de problemas y el trabajo autónomo del alumno, trabajo que se enmarca dentro de una situación contextualizada.

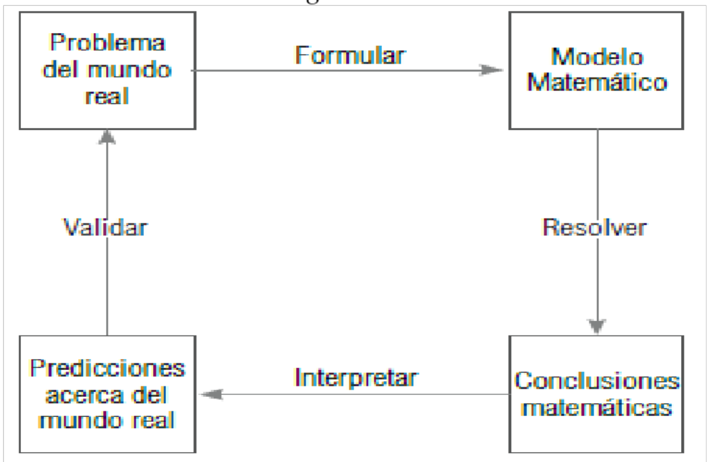
Polya (1965) estableció cuatro (4) fases por las que un resolutor ideal (persona con las condiciones mínimas necesarias, que se enfrenta a una situación problemática) transitaría a la hora de resolver un problema, éstas son: comprender el problema; elaborar un plan para resolverlo; poner en marcha ese plan; y comprobar el resultado. En esta línea; la modelación puede verse también como un proceso, constituido por fases, a través del cual un resolutor ideal transitaría a la hora de resolver un problema del mundo real, en el que las Matemáticas están presentes de una manera más o menos explícita. Así, la resolución de un problema de modelación es un caso particular de la resolución de problemas tal y como la plantea Polya.

Por todo lo anterior, se puede decir que; el proceso de modelación se origina de una situación extraída del mundo real, simplificando y estructurando un problema, que, en conjunto con los datos obtenidos, permite crear una posible solución, o sea un modelo real, el cual matematizado y tratado con los modelos existentes, origina un modelo matemático. Este modelo es tratado matemáticamente obteniendo con ello un resultado, el que debe ser analizado de acuerdo al modelo, para ver si es solución al problema; esta solución luego tiene que ser interpretada y validada en la situación real.

En la siguiente figura se muestra el proceso de la metodología de modelación matemática propuesto por Brito, Alemán, Fraga, Parra, y Arias (2011). En ella se observa la conexión entre un problema del mundo real y el modelo matemático y, las predicciones que se pueden lograr acerca del mundo real por medio de las interpretaciones en las conclusiones matemáticas.

Figura 4

Proceso de la metodología de Modelación Matemática.



Nota: Fuente: Brito, Alemán, Fraga, Parra y Arias (2011).

Por consiguiente, la modelación como proceso implica: **1**.- identificación de la situación, fenómeno o problema del mundo real a ser estudiado, **2**.- establecimiento de los supuestos e hipótesis en que se desarrollará el modelo, **3**.- formulación matemática del problema, **4**.- resolución del problema matemático, **5**.- traducción de las soluciones a la luz del fenómeno y **6**.- validación del modelo matemático contrastando los resultados con los datos de la situación contextualizada. Los pasos en los incisos **2** y **5** dan cuenta del vínculo entre la vida real y las Matemáticas, Olarte (ob. cit.).

Fases del ciclo de modelación. A continuación, se detalla cada una de las fases del ciclo de modelación según Gallart (ob. cit.).

1.- **Situación real**. La situación real presenta la situación inicial de partida. Puede ser mediante un texto escrito (enunciado verbal), una tabla, una ilustración, entre otras.

2.- **Modelo de situación**. Cada individuo tiene una representación o imagen mental de la situación real inicial. Esta imagen mental supone el punto de vista personal del alumno, que dependerá, según señalan Leiß, Schukajlow, Blum, Messner y Pekrum (2010), del conocimiento previo que tenga sobre el contexto en que se sitúa la tarea, la actitud y creencias hacia las Matemáticas y el propio contexto, su grado de motivación, su competencia lectora (entendida no solo como su competencia para comprender textos escritos sino también para extraer información de gráficos, símbolos, ilustraciones o fotografías), su competencia matemática, y las características propias de la tarea (formato, contexto, estructura semántica y Matemática).

3.- **Modelo real**. El modelo real es construido por cada individuo a partir de su propia imagen mental de la situación y lo constituyen todos aquellos elementos de la realidad relevantes en la resolución del problema que ha planteado.

4.- **Modelo matemático**. El modelo matemático lo constituyen los objetos matemáticos necesarios para la resolución, del problema planteado, dentro del mundo de las Matemáticas. En ese sentido; puede tratarse de un modelo algebraico, probabilístico, geométrico, de ecuaciones diferenciales, de investigación de operaciones, entre otros. Este modelo matemático, según Blum y Niss (1991, p. 39), tiene tres (3) elementos fundamentales: **1**.- un conjunto de objetos matemáticos, **2**.- unas relaciones y reglas matemáticas que rigen estos objetos y **3**.- una correspondencia entre los dos conjuntos anteriores (objetos y relaciones) y los elementos del problema real.

5.- **Solución matemática**. A partir de la resolución del modelo matemático establecido se obtiene el resultado en términos matemáticos del problema. Éste puede ser un número, una fórmula, un intervalo, una gráfica, entre otros, y constituirá la solución matemática del problema.

6.- **Solución real**. La solución matemática obtenida debe interpretarse en la situación real inicial, obteniéndose así la solución real que posteriormente tendrá que ser validada y comunicada.

A partir de lo expuesto en párrafos anteriores; se puede deducir que cuando se habla de modelación se está haciendo referencia a una metodología de corte constructivista, donde se pretende que el estudiante asuma el papel protagonista en su proceso de aprendizaje, logrando con ello que sea él quien construya su conocimiento.

Según los años de experiencia del autor de la presente investigación, en la docencia universitaria, hoy en día el tipo de enseñanza de las Matemáticas predominante en algunas Universidades del país es el tradicionalismo (*Conductismo*), dado que se prioriza el trabajo algorítmico. Por tanto; si se espera que los estudiantes valoren el papel de la Matemática en la sociedad, es necesario que la enseñanza cambie, o sea, que al trabajar en Matemática no se realice de forma descontextualizada y mecanicista, sino que se les haga ver a los estudiantes que gran parte de nuestro diario vivir, por no decir prácticamente todo, es regido por *modelos matemáticos*.

De lo anterior; una de las formas en que el estudiante puede valorar el papel de la Matemática es cuando a éste se le presentan *situaciones realistas*, que le permitan entender el papel que juega la Matemática en la sociedad, y más aún, al trabajar la Matemática desde este aspecto el estudiante comprenderá de mejor manera lo que está aprendiendo, según (Beimbengut y Hein, ob. cit.).

La actividad científica del matemático (aplicado) encargado de aplicar y construir modelos explicativos de fenómenos, resolver problemas de las ciencias naturales y sociales o avanzar en una teoría, está reflejada en la metodología de *Modelización* de las Matemáticas, es decir; cada docente del área de Matemática incorpora en la mentalidad de sus estudiantes el rigor de las Matemáticas en aras de desarrollar en ellos la intuición, la creatividad y que puedan conocer el mundo en que habitan a través del descubrimiento de la verdad, oculta en sus aplicaciones, motivándoles a ciertas disciplinas. En las instituciones el docente debe fomentar la elaboración e interpretación de modelos con el propósito de edificar un concepto matemático dotado de un significado y con la intención de despertar una motivación e interés por las Matemáticas debido a la relación que tiene con los problemas del contexto real del alumnado, según Olarte (ob. cit.).

Siguiendo el mismo orden de ideas; las ventajas de introducir la metodología de modelación en las aulas, junto a la aplicación de las Matemáticas y la resolución de problemas, han sido ya reflejadas en diversos artículos (Blum y Niss, ob. cit.; Burkhardt, 2006), proporcionándose numerosos argumentos en su favor los cuales son descritos a continuación: **1**.- *pragmáticos*, la enseñanza de las Matemáticas debe servir para ayudar a los estudiantes a entender, analizar, evaluar y juzgar situaciones y problemas del mundo real, para los que la modelación es indispensable, **2**.- *formativos*, la modelación, la aplicación de las Matemáticas y la resolución de problemas son los medios adecuados para desarrollar competencias en los alumnos, **3**.- *culturales*, la modelación, las aplicaciones y la resolución de problemas constituyen una categoría fundamental en todos los procesos creativos matemáticos y **4**.- *psicológicos*, la incorporación de la modelación puede ayudar a tener una comprensión más profunda y facilitar la retención de los conceptos, nociones, métodos y resultados matemáticos, todo lo anterior, según lo muestra Gallart *et al*. (ob. cit.).

Pese a estas ventajas, también se encontró en la literatura especializada una serie de dificultades asociadas a la modelación (Blum y Niss, ob. cit.; Burkhardt, ob. cit.; Cabassut y Ferrando, 2017), a continuación se describen: **1**.- *desde el punto de vista de la enseñanza*, falta de tiempo para tratar la resolución de problemas, las aplicaciones y la modelación además, de la gran cantidad de contenidos obligatorios incluidos en los programas oficiales, **2**.- *desde el punto de vista del alumno*, la resolución de problemas, la modelación y las aplicaciones a otras disciplinas hacen que las clases sean más exigentes y menos predecibles que las clases tradicionales y **3**.- *desde el punto de vista del profesor*, la resolución de problemas y las referencias al mundo real que implica la modelación hacen que las clases sean más abiertas y, por tanto, más difíciles de preparar, dirigir y finalmente, evaluar.

Finalmente, es importante aclarar que; la propuesta del autor de la presente investigación no es enseñar la metodología de «*Modelización Matemática*» como área de estudio en cuestión sino, más bien, enseñar una estrategia didáctica alternativa durante el proceso de Descomposición en Fracciones Simples usando como herramienta didáctica la «*Modelación Matemática*». Es otras palabras; el autor de este trabajo combinó la «*Modelización*» y la «*Educación*» para mejorar el proceso de enseñanza, en el aula, del objeto matemático de estudio de su investigación.

En el siguiente apartado se desplegará parte de la teoría que sirvió de base para el desarrollo, en el aula de clases, de la *estrategia didáctica alternativa* que se creó en la presente investigación.

Acción Proceso Objeto Esquema (APOE). Este estudio tiene una perspectiva teórica de investigación en el campo del «*Pensamiento Matemático Avanzado*» (en adelante, PMA), por tanto; se considera necesario en primer lugar hacer algunas precisiones conceptuales en lo relacionado con lo que se va a entender por PMA y su relación con la teoría APOE.

El PMA tiene que ver con los procesos mentales propios de las matemáticas superiores que se enseñan y se aprenden en el ámbito universitario (Aldana, 2011).

Asimismo, Azcárate y Camacho (2003, pp. 136-141) ponen de manifiesto en relación al PMA que; "este tipo de pensamiento por su naturaleza posee unos procesos característicos entre los que destaca: el nivel de abstracción, formalización del conocimiento, la representación, definición de los conceptos y la demostración".

Por otra parte, Dreyfus (1991, pp. 25-41) afirma que; "comprender es un proceso que tiene lugar en la mente del estudiante y es el resultado de una larga secuencia de actividades de aprendizaje durante las cuales ocurren e interactúan una gran cantidad de procesos mentales".

En ese sentido; la teoría APOE en palabras de Rodríguez, Parraguez y Trigueros (2018) "[…] es una teoría constructivista que toma como marco de referencia las ideas de Piaget respecto al desarrollo del conocimiento; fundamentalmente rescatando el concepto de abstracción reflexiva y el concepto de esquema" (p. 5). Ésta surge como un intento de entender y describir cómo los individuos construyen las estructuras «lógico-matemáticas» durante el curso del desarrollo cognitivo a través de la «*abstracción reflexiva*».

Así mismo; la teoría APOE permite centrar la mirada en los aspectos cognitivos de la construcción de conocimientos matemáticos. Ésta es una interpretación de la teoría constructivista que se basa principalmente en el concepto de «*abstracción reflexiva*», introducido por Piaget, para describir el desarrollo del pensamiento lógico en los niños, y extiende la idea a nociones matemáticas más avanzadas (Dubinsky, 1991a).

A continuación, se presenta el objetivo de la teoría APOE.

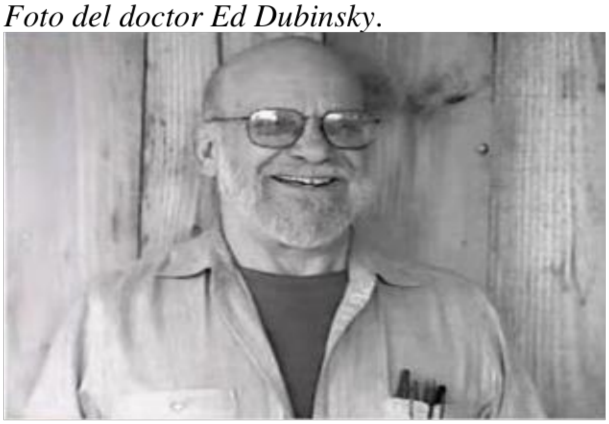
***Objetivo de la teoría* APOE**. Este consiste en estudiar cómo se aprenden las matemáticas y cómo se pueden enseñar de manera efectiva. Para ello; esta teoría modela cómo un sujeto genérico aprende un concepto o tema matemático, también, propone cuáles son las construcciones mentales necesarias para hacerlo y no olvida las dificultades inherentes a dicho proceso como, por ejemplo, el papel del lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas o el papel que juega la institución. La teoría APOE toma un recorte de la realidad o del fenómeno para estudiar con detalle el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas con la definición que se propondrá (Trigueros, 2020).

***Definición de conocimiento matemático en términos de la teoría* APOE**. Según Dubinsky, (1996), el conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones y problemas matemáticos, reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo: **A**cciones, **P**rocesos, **O**bjetos y **E**squemas.

En sus inicios la teoría APOE fue creada en 1990 por el doctor Ed Dubinsky, matemático, especialista en Análisis Funcional y cuya formación académica la realizó en la Universidad Temple (BS), Universidad de Pennsylvania (MA) y la Universidad de Michigan (PhD).

Figura 5

Foto del doctor Ed Dubinsky.



Nota: Fuente: Dubinsky (2015).

La teoría APOE con el tiempo y con la colaboración de nuevos investigadores, se ha probado en distintos contextos de las matemáticas. Hoy sigue creciendo y adaptándose a las necesidades de este importante campo de investigación a través de los trabajos de los miembros del grupo RUMEC

(Research in Undergraduate Mathematics Education Community) y de otros investigadores que la utilizan.

Según expresa Trigueros, (2005), desde el punto de vista de la teoría APOE la construcción del conocimiento matemático pasa por tres (3) etapas básicas: *acción*, *proceso* y *objeto*. El paso por estas tres (3) etapas no es necesariamente secuencial. Una persona puede pasar mucho tiempo en etapas intermedias e incluso estar en una etapa de construcción para ciertos aspectos de un concepto y en otra para otros. Lo que sí puede afirmarse es que el manejo que una persona hace de un concepto ante distintas situaciones problemáticas es diferente cuando un individuo responde con un nivel caracterizado por *proceso* en la teoría que cuando lo hace a nivel *acción*, y cuando lo hace a nivel *objeto* que cuando lo hace a nivel *proceso*.

El mecanismo principal en la construcción de conocimiento matemático en esta teoría es, como en la de Piaget, la «*abstracción reflexiva*», en el sentido de un proceso que permite al individuo, a partir de las acciones sobre los objetos, inferir sus propiedades o las relaciones entre objetos en un cierto nivel de pensamiento, lo que implica, entre otras cosas, la organización o la toma de conciencia de dichas acciones y separar la forma de su contenido, e insertar esta información en un marco intelectual reorganizado en un nivel superior (Dubinsky, 1991a, 1991b).

En este mismo orden de ideas, Dubinsky (1991b) considera que;

> la principal dificultad para aplicar las ideas de Piaget al Pensamiento Matemático Avanzado, ha sido que la teoría de Piaget tiene su origen en la manipulación de objetos físicos, pero a medida que el nivel matemático aumenta, se hace necesario construir nuevos objetos, no físicos sino mentales, y manipularlos para construir las ideas matemáticas. (p. 66)

A partir de esta premisa; la teoría APOE se plantea como objetivo describir tanto el camino como la construcción de las estructuras cognitivas «*lógico-matemáticas*», realizadas por un individuo durante el proceso de aprendizaje de un concepto matemático. En donde, para lograr la comprensión de un determinado concepto matemático un individuo cualquiera debe transitar por las construcciones mentales de ***A****cción,* ***P****roceso,* ***O****bjeto y* ***E****squema* (de aquí el acrónimo APOE), por medio de los mecanismos de *interiorización*, *encapsulación*, *desencapsulación*, *reversión*, *coordinación*, *generalización* (Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktac, Fuentes, Trigueros y Weller, 2014).

En otras palabras; los elementos que describe la teoría APOE se sustentan en diferentes construcciones mentales como: *acciones*, *procesos*, *objetos* y *esquemas*; las cuales son consideradas como etapas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos. Estos a su vez son relacionados con diferentes mecanismos como: *interiorización*, *coordinación*, *encapsulación* y *reversión*, entre otros, que permiten mediar entre cada una de las construcciones y generar así una nueva etapa del saber matemático.

Esta teoría es el resultado del estudio del mecanismo de entendimiento de la «*Abstracción Reflexiva*» piagetiana, que se refiere a la reflexión sobre las *acciones* y *procesos* que se efectúan desde un *objeto* de conocimiento.

Estados mentales cognitivos. A continuación, se dará una breve explicación de las diferentes construcciones mentales que se dan durante el proceso de adquisición de un conocimiento matemático, según la teoría APOE.

1.- **Acción**. La estructura de *acción* es considerada como la más simple dentro de la teoría APOE, pero esto no le resta importancia ya que es fundamental en la construcción de cualquier concepto matemático. Es decir; si la comprensión de un concepto por parte del individuo se limita a realizar solo *acciones*, entonces decimos que posee una concepción *acción* de tal idea. Aunque una concepción *acción* sea muy limitada la construcción de *acciones* viene a ser crucial al inicio de la comprensión de un concepto.

Las *acciones* pueden ser procedimientos memorizados que normalmente se realizan paso a paso y que se responden de manera muy concreta.

Según Asiala *et al*., (1996) la *acción* es una transformación de un objeto el cual es percibido por el individuo hasta cierto punto como algo externo, es decir; cuando es una reacción a estímulos los cuales pueden ser físicos o mentales.

Al respecto, Trigueros (ob. cit.) dice que;

> La transformación se lleva a cabo como una reacción a una indicación que da información precisa sobre los pasos que se van a seguir. Si una persona únicamente puede resolver problemas haciendo uso de este tipo de transformaciones, decimos que está a nivel acción. (pp. 8-9)

En ese sentido; una *acción* puede consistir en una simple repuesta o en una secuencia de respuestas después de haber recibido indicaciones exactas de los pasos o secuencias que se deben realizar. Mientras que Salgado y Trigueros (2015) sostienen que; realizar *acciones* constituye el inicio de la construcción de cualquier concepto matemático, es decir; al llevar a cabo *acciones* sobre *objetos* matemáticos conocidos y reflexionar sobre el concepto bajo estudio el alumno *interioriza* las *acciones* en *procesos*; ello le permite llevarlas a cabo sin necesidad de reglas específicas o saltarse pasos en los algoritmos.

2.- **Proceso**. El *proceso* es una estructura dinámica que se realiza cuando se ejecuta la misma *acción*, pero ésta no necesariamente está dirigida por estímulos externos al individuo, ya que ocurre por la reflexión ante una *acción* realizada repetidas veces. En otras palabras; cuando se repite una *acción* o un conjunto de *acciones* y se reflexiona sobre ellas la *acción* se *interioriza* en un *proceso*. Dubinsky (ob. cit.) sostiene que; a diferencia de la construcción de la *acción* el estudiante percibe el nivel *proceso* como algo interno y bajo su control ya que no está dirigido por alguna indicación externa. Además, sostiene que la *coordinación* de dos o más *procesos* puede permitir obtener un nuevo *proceso*.

Así mismo; en el *proceso* el sujeto puede describir los pasos involucrados en la transformación e incluso puede invertirlos, es decir, el individuo tiene más control de la transformación. En este nivel cognitivo es posible saltar pasos, *generalizar* o imaginar sin realizar *acciones* y, además, pueden ser *revertidos*.

En ese sentido; un individuo que tiene una concepción de *proceso* de una transformación puede reflexionar sobre la misma, describirla, o incluso invertir los pasos de la transformación sin realizar dichos pasos.

3.- **Objeto**. Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un *proceso* en particular, toma conciencia del *proceso* como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean *acciones* o *procesos*) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces está pensando en este *proceso* como un *objeto*.

Al respecto; Dubinsky (ob. cit.) dice que se logra el nivel de construcción *objeto* cuando el individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un *proceso* y al construir transformaciones ha *encapsulado* el *proceso* en *objeto*, para esto, es necesario tomar conciencia sobre las operaciones aplicadas a un *proceso*. Trigueros (ob. cit.) dice que; un *objeto* se crea "cuando el individuo es consciente del proceso como una totalidad, puede pensar en él como un todo y es capaz de actuar sobre él" (p. 9), esta descripción es un mecanismo mental que se conoce como *encapsulación* del *proceso*.

Al respecto, Jiménez, (ob. cit.) dice que; los "objetos existen en la mente de las personas, y pueden ser identificados fácilmente a través de la asociación que se tiene sobre ellos, e incluso se puede desencapsularlos y volver a los procesos" (pp. 37-38).

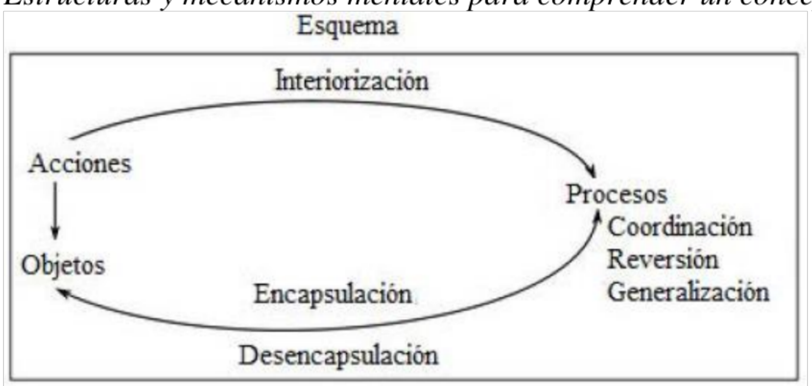
4.- **Esquema**. Es una colección de *Acciones*, *Procesos*, *Objetos* y otros *Esquemas* que se asumen como la interacción de los mecanismos caracterizados por ser dinámicos y por permitir una reconstrucción continua en los procesos de enseñanza y aprendizaje en las prácticas de aula con relación a la matemática escolar.

Para Asiala *et al*., (ob. cit.), la coherencia de un *esquema*

> está determinada por la capacidad del individuo para determinar si se puede utilizar para hacer frente a una situación matemática en particular. Una vez que el Esquema se construye como una colección coherente de estructuras (Acciones, Procesos, Objetos, y otros Esquemas) y conexiones establecidas entre esas estructuras, que pueden transformarse en una estructura estática (Objeto) y/o se utilizan como una estructura dinámica que asimila otros Objetos relacionados o Esquemas. (p. 25)

Figura 6

Estructuras y mecanismos mentales para comprender un concepto matemático.



Nota: Fuente: Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktac, Fuentes, Trigueros y Weller (2014), p. 18; Asiala, Brown, Devries, Dubinsky, Mathews y Thomas (1996), p. 9.

La descripción sobre el desarrollo de un *esquema* ha sido utilizada en distintas investigaciones a partir de la teoría APOE.

Niveles de desarrollo de un esquema. DeVries, (2001), los adapta de la siguiente manera:

1.- **Nivel intra**; se identifica por centrarse en aspectos individuales aislados de *acciones*, *procesos* y *objetos* de naturaleza similar. El individuo no ha construido ninguna relación entre ellos. La característica de este nivel es;

> el descubrimiento de una acción operatoria cualquiera, y la búsqueda del análisis de sus diversas propiedades internas o de sus consecuencias inmediatas, pero con una doble limitación. Por un lado, no hay coordinación de esta preoperación con otras en un agrupamiento organizado; y por otro, el análisis interno de la operación en juego se acompaña de errores que se corregirán progresivamente, así como de lagunas en la inferencia que de ella puedan deducirse. (Piaget y García: 1982, p. 163)

2.- **Nivel inter**; se caracteriza por la construcción de relaciones entre *acciones*, *procesos* y *objetos*. En este nivel se comienzan a agrupar las informaciones de naturaleza similar. Lo propio de este nivel es que;

> una vez comprendida una operación inicial es posible deducir de ella las operaciones que están implicadas, o de coordinarlas con otras más o menos similares, hasta la constitución de sistemas que involucran ciertas transformaciones. Si bien hay aquí una situación nueva, existen sin embargo limitaciones que provienen del hecho de que las composiciones son restringidas, ya que solamente pueden proceder con elementos contiguos. (Piaget y García: 1982, p. 165)

3.- **Nivel trans**; se adquiere cuando se tiene construida una estructura subyacente completa en la que las relaciones descubiertas en el *nivel inter* son comprendidas dando coherencia al *esquema*. En este nivel al estudiante le resulta "fácil de definir en función de lo que ya tiene encapsulado, como involucrando, además de las transformaciones, síntesis entre ellas. Dichas síntesis, entendidas como el proceso de llegar a la conclusión y comprensión de algo que no conocía". (Piaget y García, 1982, p.167).

A continuación, se presentan siete (7) mecanismos mentales que esgrime la teoría APOE como puente para pasar de una estructura cognitiva a otra.

Mecanismos mentales. En este panorama teórico, otro aspecto de interés para esta investigación son los distintos mecanismos que utiliza un individuo cualquiera para pasar de una estructura mental cognitiva a otra, en ese sentido se tiene:

1.- **Interiorización**. Este mecanismo se presenta cuando se repiten las *acciones*, éstas ya no dependen de factores externos y el individuo ejercerse un dominio interno sobre ellas. En ese sentido; el individuo interioriza una *acción* cuando es capaz de imaginar todos los pasos sin aplicarlos necesariamente en su totalidad o en un orden estricto, además, cuando éste puede saltarse los pasos (Arnon *et al.*, ob. cit.). Este mecanismo permite el cambio (o paso) de estructura, de las *acciones* a los *procesos*.

2.- **Coordinación**. Este mecanismo se describe como la coordinación general de *acciones*, para referirse a la creación de más *objetos* y *acciones* a través del uso de una o más *acciones*. Él permite al individuo coordinar dos o más *procesos* para generar otro nuevo que puede ser *encapsulado* en un *objeto* cognitivo (Asiala *et al*., ob. cit.).

3.- **Encapsulación**. Este mecanismo permite que el individuo pase de una estructura dinámica (*proceso*) a una estructura estática (*objeto*). Principalmente todas las características del *proceso* se estructuran como un todo sobre el cual es posible aplicar nuevas transformaciones.

4.- **Desencapsulación**. Es el paso mental de devolverse desde un *objeto* al *proceso* desde el cual fue *encapsulado* el *objeto* o tuvo su origen.

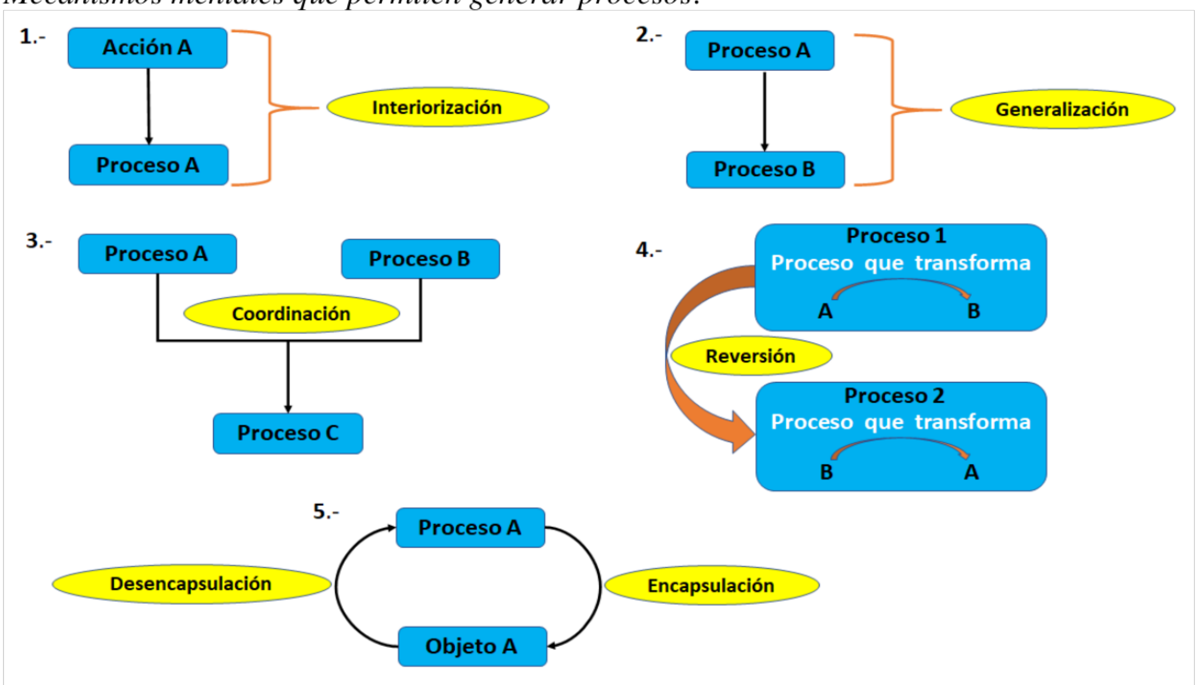
5.- **Reversión**. Una vez que el *proceso* existe internamente, al sujeto le es posible invertirlo, en el sentido de deshacerlo, para construir un nuevo *proceso* original.

6.- **Generalización**. Es el mecanismo de construcción de un *proceso* a partir de otro previamente construido.

7.- **Tematización**. Es la reflexión sobre la comprensión de un *esquema*, viéndolo como un todo, en este mecanismo el individuo es capaz de realizar *acciones* sobre el *esquema*. Aquí se dice que el *esquema* ha sido *tematizado* en un *objeto*.

Figura 7

Mecanismos mentales que permiten generar procesos.



Nota: esta es una estructuración de los mecanismos mentales de la teoría APOE y junto con ellos se muestran los diferentes procesos cognitivos que se dan durante la adquisición de un conocimiento matemático nuevo. Fuente: Fuentealba (ob. cit.).

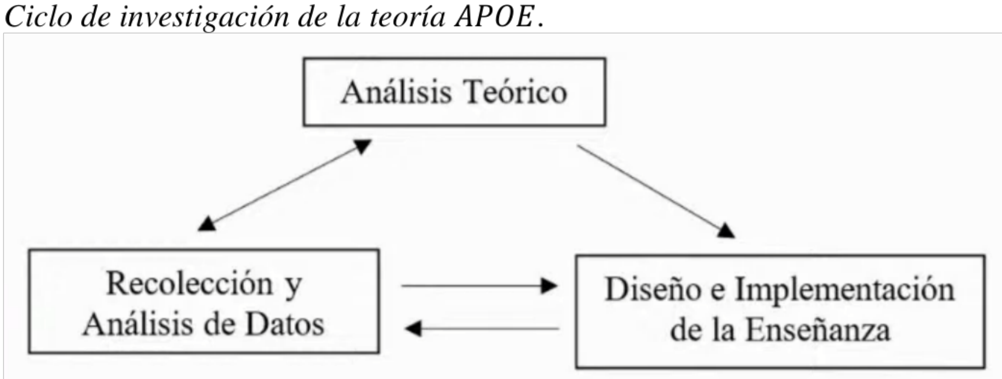
Ahora bien; descritas las construcciones mentales, los mecanismos y sus relaciones según el enfoque de la teoría APOE, éstas se pueden representar en un modelo denominado ***Descomposición Genética*** (en adelante, DG). La DG es un modelo didáctico (o mapa cognitivo), realizado por el investigador para un objeto matemático en específico, que describe con detalle cómo se produce la comprensión del saber matemático a través de diferentes estructuras complejas del pensamiento y descripciones explícitas de las posibles relaciones entre las *acciones*, *procesos*, *objetos* y *esquemas* (Arnon *et al.*, ob. cit.).

Una característica importante de la DG es que este modelo no es único. Es decir; para un mismo concepto o tema matemático se puede diseñar más de una DG, este diseño dependerá de la visión de cada investigador, sin embargo, aquí, la pregunta de interés sería ¿cuál de los distintos modelos diseñados para el mismo concepto matemático es el más eficiente?

La única manera de dar respuesta a la pregunta anterior es poner a prueba cada DG mediante investigación. Estas investigaciones se logran mediante el diseño y aplicación de instrumentos de recolección de datos basados en la DG diseñada observando qué *acciones*, *procesos*, *objetos* y *esquemas* muestran los estudiantes. A partir de los resultados, obtenidos en los instrumentos, la DG puede desecharse o puede refinarse para luego, volverla a probar tantas veces como sea necesario hasta que el modelo funcione. Es decir; hasta lograr que el modelo funcione para predecir las construcciones mentales que hacen los estudiantes, una vez, llegado a ese punto se dice que la DG es válida (Trigueros, ob. cit.).

Este proceso de refinamiento (a saber, un bucle finito) apoyado en: **1**.- un *Análisis Teórico* del concepto o tema matemático para generar una DG, **2**.- un *Diseño e Implementación de la Enseñanza*, que incluye el diseño de diferentes instrumentos de recolección de datos con base en el *análisis teórico* y **3**.- la *Recolección y Análisis de Datos*, que permite a la luz de la DG analizar la pertinencia de las estructuras y mecanismos mentales planteados de manera hipotética, es conocido en la teoría APOE como su *Aspecto Metodológico* o ***Ciclo de Investigación***.

Figura 8
Ciclo de investigación de la teoría APOE.



Nota: Fuente: Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktac, Fuentes, Trigueros y Weller (2014).

Basados en la información recopilada hasta el momento y con el apoyo de Vergara y Vitola, (2021), se hará una descripción breve de los aspectos: *ontológico*, *epistemológico*, *axiológico* y *teleológico* de la teoría APOE.

1.- **Aspecto ontológico**. La teoría APOE se presenta como un paradigma local, no problematiza la ontología del realismo científico ni la existencia de un mundo objetivo predeterminado. Para Dubinsky, las matemáticas son una construcción del individuo producto de la experiencia humana. El contexto, la cultura y las interacciones humanas tienen un papel secundario. La enseñanza con esta teoría está enfocada en determinar las condiciones para un verdadero aprendizaje significativo.

2.- **Aspecto epistemológico**. El conocimiento matemático de un individuo está sujeto a la tendencia de responder a problemas matemáticos percibidos mediante el reflejo de problemas y sus soluciones dentro de un contexto social, por medio de la construcción o reconstrucción de las *acciones* matemáticas, *procesos* y *objetos* (estructuras mentales cognitivas), organizándolas en *esquemas* para luego invocarlas en la solución de situaciones matemáticas. La actividad matemática se interpreta como la solución de situaciones problémicas relacionadas con los conceptos matemáticos a partir de las representaciones mentales construidas por el individuo.

3.- **Aspecto axiológico**. Al presentarse como un paradigma local la teoría APOE se enfoca en los aspectos cognitivos y los valores; al igual que el contexto, la cultura y las interacciones humanas juegan un papel secundario.

4.- **Aspecto teleológico**. La teoría APOE propone un modelo o mapa cognitivo, al que ha llamado «*Descomposición Genética*» (DG) para describir las diferentes estructuras y mecanismos mentales, basadas en la «*abstracción reflexiva*» de un individuo cualquiera cuando éste busca apropiarse de un concepto matemático.

Método de enseñanza en la teoría* APOE**. Otro aspecto de interés en la teoría APOE es que ésta tiene su propio método de enseñanza llamado ciclo ACE, este es el acrónimo de las palabras: ***A*ctividades*, ***C****lase* y ***E****jercicios*. A continuación, vamos a realizar una explicación breve de cada una de estas etapas.

1.- **Actividades**. La enseñanza fundamentada con la teoría APOE inicia en el aula de clase con *actividades* diseñadas en función de una DG. El protocolo a seguir en esta etapa es; reunir a los estudiantes en pequeños grupos para que realicen trabajos colaborativos sobre las *actividades*, en esta fase los estudiantes deben ser guiados por el docente. En esta etapa del ciclo ACE es válido, si se tiene, el uso de la tecnología.

2.- **Clase**. Después de un tiempo prudencial de trabajo grupal, el docente llama a la discusión en *clase* promoviendo la reflexión y las construcciones mentales deseadas o previstas en la DG. Aquí se discute el trabajo que se ha hecho en los equipos, se cuestiona, se reflexiona conjuntamente y se va formalizando el conocimiento matemático de interés. Este paso entre *actividades* y discusión en *clase* se puede repetir varias veces en una misma sesión de clase generando así un bucle finito.

3.- **Ejercicios**. Esta etapa contiene la posibilidad de que los estudiantes hagan, ya sea en el aula clase o fuera de clase, *ejercicios* (o tareas) individuales o en equipos, esos *ejercicios* pueden ser diseñados por el docente, pueden ser generados a partir de la DG o incluso pueden ser extraídos del libro de texto recomendado para el curso. Este trabajo constituye para el estudiante una nueva forma de reflexión ya sea individual o en equipo.

Para finalizar con este apartado, se puede decir que; el ciclo ACE se debe repetir tantas veces como sea necesario para lograr un *aprendizaje significativo* de un tema o concepto matemático determinado.

A continuación, se formula una pregunta de interés para esta investigación en relación al alcance de la teoría APOE.

¿Qué permite la teoría* APOE*? Ella permite diseñar con mucha fineza y realizar análisis muy detallados de instrumentos de enseñanza y de instrumentos de investigación. Con estos instrumentos, la teoría APOE, permite el diagnóstico y la evaluación del conocimiento de los estudiantes mediante la detección de las dificultades y aciertos de los mismos. Su nivel de detalle permite el refinamiento de estos instrumentos hasta, el punto de, lograr obtener un mapa cognitivo eficiente (a saber, una DG), de tal manera que; con él se logre explicar, ayude a resolver las dificultades y promueva el *aprendizaje significativo* de un objeto matemático en particular.

Teoría de Entrada en Estadística

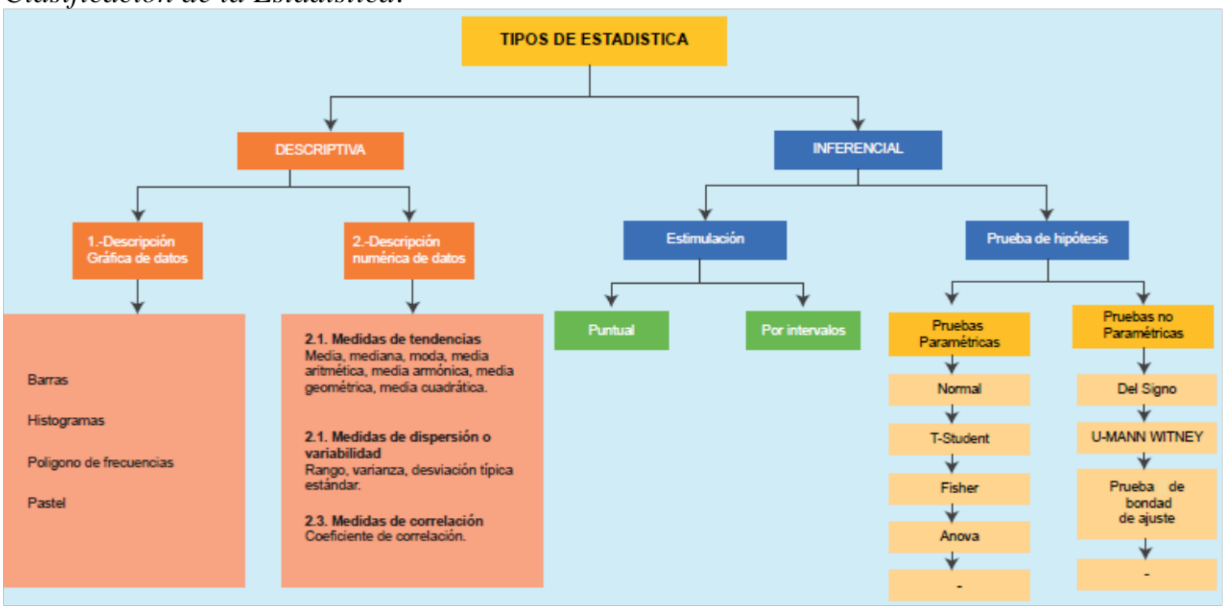
La estadística se refiere a la técnica de recolección, representación, procesamiento, análisis, modelación e interpretación de un conjunto de datos en el ámbito de la incertidumbre todo con el fin de tomar decisiones.

Al respecto, Lombardía, González-Manteiga y Prada-Sánchez (2003) dicen que; “el objetivo del análisis estadístico es extraer de los datos la información relevante para deducir propiedades de la población que los genera” (p. 336).

Para tener un mejor panorama del alcance de la estadística, en la siguiente figura, se muestra a groso modo su clasificación; dividiéndola en estadística *descriptiva* y estadística *inferencial*.

Figura 9

Clasificación de la Estadística.



Nota: Fuente: Congacha (2016).

En ese sentido; el objetivo de la «*Inferencia Estadística*» es inferir propiedades generales de una población a partir de lo observado en una muestra. De forma más precisa, suponiendo que se tiene una muestra y que se quiere estimar un parámetro $\boldsymbol{\theta}$ asociado a la distribución de dicha muestra. El objetivo no solo es estimar el valor de ese parámetro sino también cuantificar la imprecisión asociada a esa estimación.

Siguiendo la idea anterior; la aproximación tradicional de la inferencia se basa en asumir que los datos siguen determinadas hipótesis y modelos de probabilidad para, a partir de ellos, construir estimadores y caracterizar de forma analítica la distribución de probabilidad (exacta o asintótica) de dichos estimadores. Esta aproximación puede presentar dos problemas, primero que, en situaciones complejas, estos cálculos pueden ser complicados o difíciles de obtener. Además; si las hipótesis o simplificaciones planteadas no son adecuadas, los resultados no serán fiables.

Por otra parte; las técnicas de remuestreo son técnicas desarrolladas hace pocos años para calcular estadísticos, basándose en técnicas computacionales intensivas que evitan los cálculos complejos de la teoría estadística tradicional. Aunque el uso de las técnicas de remuestreo implican el uso de conceptos tradicionales de inferencia estadística, cambia radicalmente su implementación. En ese sentido; mediante el uso de computación intensiva se aplican las técnicas de manera flexible, fácil y con un mínimo de aparato matemático.

Siguiendo la idea del remuestreo; el método **Bootstrap** es un procedimiento estadístico que también es llamado método de remuestreo o computacionalmente intensivo, éste proporciona técnicas de inferencia en situaciones más realistas, que requieren menos hipótesis de partida y no requieren obtener la distribución de probabilidad teórica de los estimadores. Su ventaja principal es que no requiere hipótesis sobre el mecanismo generador de los datos.

Por otra parte, su implementación en el ordenador suele ser sencilla, en comparación con otros métodos. Su principal inconveniente es la necesidad de computación intensiva, debido a la fuerza bruta del método de Monte Carlo. Sin embargo, con la capacidad computacional actual, esta mayor carga computacional del bootstrap no suele ser un problema hoy en día.

La idea clave es remuestrear a partir de una muestra consolidada –ya sea de forma directa o en un modelo ajustado– con el objetivo de crear réplicas de conjuntos de datos a partir de los cuales se puede evaluar la variabilidad de los estimadores de interés sin un análisis analítico complejo.

La idea de fondo sigue siendo la de construir un modelo de distribución para determinados estadísticos a partir de la información proporcionada por la muestra original, aunque el modo de proceder es distinto. En los métodos estadísticos clásicos la base para hacer inferencias sobre la población se encuentra en suponer para los estadísticos una distribución muestral teórica, cuyos parámetros pueden ser estimados a partir de estadísticos observados en una muestra. En cambio, los procedimientos basados en el Bootstrap implican obviar los supuestos sobre la distribución teórica que siguen los estadísticos. En su lugar; la distribución del estadístico se determina simulando un número elevado de muestras aleatorias construidas directamente a partir de los datos observados. Es decir; se utiliza la muestra original para generar a partir de ella nuevas muestras que sirvan de base para estimar inductivamente la forma de la distribución muestral de los estadísticos, en lugar de partir de una distribución teórica asumida a priori.

Este enfoque tiene su antecedente inmediato en las técnicas de simulación del método de Monte Carlo, cuyo objetivo es extraer un número elevado de muestras aleatorias de una población conocida para calcular a partir de ellas el valor del estadístico cuya distribución muestral pretende ser estimada (Mooney, 1997).

El Bootstrap fue introducido en 1979 por el doctor Bradley Efron, matemático, especialista en Estadística, su formación académica la hizo en el Instituto Tecnológico de California (BS) y la Universidad de Stanford (PhD). Efron, concibió el método bootstrap como una ampliación de las técnicas Jackknife, las cuales suelen proceder extrayendo muestras construidas al suprimir cada vez un solo elemento de la muestra original para valorar el efecto sobre determinados estadísticos (Miller, 1974). Éste fusionó la potencia del método de Monte Carlo con la resolución de problemas planteados de forma muy general.

Figura 10

Foto del doctor Bradley Efron.

Nota: Fuente: Efron (2013).

Así mismo; el Método Bootstrap es un mecanismo no paramétrico para el cálculo de estimaciones a través del muestreo de la muestra original. El término bootstrap deriva de la frase «*to pull oneself up by one's bootstrap*». Se basa en el libro del siglo XVIII *las aventuras del barón Munchausen de Rudolph E. Raspe*. El barón había caído en el fondo de un profundo lago y se le ocurrió escapar tirando de los cordones de sus propias botas.

Figura 11

El barón Munchausen.

Nota: Fuente: Efron y Tibshirani (1993).

Etimológicamente la palabra bootstrap significa; cinta de la bota (oreja lateral para calzarse las botas). Modismo anglosajón: to pull oneself up by one's bootstraps (Cao y Fernández, 2021).

A continuación, se muestra un esquema del objetivo del método Bootstrap.

Esquema del Bootstrap. Supóngase que; a partir de cierta investigación se obtiene una muestra $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sobre la que se tiene interés en un determinado estadístico $\hat{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x})$. Por ejemplo, $\boldsymbol{x}$ es el grupo experimental de observaciones y $\hat{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x})$ es la media muestral.

En el caso del bootstrap; se define una «*muestra bootstrap*» $\boldsymbol{x}^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$ que se obtiene muestreando $\boldsymbol{n}$ veces con reemplazamiento a partir de los datos de la muestra original;

$$\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}\,.$$

En otras palabras; la nueva muestra ($\boldsymbol{x}^*$) se obtiene por medio de un muestreo aleatorio simple con reposición sobre la muestra original. Es decir; tras la extracción de un primer elemento, éste se repone en la muestra original de tal forma que podría ser elegido de nuevo como segundo elemento de la nueva muestra. De este modo; cada observación individual tiene la probabilidad $\boldsymbol{1/n}$ de ser elegida cada vez. Por ejemplo, si $\boldsymbol{n} = 7$ una posible muestra bootstrap podría ser;

$$\boldsymbol{x}^* = \{x_5, x_7, x_5, x_4, x_7, x_3, x_1\}.$$

Luego; para la muestra obtenida, $\boldsymbol{x}^*$, se calcula el valor de un determinado estadístico, $\hat{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}^*)$, que se utiliza como estimador del parámetro poblacional $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{P})$, en cuyo estudio se está interesado. Se repiten los dos pasos anteriores, hasta obtener un elevado número de estimaciones $\hat{\boldsymbol{s}}^*(\boldsymbol{x}^{*m})$. En este punto; el recurso a herramientas computacionales que desarrollen las tareas de selección de muestras y determinación de las estimaciones del parámetro de interés resultará necesario.

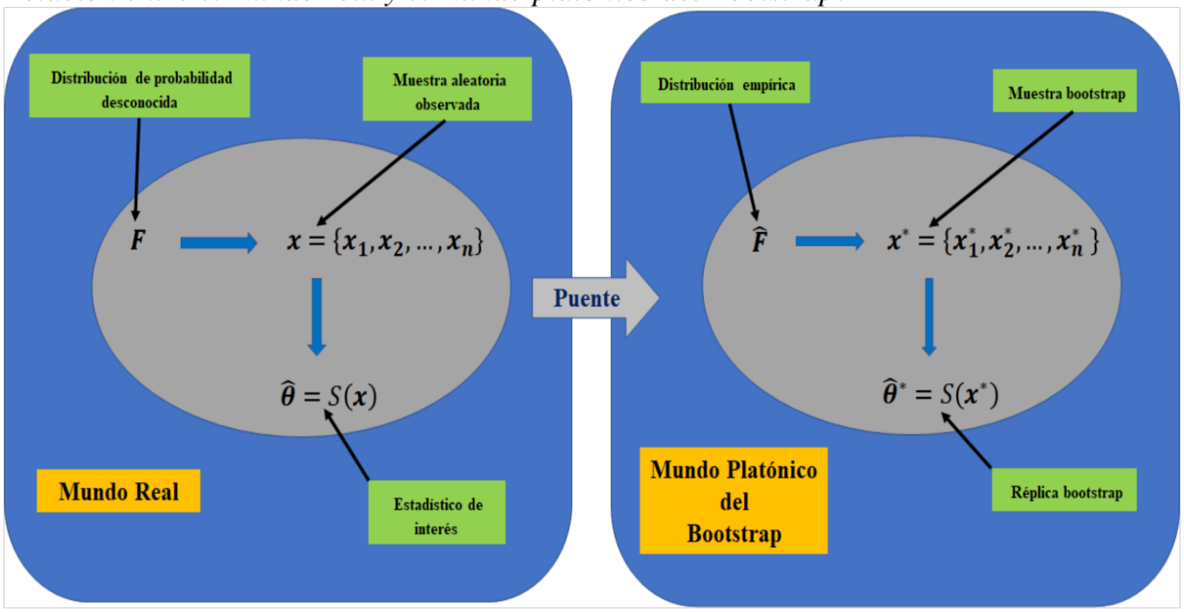
Con las ideas anteriores; se construye una distribución empírica del estadístico $\hat{\boldsymbol{s}}$, que representa una buena aproximación a la verdadera distribución de probabilidad para ese estadístico. Es decir; se determina de este modo la distribución muestral de un estadístico sin haber hecho suposiciones sobre la distribución teórica a la que ésta se ajusta y sin manejar fórmulas analíticas para determinar los correspondientes parámetros de esa distribución.

Efron y Tibshirani, (ob. cit.), muestran en la Figura 12 un resumen, de la relación entre la muestra aleatoria y la técnica de remuestreo (bootstrap), de dos mundos paralelos que se detallan a continuación.

Es de hacer notar que; estos dos mundos son vistos como la interpretación de la estadística inferencial y la teoría detrás de la técnica Bootstrap. Con ellos solo se busca activar la imaginación del lector en lo referente a cómo se relacionan ambas teorías.

Figura 12

Relación entre el mundo real y el mundo platónico del Bootstrap.



Nota: Fuente: Efron y Tibshirani (ob. cit.).

A continuación; se dará una breve explicación de los dos mundos presentes en la figura anterior. En el mundo real se parte de una muestra observada $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ obtenida por muestreo aleatorio de una distribución $\boldsymbol{F}$. Se desea estimar un parámetro de interés $\boldsymbol{\theta} = T(\boldsymbol{F})$ en base a la muestra $\boldsymbol{x}$. Para este propósito; se calcula el estimador $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = S(\boldsymbol{x})$ de dicho parámetro, y se quiere conocer la distribución de probabilidad de ese estimador.

En el mundo platónico del bootstrap, la «*muestra bootstrap*» $\boldsymbol{x}^* = \{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\}$ es obtenida por muestreo aleatorio simple con reposición de la distribución empírica $\widehat{\boldsymbol{F}}$. A partir de esta muestra se calculará $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^* = S(\boldsymbol{x}^*)$, la «*réplica bootstrap*» del estadístico de interés. A partir de una muestra de valores de $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^*$ se puede caracterizar la distribución de ese estimador.

La clave del bootstrap radica en el puente que une los dos mundos, en el proceso por el cual se construye a partir de $\boldsymbol{x}$ un estimador $\widehat{\boldsymbol{F}}$ para la distribución $\boldsymbol{F}$.

Aunque la distribución $\boldsymbol{F}$ de $\boldsymbol{X}$ (población) sea conocida, en general determinar la distribución exacta del estimador $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ es complicado.

De acuerdo con la idea central en que se basa el método Bootstrap; el procedimiento supone utilizar la muestra considerando que en sí misma contiene la información básica sobre la población. Por tanto, la adecuación de este método será tanto mayor cuanta más información aporte la muestra sobre la población. Una consecuencia directa es que a medida que aumenta el tamaño de la muestra mejor será la estimación que se puede hacer sobre la distribución muestral de un estadístico determinado.

Para concluir, se puede decir que; el método Bootstrap es una manera de resolver el problema de estimación cuando se desconoce la distribución de la muestra, en este sentido el investigador que dé uso a esta técnica de remuestreo puede prescindir del supuesto de «*normalidad*» para construir sus estimaciones.

Bases Legales

Los aspectos legales como fundamentación jurídica de esta investigación, están contemplados en la Constitución de la República Bolivariana de Venezuela (1999) y la Ley Orgánica de Educación (2009), los cuales se detallan con los párrafos que continúan.

Constitución de la República Bolivariana de Venezuela

En su capítulo VI, expresa artículos relacionados con los Derechos Culturales y Educativos:

> ***Artículo 99***. Los valores de la cultura constituyen un bien irrenunciable del pueblo venezolano y un derecho fundamental que el Estado fomentará y garantizará, procurando las condiciones, instrumentos legales, medios y presupuestos necesarios. Se reconoce la autonomía de la administración cultural pública en los términos que establezca la ley. El Estado garantizará la protección y preservación, enriquecimiento, conservación y restauración del patrimonio cultural, tangible e intangible, y la memoria histórica de la Nación. (p. 20)

Sabiendo que, la Matemática debe ser tomada como un valor cultural, esta debe ser considerada un bien irrenunciable de todo venezolano y, además, un derecho fundamental donde el Estado dará condiciones necesarias y así, la enseñanza de la misma se desarrolle de forma óptima. El Estado reconocerá las diferentes estrategias diseñadas en relación a los procesos de enseñanza y aprendizaje, siempre y cuando estén enmarcadas en la ley en pro del buen desarrollo académico de los venezolanos en relación a la adquisición de una cultura matemática de alto nivel.

> ***Artículo 102***. La educación es un derecho humano y un deber social fundamental, es democrática, gratuita y obligatoria. El estado la asumirá como función indeclinable y de máximo interés en todos sus niveles y modalidades, y como instrumento del conocimiento científico, humanístico y tecnológico al servicio de la sociedad. La educación es un servicio público y está fundamentada en el respeto a todas las corrientes del pensamiento, con la finalidad de desarrollar el potencial creativo de cada ser humano y el pleno ejercicio de su personalidad en una sociedad democrática basada en la valoración ética del trabajo y la participación activa, consciente y solidaria en los procesos de transformación social, consustanciados con los valores de la identidad nacional y con una visión latinoamericana y universal. El Estado, con la participación de las familias y la sociedad, promoverá el proceso de educación ciudadana, de acuerdo con los principios contenidos en esta Constitución y en la ley. (pp. 20-21)

Corresponde a los derechos culturales y educativos de los ciudadanos y ciudadanas venezolanos, todos tienen derecho a una educación democrática, gratuita y obligatoria, basada en el respeto a todas las corrientes de pensamiento, integral, de calidad, permanente, en igualdad de condiciones y oportunidades, y así desarrollar el potencial creativo de cada ser humano y desarrollar la personalidad valorando sus acciones y actitudes para promover el proceso educativo, es decir, la educación debe dirigirse a todas las clases sociales por igual, respetando ideología, pensamiento y actitudes de cada individuo que conforma el proceso.

Aunado a lo anterior, la enseñanza de la ciencia, en el ámbito educativo remite a las competencias analíticas del cálculo aritmético y lógico, ambas asociadas indefectiblemente al compromiso del Estado de formar ciudadanos aptos para el ejercicio pleno de sus deberes y derechos como sujetos de ley. El empoderamiento del ciudadano en sus espacios sociales involucra el desarrollo de éste en los diferentes subsistemas y niveles educativos. No es el Estado el único responsable de la enseñanza y promoción científica, pero es quien tiene la iniciativa y exhibe las mayores condiciones y recursos.

> ***Artículo 103***. Toda persona tiene derecho a una educación integral de calidad, permanente, en igualdad de condiciones y oportunidades, sin más limitaciones que las derivadas de sus aptitudes, vocación y aspiraciones. La educación es obligatoria en todos sus niveles, desde el maternal hasta el nivel medio diversificado. La impartida en las instituciones del estado es gratuita hasta el pregrado universitario. A tal fin, el estado realizara una inversión prioritaria, de conformidad con las recomendaciones de la Organización de las Naciones Unidas. El Estado creará y sostendrá instituciones y servicios suficientes dotados para asegurar el acceso, permanencia y culminación en el sistema educativo. (p. 21)

La educación sigue siendo un derecho gratuito a cargo del estado, donde cada infraestructura debe ser entregada en óptimas condiciones e igualdad a todos los ciudadanos y ciudadanas del país, solo limitándose en los grupos indígenas, cuyo modelo educativo debe estar ajustado a su mundo cultural, respetando sus tradiciones, sin embargo, no deben ser apartados de su derecho; deben ser aceptados y con métodos educativos tradicionales adaptados y así garantizar una misma educación.

En este mismo orden de ideas, se tiene que la educación es gratuita y obligatoria desde la maternal hasta el grado universitario, el estado continuamente iniciará diversas instituciones donde se garantice la estadía y finalidad en este proceso, también se enfoca hacia las personas con discapacidades, ya sea mentales o físicas, quienes deben ser partícipes con los mismos derechos al sistema educativo. Al ser un derecho también deben respetarse las actitudes, pensamientos, vocaciones y aspiraciones de cada individuo, ninguna institución debe obligar a un estudiante a cambiar su forma de pensar solo porque éste sea diferente a algún miembro de la institución, tampoco debe ser discriminado por su vocación.

Artículo 110. *"*El Estado reconocerá el interés público de la ciencia, la tecnología, el conocimiento, la innovación y sus aplicaciones y los servicios de información necesarios por ser instrumentos fundamentales para el desarrollo económico, social y político del país*"* (p. 22).

Las ciencias exactas y sociales, entre ellas la matemática, la física, la química y ciencias biológicas, forman parte de un bien cultural común e inmaterial de la cultura venezolana y humana. El afán pedagógico y docente debe fomentar, desarrollar y fortalecer las competencias y habilidades de dominio e indagación científico en los ámbitos educativos en aras de la formación integral del estudiante y futuro ciudadano, con ello se estimularía la observación, indagación y posible abstracción de problemas cercanos al contexto social, con la intervención científica sistematizada y organizada desde una o varias disciplinas científicas.

Ley Orgánica de Educación

En su capítulo I, trata las Disposiciones Fundamentales:

> ***Artículo 14***. La educación es un derecho humano y un deber social fundamental concebida como un proceso de formación integral, gratuita, laica, inclusiva y de calidad, permanente, continua e interactiva, promueve la construcción social del conocimiento, la valoración ética y social del trabajo, y la integralidad y preeminencia de los derechos humanos, la formación de nuevos republicanos y republicanas para la participación activa, consciente y solidaria en los procesos de transformación individual y social, consustanciada con los valores de la identidad nacional, con una visión latinoamericana, caribeña, indígena, afro descendiente y universal. La educación regulada por esta ley se fundamenta en la doctrina de nuestro Libertador Simón Bolívar, en la doctrina de Simón Rodríguez, en el humanismo social y está abierta a todas las corrientes de pensamiento. La didáctica está centrada en los procesos que tienen como eje la investigación, la creatividad y la innovación, lo cual permite adecuar las estrategias, los recursos y la organización del aula, a partir de la diversidad de intereses y necesidades de los y las estudiantes. (p. 8)

Enmarcada en la jurisprudencia fundamental del Estado, la educación debe llevarse a cabo en su forma gradual y continua en la formación de ciudadanía y construcción de valores de convivencia social, por lo tanto, se requiere una permanente actualización de los métodos y planes instrumentales a través de los cuales, todo docente debe acercar, promover, incentivar y estimular los procesos de aprehensión de saberes y conocimientos tomando en cuenta las necesidades e intereses de los estudiantes. La didáctica especializada y pertinente debe ser una práctica constante del docente dentro y fuera del aula. Además, también se refiere a la formación completa, que se mantenga gratuita, sea laica y eficaz con miras a la transformación individual y social de la población, mediante la investigación, innovación y creatividad de los estudiantes.

Artículo 15. En relación a los fines de la educación, presenta en su literal 8 la importancia de "desarrollar la capacidad de abstracción y el pensamiento crítico mediante la formación en filosofía, lógica y matemáticas, con métodos innovadores que privilegien el aprendizaje desde la cotidianidad" (pp. 8-9).

En su capítulo II, referente a los Corresponsables de la Educación establece:

> ***Artículo 17***. Las familias tienen el deber, el derecho y la responsabilidad en la orientación y formación en principios, valores, creencias, actitudes y hábitos en los niños, niñas, adolescentes, jóvenes, adultos y adultas, para cultivar respeto, amor, honestidad, tolerancia, reflexión, participación, independencia y aceptación. Las familias, la escuela, la sociedad y el Estado son corresponsables en el proceso de educación ciudadana y desarrollo integral de sus integrantes. (p. 9)

Este artículo, hace referencia a la responsabilidad e importancia de la familia, como una institución humana, un cuerpo mediato entre el individuo y lo social. Destacando la significación de la familia en el proceso de socialización primaria y la interiorización en la formación de sus hijos e hijas de los principios y valores de la sociedad de origen.

Fundamentación Teórica de las Variables de Estudio

Rendimiento Académico Inmediato

Desde hace tiempo el tema relacionado con el rendimiento académico ha sido controversial, sobre su objetividad, medición, interpretación y significado hay numerosas investigaciones y no ha sido poco el debate entre pedagogos, investigadores, docentes y demás personas interesadas en el campo educativo; no se pretende agotar esta discusión en las siguientes líneas, pero a los fines prácticos y la precisión en los términos que exige una investigación científica, a continuación, se muestra la conceptualización de rendimiento académico válida para este trabajo.

Al respecto, Landeta (2018) expone, en su tesis doctoral titulada *La motivación y el rendimiento académico en las materias de Matemáticas y Estadística*; que el rendimiento académico:

> Hace referencia a la evaluación del conocimiento adquirido en el ámbito académico. Así, se dice de un estudiante que tiene buen rendimiento académico si obtiene calificaciones positivas en las pruebas que debe realizar a lo largo de un curso. Tradicionalmente, el rendimiento académico se ha entendido como una medida de las capacidades o conocimientos del estudiante, que viene a reflejar lo que éste ha aprendido durante el proceso de enseñanza aprendizaje. Desde este punto de vista, se entiende que el rendimiento académico está en relación con las aptitudes. (p. 28)

En palabras de López, (2011), la medición en educación consiste en describir cuantitativamente el rendimiento del alumno, ésta representa el grado en que el estudiante alcanza la conducta establecida en los objetivos (p. 88).

En ese mismo sentido, será útil repasar los señalamientos de Tejedor y Rodríguez (1996) intentando clarificar este concepto:

> El rendimiento académico no es fácil de definir unívocamente y sobre él se han dado muchas interpretaciones […] podemos definir dos tipos de rendimiento, por una parte, el rendimiento en sentido estricto medido a través de la presentación a exámenes o éxito en las pruebas (calificaciones). Por otra, el rendimiento en sentido amplio, medido a través del éxito (finalización puntual), el retraso o abandono de los estudios. (p. 66)

En primer lugar; advierte de la ambigüedad y dificultad de precisión para establecer un concepto único sobre rendimiento académico, sin embargo, luego diferencia dos tendencias sobre la percepción del rendimiento: un sentido estricto y otro amplio. Para los efectos de esta investigación, interesa el sentido estricto relacionado directamente con las calificaciones obtenidas por los estudiantes al presentar una prueba.

Siguiendo la idea anterior; el rendimiento académico es el indicador de la productividad de un sistema educativo, ya sea en un bimestre, cuatrimestre, semestre o año escolar, que suministra la data fundamental que activa y desata cualquier proceso evaluativo destinado a alcanzar una educación de calidad. Ahora bien; si éste se refiere solo a calificativos cuantitativos, entonces se está hablando de un *Rendimiento Académico Inmediato* (en adelante, RAI). Es decir; el RAI es la medición del aprendizaje de un estudiante sin llegar a la etapa de evaluación del mismo. En ese sentido, se debe hacer énfasis en lo siguiente;

$$\boxed{\text{medición} \neq \text{evaluación}}$$

En esta misma línea, se enmarca la definición de rendimiento académico propuesta por Martínez-Otero (2007) al decir que: "es el producto que da el alumnado en los centros de enseñanza y que habitualmente se expresa a través de las calificaciones escolares" (p. 34). En este sentido, se tendrá como *rendimiento académico inmediato* los resultados en términos de calificaciones que obtengan los estudiantes de la FaCyT-UC, del lapso académico $1 - 2023$, en la asignatura Cálculo II, durante el tiempo que se aplique la experimentación conducente a confirmar la hipótesis de investigación, mediante una prueba objetiva.

Descomposición en Fracciones Simples

***Definición* $\mathbf{2.1}$**. (*Función Polinómica o Polinomio*). Son las funciones de la forma

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n, \qquad \mathbf{(2.1)}$$

donde $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son números reales llamados coeficientes del polinomio; $n \in \mathbb{N}$ es un número natural que, si $c_n \neq 0$, se identificará como grado del polinomio. Las funciones polinómicas tienen como dominio natural de definición la totalidad de $\mathbb{R}$.

Mientras la suma, el producto y la composición de funciones polinómicas es también una función polinómica, el cociente de funciones polinómica da lugar a las llamadas *funciones racionales* (Pérez: 2008, 39).

***Definición* $\mathbf{2.2}$**. (*Función Racional*). Es una función de la forma:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \mathbf{(2.2)}$$

donde P (el numerador) y Q (el denominador) son polinomios de la forma ($\mathbf{2.1}$) y, Q no es el polinomio constante igual a 0. La función R tiene como dominio natural de definición el conjunto por comprensión $\{x \in \mathbb{R}: Q(x) \neq 0\}$. Obsérvese que las funciones polinómicas son también funciones racionales (con denominador constante igual a 1).

Sumas, productos y cocientes de funciones racionales son también funciones racionales; y la composición de dos funciones racionales es también una función racional (Pérez: ob. cit., 39).

***Definición* $\mathbf{2.3}$**. (*Fracción Propia e Impropia*). Se dice que una función racional $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ es una *fracción* (o función) *propia*, si el grado del polinomio $P(x)$ es menor que el grado del polinomio $Q(x)$. En caso contrario, la *fracción* es llamada *impropia* (Díaz: ob. cit., 26).

***Definición* $\mathbf{2.4}$**. (*Descomposición en Fracciones Simples*). Si $R(x)$ es una *función impropia*, entonces usando el *algoritmo de la división*, $R(x)$ puede expresarse en la forma:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = g(x) + \frac{h(x)}{Q(x)} \qquad \mathbf{(2.3)}$$

donde $g(x), h(x)$ y $Q(x)$ son polinomios en x de la forma ($\mathbf{2.1}$), y además el grado del numerador $h(x)$ es menor que el grado del denominador $Q(x)$. Esto significa que (al menos teóricamente) toda *fracción impropia* puede expresarse de modo único como la suma de un polinomio $[g(x)]$ y de una *fracción propia* $[h(x)/Q(x)]$. Por esta razón, en lo siguiente solo se considerarán las *fracciones propias*.

Teóricamente, es posible escribir cualquier *fracción racional propia* $[h(x)/Q(x)]$ como una suma de expresiones racionales cuyos denominadores son potencias de polinomios de grado no mayor a dos. Concretamente; si $h(x)/Q(x)$ es una *fracción propia*, entonces del Álgebra se sigue:

$$\frac{h(x)}{Q(x)} = \underbrace{N_1 + N_2 + \cdots + N_k}_{\text{DFS}} \qquad (\mathbf{2.4})$$

donde cada N_i (con $i = 1, \dots, k$) tiene una de las dos formas siguientes:

$$\frac{\boldsymbol{A}_1}{(ax+b)^m} \text{ ó } \frac{\boldsymbol{A}_2 x + \boldsymbol{A}_3}{(px^2+qx+r)^n} \qquad (\mathbf{2.5})$$

donde $m, n \in \mathbb{Z}^+ \wedge q^2 - 4pr < 0$. La suma del lado derecho de $(\mathbf{2.4})$ se conoce como: *Descomposición en Fracciones Simples* de la fracción $h(x)/Q(x)$ y cada N_i (con $i = 1, \dots, k$) es una fracción simple (o más sencilla) en relación a $h(x)/Q(x)$ (Díaz: ob. cit., 26-27).

Definiciones Básicas

Sistema de Ecuaciones Lineales

Definición $\mathbf{2.5}$. (*Sistema de Ecuaciones Lineales*). Un sistema formado por m-ecuaciones y n-incógnitas escrito de la siguiente forma:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{gathered} \qquad (\mathbf{2.6})$$

donde los $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ (con $i = 1,2, \dots, m$ y $j = 1,2, \dots, n$) están dados, es llamado *lineal*. Una solución de este sistema de ecuaciones es una n-ada ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de números reales, así al hacer las sustituciones:

$$\begin{gathered} x_1 = \alpha_1, \\ x_2 = \alpha_2, \\ \vdots \\ x_n = \alpha_n, \end{gathered}$$

en cada una de las m-ecuaciones convierte a éstas en identidades (Del Valle: 2011, 15).

Método de Coeficientes Indeterminados

Definición $\mathbf{2.6}$. (*Descomposición en Factores Irreducibles*). Consiste en descomponer un polinomio, $Q(x)$, como producto de factores de grado uno y de factores de grado dos irreducibles:

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \cdots (x - a_n)^{\alpha_n} (x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1} \cdots (x^2 + b_m x + c_m)^{\beta_m}. \qquad (\mathbf{2.7})$$

En la descomposición $(\mathbf{2.7})$ cada a_j (con $j = 1,2, \dots, n$) es una raíz real de orden α_j del polinomio Q, y los factores cuadráticos del tipo $\left(x^2 + b_j x + c_j\right)^{\beta_j}$ (con $j = 1,2, \dots, m$)

corresponden a raíces complejas conjugadas de orden β_j. Tales factores cuadráticos son irreducibles, es decir, su discriminante es negativo o, lo que es igual, $x^2 + b_j x + c_j > 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$ (Pérez: ob. cit., 435).

***Definición* $\mathbf{2.7}$**. (*Método de Coeficientes Indeterminados*). Se Escribe el cociente $P(x)/Q(x)$ como suma de fracciones de la siguiente forma:

-Por cada raíz real a_j de orden α_j se escriben α_j fracciones cuyos numeradores son constantes A_{k_j} a determinar, y los denominadores son de la forma $\left(x - a_j\right)^{k_j}$ donde k_j toma valores de 1 hasta α_j.

-Por cada factor cuadrático irreducible $\left(x^2 + b_j x + c_j\right)^{\beta_j}$ se escriben β_j fracciones cuyos numeradores son de la forma $B_{k_j}x + C_{k_j}$ siendo B_{k_j} y C_{k_j} constantes a determinar, y los denominadores son de la forma $\left(x^2 + b_j x + c_j\right)^{k_j}$ donde k_j toma valores de 1 hasta β_j.

-La descomposición queda de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k_j=1}^{\alpha_j}\frac{A_{k_j}}{\left(x - a_j\right)^{k_j}}\right] + \sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{k_j=1}^{\beta_j}\frac{B_{k_j}x + C_{k_j}}{\left(x^2 + b_j x + c_j\right)^{k_j}}\right], \qquad \mathbf{(2.8)}$$

donde habrá que calcular tantos coeficientes como el grado del polinomio Q.

-Finalmente; se reducen todas las fracciones a común denominador [será $Q(x)$], y se iguala a $P(x)$ el numerador resultante. Esto producirá un «*sistema de ecuaciones lineales*» cuyas incógnitas son los coeficientes A_j , B_j y C_j. Luego, la resolución de dicho sistema dará el valor de cada coeficiente A_j , B_j y C_j (Pérez, ob. cit., pp. 435-436).

Método de Hermite-Ostrogradsky

***Definición* $\mathbf{2.8}$**. (*Método de Hermite-Ostrogradsky*). Se Escribe el cociente $P(x)/Q(x)$ de la siguiente forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \cdots + \frac{A_n}{x - a_n} + \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + b_1 x + c_1} + \cdots + \frac{B_m x + C_m}{x^2 + b_m x + c_m} +$$
$$\frac{d}{dx}\left[\frac{F(x)}{(x - a_1)^{\alpha_1 - 1}\cdots(x - a_n)^{\alpha_n}(x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1 - 1}\cdots(x^2 + b_m x + c_m)^{\beta_m - 1}}\right],$$

donde $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m, C_1, \dots, C_m$ son coeficientes a determinar y, en la fracción que aparece con una derivada, $F(x)$ es un polinomio genérico de grado uno menos que el denominador. En resumen, se trata de escribir $P(x)/Q(x)$ como una suma de fracciones simples, una por cada factor de $Q(x)$, más la derivada de un cociente, el cual tiene por denominador $Q(x)$ con sus factores disminuidos en una unidad y de numerador un polinomio genérico, $F(x)$, con coeficientes indeterminados de grado uno menos que el denominador. Es de hacer notar la necesidad de calcular tantos coeficientes como el grado del polinomio Q.

Se reducen todas las fracciones a común denominador [será $Q(x)$], y se iguala a $P(x)$ el numerador resultante. Esto producirá un «*sistema de ecuaciones lineales*» cuyas incógnitas son los coeficientes A_j , B_j y C_j más los coeficientes de $F(x)$, naturalmente, primero se requiere efectuar la derivada antes de reducir a común denominador. Finalmente, la solución del sistema mencionado dará el valor de todos los coeficientes (Pérez, ob. cit., p. 436).

Bootstrap

Definición $\mathbf{2.9}$. (*Bootstrap*). Esta es una metodología estadística que permite tratar a los datos disponibles como una población y sacar muestras aleatorias con reemplazo de igual tamaño a la original, de dicha población. Por eso; este procedimiento se denomina *remuestreo*, ver (Rodríguez y Agnelli, ob. cit.). En ese sentido, al poner en marcha esta metodología se notará que en las muestras generadas aparecen valores repetidos de los datos originales como consecuencia del muestreo con reemplazo (o remuestreo).

Agregando a lo anterior; la construcción de la distribución de un estadístico a partir de un conjunto de datos es de difícil visualización, pues se la debe obtener ya sea mediante fórmulas o mediante simulaciones, pero en ambos casos haciendo supuestos distribucionales acerca de la población muestreada. En ese sentido; el uso de la metodología *bootstrap*, basada en el remuestreo, permite apreciar, prescindiendo de fórmulas, cómo varía un estadístico de muestra a muestra y, por lo tanto, cómo se va construyendo la distribución muestral. Más aún, la ventaja principal del bootstrap es que no requiere hipótesis sobre el mecanismo generador de los datos (Cao y Fernández, ob. cit.).

Pruebas de Hipótesis

Definición $\mathbf{2.10}$. (*Contrastes de Hipótesis*). El objetivo de los contrastes de hipótesis es, a partir de la información que proporciona una muestra, decidir (tratando de controlar el riesgo de equivocarse al no disponer de toda la información) entre dos hipótesis sobre alguna característica de interés de la población, a saber, la hipótesis nula (H_0) y la hipótesis de investigación (H_1), Cao y Fernández (ob. cit.).

Para realizar el contraste se emplea un estadístico $D\,(X_1, \ldots, X_n;\ H_0)$, que mide la discrepancia entre la muestra observada y la hipótesis nula, con distribución conocida (o que se puede aproximar) bajo H_0.

La regla de decisión depende de la hipótesis de investigación y del riesgo asumible al rechazar H_0 siendo cierta:

$$P\ (\text{rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ cierta}) = \alpha,$$

denominado nivel de significación. Se determina una región de rechazo (RR) a partir de los valores que tiende a tomar el estadístico cuando la H_1 es cierta, de forma que:

$$P\ (D \in \text{RR} \mid H_0 \text{ cierta}) = \alpha.$$

Se rechaza la hipótesis nula (H_0) cuando el valor observado del estadístico;

$$\hat{d} = D(x_1, \ldots, x_n;\ H_0)$$

pertenece a la región de rechazo (RR).

Para medir el nivel de evidencia en contra de H_0 se emplea el $p-$valor del contraste (también, denominado valor crítico o tamaño del contraste), el menor valor del nivel de significación para el que se rechaza H_0 (que se puede interpretar también como la probabilidad de obtener una discrepancia mayor o igual que $\hat{d}$ cuando H_0 es cierta), ver (Cao y Fernández, ob. cit.).

CAPÍTULO III

"*En la investigación es incluso más importante el proceso que el logro mismo*".

Emilio Muñoz

EL MARCO METODOLÓGICO

Introducción a la Metodología

A partir de este apartado se explican, definen y se describen los elementos y detalles que dieron cuenta del recorrido metodológico que siguió el desarrollo de este trabajo. Para estos efectos, se hace un abordaje de lo general a lo particular que deductivamente muestre los caminos decididos por el investigador; relacionados con: el paradigma de investigación, el enfoque, método, tipo de diseño, tipo de investigación, sujetos/objetos de estudio, técnica e instrumento de recolección de datos y metodología de investigación, entre otros elementos operativos, mostrando la consistencia, correlación y congruencia entre estos aspectos que hacen del proceso investigativo un tejido coherente metodológicamente hablando. Este hilo conductor obedece el rigor científico al que se apega esta investigación para generar los constructos que se requirieron en el desarrollo de esta tesis doctoral.

En tal sentido, Allende (2004) refiere que;

> El rigor es parte de la esencia del trabajo científico, en cada una de las etapas del trabajo de investigación. Rigor implica una manera estructurada y controlada de la planificación, del desarrollo, análisis y evaluación de nuestra investigación y nos exige un cuidado especial en la presentación de los resultados de acuerdo con las demandas de la audiencia a la que comunicamos los resultados de nuestras investigaciones. (p. 2)

Esto quiere decir; se trata de la disciplina, responsabilidad y apego al modelo seleccionado que con idoneidad responde a la naturaleza del objeto de estudio, lo cual implica una secuencia lógica y estrictamente apegada al modelo paradigmático asumido. Esta rigurosidad, con mayor énfasis, se demarca en el recorrido metodológico como lo plantea el mismo Allende (ob. cit.), "en la parte metodológica, la selección de los métodos apropiados para llevar a cabo experimentos requiere gran minuciosidad y rigor" (p. 3). Asimismo, Rodríguez y Valldeoriola (2013) exponen;

> La metodología resulta fundamental en cualquier proceso de investigación, ya que determina el modo cómo dicha investigación se desarrolla. El conocimiento de las diversas opciones metodológicas es de gran utilidad para escoger aquella que mejor se adecue a las características de nuestro problema de investigación y a los objetivos planteados. (p. 31)

Por ello; en consideración de la trascendencia que tiene la consistencia metodológica en una investigación, se asumió de manera rigurosa lo que corresponde a estos aspectos encauzados desde la visión paradigmática asumida que automáticamente induce a un enfoque, un método y toda una metodología que le es apropiada porque se inserta en los rigores que la postura epistemológica le exige. Desde esa visión en primera instancia, a continuación, se presentan y describen los aspectos relativos al paradigma, enfoque y método asumidos para la presente investigación.

Paradigma de la Investigación

Un paradigma es un modelo predeterminado que opera ajustado a premisas filosóficas y epistemológicas. "Paradigma implica conjunto de ideas preconcebidas, tendencias de pensamiento y/o patrones de investigación compartidos. En este sentido el paradigma es algo implícito, oculto, penetrante, tácito, sin habla, que impregna al trabajo conceptual y metodológico de una investigación" (Behar: 2008, 34). De tal manera; el paradigma se interpreta como una entidad intangible, pero con una fuerza tal que dirige, encamina y soporta toda acción que se ejecute durante el proceso investigativo y del cual ninguna investigación, ni investigador, se podrán desprender, por el contrario; el proceso deberá por consecuencia mantenerse siempre en su camino paradigmático.

Por otro lado; Vasilachis (1997) define el paradigma como: "los marcos teórico-metodológicos utilizados por el investigador para interpretar los fenómenos sociales en el contexto de una determinada sociedad" (p. 80). Esto implica, que; asumir un modelo paradigmático consiste, también, en aceptar un sistema teórico y una metodología muy particular, propia y congruente con el mismo. Dicho de otra manera; el paradigma se acompaña particularmente de una base teórica (o sistema filosófico) que lo sustenta y de una metodología inherente que lo operacionaliza. Por tales razones; la consistencia y rigurosidad de la investigación está dada por esa coherencia y congruencia que le otorgan la teoría y la metodología.

Considerando las definiciones anteriores, Martínez (2013) refiere que; "así, el paradigma Positivista se operacionaliza a través del sistema de investigación Hipotético-Deductivo, mientras que el Dialéctico-Crítico y, a su vez, el Interpretativo lo hacen, a través del sistema de investigación Hermenéutico o Fenomenológico" (p. 1). Estos sistemas operativos, a los que se adhiere cada paradigma, vendrían siendo lo que se considera como las metodologías durante el proceso de investigación implicando todas las dinámicas de recolección, organización, representación, procesamiento y análisis de los datos.

En ese orden de ideas; la presente investigación se adhiere al paradigma «*Positivista*», también denominado paradigma cuantitativo, empírico-analítico, racionalista, o incluso prediccionista, considerado por muchos el paradigma dominante. Sus bases se fundamentan en el Positivismo; escuela filosófica que defiende determinados supuestos sobre la concepción del mundo y el modo de conocerlo al amparo de las concepciones de Augusto Comte. Entre sus características principales se denotan el alto interés por la verificación del conocimiento a través de predicciones que parten del planteamiento de una serie de hipótesis como manera de predecir que algo va a suceder y luego, verificarlo o comprobarlo. Tiene mayor acepción y aplicación en las ciencias exactas y naturales, pero en el campo de las ciencias sociales esto no es tan sencillo, dadas las características particulares del hombre y sus relaciones (Ballina, 1995).

Desde esa perspectiva; el proceso investigativo estuvo ceñido al rigor metodológico que requiere este paradigma en cuanto a su dinámica operativa y metodología que le corresponde. A propósito de esas premisas que conducen a la operacionalización; Usher y Bryant (1992) lo caracterizan con los siguientes supuestos básicos:

- La existencia de un mundo real exterior e independiente de los individuos como seres despersonalizados.
- El conocimiento de ese mundo puede conseguirse de un modo empírico mediante métodos y procedimientos adecuados libres de enjuiciamientos de valor para ganar el conocimiento por la razón.
- El conocimiento es objetivo (medible), cuantifica los fenómenos observables que son susceptibles de análisis matemáticos y control experimental.
- Las condiciones para la obtención del conocimiento se centran esencialmente en la eliminación de los sesgos y compromisos de valor para reflejar la auténtica realidad.

Respecto de este modelo, se puede decir que; sus propósitos científicos se ubican por encima de los valores expresados social o individualmente, e incluso del contexto, centrándose neutralmente en el mundo para dar explicaciones universales generalizables. La metodología sigue el modelo Hipotético-Deductivo de las ciencias naturales, donde se categorizan los fenómenos sociales en variables 'dependientes' e 'independientes', siendo tratadas como datos numéricos entre los que se establecen las relaciones matemáticas y/o estadísticas (Ricoy, 2006). Por lo tanto; esta tesis doctoral desarrolló sus presupuestos partiendo de un objeto de estudio totalmente medible sin considerar en ningún momento juicios de valor o interpretaciones subjetivas que la alejen de su propósito.

Enfoque de la Investigación

El enfoque de investigación corresponde a la perspectiva desde la cual se observó el fenómeno objeto de estudio y se realizó el procesamiento de los datos conducentes a la obtención del conocimiento; éste está en plena correspondencia con el paradigma utilizado y, por consiguiente, con la metodología a la que conduce ese enfoque. Para Cifuentes (2011), "el enfoque puede ser comprendido como sinónimo de perspectiva, se relaciona con las formas de mirar, en las ciencias sociales, para ubicar y caracterizar el conocimiento, la investigación y la intervención social" (p. 24). Esto significa que el investigador tiene una forma de ver el fenómeno y por consiguiente de abordarlo.

En correspondencia con el anterior planteamiento y siendo consistente con la perspectiva paradigmática asumida, el presente trabajo se desarrolló desde el enfoque «*Cuantitativo*». "El enfoque cuantitativo, utiliza la recolección de datos para probar hipótesis con base en la medición numérica y el análisis estadístico, con el fin de establecer pautas de comportamiento y probar teorías" (Hernández, Fernández y Baptista: 2014, 37). Esto es lo que de manera general se tiende a llamar Investigación Cuantitativa, en virtud de que, tanto el procesamiento y análisis de los datos, así como los resultados, se manejan como variables numéricas cuyos valores ofrecen la perspectiva de una tendencia de comportamiento del fenómeno desde donde se generaliza o particulariza para distintos escenarios en condiciones semejantes.

En el sentido de la idea anterior; la presente investigación consideró la aplicación de instrumentos de medición y comparación, con el objeto de recoger datos «*numéricos*» a los que se les aplicaron modelos «*matemáticos*» y/o «*estadísticos*». Por esta razón, se afirma que; la fundamentación de la Investigación Cuantitativa está basada en el cientificismo y racionalismo. Es decir, el conocimiento está basado en los hechos y la objetividad es la manera de alcanzar ese conocimiento utilizando la medición exhaustiva y la teoría (Palella y Martins, 2012). De esta manera; se justifica que la presente investigación conducida desde el paradigma Positivista se encauce con el enfoque Cuantitativo, en el que se aplicaron técnicas e instrumentos de recolección de datos particularmente diseñados para el tratamiento numérico y/o estadístico. Estos datos cuantificables fueron recolectados por medio de instrumentos válidos y confiables, a los cuales, posteriormente se les realizó el correspondiente análisis estadístico contrastando las respectivas hipótesis del estudio.

Método de la Investigación

En su definición etimológica, "el vocablo método proviene del griego métodos, guía y modo, Meta significa por, hacia, a lo largo; y hados significa camino o vía; la unión de ambos términos conduce al significado de camino hacia algo o por el camino" (Palella y Martins: ob. cit., p. 40). Esto indica que; se ha de definir el camino a seguir como estrategia general para alcanzar los propósitos de investigación, y en ese orden, cada método contiene en si una serie de pasos, fases o etapas que le dan una continuidad y secuencia lógica coherente al proceso de investigación.

En relación al método, para seguir una secuencia congruente, Descartes (1975), desde su obra *Discurso del Método,* planteaba cuatro (4) reglas fundamentales para construir la cientificidad:

1. No creer sino lo que es evidente. Utilizar para la construcción de la ciencia tan solo lo que se presenta en forma clara y sin ofrecer motivo de duda.
2. Dividir las dificultades a examinar en tantas partes como sea necesario.
3. Pensar ordenadamente, partiendo de lo sencillo y fácil a lo más compuesto y complejo.
4. Hacer enumeraciones tan completas como sea necesario para estar seguro de no omitir nada.

Analizando las premisas cartesianas ante la construcción de un método científico, éstas se pueden interpretar como: ***a***) solo se considera cierto aquello que es muy evidente y se presenta sin ninguna duda, concreta y precisa ante nuestros sentidos; ***b***) la fragmentación de las realidades nos permite un estudio mucho más detallado y minucioso; ***c***) siempre debe haber una secuencia lógica que debe ir de lo sencillo a lo complejo; y ***d***) cada elemento debe ser catalogado, enumerado y registrado, lo cual permitirá que no se pierdan los detalles del proceso.

Observando la secuencia anterior y respecto al método que se utilizó en la presente investigación, ya de manera casi lineal, se ha venido siguiendo un hilo conductor al que indefectiblemente conduce tanto al paradigma como al enfoque de investigación, manteniendo así la congruencia y coherencia en el discurso para su posterior validación. Para ello, siguiendo esa consistencia y rigor, se expone en este apartado el método utilizado en la presente investigación, y éste es, el método «*Científico*», técnicamente conocido como Hipotético-Deductivo. Como su nombre lo enuncia, este método parte de un conjunto de proposiciones (o hipótesis) que pretenden inicialmente establecer unas premisas explicativas sobre un fenómeno y haciendo uso de la deducción racional de lo general a lo particular (método deductivo), alcanzar esas explicaciones siguiendo un proceso riguroso. En relación a ello, Behar (2008) plantea;

> En el método hipotético-deductivo (o de contrastación de hipótesis) se trata de establecer la verdad o falsedad de las hipótesis (que no podemos comprobar directamente, por su carácter de enunciados generales, o sea leyes, que incluyen términos teóricos), a partir de la verdad o falsedad de las consecuencias observacionales, unos enunciados que se refieren a objetos y propiedades observables, que se obtienen deduciéndolos de las hipótesis y, cuya verdad o falsedad estamos en condiciones de establecer directamente. (p. 40)

Como se puede observar; se parte de hipótesis que orientan la búsqueda, ya que, en sus enunciados se presentan las variables a ser contrastadas y medidas. Efectivamente en el presente trabajo se planteó un sistema de hipótesis que contiene las variables de estudio que orientaron parte de la metodología inherente al método, de acuerdo con el cual, "la lógica de la investigación científica se basa en la formulación de una ley universal y en el establecimiento de condiciones iniciales relevantes que constituyen la premisa básica para la construcción de teorías" (Hernández: 2008, 186).

Lo hasta ahora planteado define un camino que se obliga a mantener de manera rigurosa dentro del método, así como, cada uno de los pasos que se dan en el proceso de investigación y, en particular, con los elementos de carácter metodológico. Por ello, es importante mantener claridad en los pasos del método que ya están configurados y de manera general se presentan a continuación:

1. Observación y problematización de la situación planteada.
2. Planteamiento de hipótesis.
3. Deducciones de conclusiones a partir de conocimientos previos y experiencias observables.
4. Verificación.
5. Conclusiones y teorización.

Por supuesto; los pasos mostrados solo definen a groso modo la etapa que se opera dentro del método, pero intrínsecamente se cumplen en cada paso un conjunto de procedimientos detallados que validan la etapa.

Ahora bien; expuestos los argumentos que sustentan los aspectos mostrados: paradigma, enfoque y método; se espera ahora justificar las decisiones asumidas en cuanto a estos tres elementos, en función del objeto de estudio, con el propósito de mantener la coherencia discursiva y mostrar en consecuencia componentes fundamentales del proceso investigativo. Además, de ello; en este momento se va a considerar todo lo relacionado desde la definición concreta del problema, es decir, lo que corresponde al ¿qué?, ¿para qué? y ¿cómo?; en un intento de exponer de manera sucinta la visión ontológica, teleológica, epistemológica y metodológica del presente estudio.

En el orden de lo dicho; lo primordial se erige en la necesidad de identificar en primera instancia ¿cuál es el objeto de estudio? y precisar ¿cuál es su naturaleza explicativa?, de tal manera que conduzca a tomar las decisiones expuestas anteriormente. Esta cuestión, define el componente «*Ontológico*» dentro del cual es necesario precisar 'El Qué', como fenómeno u objeto de estudio a ser abordado. Intentar definir esta esencia conduce a las preguntas ontológicas; ¿qué y cuál es la realidad a ser estudiada?, ¿en qué consiste el fenómeno de estudio?, ¿qué es lo que se espera estudiar? Estos cuestionamientos han permitido definir el objeto de estudio trascendiendo los sujetos estudiados y enfocando solo el problema de investigación que fue identificado como; «*de qué manera se puede lograr una mejora significativa en el rendimiento académico inmediato al momento de usar la descomposición en fracciones simples*».

A ese respecto; cabe recordar que la Ontología como filosofía pretende definir la esencia de una realidad que se aborda y, por consiguiente, establecer de manera concreta y precisa el objeto de estudio, es equivalente a descubrir la esencia del problema y, por consiguiente, a resolver el problema ontológico de una investigación. En ese entendido, Colina (2019) expone:

> La naturaleza ontológica de la realidad socio-educativa, corresponde a una de las primeras interrogantes que debe generarse un investigador, puesto que supone el establecimiento de los principios y fundamentos del conocimiento sobre una realidad o fenómeno, según la óptica de éste, en base a lo que estudia, por lo que esta pregunta ontológica, puede plantearse en términos de ¿cuál es la forma y la naturaleza de la realidad?, más aún, ¿qué es aquello que podemos conocer de ella? (p. 154)

Por otro lado; es necesario aclarar ¿cuál es la naturaleza del fenómeno de estudio?, y eso pasa por determinar si el objeto de estudio es básicamente medible, interpretable o ambas cosas a la vez. Esta definición conduce a tomar una decisión en cuanto al paradigma, enfoque y método; si está claramente definido que el objeto es perfectamente medible, entonces la decisión del enfoque debería ser cuantitativo; si, por el contrario, el objeto de estudio es definitivamente interpretable, entonces el paradigma debería ser interpretativo o socio-crítico y por consiguiente cambia el enfoque y a su vez el método. En el caso particular de la presente investigación, el fenómeno de estudio identificado se definió como completamente «*medible*», lo que condujo sin inconveniente a desarrollar la investigación bajo el paradigma, enfoque y método, ya explicados.

En ese orden; una vez resuelto el problema ontológico, conviene definir el elemento «*Teleológico*» en el cual se responde a; ¿cuáles son los propósitos respecto al objeto de estudio? En el diccionario de la Real Academia Española (RAE, 2019), se define la Teleología como la doctrina de las causas finales. Es decir, se trata ahora de establecer ¿cuál es la finalidad de la investigación?, el ¿para qué se aborda la realidad del estudio?, ¿qué se pretende hacer con la investigación?, ¿hasta dónde se pretende llegar con el estudio? Estos cuestionamientos teleológicos permitirán definir los objetivos de investigación y tomar las decisiones en cuanto al tipo de diseño, tipo de estudio, metodología, delimitar los alcances y metas futuras.

En tal sentido; la presente investigación parte en primera instancia de la descripción de un problema, el cual se centra en; «*la dificultad que genera en estudiantes de la* FaCyT-UC *el uso de sistemas de ecuaciones durante el aprendizaje del contenido Descomposición en Fracciones Simples*» para luego, a partir de una intervención (o tratamiento) controlada que consiste en; la «*aplicación de un Modelo Instruccional, constituido por una estrategia didáctica alternativa y la modelación matemática, donde no se utilicen sistemas de ecuaciones durante la enseñanza del contenido Descomposición en Fracciones Simples*», probar que; «*puede darse un cambio estadísticamente significativo sobre el Rendimiento Académico Inmediato de los sujetos de estudio*» y, por consiguiente, transformar una realidad futura sobre un fenómeno preciso y particular. Entonces, la finalidad de la investigación está concretamente centrada en; «*generar un cambio significativo en los procesos didácticos, reflejado en el rendimiento académico inmediato, cuando se desarrolle el objeto matemático Descomposición en Fracciones Simples*».

Tipo de Investigación

En relación a los tipos de investigación; es importante acotar que las distintas perspectivas de los autores otorgan de igual manera diferentes denominaciones con los mismos propósitos y lo que para algún autor puede llamarse 'tipo', para otros se menciona como 'nivel'. En otros casos, los tipos se correlacionan con los diseños y otras categorías asumiendo diversidad de criterios que de alguna manera dificultan la definición de este aspecto importante de la investigación. En función de ello, Rojas (2015) plantea;

> En las Tesis de Pre y Post Grado, hay una parte: los tipos de investigación, donde es común constatar una diversidad de identidades o nomenclaturas y clasificaciones. Son tan diversas, complicadas y contradictorias, que explicarían la confusión de los Tesistas, en cuanto a la identidad y precisión, se refiere; y por derivación pone en cuestión a los asesores y patrocinadores de tan importante documento académico. (p. 2)

No obstante, ante lo planteado; para efectos de este trabajo se asumió el criterio de «*Tipo de Investigación*» como lo establece en su obra (Hurtado, 2000). En ese sentido; entre los diferentes tipos de investigación está presente la investigación de tipo «*Confirmatoria de Verificación Empírica*». Esta investigación "[…] es aquella que tiene como propósito verificar hipótesis referidas a relaciones entre eventos o variables, derivadas de explicaciones o teorías. Se interesa en encontrar evidencia empírica que pueda apoyar o rechazar dichas hipótesis" (Hurtado: ob. cit., p. 367).

Además, la investigación Confirmatoria se basa en la noción de «*causalidad*» entendida como la interacción dinámica entre múltiples eventos. Es decir, su mayor interés es el estudio de «*causa–efecto*» que puede haber entre dos variables de investigación. En otras palabras; este tipo de investigación busca dilucidar ciertas relaciones entre las variables, no se limita a la descripción de las mismas, ni a decir que hay relaciones entre ellas, sino que explicita la relación de «*causa–efecto*» entre una variable independiente y una variable dependiente.

Por todo lo antes mencionado; la presente investigación fue de tipo «*Confirmatoria de Verificación Empírica*» puesto que; mostró, analizó y explicó cómo la «*Descomposición en Fracciones Simples, desarrollada con un modelo instruccional*», constituido por una estrategia didáctica alternativa y la modelación matemática, produce cambios estadísticamente significativos sobre el «*Rendimiento Académico Inmediato*», en estudiantes de cálculo II de las diferentes carreras pertenecientes a la Facultad de Ciencias y Tecnología (FaCyT) de la Universidad de Carabobo (UC), durante el lapso académico $1-2023$.

El esquema del tipo de investigación que adoptó el presente trabajo se ajusta al mostrado por (Hurtado: ob. cit., pp. 381-382).

Sistema de Hipótesis

Arias, (2012), señala que: "hipótesis es una suposición que expresa la posible relación entre dos o más variables, la cual se formula para responder tentativamente a un problema o pregunta de investigación" (p. 47). Por otro lado, una hipótesis es una "afirmación conjetural acerca de las posibles relaciones entre dos o más variables" (Kerlinger, 1979). Según el problema formulado;

las hipótesis pueden tener la utilidad de explicar o predecir un determinado hecho y entre sus tipos se pueden encontrar: las hipótesis «*Comparativas Experimentales*» que se encargan de contrastar resultados o características de grupos en condiciones diferentes, la hipótesis Nula (H_0) que niega lo supuesto en la hipótesis de Investigación (H_1) y las hipótesis Alternativas (H_a) las cuales plantean opciones distintas a la hipótesis de trabajo o de investigación, Arias (ob. cit.).

A continuación, se muestran las dos (2) hipótesis que se formularon en el presente trabajo de investigación junto con sus respectivas hipótesis nulas.

Hipótesis de Investigación ($\mathbf{H_1}$). La descomposición en fracciones simples desarrollada con un modelo instruccional; constituido por una estrategia didáctica alternativa y la modelación matemática, mejora significativamente el rendimiento académico inmediato en estudiantes de cálculo II de la FaCyT-UC durante el lapso académico $1 - 2023$.

Hipótesis Alternativa ($\mathbf{H}_{\boldsymbol{a}}$). La descomposición en fracciones simples, desarrollada con un modelo instruccional, tiene mejor desempeño en estudiantes egresados de instituciones privadas.

Hipótesis Nula 1 ($\mathbf{H_{0:1}}$). La descomposición en fracciones simples desarrollada con un modelo instruccional; constituido por una estrategia didáctica alternativa y la modelación matemática, no mejora el rendimiento académico inmediato en estudiantes de cálculo II de la FaCyT-UC durante el lapso académico $1 - 2023$.

Hipótesis Nula 2 ($\mathbf{H_{0:2}}$). La descomposición en fracciones simples, desarrollada con un modelo instruccional, no tiene mejor desempeño en estudiantes egresados de instituciones privadas.

El investigador quiere acotar lo siguiente; el número de hipótesis presente en una investigación no menos precia su valor de importancia o disminuye su calidad. Tal como lo expresan Hernández, Fernández y Baptista (2014):

> Cada investigación es diferente. Algunas contienen gran variedad de hipótesis porque el problema de investigación es complejo (por ejemplo, pretenden relacionar 15 o más variables), mientras que otras contienen una o dos hipótesis. Todo depende del planteamiento del problema. La calidad de una investigación no está relacionada con el número de hipótesis que contenga. En este sentido, se debe tener el número de hipótesis necesarias para guiar el estudio, ni una más ni una menos. (p. 116)

Siguiendo esa idea; el presente trabajo tiene el número de hipótesis necesario para guiar la investigación.

Diseño de Investigación

Un diseño de investigación implica la estrategia general que se pretende aplicar durante todo el proceso investigativo de manera que se cumpla; por un lado, el rigor metodológico en concordancia con el paradigma, enfoque, método y, por el otro, los procesos de validación de la información; particularmente, en las actividades de recolección, representación, procesamiento y análisis de los datos, lo cual implica ajustarse congruentemente a un diseño dentro del modelo asumido. Según Palella y Martins (2012); "el diseño de investigación se refiere a la estrategia que adopta el investigador para responder al problema, dificultad o inconveniente planteado en el estudio. Para fines didácticos, se clasifican en diseño experimental, diseño no experimental y diseño bibliográfico" (p. 86).

Por otro lado, Arias (2012) refiere que; "el diseño de investigación es la estrategia general que adopta el investigador para responder al problema planteado. En atención al diseño, la investigación se clasifica en: documental, de campo y experimental" (p. 27). Por lo que se aprecia en el mensaje de los autores citados, se refuerza de manera consistente que el diseño tiene connotación estratégica para el proceso de investigación, pero asimismo en las citas se asoman elementos importantes en función de establecer categorías particulares para definir los distintos tipos de diseños, lo que en este caso abre las puertas para definir de manera concreta a cuál de ellos se ajustó esta investigación.

En palabras de Kerlinger y Lee, (2002);

> El diseño de investigación constituye el plan y la estructura de la investigación, y se concibe de determinada manera para obtener respuestas a las preguntas de investigación. El plan es el esquema o programa general de la investigación; incluye un bosquejo de lo que el investigador hará, desde formular las hipótesis y sus implicaciones operacionales hasta el análisis final de los datos. (p. 403)

A estos efectos; el presente estudio se amparó en un diseño «*Mixto*» que permitió la hibridación de dos (2) perspectivas totalmente compatibles y necesarias para los momentos de recolección, representación y procesamiento de los datos, además de ser claramente congruentes en cuanto a diseño de investigación se refiere, dentro del paradigma Positivista, el enfoque Cuantitativo y el método Científico. En este caso; se hace referencia precisa al diseño de «*Campo*» y al diseño «*Experimental*». En cuanto al diseño de Campo, se dice que; es aquel que permite abordar el fenómeno objeto de estudio desde el mismo espacio de la realidad estudiada. En palabras de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL, 2016);

> Se entiende por Investigación de Campo, el análisis sistemático de problemas en la realidad, con el propósito bien sea de describirlos, interpretarlos, entender su naturaleza y factores constituyentes, explicar sus causas y efectos, o predecir su ocurrencia, haciendo uso de métodos característicos de cualquiera de los paradigmas o enfoques de investigación conocidos o en desarrollo. Los datos de interés son recogidos en forma directa de la realidad; en este sentido se trata de investigaciones a partir de datos originales o primarios. (p. 18)

Como en efecto se describe en la cita; la presente investigación abordó tanto a los sujetos investigados como al fenómeno objeto de estudio en su contexto real de ocurrencia, obteniendo los datos numéricos de la fuente directa que los genera en el propio terreno de estudio. Esto permitió la observación directa en su acontecer natural, tanto del fenómeno integral, como del objeto de estudio y sujetos investigados sin alteración de las condiciones normales.

Por otra parte, como se mencionó anteriormente; en esta investigación también, se aplicó un diseño Experimental. Antes de realizar la disertación para este tipo de diseño, se verá primero qué es un Experimento según Kerlinger y Lee, (2002); "un experimento es una investigación científica donde un investigador manipula y controla una o más variables independientes y observa la(s) variable(s) dependiente(s) para determinar si hay variación concomitante a la manipulación de las variables independientes" (p. 420).

Ahora sí, se comentará qué son los diseños Experimentales según algunos autores. Al respecto; Hernández, Fernández y Baptista, (2014), dicen que los diseños experimentales; "se utilizan cuando el investigador pretende establecer el posible efecto de una causa que se manipula" (p. 130). Es decir; analizar la causalidad (o relación) que se establece entre causa y efecto, cuando el último depende del primero tanto lógicamente, como cronológicamente; o, en otras palabras, la causa es aquello que hace que el efecto sea lo que es.

Kerlinger y Lee, (2002), dicen que; "un diseño experimental, entonces es aquel en el que el investigador manipula por lo menos una variable independiente" (p. 420).

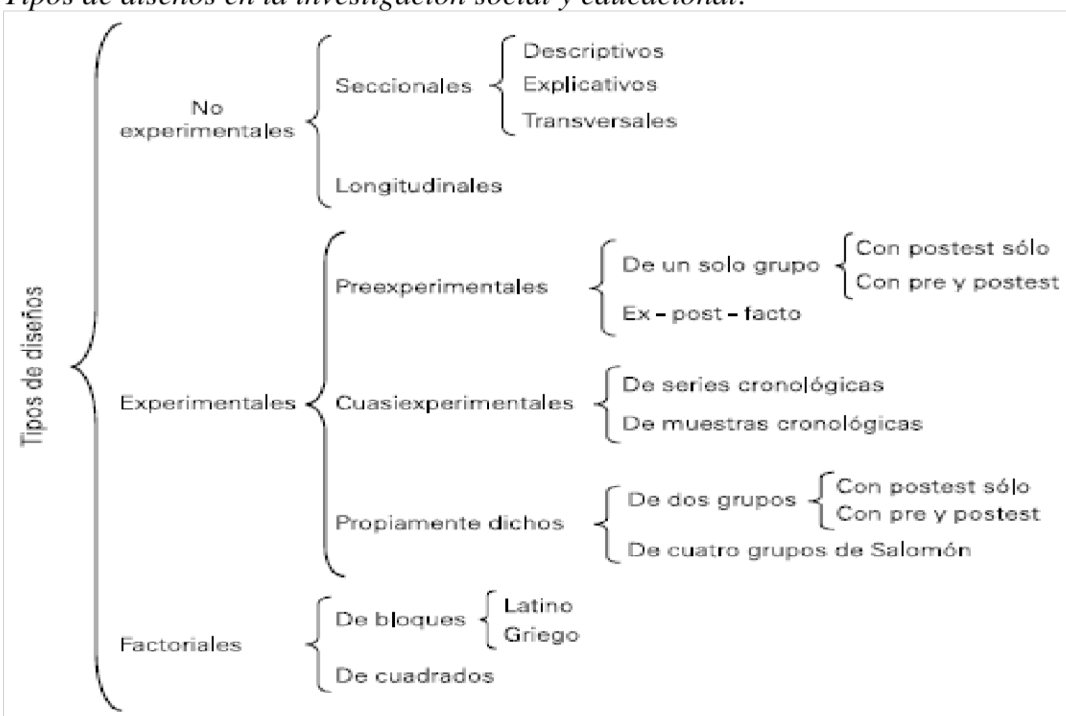
Siguiendo con esta idea; dentro de los distintos tipos de diseños experimentales que existen Campbell y Stanley, (1995), muestran los llamados experimentos Puros o Verdaderos. Según Kerlinger y Lee, (ob. cit.);

> […] la experimentación verdadera requiere por lo menos de dos grupos, uno que reciba un tratamiento experimental, y otro que no lo reciba o que lo reciba de forma diferente. El experimento verdadero requiere la manipulación de por lo menos una variable independiente, la asignación aleatoria de los participantes a los grupos y la asignación aleatoria del tratamiento a los grupos. (p. 484)

Una vez más, emerge la función relacional entre dos (2) variables principales con la cual habrá que estudiar el efecto que tiene una sobre la otra, como efectivamente se hizo en esta investigación, ya que se establecieron diferenciaciones entre tres (3) grupos de investigación (uno experimental y dos de control) posterior a la aplicación de la variable «*Independiente*» y controlada cuando se evaluó la variable «*Dependiente*». Cabe destacar que; el investigador tuvo plena consciencia de que la variable independiente es la única variable a ser controlada y, además, allí subsisten un conjunto de otras variables que escapan completamente de su dominio. Como lo plantea Monje (2011), "por medio de este tipo de investigación, podemos aproximarnos a los resultados de una investigación experimental en situaciones en las que no es posible el control y manipulación absoluta de las variables" (p. 106).

En la siguiente figura se muestran los tipos de diseños en Ciencias Sociales.

Figura 13
Tipos de diseños en la investigación social y educacional.



Nota: Fuente: Sierra (2007).

A continuación, en la Tabla 1, se muestran los distintos diseños de investigación cuantitativa en educación presentados bajo los modelos de Campbell y Stanley.

Éstos son presentados en cinco (5) grupos, a saber; diseños preexperimentales, diseños experimentales puros, diseños cuasiexperimentales, diseños correlacionales y ex post facto.

Tabla 1

Diseños de investigación cuantitativa en educación.

Diseños Preexperimentales				
1.- Estudio de un caso con una medición				
G	**No R**	**X**		O_1
2.- Diseño pretest-posttest con un solo grupo				
G	**No R**	O_1	**X**	O_2
3.- Comparación con un grupo estático				
G_E	**No R**	**X**		O_1
G_C	**No R**	**~X**		O_2

Diseños Experimentales Puros				
4.- Diseño de grupo control pretest-posttest				
G_E	**R**	O_1	**X**	O_2
G_C	**R**	O_3	**~X**	O_4
5.- Diseño de cuatro grupos de Solomon				
G_E	**R**	O_1	**X**	O_2
G_C	**R**	O_3	**~X**	O_4
G_E	**R**	**X**		O_5
G_C	**R**	**~X**		O_6
6.- Diseño de grupo control con posttest únicamente				
G_E	**R**	**X**		O_1
G_C	**R**	**~X**		O_2

Diseños Cuasiexperimentales						
7.- Experimento de series cronológicas						
G	**No R**	$O_1 \cdots O_n$		**X**	$O_{n+1} \cdots O_m$	
8.- Diseño de muestras cronológicas equivalentes						
G	**No R**	**X** O_1	**~X** O_2	$\cdots$	**X** O_{n-1}	**~X** O_n
9.- Diseño de materiales equivalentes						
G	**No R**	M_aX_0O		M_bX_1O	M_cX_0O	$\cdots$
10.- Diseño de grupo control no equivalente						
G_E	**No R**	O_1		**X**	O_2	
G_C	**No R**	O_3		**~X**	O_4	
11.- Diseños compensados						
G_1	**No R**	X_1O		X_2O	X_3O	X_4O
G_2	**No R**	X_2O		X_4O	X_1O	X_3O
G_3	**No R**	X_3O		X_1O	X_4O	X_2O
G_4	**No R**	X_4O		X_3O	X_2O	X_1O
12.- Diseño de una muestra separada pretest-posttest						
G_1	**R**	O_1			**X**	
G_2	**R**	**X**			O_2	

Tabla 1 (cont.)

<table>
<tr><td colspan="7">**13**.- Diseño de una muestra separada pretest-posttest con grupo control</td></tr>
<tr><td>G_E</td><td>**R**</td><td colspan="2">O_1</td><td colspan="3">**X**</td></tr>
<tr><td>G_E</td><td>**R**</td><td colspan="2">**X**</td><td colspan="3">O_2</td></tr>
<tr><td>G_C</td><td>**R**</td><td colspan="2">O_3</td><td colspan="3">**~X**</td></tr>
<tr><td>G_C</td><td>**R**</td><td colspan="2">**~X**</td><td colspan="3">O_4</td></tr>
<tr><td colspan="7">**14**.- Diseño de series cronológicas múltiples</td></tr>
<tr><td>G_E</td><td>**No R**</td><td colspan="2">$O_1 \cdots O_n$</td><td>**X**</td><td colspan="2">$O_{n+1} \cdots O_m$</td></tr>
<tr><td>G_C</td><td>**No R**</td><td colspan="2">$O_1 \cdots O_n$</td><td>**~X**</td><td colspan="2">$O_{n+1} \cdots O_m$</td></tr>
<tr><td colspan="7">**15**.- Diseño de ciclo institucional</td></tr>
<tr><td>$Clase_A$</td><td>**No R**</td><td colspan="2">**X**</td><td colspan="3">O_1</td></tr>
<tr><td>$Clase_{B1}$</td><td>**R**</td><td>O_2</td><td colspan="3">**X**</td><td>O_3</td></tr>
<tr><td>$Clase_{B2}$</td><td>**R**</td><td>**X**</td><td colspan="4">O_4</td></tr>
<tr><td>$Clase_C$</td><td>**No R**</td><td colspan="2">O_5</td><td colspan="3">**X**</td></tr>
<tr><td colspan="7">**16**.- Análisis de discontinuidad de regresión</td></tr>
</table>

Diseños Correlacionales y Ex Post Facto
17.- Diseños correlacionales
En estos diseños, no se encuentran; ni variables dependientes ni variables independientes. Lo único que se encuentra son variables correlacionadas.
a.- Estudios en panel
b.- Estudios en panel en dos tandas
c.- El cuadro de 16 partes de Lazarsfeld
18.- Análisis ex post facto
Son los análisis que se dan una vez que ya se ha realizado el hecho. En estos casos, no se hace medición porque se trabaja con datos que fueron recogidos antes de realizar el estudio.

Nota: Fuente: Campbell y Stanley (1995).

En esta investigación; el autor por medio de los «*procesos aleatorios*» utilizados, a saber; en la designación del grupo experimental y el remuestreo aplicado usando la técnica «*Bootstrap*», logró una aproximación a un modelo experimental perfectamente controlado, desde el punto de vista de la estadística, tal y como lo expresan (Kerlinger y Lee, 2002).

En ese sentido, la siguiente cita expone que; "en un estudio experimental perfectamente controlado, el investigador puede confiar en que la manipulación de la variable independiente es lo que afectó a la variable dependiente, y nada más" (Kerlinger y Lee: 2002, p. 421).

Por otro lado, Campbell y Stanley, (1995), dicen que;

> El pretest es un concepto muy arraigado en el pensamiento de los investigadores en los campos de la educación y la psicología, pero en realidad no es imprescindible para los diseños experimentales propiamente dichos. [...] en investigación pedagógica,

tenemos que experimentar a menudo con métodos que permitan la introducción inicial de elementos absolutamente nuevos, para los cuales son imposibles los pretests en el sentido ordinario del término. (p. 54)

La idea anterior encaja perfectamente en el diseño que se necesitó para el estudio de la presente investigación, ya que, en ella se abordó por primera vez el objeto matemático de estudio, a saber; la «*Descomposición en Fracciones Simples*». Es decir; los sujetos de estudio nunca habían cursado en su vida estudiantil dicho contenido, por tal motivo, no tuvo ningún sentido aplicar un diseño que en su estructura utilizara una observación de tipo «*Pretest*».

Por otra parte; además de los estudios sobre el modo de enseñar un material nuevo, queda una gran cantidad de casos en los que el tratamiento «*Experimental*» y la observación de tipo «*Posttest*» pueden entregarse a los sujetos de estudio, que conforman los distintos grupos de investigación, como un solo paquete natural y, en ese sentido, un «*Pretest*» resultaría molesto (Campbell y Stanley, 1995).

Por todo lo antes dicho; en la presente investigación se aplicó dentro de los distintos diseños de investigación cuantitativa en educación bajo los modelos de Campbell y Stanley un experimento puro (o verdadero) de nombre «*Diseño de Grupo Control con Post-Test Únicamente*» y cuyo esquema es el siguiente:

Tabla 2

Diseño de grupo control con posttest únicamente.

Grupo	Asignación	Tratamiento	Post-Test
$\boldsymbol{G_E}$	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{X}$	$\boldsymbol{O_1}$
$\boldsymbol{G_C}$	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{\sim X}$	$\boldsymbol{O_2}$

Nota: Fuente: Campbell y Stanley (1995).

Donde:

$\boldsymbol{G_E} \coloneqq$ *Grupo Experimental*. (Grupo al que se le aplica el tratamiento).

$\boldsymbol{G_C} \coloneqq$ *Grupo Control*. (Grupo de comparación, no se le aplica el tratamiento).

$\boldsymbol{X} \coloneqq$ *Aplicación del Tratamiento*. (Hay manipulación de la V.I.).

$\boldsymbol{\sim X} \coloneqq$ *No hay Aplicación del Tratamiento*. (No hay manipulación de la V.I.).

$\boldsymbol{O_{1,2}} \coloneqq$ *Post-Test*. (Prueba de rendimiento académico después del tratamiento).

$\boldsymbol{R} \coloneqq$ *Random*. (Selección aleatoria).

Los grupos de investigación (a saber, $\boldsymbol{G_E}$ y $\boldsymbol{G_C}$) fueron seleccionados de manera «*Aleatoria*» por el investigador, con lo cual, se garantizó que ambos grupos intactos (a saber, secciones $\mathbf{1}$ y $\mathbf{2}$ de cálculo II) tuvieron la misma probabilidad de ser seleccionados como $\boldsymbol{G_E}$. En ese sentido; el investigador pretende manipular la variable «*Independiente*» para estudiar su efecto sobre la variable «*Dependiente*», durante el proceso de enseñanza y aprendizaje del objeto matemático «*Descomposición en Fracciones Simples*». En relación a la sección $\mathbf{3}$, por el hecho de que ésta fue administrada por otro docente, se tomó la decisión de que la misma funcionara como un segundo grupo control (a saber, $\boldsymbol{G_C^*}$). Este diseño de investigación tiene como propósito confirmar si existen diferencias estadísticamente significativas con respecto a cada grupo de control y el experimental.

Uno de los objetivos de esta investigación es presentar un enfoque de enseñanza distinto al tradicional y, por lo tanto, aplicar una pedagogía que estimule al alumnado a convertirse en un ser pensante y competente, al menos, en el área de matemática.

Según el «*tiempo de estudio*»: el diseño de esta investigación fue de tipo «*Longitudinal*», porque requirió la aplicación de un tratamiento didáctico durante un período aproximado de cuatro (4) semanas. Según la búsqueda de «*causalidad*»: el diseño fue de tipo «*Analítico*», porque se buscó estudiar el efecto de la variable independiente sobre la variable dependiente.

Como se observa en el esquema del «*Diseño de Grupo Control con Post-Test Únicamente*» se trabajó con tres (3) grupos de investigación; uno recibió el tratamiento didáctico (a saber, el $\boldsymbol{G_E}$) y los otros no, es decir, fueron tratados de forma tradicional (a saber, el $\boldsymbol{G_C}$ y el $\boldsymbol{G_C^*}$). Finalizado el tratamiento, los grupos fueron comparados por medio de una «*Prueba de Rendimiento Académico*» a la que según el diseño utilizado se la llamó «*Post-Test*». En el $\boldsymbol{G_E}$ se manipuló la variable «*Independiente*» y, posteriormente, se observó a los sujetos que modificaron su realidad académica frente al primero y segundo grupo control, a saber; $\boldsymbol{G_C}$ y $\boldsymbol{G_C^*}$.

A continuación; se muestra una tabla donde se especifica el número de horas semanales, número de semanas, total de horas invertidas y turno para desarrollar el experimento didáctico de la presente investigación.

Tabla 3

Cronograma de implementación del experimento didáctico.

Grupo	Nº de horas semanal	Nº de semanas	Cantidad de horas	Turno
Experimental	6	4	24	Mañana
Control	6	4	24	Mañana

Nota: Fuente: Propia (2023).

Sistema de Variables

Empleando la definición de Arias (2012): "variable es una característica o cualidad; magnitud o cantidad, que puede sufrir cambios, y que es objeto de análisis, medición, manipulación o control en una investigación" (p. 57).

Según su naturaleza, las variables pueden ser: **1**) *Cuantitativas*: son aquellas que se expresan en valores o datos numéricos. Éstas a su vez, se clasifican en *Discretas* o *Continuas*, y **2**) *Cualitativas*: también llamadas categóricas, son características o atributos que se expresan de forma verbal (no numérica), es decir, mediante palabras. Éstas pueden ser: *Dicotómicas* o *Policotómicas*, Arias (ob. cit.).

En ese sentido, Martínez-Pérez y Rodríguez-Esponda (s.f.) describen a la variable «*Cualitativa Ordinal Policotómica*» como aquella que "[…] puede tomar tres o más valores posibles, los cuales pueden ser ordenados siguiendo un criterio establecido por una Escala Ordinal, la cual se caracteriza porque no es preciso que el intervalo entre mediciones consecutivas sea uniforme" (p. 28).

Es necesario considerar, también, que; un tipo de variable puede ser transformada en otra de menos nivel de información, es decir, las mediciones de una variable determinada pueden ser clasificadas posteriormente en una escala de nivel inferior (Martínez-Pérez y Rodríguez-Esponda, s.f.).

Por otra parte, Arias (2012) expone que; según su función en una *relación causal*, las variables pueden clasificarse en:

> 1) Independientes: son las causas que generan y explican los cambios en la variable dependiente. En los diseños experimentales la variable independiente es el tratamiento que se aplica y manipula en el grupo experimental. 2) Dependientes: son aquellas que se modifican por acción de la variable independiente. Constituyen los efectos o consecuencias que se miden y que dan origen a los resultados de la investigación. 3) Intervinientes: son las que se interponen entre la variable independiente y la dependiente, pudiendo influir en la modificación de esta última. En un diseño experimental puro, este tipo de variable debe ser controlada con el fin de comprobar que el efecto es debido a la variable independiente y no a otros factores. 4) Extrañas: también llamadas ajenas, son factores que escapan del control del investigador y que pueden ejercer alguna influencia en los resultados. (p. 60)

Siguiendo las ideas anteriores; en el presente trabajo la variable «*dependiente*» fue transformada por el investigador. Ésta inicialmente es medida como una variable «*cuantitativa discreta*», es decir, los valores que toma solo pueden ser representados por números enteros (a saber, las puntuaciones obtenidas en la prueba de rendimiento académico), además, los datos para esta variable se miden en una Escala de Razón o de Intervalo. Su transformación se hizo a una variable «*cualitativa ordinal policotómica*» al considerar sus dimensiones en relación a la matriz de operacionalización, a saber; deficiente, bajo, medio y alto.

A continuación, se muestran las cuatro (4) variables que se definieron en la presente investigación; dos (2) de ellas son las variables principales del estudio y las otras dos (2) son variables extrañas (o emergentes).

Variable Independiente (V.I.). *Descomposición en fracciones simples, desarrollada con un modelo instruccional*.

Variable Dependiente (V.D.). *Rendimiento académico inmediato*. Esta variable es cualitativa ordinal policotómica.

Variable Extraña **1** (V.E.). *Estudiantes egresados de instituciones privadas*.

Variable Extraña **2** (V.E.). *Estudiantes egresados de instituciones públicas*.

Operacionalización de Variables

A continuación, se describen y presentan cuatro (4) tablas con el objetivo de mostrar a detalle el plan de operacionalización de las variables de estudio.

La Tabla 4 presenta una «*matriz de consistencia*»; en ella se muestra un resumen de todo el aspecto metodológico a ser utilizado en la presente investigación. La Tabla 5 muestra las definiciones «*conceptuales*» y «*operacionales*» de las variables principales de estudio. La Tabla 6 muestra las definiciones «*conceptuales*» de las variables extrañas (o emergentes). Finalmente; la Tabla 7 expone la «*operacionalización*» de las variables principales de estudio, es de hacer notar que; la forma de esta matriz se presenta bajo la propuesta dada por Espinoza (2019).

Tabla 4

Matriz de consistencia.

<table>
<tr><td colspan="6">TÍTULO: APROXIMACIÓN TEÓRICA PARA LA DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES Y SU EFECTO EN EL RENDIMIENTO ACADÉMICO INMEDIATO.
Una Estrategia Didáctica Alternativa y la Modelación Matemática.</td></tr>
<tr><th>PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN</th><th>OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN</th><th>HIPÓTESIS</th><th>VARIABLES</th><th>METODOLOGÍA</th><th>POBLACIÓN/MUESTRA</th></tr>
<tr>
<td>1.- ¿De qué manera la descomposición en fracciones simples, desarrollada con una estrategia didáctica alternativa, influye sobre el rendimiento académico inmediato en estudiantes de cálculo II de la FaCyT-UC?

2.- ¿De qué manera la descomposición en fracciones simples, desarrollada con la modelación matemática, influye sobre el rendimiento académico inmediato en estudiantes de cálculo II de la FaCyT-UC?</td>
<td>Objetivo General:

Generar una aproximación teórica para la descomposición en fracciones simples desarrollada con un modelo instruccional, para analizar su efecto sobre el rendimiento académico inmediato en estudiantes de cálculo II de la FaCyT-UC durante el lapso académico $1-2023$.

Objetivos Específicos:

1.- Determinar la homogeneidad de los sujetos de estudio mediante procesos estadísticos.
2.- Desarrollar una estrategia didáctica alternativa fundamentada con la teoría APOE, que no emplea sistemas de ecuaciones, para la descomposición en fracciones simples.
3.- Emplear la metodología de modelación matemática en problemas que utilicen el proceso de descomposición en fracciones simples.
4.- Describir el efecto de la descomposición en fracciones simples, desarrollada con un modelo instruccional; constituido por la estrategia didáctica alternativa y la modelación matemática, sobre el rendimiento académico inmediato.
5.- Confirmar que la descomposición en fracciones simples, desarrollada con un modelo instruccional; constituido por la estrategia didáctica alternativa y la modelación matemática, genera cambios significativos sobre el rendimiento académico inmediato.
6.- Construir un modelo axiomático formal para la descomposición en fracciones simples, desarrollada con la técnica alternativa.</td>
<td>Hipótesis de Investigación (H_1):
La descomposición en fracciones simples desarrollada con un modelo instruccional; constituido por una estrategia didáctica alternativa y la modelación matemática, mejora significativamente el rendimiento académico inmediato en estudiantes de cálculo II de la FaCyT-UC durante el lapso académico $1-2023$.

Hipótesis Nula 1 ($H_{0:1}$):
La descomposición en fracciones simples desarrollada con un modelo instruccional; constituido por una estrategia didáctica alternativa y la modelación matemática, no mejora el rendimiento académico inmediato en estudiantes de cálculo II de la FaCyT-UC durante el lapso académico $1-2023$.

Hipótesis Alternativa (H_a):
La descomposición en fracciones simples, desarrollada con un modelo instruccional, tiene mejor desempeño en estudiantes egresados de instituciones privadas.

Hipótesis Nula 2 ($H_{0:2}$):
La descomposición en fracciones simples, desarrollada con un modelo instruccional, no tiene mejor desempeño en estudiantes egresados de instituciones privadas.</td>
<td>Variable Independiente:
Descomposición en fracciones simples, desarrollada con un modelo instruccional.

Variable Dependiente:
Rendimiento académico inmediato (cualitativa ordinal policotómica).

Variable Extraña 1:
Estudiantes egresados de instituciones privadas.

Variable Extraña 2:
Estudiantes egresados de instituciones públicas.</td>
<td>Paradigma:
Positivista.

Enfoque:
Cuantitativo.

Tipo de Investigación:
Confirmatoria de Verificación Empírica. Se realizó un estudio de tipo Causalidad.

Diseño de Investigación:
Se realizó una hibridación entre dos (2) tipos de diseños:

Uno Experimental y otro de Campo.

Tipo de Diseño Experimental:
Diseño de Grupo Control con Post-Test únicamente.</td>
<td>La <u>población</u> de la presente investigación estuvo constituida por un colectivo de $\mathbf{120}$ estudiantes distribuidos en tres ($\mathbf{3}$) secciones (cada una de $\mathbf{40}$ sujetos) de cálculo II de la FaCyT-UC durante el lapso académico $1-2023$. Con respecto al tamaño de las <u>muestras estadísticas</u> se aplicó un <u>estudio censal</u>, con el cual, se generaron tres ($\mathbf{3}$) muestras de este tipo; una por cada grupo de investigación (a saber; $\boldsymbol{n_E = 39}$, $\boldsymbol{n_C = 36}$ y $\boldsymbol{n_{C^*} = 40}$). Una observación importante, es que; para la aplicación del posttest solo se presentaron $\mathbf{115}$ estudiantes. En relación a las <u>muestras aleatorias</u> éstas fueron generadas con una técnica de <u>remuestreo</u> (conocida como Bootstrap) la misma fue aplicada solamente en el $\boldsymbol{G_E}$.</td>
</tr>
</table>

Nota: Fuente: Autor (2023).

Tabla 5

Definición conceptual y operacional de las variables de estudio.

VARIABLES	DEFINICIONES CONCEPTUALES	DEFINICIONES OPERACIONALES
Variable Independiente: Descomposición en fracciones simples, desarrollada con un modelo instruccional.	Si $R(x) = n(x)/m(x)$ es una *función impropia*, entonces usando el *algoritmo de la división*, $R(x)$ puede expresarse en la forma: $R(x) = \frac{n(x)}{m(x)} = g(x) + \frac{h(x)}{m(x)}$ donde $g(x), h(x)$ y $m(x)$ son polinomios en x y, además, el grado del numerador $h(x)$ es menor que el grado del denominador $m(x)$. Esto significa que (al menos teóricamente), toda *fracción impropia* puede expresarse de modo único, como; la suma de un polinomio y una *fracción propia*. Por esta razón, en lo que sigue solo se consideraran las *fracciones propias*. Teóricamente, es posible escribir cualquier *fracción racional propia* $h(x)/m(x)$ como una suma de expresiones racionales cuyos denominadores son potencias de polinomios de grado no mayor que dos. Concretamente; si $h(x)/m(x)$ es una *fracción propia*, entonces se sigue por un teorema de álgebra que: $\frac{h(x)}{m(x)} = \underbrace{N_1 + N_2 + \cdots + N_k}_{\text{DFS}} \quad (\mathbf{1})$ donde cada N_i (con $i = 1, \dots, k$) tiene una de las dos formas siguientes: $\frac{\boldsymbol{A}_1}{(ax+b)^m}$ ó $\frac{\boldsymbol{A}_2 x + \boldsymbol{A}_3}{(px^2+qx+r)^n}$ donde $m, n \in \mathbb{Z}^+ \wedge q^2 - 4pr < 0$. La suma del lado derecho de (**1**) se conoce como: *Descomposición en Fracciones Simples* (DFS) de $h(x)/m(x)$ y cada N_i (con $i = 1, \dots, k$) es una fracción simple (o más sencilla) en relación a $h(x)/m(x)$ (Díaz: 2017, pp. 26-27). El contexto donde será medida esta variable es en una población de estudiantes de la asignatura *Cálculo II* de la Facultad de Ciencias y Tecnología de la Universidad de Carabobo. Sede Bárbula.	La *descomposición en fracciones simples*, desarrollada con un modelo instruccional, se expresa operativamente con el manejo de sus componentes desde el enfoque de una estrategia didáctica alternativa fundamentada con la teoría APOE y el uso de la modelación matemática fundamentada por la teoría de Educación Matemática Realista (EMR).
Variable Dependiente: Rendimiento académico inmediato (cualitativa ordinal policotómica).	*El rendimiento académico hace referencia a la evaluación del conocimiento adquirido en el ámbito académico. Así, se dice de un estudiante que tiene buen rendimiento académico si obtiene calificaciones positivas en las pruebas que debe realizar a lo largo de un curso. Tradicionalmente, el rendimiento académico se ha entendido como una medida de las capacidades o conocimientos del estudiante, que viene a reflejar lo que éste ha asimilado durante el proceso de aprendizaje. Desde este punto de vista, se entiende que el rendimiento académico está en relación con las aptitudes* (Landeta, 2018: p. 28). En palabras de López, (2011), *la medición en educación consiste en describir cuantitativamente el rendimiento del alumno, ésta representa el grado en que el estudiante alcanza la conducta establecida en los objetivos* (p. 88).	El rendimiento académico es el indicador de la productividad de un sistema educativo, ya sea en un bimestre, cuatrimestre, semestre o año escolar, que suministra la data fundamental que activa y desata cualquier proceso evaluativo destinado a alcanzar una educación de calidad. Si éste se refiere solo a calificativos cuantitativos, entonces se está hablando de un *Rendimiento Académico Inmediato*. Es decir, el RAI es la medición del aprendizaje de un estudiante sin llegar a la etapa de evaluación del mismo. En ese sentido, medición $\neq$ evaluación. La variable RAI será observada, a través de los puntajes obtenidos por los sujetos de estudio, con una prueba de rendimiento académico y un registro de calificaciones (a saber, una base de datos).

Nota: Fuente: Propia (2023).

Tabla 6

Definición conceptual de las variables extrañas.

VARIABLE	DEFINICIÓN CONCEPTUAL
Variable Extraña 1: Estudiantes egresados de instituciones privadas.	Son aquellos estudiantes egresados de instituciones (o planteles) fundadas, sostenidas y dirigidas por personas particulares. Este tipo de instituciones les está permitido el cobro de matrícula y mensualidades por el servicio educativo prestado. Deben estar inscritas y/o registradas ante el Ministerio del Poder Popular para la Educación y cumplir con los planes Curriculares que éste determine. La organización, funcionamiento y formas de financiamiento de éstos deberán ser autorizados periódicamente por el Ministerio de Educación. Los institutos privados que impartan educación preescolar, educación básica y educación media diversificada y profesional, así como los que se ocupen de la educación de indígenas y de la educación especial, solo podrán funcionar como planteles privados inscritos. Estas instituciones son responsables del personal contratado, en ese sentido, se rigen por la Ley Orgánica del Trabajo. Deben cumplir con la Normativa Fiscal y las leyes especiales que les apliquen, de acuerdo a la personalidad jurídica con la que hayan sido constituidas. Las instituciones privadas ofrecen programas Extracurriculares que favorecen el perfeccionamiento de idiomas, arte, ciencia y tecnología.
Variable Extraña 2: Estudiantes egresados de instituciones públicas.	Son aquellos estudiantes egresados de instituciones (o planteles) oficiales que han sido fundadas y sostenidas por el Ejecutivo Nacional, por los Estados, por los Territorios Federales, las Municipalidades, los Institutos Autónomos y las Empresas del Estado; debidamente autorizados por el Ministerio de Educación. Este tipo de institución es gratuita desde el preescolar hasta la secundaria, la universitaria (3^{er} nivel) requiere de pagos de tasas de inscripción (aranceles) pero de bajo costo; la educación de 4^{to} y 5^{to} nivel es paga en su totalidad. El personal docente, administrativo y obrero, que labora en estas instituciones, depende directamente del Ministerio del Poder Popular para la Educación; son empleados públicos y se rigen por la Ley de Carrera Administrativa. No todos los centros educativos públicos ofrecen, a los estudiantes, servicios adicionales (extracurriculares).

Nota: Fuente: Propia (2023).

Tabla 7

Matriz de operacionalización de las variables de estudio.

OBJETIVOS	VARIABLES	DIMENSIONES	INDICADORES	REACTIVOS	TÉCNICAS/INSTRUMENTOS
2.- Desarrollar una estrategia didáctica alternativa fundamentada con la teoría APOE, que no emplea sistemas de ecuaciones, para la descomposición en fracciones simples.	**Variable Independiente**: Descomposición en fracciones simples, desarrollada con un modelo instruccional.	Estrategia Didáctica Alternativa	Estrategia de ACCIÓN aplicada a la Técnica Alternativa.	**1-2-3**	**Técnica 1**: Prueba de Evaluación. **Instrumento de Medición**: Prueba de Rendimiento Académico (P.R.A.). **Técnica 2**: Registro. **Instrumento de Recolección**: Base de Datos.
			Estrategia de PROCESO aplicada a la Técnica Alternativa.	**4**	
			Estrategia de OBJETO aplicada a la Técnica Alternativa.	**5**	
3.- Emplear la metodología de modelación matemática en problemas que utilicen el proceso de descomposición en fracciones simples.			Estrategia de ESQUEMA aplicada a la Técnica Alternativa.	**6-7-8**	
		Modelación Matemática	Estrategia de relación CONCEPTUAL con situaciones de la vida real, trabajando la Técnica Alternativa a nivel de ESQUEMA.	**9-10**	
			Estrategia de MATEMATIZACIÓN para situaciones de la vida real, trabajando la Técnica Alternativa a nivel de ESQUEMA.		
4.- Describir el efecto de la descomposición en fracciones simples, desarrollada con un modelo instruccional; constituido por la estrategia didáctica alternativa y la modelación matemática, sobre el rendimiento académico inmediato.	**Variable Dependiente**: Rendimiento académico inmediato (cualitativa ordinal policotómica).	Alto	$\mathbf{17-20}$ Cuando el estudiante evidencia el logro de los aprendizajes previstos, demostrando incluso un manejo solvente y muy satisfactorio en todas las tareas propuestas.	No Aplica para la construcción de la P.R.A.	
		Medio	$\mathbf{14-16}$ Cuando el estudiante evidencia el logro de los aprendizajes previstos en el tiempo programado.	No Aplica para la construcción de la P.R.A.	
5.- Confirmar que la descomposición en fracciones simples, desarrollada con un modelo instruccional; constituido por la estrategia didáctica alternativa y la modelación matemática, genera cambios significativos sobre el rendimiento académico inmediato.		Bajo	$\mathbf{10-13}$ Cuando el estudiante está en camino de lograr los aprendizajes previstos, para lo cual requiere acompañamiento durante un tiempo razonable para lograrlo.	No Aplica para la construcción de la P.R.A.	
		Deficiente	$\mathbf{0-9}$ Cuando el estudiante está empezando a desarrollar los aprendizajes previstos o evidencia dificultades para el desarrollo de éstos y necesita mayor tiempo de acompañamiento e intervención del docente de acuerdo a su ritmo y estilo de aprendizaje.	No Aplica para la construcción de la P.R.A.	

Nota: Fuente: Propia (2023).

Unidades de Estudio para la Investigación

Las unidades de estudio de una investigación constituyen todo el conjunto de individuos, objetos o datos numéricos, entre otros, que conforman tanto la *población* como la *muestra* y de quienes se obtendrán los datos fundamentales para el desarrollo de los constructos epistémicos que se derivan de todo el proceso investigativo.

Población de Estudio

Como población, este conjunto de sujetos comparte entre sí características semejantes que los identifica y que se pueden englobar dentro de un conglomerado particular. Entonces, la población, "es un subconjunto del universo, conformado en atención a un determinado número de variables que se van a estudiar, variables que lo hacen un subconjunto particular con respecto al resto de los integrantes del Universo" (Ramírez: 2007, 73).

En tal sentido; la población estudiantil de la presente investigación estuvo constituida por un colectivo de $\mathbf{120}$ estudiantes distribuidos en tres (3) secciones de cálculo II, cada una con $\mathbf{40}$ sujetos de estudio. Estas secciones serán llamadas *grupos intactos* (o naturales) puesto que el investigador no las seleccionó usando procesos aleatorios. Los estudiantes que integran la mencionada población pertenecen al lapso académico $1 - 2023$ de la Facultad de Ciencias y Tecnología (FaCyT) de la Universidad de Carabobo (UC).

Es importante acotar que; el investigador tuvo contacto directo solo con dos (2) de las tres (3) secciones antes mencionadas, a saber; las secciones 1 y 2. La sección 3 fue administrada por otro docente de la FaCyT-UC y, en ese sentido, la misma actuó como un segundo grupo control.

El contenido impartido en cálculo II fue un curso inicial de «*cálculo integral para funciones reales de una variable real*» donde es necesario que los estudiantes trabajen y dominen el objeto matemático «*Descomposición en Fracciones Simples*» para que puedan abordar problemas donde se utilice el proceso de integración (cálculo de primitivas) para «*funciones racionales*».

En relación a ello, Pérez (2006) expresa que población: "es el conjunto finito o infinito de unidades de análisis, individuos, objetos o elementos que se someten a estudio; pertenecen a la investigación y son la base fundamental para obtener la información" (p. 75).

Poblaciones Numéricas

En este estudio se trabajó con tres (3) poblaciones de este tipo y estuvieron constituidas por los «*datos numéricos*» obtenidos después de corregir la prueba de rendimiento académico en cada grupo de investigación. Es de hacer notar que, para el día de la aplicación de la prueba de rendimiento académico (o posttest) solo presentaron $\mathbf{115}$ de $\mathbf{120}$ estudiantes entre los tres (3) grupos de investigación. En ese sentido; se presenta el tamaño de la población para el grupo experimental y para cada grupo de control: $\boldsymbol{N_{G_E} = 39}$, $\boldsymbol{N_{G_C} = 36}$ y $\boldsymbol{N_{G_C^*} = 40}$.

Muestras Estadísticas

En vista de que el tamaño de las poblaciones numéricas es asequible, el investigador decidió trabajar con la totalidad de las unidades de estudio en cada población.

Al respecto, Arias (2012) expone que; si la población resulta accesible, de acuerdo al número de unidades que la integran, no es necesario extraer una muestra. En consecuencia, se pueden obtener los datos de toda la población. Otros autores, como Palella y Martins (2012) alegan lo siguiente;

> Cuando se propone un estudio, el investigador tiene dos opciones: abarcar la totalidad de la población, lo que significa hacer un censo o estudio tipo censal, o seleccionar un número determinado de unidades de la población, es decir, determinar una muestra. (p. 105)

En ese orden de ideas; esta investigación se desarrolló abarcando la totalidad de las tres (3) poblaciones numéricas, es decir, se hizo un estudio tipo «*censal*» obteniendo los siguientes tamaños para las muestras estadísticas:

$$\boldsymbol{n_E = 39},\ \boldsymbol{n_C = 36} \text{ y } \boldsymbol{n_{C^*} = 40}.$$

En adelante; para esta investigación es indiferente usar los términos estadísticos población o muestra, ya que, el estudio es censal. En otras palabras; desde el punto de vista matemático existe un isomorfismo entre la población numérica y la muestra estadística de cada grupo de investigación. En ese sentido; la población de estudio y la muestra estadística de cada grupo de investigación son conjuntos iguales con nombres distintos. Es decir;

$$\boldsymbol{N_{G_E} = n_E},\ \boldsymbol{N_{G_C} = n_C} \text{ y } \boldsymbol{N_{G_C^*} = n_{C^*}}.$$

Por otro lado, según Kerlinger y Lee, (2002); lo ideal para un experimento es tener dos grupos de comparación iguales (o equivalentes) respecto a otras variables independientes que tengan un posible efecto en la variable dependiente y una manera de lograr esto es a partir de un muestreo «*aleatorio*». La idea de estos procesos aleatorios es darle mayor rigor estadístico a la investigación desde el punto de vista de las probabilidades (Kerlinger y Lee, 2000).

En ese sentido; para realizar el análisis de una de las pruebas de hipótesis, a saber; aquella donde participa la hipótesis alternativa de esta investigación, se ejecutó un «*remuestreo*» con la técnica *Bootstrap* sobre dos (2) muestras intencionales (egresados de instituciones públicas y egresados de instituciones privadas) obtenidas a partir de la población numérica del $\boldsymbol{G_E}$. Para ello se utilizaron «*procesos aleatorios*» y herramientas computacionales.

Con la técnica de remuestreo antes mencionada se realizaron simulaciones obteniendo un número elevado, $\boldsymbol{n}$, de muestras aleatorias (o muestras bootstrap), cada una de tamaño $\boldsymbol{m}$, construidas directamente a partir de los datos observados en las muestras intencionales del $\boldsymbol{G_E}$.

Tipo de muestreo. El objetivo general de todo muestreo es llegar a conocer determinadas características de una población, a partir de una selección de unidades de ésta, con el menor coste posible en dinero, tiempo y trabajo. El diseño de una muestra puede seguir estrategias distintas que identifican diferentes tipos de muestreo. Una primera distinción fundamental es la que los clasifica en función de si son probabilísticos o no.

En ese sentido; para seleccionar las unidades de observación que integraron las «*muestras aleatorias*» (o muestras bootstrap) de esta investigación se tomaron en cuenta los siguientes criterios:

1.- Cada muestra bootstrap se definió como «*No Estratificada*» por cuanto no estuvo sub clasificada ni diferenciada en sub grupos o categorías, sino que, todas las «*unidades muestrales*» solo deberían contar con una única característica para pertenecer a la muestra y, esa es su condición de ser valores numéricos (puntuación del posttest) provenientes de estudiantes egresados de instituciones privadas o públicas.

2.- Cada muestra bootstrap se definió como «*Probabilística*», según López-Roldán y Fachelli (2015), ella proviene de aquel muestreo en que, de forma estricta, todas las unidades de la población tienen una probabilidad conocida de ser incluidas en la muestra, y, por lo tanto, también se conoce la probabilidad de obtener cada una de las muestras mediante un procedimiento aleatorio.

De igual manera; Hernández, Fernández y Baptista (2010) señalaron: "[…] la elección de la muestra probabilística y no probabilística se determina con base en el planteamiento del problema, las hipótesis, el diseño de investigación y el alcance de sus contribuciones […]" (p. 177).

En ese sentido; López-Roldán y Fachelli (ob. cit.) dividen al muestreo probabilístico en: aleatorio simple, sistemático, por conglomerados y polietápico. Estos autores comentan que; el «*muestreo aleatorio simple*» es el más sencillo, pero fundamental pues constituye la técnica muestral básica de la estadística inferencial de donde se derivan las demás y con la que se comparan los demás métodos.

Al respecto; una «*muestra aleatoria simple*» se define como aquella donde las unidades muestrales se seleccionan o se extraen aleatoriamente cumpliendo las siguientes condiciones:

1.- Cada unidad de la población tiene idéntica probabilidad de ser incluida en la muestra y **2**.- Cada combinación de unidades, es decir, cada muestra posible de tamaño $\boldsymbol{n}$ que se puede seleccionar tiene igual probabilidad de constituirse (condición de equiprobabilidad). En total existen múltiples combinaciones de posibles muestras donde se seleccionan $\boldsymbol{n}$ casos entre una población de tamaño $\boldsymbol{N}$.

Para extraer una «*muestra aleatoria*» tradicionalmente se disponía de tablas en papel con una relación de números dispuestos al azar y que determinen las unidades a extraer. Hoy en día el «*software estadístico*» genera los «*números aleatorios*». El procedimiento de extracción consiste en cuatro (4) pasos simples:

1.- Se numeran de **1** a $\boldsymbol{N}$ correlativamente todas las unidades de la población en la base de datos de la muestra, **2**.- Se determina el tamaño $\boldsymbol{n}$ de la muestra aleatoria, **3**.- Se generan los $\boldsymbol{n}$ números aleatorios y **4**.- Los $\boldsymbol{n}$ números se extraen del listado de la base de datos, constituyendo la muestra aleatoria.

Siguiendo las ideas anteriores y dadas las características de la técnica de remuestreo utilizada en la presente investigación; el autor seleccionó las unidades muestrales con un «*muestreo aleatorio simple con reposición*» y para efectos del proceso utilizó como generador de «*números aleatorios*» un «*software estadístico*». En particular, se generaron las muestras bootstrap usando el lenguaje de programación $\boldsymbol{R}$.

Recolección de Datos

Las técnicas de recolección de datos, así como los instrumentos, constituyen un factor fundamental del proceso de investigación, en virtud de que, de ellos depende que los datos recogidos estén apropiadamente vinculados a la información que se desea obtener y respondan a los objetivos previstos para la misma. En ese orden de ideas, es necesario aclarar que; una cosa son las técnicas y otra los instrumentos, aunque ambas herramientas estén estrechamente vinculadas pues cada instrumento debe ser consistente y apropiado con la técnica seleccionada. Estos elementos en primera instancia se definirán por separado para luego establecer la correlación entre los mismos.

Técnicas de Recolección

Las técnicas en general, constituyen parte fundamental del proceso metodológico y configuran un camino estratégico puntual para el proceso de recolección de los datos. De acuerdo con Ferrer (2007), las técnicas en la investigación "[…] son los medios auxiliares de la metodología, normas y conocimientos, instrumentos que se utilizan para realizar una actividad" (p. 125). Por otro lado, Pérez (2006) expresa que; "la técnica es el procedimiento y el instrumento, la herramienta que utiliza el investigador para registrar y organizar posteriormente la información" (p. 77). A propósito de esta última cita, vale la pena aclarar que existen técnicas que cumplen la doble función técnica-instrumento. Muchas de estas técnicas están estandarizadas, así como muchos instrumentos y, por lo tanto, obedecen a patrones específicos en función del enfoque y método asumido por el investigador.

En ese orden de ideas; el autor del presente trabajo aplicó dos (2) técnicas de recolección de datos, a saber, la «*Prueba de Evaluación*» y el «*Registro*», ambas técnicas permitieron la observación de la variable «*dependiente*» definida en el estudio (a saber, el RAI). A continuación, se expone cada una de las técnicas utilizadas.

Prueba de Evaluación. Palella y Martins (2012) afirman que; "la prueba de evaluación es una técnica que implica la realización de una tarea definida en un tiempo determinado, con el fin de valorar el resultado de un aprendizaje o labor didáctica" (p. 124).

Esta técnica pertenece al enfoque cuantitativo y tiene entre sus ventajas que; se puede aplicar en el momento adecuado (o deseado) por el investigador (Palella y Martins, ob. cit.). En ese sentido; el autor de este trabajo (tomando en cuenta el diseño de investigación asumido) tuvo plena libertad de planificar el momento apropiado, después de la intervención de la variable independiente, para aplicar como técnica de medición de datos una Prueba de Evaluación.

Siguiendo ahora con la segunda técnica de recolección utilizada en esta investigación.

Registro. Consiste en recoger información sobre determinadas variables en forma sistemática y continua o periódica (Martínez-Pérez y Rodríguez-Esponda, s.f.). En ese sentido, con esta técnica se organizaron los datos numéricos obtenidos después de corregir el posttest.

Seguidamente; se mostrarán los instrumentos de recolección asociados a cada técnica usada en la presente investigación.

Instrumentos de Medición

Como se mencionó anteriormente, cada técnica de investigación está asociada de manera directa a un instrumento el cual es utilizado para la recolección (o medición) de los datos de estudio. Para Arias "la aplicación de una técnica conduce a la obtención de información la cual debe ser guardada en un medio material de manera que los datos puedan ser recuperados, procesados, analizados e interpretados posteriormente. A dicho soporte se le denomina instrumento" (2012, p. 68).

Considerando la primera técnica utilizada, a saber, la «*Prueba de Evaluación*», a continuación; se presenta el instrumento que se vincula a ella.

Prueba Objetiva. (Opción Múltiple). Según Palella y Martins (2012);

> Las pruebas objetivas son las construidas a partir de reactivos (preguntas) cuya respuesta no deja lugar a dudas respecto a su corrección o incorrección. Este tipo de prueba puede ser empleada con fines diagnósticos, formativos o resumidos, lo cual ya le impone ciertas modalidades según el propósito que se aspira. (p. 145)

Por otro lado; para Macías (2011) los términos: pregunta, ítem y reactivo son utilizados con frecuencia como sinónimos, siendo el «*reactivo*» el más amplio, pues no se limita únicamente a una pregunta. Por lo tanto; un «*reactivo*» es un planteamiento de un problema o cuestionamiento para conocer el resultado del aprendizaje o, en general, el desempeño de una habilidad.

Un «*reactivo*» de «*opción múltiple*» se define como la formulación de una pregunta o problema que consta de un enunciado y una serie de respuestas, llamadas opciones. Entre éstas hay una correcta llamada solución, y otras incorrectas conocidas como distractores (Macías, ob. cit.).

De igual manera, Palella y Martins afirman que; los reactivos de opción múltiple "están constituidos, en su forma clásica, por un enunciado incompleto o una pregunta (cuerpo del reactivo) y varias posibles respuestas (opciones), entre las cuales una completa responde correctamente al enunciado o pregunta inicial" (ob. cit., p. 151).

En otro orden de ideas; el autor con el siguiente párrafo quiere aclarar el porqué de los diferentes nombres dados en este trabajo a la observación tipo «*posttest*». En ese sentido; para efectos de los resultados que arroja, por ejemplo, la prueba objetiva de opción múltiple ésta es equivalente a una prueba de rendimiento académico. Dicho de otra manera; según lo que mide la prueba objetiva, en la presente investigación, ésta se puede considerar como una prueba de rendimiento académico. Es decir; desde el punto de vista matemático, en esta investigación, los objetos: posttest, prueba objetiva de opción múltiple y prueba de rendimiento académico son isomorfos (objetos iguales con nombres distintos). Dicho esto, es importante acotar lo siguiente; esta consideración solo aplica en esta investigación, ya que, no siempre una prueba de rendimiento académico es una prueba objetiva de opción múltiple.

Tomando en cuenta la segunda técnica, el «*Registro*», se presenta el instrumento que se enlaza a la misma.

Base de Datos. Según Martínez-Pérez y Rodríguez-Esponda, (s.f.), "es la forma organizada y estructurada de recopilar la información obtenida de todos los elementos estudiados" (p. 31).

En tal sentido; el autor del presente trabajo aplicó una «*Prueba Objetiva*» de opción múltiple (prueba de rendimiento académico) a los grupos de investigación, la misma actuó según el diseño experimental implementado, como «*Post-Test*», ver Anexo **A-1**. Una vez corregida la prueba objetiva, se registraron los resultados cuantitativos en una «*Base de Datos*».

Es importante señalar que; la prueba objetiva de opción múltiple diseñada y utilizada en esta investigación para la medición de datos, fue sometida a los procesos de «*validez*» y «*confiabilidad*» como corresponde formalmente al proceso de rigurosidad metodológica dentro del método científico. En ese sentido, primero se presenta el proceso de «*validez del instrumento*» que se ejecutó en esta investigación.

Validez del Instrumento de Medición. Según Ramírez, "un instrumento de recolección es válido cuando mide lo que se pretenda que mida" (2007, p. 113). Para estos efectos; se verificó la «*validez de contenido*» la cual, "supone determinar hasta donde los ítems o reactivos de un instrumento de recolección de datos son representativos del contenido o universo del contenido de la propiedad que se desea medir" (Ramírez, ob. cit., p. 114). Para ello; se aplicó una técnica basada en el «*Juicio de Expertos*». Según, Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez "el juicio de expertos se define como una opinión informada de personas con trayectoria en el tema, que son reconocidas por otros como expertos cualificados en éste, y que pueden dar información, evidencia, juicios y valoraciones" (2008, p. 29).

En ese sentido; este método se caracteriza por contar con un número de expertos que bien proponen los ítems o dimensiones que deben conformar el constructo de interés o evalúan los diferentes ítems en función de su relevancia y representatividad, en base a una escala tipo «*Likert*» diseñada por el investigador para la validación, y emiten juicios sobre el grado de emparejamiento entre los elementos y los contenidos que han de ser evaluados (Abad, Olea, Ponsoda y García, 2011).

La identificación de las personas que forman parte del «*juicio de expertos*» es una parte crítica en este proceso, frente a lo cual Skjong y Wentworth (2000) proponen los siguientes criterios de selección: (***a***) Experiencia en la realización de juicios y toma de decisiones basada en evidencia o experticia (grado académico, investigaciones, publicaciones, posición laboral, experiencia y premios, entre otras), (***b***) reputación en la comunidad científica donde se desarrolla, (***c***) disponibilidad y motivación para participar en el proceso de validación, y (***d***) imparcialidad y cualidades inherentes como confianza en sí mismo y adaptabilidad. También plantean que los expertos pueden estar relacionados por educación similar, entrenamiento, experiencia, entre otros. Por otra parte; los autores McGartland, Berg, Tebb, Lee, y Rauch (2003) proponen como criterio básico de selección únicamente el número de publicaciones o la experiencia.

Por todo lo anterior; en el presente trabajo se logró la participación de treinta (30) profesionales para integrar el grupo de «*jueces expertos*» que validaron el instrumento de recolección de datos; entre ellos, hay especialistas en las áreas de Matemática, Educación Matemática, Metodología de la Investigación y Lecto-Escritura, ver Anexo **A-2**.

Se debe tomar en cuenta que; después de realizar la selección de los miembros que conformaron el grupo de «*jueces expertos*», al margen del análisis cualitativo de los mismos, resulta imprescindible que éstos aporten una valoración cuantitativa a los ítems. En caso contrario; el mero hecho de que informen sobre la falta o exceso de ítems representativos del constructo o que simplemente determinen a qué dimensión corresponde cada elemento, no aporta por sí solo información relevante para el proceso de validación (Sireci, 1998). Por esta razón; es fundamental aplicar alguno de los métodos empíricos (o estadísticos) existentes para cuantificar ese «*grado de acuerdo*».

De ahí que; una vez que los «*jueces expertos*» dieron su veredicto de la validación del instrumento, fue necesario estimar la confiabilidad de ese juicio. Es decir; es necesario conocer el «*grado de acuerdo*» (o concordancia) entre los jueces por medio de un estadístico, ya que, un juicio incluye elementos subjetivos (Aiken, 2003).

En ese sentido; el estadístico para estimar el «***C****oeficiente de* ***V****alidez de* ***C****ontenido*» utilizado en este trabajo fue el propuesto por Hernández-Nieto (2002). Éste permite valorar el «*grado de acuerdo*» de los expertos respecto a cada uno de los diferentes ítems y al instrumento en general.

Para ello; tras la aplicación de una escala tipo «*Likert*», ver Anexo **A-3**, se calcula la media obtenida en cada uno de los ítems y, en base a esta, se calcula el $\boldsymbol{CVC}$ para cada elemento.

Así,

$$\boldsymbol{CVC_i = \frac{M_x}{V_{m\acute{a}x}}} \qquad (\mathbf{3.1})$$

donde $\boldsymbol{M_x}$ representa la media del elemento en la puntuación dada por los expertos y $\boldsymbol{V_{m\acute{a}x}}$ la puntuación máxima que el ítem podría alcanzar. Por otro lado; debe calcularse el error asignado a cada ítem ($\boldsymbol{Pe_i}$), de este modo se reduce el posible sesgo introducido por alguno de los jueces, obtenido mediante

$$\boldsymbol{Pe_i = \left(\frac{1}{j}\right)^j} \qquad (\mathbf{3.2})$$

siendo $\boldsymbol{j}$ el número de expertos participantes. Finalmente, el $\boldsymbol{CVC}$ se calcula aplicando la siguiente diferencia $\boldsymbol{CVC} = CVC_i - Pe_i$.

Con respecto a su interpretación; Hernández-Nieto (ob. cit.) comenta que este coeficiente puede tomar valores en el intervalo $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ y, en ese sentido, recomienda mantener únicamente aquellos ítems con $\boldsymbol{CVC} > \mathbf{0.80}$, aunque algunos criterios menos estrictos establecen valores superiores a $\mathbf{0.70}$ (Balbinotti, 2004).

A continuación, la interpretación del $\boldsymbol{CVC}$ según Hernández-Nieto (2011);

1.- Si $\boldsymbol{CVC} \in [0; 0.6[$, entonces la validez y concordancia son *inaceptables*.

2.- Si $\boldsymbol{CVC} \in [0.6; 0.7]$, entonces la validez y concordancia son *deficientes*.

3.- Si $\boldsymbol{CVC} \in]0.7; 0.8]$, entonces la validez y concordancia son *aceptables*.

4.- Si $\boldsymbol{CVC} \in]0.8; 0.9]$, entonces la validez y concordancia son *buenas*.

5.- Si $\boldsymbol{CVC} \in]0.9; 1]$, entonces la validez y concordancia son *excelentes*.

Para ver los resultados de la cuantificación de validez de contenido de la «*prueba de rendimiento académico*», aplicada en la presente investigación, por medio del **C**oeficiente de **V**alidez de **C**ontenido de Hernández-Nieto ir al Anexo **A-4**.

Ahora, se muestra el proceso de «*confiabilidad del instrumento*» realizado en la presente investigación.

Confiabilidad del Instrumento de Medición. Palella y Martins definen la confiabilidad como; "la ausencia de error aleatorio en un instrumento de recolección de datos" (2012, p. 164). En otras palabras; "un instrumento es confiable cuando, aplicado al mismo sujeto en diferentes circunstancias, los resultados o puntajes obtenidos son aproximadamente los mismos" (Palella y Martins, ob. cit., p. 165). Se puede inferir, con las citas anteriores, que el cumplir con el requisito de la confiabilidad hace suponer que la variable a medir en el estudio se mantendrá estable a través del tiempo.

Se debe tomar en cuenta que; existen muchas maneras para estimar la confiabilidad de un instrumento y estas están estrechamente relacionadas con la dirección dada a la investigación, en el caso de la presente, se estimará la confiabilidad de acuerdo al siguiente criterio, según Ruiz (2013); "puede ser enfocada como el grado de homogeneidad de los ítemes del instrumento en relación con la característica que pretende medir" (pp. 83-84). En ese sentido; entre los diferentes tipos de confiabilidad, Ruiz hace referencia a la «*Confiabilidad de Consistencia Interna*» u *homogeneidad*.

Siguiendo la misma idea; existen diferentes maneras para determinar la confiabilidad de un instrumento de recolección de datos, en este trabajo, se aplicó la «*Repetición de Test*» o «*Prueba Test/Retest*». Esta técnica, según Palella y Martins, "consiste en volver a aplicar la misma prueba al mismo sujeto o grupo de sujetos: esta segunda prueba se llama retest" (ob. cit., p. 166). Una vez aplicada la misma prueba en dos (2) momentos distintos, los dos (2) grupos de datos obtenidos se correlacionan y el coeficiente calculado representa una estimación de la *confiabilidad de consistencia interna* del instrumento (Anastasi, 1976).

Para calcular dicho coeficiente de correlación; se usó el método de los «*Puntajes Directos*» o «*Correlación de Pearson*» que se expresa en la fórmula dada por Ruiz (2013):

$$\boldsymbol{r_{xy}} = \frac{\boldsymbol{N\sum XY - \sum X \sum Y}}{\sqrt{[\boldsymbol{N\sum X^2 - (\sum X)^2}][\boldsymbol{N\sum Y^2 - (\sum Y)^2}]}} \ . \qquad (\mathbf{3.3})$$

Donde:

$\boldsymbol{r_{xy}} \coloneqq$ *Coeficiente de correlación*.

$\boldsymbol{N} \coloneqq$ *Número de sujetos*.

$\boldsymbol{X} \coloneqq$ *Valores de X* (1^{ra} aplicación del instrumento).

$\boldsymbol{Y} \coloneqq$ *Valores de Y* (2^{da} aplicación del instrumento).

El coeficiente $\boldsymbol{r_{xy}}$ toma valores en el intervalo $[\mathbf{-1, 1}]$. Un valor del coeficiente $\boldsymbol{r_{xy}}$ de $\mathbf{-1}$ describe una correlación negativa perfecta, es decir, todos los puntos experimentales están sobre una recta de pendiente negativa. De manera similar; cuando $\boldsymbol{r_{xy}} = \mathbf{1}$ se tiene una correlación positiva perfecta, es decir, todos los puntos están exactamente sobre una recta de pendiente positiva. Cuando no existe correlación entre $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ el valor de $\boldsymbol{r_{xy}}$ es cero (Miller, J. N. y Miller, J. C., 2002). Para los cálculos de este coeficiente en relación al presente trabajo ver Anexo **A-5**.

Teorías de Análisis de Datos

La recolección de datos durante todo el proceso de investigación genera, y así debe ser; todo un grupo de datos amplio y suficiente que habrá de permitir al investigador contar con los insumos necesarios para sustentar sus aproximaciones hipotéticas, las que a posteriori habrán de consolidarse en teorías sustentadas y soportadas en la premisa de una sólida construcción teórica, de un tratamiento congruente dentro del paradigma, enfoque y tipo de investigación asumido, y con una metodología adecuada, consistente e inherente al método utilizado. Por estas razones; más allá de las teorías y preceptos que otorgan fundamentación teleológica y epistemológica, presentados en la sustentación teórica de una investigación; es necesario de igual manera presentar los elementos teóricos que darán sustento a la organización, presentación, procesamiento y tratamiento en la fase de análisis de los datos recolectados.

En ese orden de ideas; las teorías que sustenten el análisis de los datos recolectados, estarán direccionadas a ofrecer un modelo coherente con la confirmación de la hipótesis de investigación planteada y con miras a consolidarla como constructo epistémico, es decir, una nueva teoría. Al respecto, Creswell (2003) plantea que; "en la investigación cuantitativa, las hipótesis y las preguntas de investigación, frecuentemente están basadas en teorías que el investigador revisa con el fin de comprobarlas" (p. 5). Por tales motivos; para efectos de esta investigación, el autor asumió apoyarse en fundamentos teóricos que mantengan la solidez con el método, el enfoque, el diseño y el tipo de investigación que consistentemente se han planteado desde el inicio en este trabajo. Dichos fundamentos, se basan en la teoría de la «*Estadística Descriptiva*» y la teoría de la «*Estadística Inferencial*».

Teorías Estadísticas

Para Rustom (2012), "la Estadística es necesaria cuando existe variabilidad entre los datos. Sin variabilidad en las observaciones la Estadística carece de valor. Se puede decir, entonces, que la Estadística es en general el estudio de la variabilidad" (p. 10). Si se parte de una investigación impregnada de variables susceptibles de ser cuantificadas, entonces será necesario el uso de la Estadística para someter a juicio objetivo esa variabilidad. Siguiendo la idea anterior; la presente investigación parte de una variable susceptible a tratamiento cuantificable (a saber, la variable dependiente), lo que a juicio del investigador es suficiente para proporcionar al estudio la condición de ser objeto de aplicar la «*Estadística*» tanto en la organización y descripción como en el análisis de los datos recolectados.

De esta manera; el presente estudio contó con la aplicación de la teoría estadística desde dos perspectivas: «*Estadística Descriptiva*» y «*Estadística Inferencial*», en virtud de que cada una de estas vertientes ofreció una función y una visión distinta desde la organización de los datos, pasando por la representación, hasta el análisis de los mismos. Esto implica, como a continuación será explicado, que desde la decisión del paradigma, enfoque y método; el estudio de manera cuasi obligatoria fue sometido al tratamiento estadístico de los datos, considerando el conjunto de elementos, factores y su manera de ser abordados, ya sea de forma descriptiva o inferencial.

Estadística Descriptiva. La estadística descriptiva es la rama de la estadística que formula recomendaciones sobre cómo organizar los datos recolectados en cuadros o tablas, gráficas o figuras (Rendón, Villasís y Miranda, 2016). En tal sentido; considerando que todos los datos recolectados en esta investigación serán organizados en tablas de frecuencias absolutas y/o porcentuales con el objetivo de generar las gráficas respectivas para dar una mejor descripción de los mismos, y se calcularan algunas medidas de tendencia central y de variabilidad para generar el análisis descriptivo, se asume que allí se aplican los postulados de la «*Estadística Descriptiva*». De igual manera; es importante acotar que previamente al tratamiento tabular, los datos fueron desplegados en las categorizaciones propias de su estructura; es decir, variables, dimensiones e indicadores, además de que las unidades de análisis ya fueron definidas en términos de población y muestra; conceptos y categorías que también forman parte de la Estadística Descriptiva.

Desde esa perspectiva, los datos después del proceso de recolección, van siendo observados en su comportamiento con cálculos estadísticos que de manera concreta permitan evidenciar el comportamiento de las variables de estudio:

- Resumen de los datos, tablas de frecuencias.
- Gráficos bidimensionales.
- Cálculo de algunas medidas elementales.
- Escalas de medición.
- Medidas de tendencia central y de posición: media aritmética (presente en el índice de validez y de confiabilidad).
- Medidas de dispersión absolutas y relativas: varianza, desviación típica.

Estadística Inferencial. La inferencia estadística, consiste en la asunción de la probabilidad que tiene un hecho de ocurrir a partir del comportamiento de un conjunto de datos que han sido cuidadosamente observados en su tratamiento descriptivo. Dicho de otra manera; se infiere que un hecho o fenómeno ocurra a futuro según como se hayan comportado los datos en su análisis numérico, lo que implica que, la Estadística Inferencial está supeditada a la Estadística Descriptiva que es quien le ofrece esa información. Asimismo, en virtud de que se intenta predecir un hecho futuro con mayor o menor grado de ocurrencia, la Estadística Inferencial está anclada a las leyes de probabilidades.

En el orden de lo dicho; mientras la estadística descriptiva busca la organización de datos, obtenidos mediante la observación, para presentarlos de la forma más entendible posible mediante la construcción de tablas y gráficas, y se calculan parámetros conocidos como estadísticos; la estadística inferencial ajusta modelos teóricos que vayan acorde con cierto grado de confianza, lo cual va a indicar qué tan confiables son los datos recolectados. Asimismo, la inferencial se basa en los datos obtenidos de la descriptiva, en probabilidades y busca calcular estimaciones, pruebas de hipótesis y conclusiones generalizadas para una población (Rojas, 2020).

Siguiendo las ideas anteriores; de las dos (2) vertientes que estudia la estadística inferencial, el presente trabajo se encaminó por el análisis de pruebas de hipótesis. En concreto, se realizaron tres (3) pruebas de hipótesis; la primera para determinar la equivalencia inicial (u homogeneidad) entre los grupos de investigación, la segunda para confirmar que el $\boldsymbol{G_E}$ presenta una mejora significativa en el rendimiento académico inmediato con respecto a cada grupo control y la tercera para confirmar que el tratamiento didáctico se aprovecha más en estudiantes egresados de instituciones privadas.

Etapas del Proceso de Investigación

A continuación, se muestran las etapas desarrolladas por el investigador durante todo el proceso de este estudio.

Etapa I. Se notificó al Decano de la Facultad de Ciencias y Tecnología (FaCyT) de la Universidad de Carabobo (UC) y al director del Departamento de Matemática de la FaCyT-UC el objetivo de la investigación con la finalidad de solicitar una autorización para desarrollar el experimento didáctico dentro de su población estudiantil. En ese sentido; las autoridades de la FaCyT-UC cortésmente asignaron para esta investigación doctoral tres (3) secciones (a saber, grupos intactos o naturales) de cálculo II, cada una de las secciones con $\mathbf{40}$ estudiantes, éstas estaban identificadas como: sección 1, sección 2 y sección 3. El tutor de la presente investigación quien es profesor ordinario del Departamento de Matemática de la FaCyT-UC solo administró dos (2) de las tres (3) secciones asignadas, en ese sentido, la sección 3 fue administrada por otro docente de la FaCyT-UC. En ese sentido; la asignación de estas secciones fue hecha por escrito mediante un oficio procedente de la Dirección del Departamento de Matemática, ver Anexo **A-7**. Con las tres (3) secciones asignadas para esta investigación, se obtuvo una «*población*» de $\mathbf{120}$ estudiantes con la cual se desarrolló el experimento didáctico.

Etapa II. Se diseñó una «*prueba diagnóstica*», ver Anexo **A-6**, con el objetivo de realizar un estudio estadístico descriptivo y pruebas de hipótesis para determinar la homogeneidad de las tres (3) secciones asignadas. El investigador hizo este análisis basándose en los conocimientos matemáticos, que deberían tener los sujetos de estudio, previos al tratamiento didáctico. Es importante aclarar; como se explicó anteriormente, en el apartado titulado 'diseño de investigación', en este estudio no tuvo ningún sentido aplicar una observación de tipo «*pretest*». En ese sentido; no hay que confundir la *prueba diagnóstica* que se aplicó con un *pretest*, ya que, son instrumentos de recolección con diseño y objetivos muy diferentes.

Etapa III. En el aula; el tutor del presente trabajo les explicó a sus estudiantes el objetivo de la investigación y, llegado el momento, la participación del investigador como facilitador en uno de los contenidos de la asignatura, se les solicitó su participación voluntaria y se les informó que los resultados del estudio no tendrían ninguna repercusión en su evaluación formal. Por otro lado; el docente que administró la sección 3, también, conversó con sus estudiantes y les pidió colaboración para que solamente presentaran los instrumentos de recolección de datos (a saber, la prueba diagnóstica y la prueba de rendimiento académico). Es de hacer notar que; ese docente trabajó el contenido del objeto matemático de estudio usando una técnica tradicional, en ese sentido, la sección 3 actuó durante el experimento didáctico como un segundo grupo control, siendo, identificado con la notación $\boldsymbol{G_C^*}$.

A continuación, se les aplicó la «*prueba diagnóstica*» a las tres (3) secciones y en total solo presentaron $\mathbf{114}$ estudiantes distribuidos de la siguiente forma:

sección $\mathbf{1} = \mathbf{39}$, sección $\mathbf{2} = \mathbf{37}$ y sección $\mathbf{3} = \mathbf{38}$.

Etapa IV. Se corrigió la «*prueba diagnóstica*» y con los resultados se hizo el análisis estadístico respectivo determinando que las tres (3) secciones son homogéneas.

Etapa V. Se aplicó un «*muestreo aleatorio simple*» para decidir entre las secciones 1 y 2 cuál sería el grupo experimental ($\boldsymbol{G_E}$), dando como resultado favorable a la sección 1. En adelante; el investigador se dirigirá a la sección 1, sección 2 y sección 3 como $\boldsymbol{G_E}$, $\boldsymbol{G_C}$ y $\boldsymbol{G_C^*}$, respectivamente.

Etapa VI. Se diseñó el instrumento de recolección de datos, ver Anexo **A-1**, que se utilizó como «*posttest*», se realizó el proceso de «*validación de contenido*» del mismo usando la técnica conocida como «*juicio de expertos*». En ese proceso participaron treinta ($\boldsymbol{30}$) expertos distribuidos en cuatro (4) áreas de experticia, a saber; matemática, educación matemática, metodología de la investigación y lecto-escritura. Para finalizar; se realizó el análisis de «*confiabilidad de consistencia interna*» del instrumento. En ambos casos; se calcularon los coeficientes aplicando los estadísticos respectivos dando resultados favorables con lo cual llegado el momento se pudo aplicar el instrumento a los distintos grupos de investigación.

Etapa VII. Llegado el momento, el investigador tomó las riendas en los cursos respectivos dando inicio al experimento didáctico. Se aplicó el tratamiento didáctico (técnica alternativa) al grupo experimental y a los dos (2) grupos de control se les trabajó de forma tradicional. Esta etapa llevó una duración de tres (3) semanas. A los tres (3) grupos de investigación se les trabajó el «*objeto matemático de estudio*», a saber, la «*Descomposición en Fracciones Simples*» con enfoques diferentes, en ese sentido, para el $\boldsymbol{G_E}$ el objeto matemático de estudio se desarrolló con un «*modelo instruccional*» creado para esta investigación y los dos grupos de control fueron tratados con el método de «*Coeficientes Indeterminados*».

Etapa VIII. Una vez terminado el tratamiento didáctico, en la siguiente sesión del experimento, se aplicó a los tres (3) grupos de estudio el «*posttest*», siguiendo la estructura del diseño planteado para esta investigación. Con este instrumento se recogieron los datos del estudio, solo $\boldsymbol{115}$ estudiantes asistieron y aceptaron participar en el *posttest*. El investigador quiere hacer notar que; hasta esta etapa fue el contacto directo con los estudiantes, en adelante, solo se trabajó con «*datos numéricos*». En otras palabras; hasta la presente etapa las unidades de observación fueron estudiantes en las siguientes etapas del proceso investigativo las unidades de estudio pasaron a ser «*datos numéricos*». En ese sentido; el análisis estadístico que siguió se realizó con tres (3) poblaciones numéricas de tamaño, $\boldsymbol{N_{G_E} = 39}$, $\boldsymbol{N_{G_C} = 36}$ y $\boldsymbol{N_{G_C^*} = 40}$; una conformada con los datos numéricos obtenidos del grupo experimental ($\boldsymbol{G_E}$), otra con los datos numéricos obtenidos del primer grupo control ($\boldsymbol{G_C}$) y la tercera con los datos numéricos obtenidos del segundo grupo control ($\boldsymbol{G_C^*}$). Como se dijo en el apartado titulado 'unidades de estudio para la investigación', en este trabajo se realizó un estudio «*censal*», es decir, para el análisis estadístico se trabajó con las tres (3) poblaciones numéricas completas.

Etapa IX. Con las muestras censales ($\boldsymbol{n_E = N_{G_E}}$, $\boldsymbol{n_C = N_{G_C}}$ y $\boldsymbol{n_{C^*} = N_{G_C^*}}$) se realizaron pruebas de hipótesis (a saber, diferencias de medias), llegando a conclusiones favorables para el modelo instruccional desarrollado en este estudio didáctico. Se utilizó la técnica de remuestreo «*Bootstrap*» para calcular el intervalo de confianza que contiene a la media poblacional, en este cálculo solo se utilizó como población numérica la del grupo experimental ($\boldsymbol{G_E}$).

Etapa X. Para realizar la prueba de hipótesis donde participa la hipótesis alternativa, se decidió usar la técnica de remuestreo *Bootstrap*. En este caso; solo se utilizó como población numérica la del grupo experimental ($\boldsymbol{G_E}$). Previo al análisis se buscó información, en la dirección de Control de Estudio de la FaCyT-UC, relacionada con la procedencia de los estudiantes del grupo experimental. En particular, la información solicitada se refirió al tipo de institución (pública o privada) de donde egresaron los sujetos de estudio pertenecientes a este grupo de investigación. Con esa información se dividió al grupo experimental, cuyo tamaño es $\boldsymbol{n_E = 39}$, en dos (2) subgrupos (o muestras intencionales), ver Otzen y Manterola, (2017), a saber, las mismas contenían datos provenientes de instituciones públicas y datos provenientes de instituciones privadas, el tamaño de cada muestra fue $\boldsymbol{n_{p\acute{u}b} = 19}$ y $\boldsymbol{n_{pri} = 20}$. Luego; a cada una de estas muestras intencionales se le aplicó la técnica Bootstrap, en ese sentido; el objetivo de implementar un muestreo repetitivo fue generar un número elevado ($\boldsymbol{n_B = 10.000}$) de muestras aleatorias cada una de tamaño $\boldsymbol{m}$ construidas a partir de $\boldsymbol{m}$ datos muestrales. Es decir, para la muestra relacionada con las instituciones públicas el tamaño de cada muestra bootstrap es de 19 y para la muestra relacionada con las instituciones privadas el tamaño de cada muestra bootstrap es de 20. Una vez obtenidas las muestras bootstrap se realizaron los cálculos respectivos para la prueba de hipótesis antes mencionada, llegando a conclusiones favorables para los estudiantes egresados de las diferentes instituciones privadas.

Etapa XI. Se analizaron los resultados obtenidos en las etapas **IX** y **X** para generar las conclusiones y recomendaciones finales.

Etapa XII. Se construyo un *modelo axiomático formal* para la *descomposición en fracciones simples*, desarrollada con la *técnica alternativa*, con el objetivo de generar el «*corpus teórico*» de la presente investigación doctoral.

CAPÍTULO IV

"*Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero hay una pizca de descubrimiento en la solución de cualquier problema. Tu problema puede ser modesto, pero si es un reto a tu curiosidad y trae a juego tus facultades inventivas, y si lo resuelves por tus propios métodos, puedes experimentar la tensión y disfrutar del triunfo del descubrimiento*".

George Pólya

LA TÉCNICA ALTERNATIVA

Fracciones Simples

Una función racional es el cociente de dos funciones polinomiales. La suma de funciones racionales es una función racional. Por ejemplo;

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{(x^2+1)(x-1)(x-2) + x - 2 + x - 1}{(x-1)(x-2)} =$$

$$\frac{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x - 1}{x^2 - 3x + 2} \ .$$

En ese sentido, hay muchos casos donde se desea invertir este proceso. Es decir, a menudo es útil cuando se da la expresión;

$$(x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x - 1)/(x^2 - 3x + 2)$$

y se desea reconocer que esa función racional es la suma de un polinomio y unas funciones racionales más sencillas;

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \ .$$

En la literatura especializada; a las funciones racionales más sencillas se las suele llamar *fracciones simples* o *parciales*, ver (Haaser, LaSalle y Sullivan, 1974).

A continuación, se mostrará una definición y un teorema ambos necesarios para desarrollar el tema en cuestión.

***Teorema* $\mathbf{4.1}$**. (*Algoritmo de la División*). Si P es un polinomio de grado $\boldsymbol{n}$ y $Q\ (\neq 0)$ es un polinomio de grado $\boldsymbol{m}$ (con $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{m}$), entonces existen polinomios únicos "M" y "R", donde R es la función cero o tiene grado menor que $\boldsymbol{m}$, tales que;

$$P = Q \cdot M + R \ . \qquad (\mathbf{4.1})$$

***Definición* $\mathbf{4.1}$**. Si P/Q es una función racional y si el grado de P, denotado por $deg\ (P)$, es menor que el grado de Q, entonces P/Q es llamada *función racional propia*. Si $deg\ (P) \geq deg\ (Q)$, entonces P/Q será llamada *función racional impropia*.

Si P/Q es una *función racional impropia*, entonces por el *algoritmo de la división*, existen polinomiales "M" y "R" con $R = 0$ o $deg\,(R) \;<\; deg\,(Q)$ tales que;

$$P = Q \cdot M + R \quad \text{ó} \quad \frac{P}{Q} = M + \frac{R}{Q}\ .$$

Así pues, si P/Q es una función racional impropia, por división se puede escribir P/Q como la suma de un polinomio "M" y una función racional propia R/Q, en caso de que $R \neq 0$. Si $R = 0$, entonces P/Q es simplemente una función polinomial.

Es decir; supóngase que, $\boldsymbol{F}(x)$ es una fracción *impropia* entonces $\boldsymbol{F}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ con $deg\,(f) \;\geq\; deg\,(g)$. Luego, usando el *algoritmo de la división* $\boldsymbol{F}(x)$ puede expresarse en la forma:

$$\boldsymbol{F}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \underbrace{P(x)}_{Polinomio} + \frac{\overbrace{h(x)}^{Fracción\ Propia}}{g(x)} \qquad (\mathbf{4.2})$$

Esto significa que (al menos teóricamente) toda *fracción impropia* puede expresarse de un modo único en forma de la suma de un polinomio y una *fracción propia* (Díaz, 2017).

Ahora bien, por el álgebra, cualquier *fracción propia* puede ser descompuesta en una suma de $\boldsymbol{k}$ términos;

$$\frac{h(x)}{g(x)} = \underbrace{\boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \cdots + \boldsymbol{M}_{k-1} + \boldsymbol{M}_k}_{\text{(DFS)}}\ . \qquad (\mathbf{4.3})$$

Donde a esta suma de $\boldsymbol{k}$ términos [lado derecho de ($\mathbf{4.3}$)] se le conoce en la literatura matemática clásica como «*Descomposición en Fracciones Simples*» (DFS) y cada fracción simple del tipo $\boldsymbol{M}_i$ (con $1 \leq i \leq k$) tiene una de las dos formas siguientes:

$$\frac{\boldsymbol{A}_1}{(ax+b)^m} \quad \text{ó} \quad \frac{\boldsymbol{A}_2 x + \boldsymbol{A}_3}{(px^2+qx+r)^n}$$

$$m, n \in \mathbb{Z}^+ \quad \wedge \quad q^2 - 4pr < 0$$

donde los $\boldsymbol{A}_i \in \mathbb{R}$ (con $i = 1,2,3$) son coeficientes a determinar.

Para obtener la descomposición ($\mathbf{4.3}$) primero se debe expresar el denominador, $g(x)$, como un producto de factores de la forma $(ax\,+\,b)$ o expresiones cuadráticas irreducibles de la forma $(px^2\,+\,qx\,+\,r)$. Después se agrupan los factores repetidos de manera que $g(x)$ quede expresado como un producto de factores distintos de la forma $(ax+b)^m$ ó $(px^2+qx+r)^n$; donde $m, n \in \mathbb{Z}^+$ y $(px^2\,+\,qx\,+\,r)$ es irreducible. Después se aplican las siguientes reglas:

$\mathbf{1}$.- Por cada uno de los factores de la forma $(ax+b)^m$ (con $m \geq 1$) la descomposición $(\mathbf{4.3})$ contiene una suma de m fracciones parciales de la forma:

$$\frac{\boldsymbol{A}_1}{(ax+b)}+\frac{\boldsymbol{A}_2}{(ax+b)^2}+\frac{\boldsymbol{A}_3}{(ax+b)^3}+\cdots+\frac{\boldsymbol{A}_{m-1}}{(ax+b)^{m-1}}+\frac{\boldsymbol{A}_m}{(ax+b)^m}$$

donde cada $\boldsymbol{A}_i$ (con $i=1,2,\ldots,m$) es un número real a determinar.

$\mathbf{2}$.- Por cada uno de los factores de la forma $(px^2+qx+r)^n$ (con $n \geq 1$ y $q^2-4pr<0$) la descomposición $(\mathbf{4.3})$ contiene una suma de fracciones parciales de la forma:

$$\frac{\boldsymbol{A}_1x+\boldsymbol{B}_1}{(px^2+qx+r)}+\frac{\boldsymbol{A}_2x+\boldsymbol{B}_2}{(px^2+qx+r)^2}+\cdots+\frac{\boldsymbol{A}_nx+\boldsymbol{B}_n}{(px^2+qx+r)^n}$$

donde cada $\boldsymbol{A}_i$ y $\boldsymbol{B}_i$ (con $i=1,2,\ldots,n$) son números reales a determinar.

Tomando en cuenta la factorización del denominador de $h(x)/g(x)$ y las reglas dadas en los incisos $(\mathbf{1})$ y $(\mathbf{2})$ algunos libros de cálculo estudian los siguientes cuatro (4) casos, ver (Zill, 2011), (Purcell, 2007) y (Steward, 2012);

1. Factores lineales no repetidos:

$$\frac{\boldsymbol{A}_1}{(a_1x+b_1)}+\frac{\boldsymbol{A}_2}{(a_2x+b_2)}+\frac{\boldsymbol{A}_3}{(a_3x+b_3)}+\cdots+\frac{\boldsymbol{A}_n}{(a_nx+b_n)}$$

2. Factores lineales repetidos:

$$\frac{\boldsymbol{A}_1}{(ax+b)}+\frac{\boldsymbol{A}_2}{(ax+b)^2}+\frac{\boldsymbol{A}_3}{(ax+b)^3}+\cdots+\frac{\boldsymbol{A}_n}{(ax+b)^n}$$

3. Factores cuadráticos no repetidos:

$$\frac{\boldsymbol{A}_1x+\boldsymbol{B}_1}{(p_1x^2+q_1x+r_1)}+\frac{\boldsymbol{A}_2x+\boldsymbol{B}_2}{(p_2x^2+q_2x+r_2)}+\cdots+\frac{\boldsymbol{A}_nx+\boldsymbol{B}_n}{(p_nx^2+q_nx+r_n)}$$

4. Factores cuadráticos repetidos:

$$\frac{\boldsymbol{A}_1x+\boldsymbol{B}_1}{(px^2+qx+r)}+\frac{\boldsymbol{A}_2x+\boldsymbol{B}_2}{(px^2+qx+r)^2}+\cdots+\frac{\boldsymbol{A}_nx+\boldsymbol{B}_n}{(px^2+qx+r)^n}\ .$$

En ese sentido; en la literatura especializada existe una variedad de técnicas para calcular los coeficientes $\boldsymbol{A}_i$ y $\boldsymbol{B}_i$ (con $1 \leq i \leq n$) como, por ejemplo, la técnica no tradicional llamada método de «*Heaviside*» (Martínez, 2006) y los métodos tradicionales conocidos con los nombres «*Coeficientes Indeterminados*» y «*Hermite-Ostrogradsky*» que según Huang (1991) son métodos tediosos y fuentes de complicadas identidades algebraicas (Chrystal, 1961) las cuales confunden a los estudiantes de un primer curso de *cálculo integral*, sobre todo a aquellos con deficiencias de conocimientos algebraicos.

Siguiendo la idea de las técnicas para calcular los coeficientes $\boldsymbol{A}_i$ y $\boldsymbol{B}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ que aparecen en los distintos numeradores de las fracciones simples (o parciales), en esta investigación fue concebida una *técnica alternativa* con visión algebraica para calcular dichos valores donde su principal atractivo es no requerir de *sistemas de ecuaciones* durante el proceso de cálculo.

A continuación, se muestran los algoritmos de la *técnica alternativa* para calcular los coeficientes $\boldsymbol{A}_i$ y $\boldsymbol{B}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ en cada caso de la *descomposición en fracciones simples*.

Generalización de la Técnica Alternativa

Una mejor visualización, para el lector, en relación a la generalización de esta técnica es viable dividiendo los posibles casos de la descomposición en dos (2) grupos fundamentales, a saber; factores lineales y factores cuadráticos. Así mismo, cada grupo fue dividido en casos particulares con el objetivo de obtener todos los casos posibles.

Grupo I. (*Factores Lineales*).

Caso $\mathbf{I.1}$. Dos factores lineales de tipo básico y ninguno repetido. Supóngase que se tiene;

$$\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d})} \qquad (\mathbf{4.4})$$

donde $b, d \in \mathbb{R}$.

Algoritmo.

Hacer la resta de fracciones:

$$\frac{1}{x+b} - \frac{1}{x+d} = \frac{d-b}{(x+b)(x+d)} \ .$$

Multiplicar ambos miembros por $1/(d-b)$

$$\frac{1}{(x+b)(x+d)} = \left(\frac{1}{d-b}\right)\left(\frac{1}{x+b} - \frac{1}{x+d}\right).$$

Al realizar la propiedad distributiva del producto con respecto a la adición se obtiene la *descomposición en fracciones simples*;

$$\frac{1}{(x+b)(x+d)} = \left(\frac{1}{d-b}\right)\left(\frac{1}{x+b}\right) + \left(-\frac{1}{d-b}\right)\left(\frac{1}{x+d}\right). \quad \blacksquare$$

Donde; para este caso, los coeficientes a determinar quedan de la forma:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{1}} = \frac{1}{d-b} \ \text{ y } \ \boldsymbol{A}_{\mathbf{2}} = \frac{1}{b-d} \ .$$

Prueba.

$$\left(\frac{1}{d-b}\right)\left(\frac{1}{x+b}\right)+\left(-\frac{1}{d-b}\right)\left(\frac{1}{x+d}\right)=$$

$$\frac{1}{dx\ +\ db\ -\ bx\ -\ b^2}+\frac{-1}{dx\ +\ d^2\ -\ bx\ -\ bd}=$$

$$\frac{dx\ +\ d^2\ -\ bx\ -\ bd\ -(dx\ +\ db\ -\ bx\ -\ b^2)}{(dx\ +\ db\ -\ bx\ -\ b^2)(dx\ +\ d^2\ -\ bx\ -\ bd)}=$$

$$\frac{d^2+b^2-\ 2bd}{(dx\ +\ db\ -\ bx\ -\ b^2)(dx\ +\ d^2\ -\ bx\ -\ bd)}\ =$$

$$\frac{d^2+b^2-\ 2bd}{[d(x\ +\ b)\ -\ b(x\ +\ b)][d(x\ +\ d)\ -\ b(x\ +\ d)]}=$$

$$\frac{d^2-\ 2db+b^2}{(d-\ b)(x\ +\ b)(d-\ b)(x\ +\ d)}=$$

$$\frac{(d-\ b)^2}{(d-\ b)^2(x\ +\ b)(x\ +\ d)}=\frac{1}{(x\ +\ b)(x\ +\ d)}\ .\quad \blacksquare\ QED$$

***Caso* I. 2**. Dos factores lineales de tipo general y ninguno repetido. Supóngase que se tiene;

$$\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{ax}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{cx}+\boldsymbol{d})}\qquad (\mathbf{4.5})$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Algoritmo.

$$\frac{1}{(ax+b)(cx+d)}=\left(\frac{a}{ax+b}-\frac{c}{cx+d}\right)\left(\frac{1}{ad-bc}\right)=$$

$$\left(\frac{a}{ad-bc}\right)\left(\frac{1}{ax+b}\right)+\left(-\frac{c}{ad-bc}\right)\left(\frac{1}{cx+d}\right).$$

Si $\boldsymbol{A_1}=\frac{a}{ad-bc}$ y $\boldsymbol{A_2}=\frac{c}{bc-ad}$ entonces la *descomposición en fracciones* es:

$$\frac{1}{(ax+b)(cx+d)}=\frac{\boldsymbol{A_1}}{ax+b}+\frac{\boldsymbol{A_2}}{cx+d}\qquad \text{con } \boldsymbol{A_1},\boldsymbol{A_2}\in\mathbb{R}.\qquad \blacksquare$$

Prueba.

$$\left(\frac{a}{ax+b}-\frac{c}{cx+d}\right)\left(\frac{1}{ad-bc}\right)=\left[\frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(ax+b)(cx+d)}\right]\left(\frac{1}{ad-bc}\right)=$$

$$\left[\frac{\cancel{acx}+ad-\cancel{acx}-cb}{(ax+b)(cx+d)}\right]\left(\frac{1}{ad-bc}\right)=\left[\frac{ad-bc}{(ax+b)(cx+d)}\right]\left(\frac{1}{ad-bc}\right)=$$

$$\frac{1}{(ax+b)(cx+d)}\ .\quad \blacksquare\ QED$$

***Caso* I. 3**. Dos factores lineales de tipo general; uno repetido y otro no.

Supóngase que se tiene:

$$\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{ax}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{cx}+\boldsymbol{d})^{\boldsymbol{n}}} \qquad (\mathbf{4.6})$$

con $(n > 1)$ $n \in \mathbb{N}$ y $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Algoritmo. Este caso fue trabajado mediante un proceso iterativo.

Iteración 1.

Siempre es posible sacar un factor y escribir la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{(ax+b)(cx+d)^n} = \left[\frac{1}{(cx+d)^{n-1}}\right]\underbrace{\left[\frac{1}{(ax+b)(cx+d)}\right]}_{\textit{Caso } \mathbf{I.2}} =$$

Al usar la descomposición dada en el ***caso* I. 2** se obtiene lo siguiente:

$$\left[\frac{1}{(cx+d)^{n-1}}\right]\left(\frac{\boldsymbol{A_1}}{ax+b} - \frac{\boldsymbol{A_2}}{cx+d}\right) =$$

Aplicando la propiedad distributiva del producto con respecto a la adición se obtiene;

$$\underbrace{\frac{\boldsymbol{A_1}}{(ax+b)(cx+d)^{n-1}}}_{(\mathbf{A})} - \underbrace{\frac{\boldsymbol{A_2}}{(cx+d)^n}}_{\textbf{Fracción Simple}} =$$

Iteración 2.

Se repite el proceso anterior en la fracción (**A**) para obtener:

$$\left[\frac{\boldsymbol{A_1}}{(cx+d)^{n-2}}\right]\underbrace{\left[\frac{1}{(ax+b)(cx+d)}\right]}_{\textit{Caso } \mathbf{I.2}} - \underbrace{\frac{\boldsymbol{A_2}}{(cx+d)^n}}_{\textbf{Fracción Simple}} =$$

Se usa la descomposición en fracciones dada en el ***caso* I. 2** para obtener:

$$\left[\frac{\boldsymbol{A_1}}{(cx+d)^{n-2}}\right]\left(\frac{\boldsymbol{A_1}}{ax+b} - \frac{\boldsymbol{A_2}}{cx+d}\right) - \underbrace{\frac{\boldsymbol{A_2}}{(cx+d)^n}}_{\textbf{Fracción Simple}} =$$

Se aplica nuevamente la propiedad distributiva para obtener;

$$\underbrace{\frac{\boldsymbol{A_1}^{\mathbf{2}}}{(ax+b)(cx+d)^{n-2}}}_{(\mathbf{B})} - \underbrace{\frac{\boldsymbol{A_1 A_2}}{(cx+d)^{n-1}}}_{\textbf{Fracción Simple}} - \underbrace{\frac{\boldsymbol{A_2}}{(cx+d)^n}}_{\textbf{Fracción Simple}} =$$

Iteración 3.

Se repite todo el proceso en la fracción (**B**) para obtener:

$$\left[\frac{\boldsymbol{A_1}^{\boldsymbol{2}}}{(cx+d)^{n-3}}\right]\underbrace{\left[\frac{1}{(ax+b)(cx+d)}\right]}_{\textbf{\textit{Caso} I.2}}-\underbrace{\frac{\boldsymbol{A_1A_2}}{(cx+d)^{n-1}}}_{\textbf{Fracción Simple}}-\underbrace{\frac{\boldsymbol{A_2}}{(cx+d)^{n}}}_{\textbf{Fracción Simple}}=$$

$$\left[\frac{\boldsymbol{A_1}^{\boldsymbol{2}}}{(cx+d)^{n-3}}\right]\left(\frac{\boldsymbol{A_1}}{ax+b}-\frac{\boldsymbol{A_2}}{cx+d}\right)-\underbrace{\frac{\boldsymbol{A_1A_2}}{(cx+d)^{n-1}}}_{\textbf{Fracción Simple}}-\underbrace{\frac{\boldsymbol{A_2}}{(cx+d)^{n}}}_{\textbf{Fracción Simple}}=$$

$$\underbrace{\frac{\boldsymbol{A_1}^{\boldsymbol{3}}}{(ax+b)(cx+d)^{n-3}}}_{\textbf{(C)}}-\underbrace{\frac{\boldsymbol{A_1}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{A_2}}{(cx+d)^{n-2}}}_{\textbf{Fracción Simple}}-\underbrace{\frac{\boldsymbol{A_1A_2}}{(cx+d)^{n-1}}}_{\textbf{Fracción Simple}}-\underbrace{\frac{\boldsymbol{A_2}}{(cx+d)^{n}}}_{\textbf{Fracción Simple}}=$$

Iteración n.

Se repite el proceso sobre la fracción $(\mathbf{C})$ y así, sucesivamente, hasta obtener la *descomposición en fracciones simples* dada por:

$$\underbrace{\frac{\boldsymbol{A_1}^{\boldsymbol{n}}}{ax+b}-\frac{\boldsymbol{A_1}^{\boldsymbol{n-1}}\boldsymbol{A_2}}{cx+d}-\frac{\boldsymbol{A_1}^{\boldsymbol{n-2}}\boldsymbol{A_2}}{(cx+d)^2}-\cdots-\frac{\boldsymbol{A_1}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{A_2}}{(cx+d)^{n-2}}-\frac{\boldsymbol{A_1A_2}}{(cx+d)^{n-1}}-\frac{\boldsymbol{A_2}}{(cx+d)^{n}}}_{n+1\ \textbf{Fracciones Simples}}\,. \quad \blacksquare$$

Caso **I. 4**. Dos factores lineales de tipo general; ambos repetidos. Supóngase que se tiene:

$$\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{ax+b})^{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{cx+d})^{\boldsymbol{n}}} \qquad (\mathbf{4.7})$$

con $(m,n>1)$ $m,n\in\mathbb{N}$ y $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

Algoritmo.

Siempre es posible escribir:

$$\frac{1}{(ax+b)^m(cx+d)^n}=\left[\frac{1}{(ax+b)^{m-1}}\right]\underbrace{\left[\frac{1}{(ax+b)(cx+d)^n}\right]}_{\textbf{\textit{Caso} I.3}}=$$

Al usar la descomposición en fracciones del ***caso*** **I. 3**, se tiene:

$$\left[\frac{1}{(ax+b)^{m-1}}\right]\left[\frac{r_1}{ax+b}+\frac{r_2}{cx+d}+\cdots+\frac{r_{n+1}}{(cx+d)^n}\right]=$$

donde $r_1,\dots,r_{n+1}\in\mathbb{R}$. Al aplicar la propiedad distributiva se tiene:

$$\underbrace{\frac{r_1}{(ax+b)^m}}_{\textbf{Fracción Simple}}+\underbrace{\frac{r_2}{(ax+b)^{m-1}(cx+d)}}_{\textbf{\textit{Caso} I.3}}+$$

$$\underbrace{\frac{r_3}{(ax+b)^{m-1}(cx+d)^2}}_{\textbf{\textit{Caso} I.4}}+\cdots+\underbrace{\frac{r_{n+1}}{(ax+b)^{m-1}(cx+d)^n}}_{\textbf{\textit{Caso} I.4}}\,.$$

El primer sumando es una fracción simple, en el segundo sumando se debe aplicar el ***caso* I. 3** y a partir del tercer sumando se debe aplicar el ***caso* I. 4**; pero con potencias menores que la expresión original, para cada uno de estos sumandos (del 3ro en adelante) se repite el procedimiento anterior hasta obtener la *descomposición en fracciones simples* de la expresión inicial. ■

***Grupo* II**. (*Factores Cuadráticos*).

Para desarrollar los casos más generales de este grupo, primero se trabajaron los casos que sirvieron de base. La característica fundamental de estos casos es que el coeficiente del término de mayor grado en cada factor es igual a **1**.

***Caso* II. 1**. Un factor lineal y un factor cuadrático de tipo básico, ninguno repetido. Supóngase que se tiene:

$$\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C})} \qquad (\mathbf{4.8})$$

donde $A, B, C \in \mathbb{R}$.

Algoritmo.

Se hace:

$$\frac{1}{x+A}-\frac{x+(B-A)}{x^2+Bx+C}=\frac{x^2+Bx+C-[x^2+xA+x(B-A)+A(B-A)]}{(x+A)(x^2+Bx+C)} \ .$$

Al simplificar, se tiene:

$$\frac{1}{x+A} - \frac{x+(B-A)}{x^2+Bx+C}=\frac{A^2-BA+C}{(x+A)(x^2+Bx+C)} \ .$$

Se multiplica ambos miembros por $1/(A^2-BA+C)$

$$\frac{1}{(x+A)(x^2+Bx+C)}=\left(\frac{1}{A^2-BA+C}\right)\left[\frac{1}{x+A} - \frac{x+(B-A)}{x^2+Bx+C}\right]=$$

Al aplicar la propiedad distributiva del producto con respecto a la adición se obtiene la *descomposición en fracciones simples* deseada;

$$\left(\frac{1}{A^2-BA+C}\right)\left(\frac{1}{x+A}\right)+\left(\frac{-1}{A^2-BA+C}\right)\left[\frac{x+(B-A)}{x^2+Bx+C}\right] . \quad ■$$

Donde; para este caso, los coeficientes son de la forma:

$$\boldsymbol{A_1}=\frac{1}{A^2-BA+C} \ ; \ \boldsymbol{A_2}=\frac{-1}{A^2-BA+C} \ ; \ \boldsymbol{A_3}=\frac{A-B}{A^2-BA+C} \ .$$

***Caso* II. 2**. Un factor lineal y un factor cuadrático de tipo general, ninguno repetido. Supóngase que se tiene:

$$\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{ax}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{cx}^2+\boldsymbol{dx}+\boldsymbol{e})} \qquad (\mathbf{4.9})$$

donde $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$.

Algoritmo.

Siempre se podrá sacar factor común para obtener:

$$\frac{1}{(ax+b)(cx^2+dx+e)} = \frac{1}{ac}\underbrace{\left[\frac{1}{\left(x+\frac{b}{a}\right)\left(x^2+\frac{d}{c}x+\frac{e}{c}\right)}\right]}_{\boldsymbol{Caso}\ \mathbf{II.1}} .$$

Se aplica la descomposición del ***caso*** **II. 1** para obtener:

$$\frac{1}{(ax+b)(cx^2+dx+e)} = \frac{k}{ac}\left[\frac{1}{x+\frac{b}{a}} - \frac{x+\left(\frac{d}{c}-\frac{b}{a}\right)}{x^2+\frac{d}{c}x+\frac{e}{c}}\right], \text{ con } k \in \mathbb{R}.$$

Aplicando la propiedad distributiva del producto con respecto a la adición se obtiene la *descomposición en fracciones simples*:

$$\frac{1}{(ax+b)(cx^2+dx+e)} = \underbrace{\frac{k/c}{ax+b} - \frac{k\left[x+\left(\frac{d}{c}-\frac{b}{a}\right)\right]/a}{cx^2+dx+e}}_{2\ \boldsymbol{Fracciones\ Simples}} .$$

Donde k es el recíproco del numerador de la siguiente expresión:

$$\frac{1}{x+\frac{b}{a}} - \frac{x+\left(\frac{d}{c}-\frac{b}{a}\right)}{x^2+\frac{d}{c}x+\frac{e}{c}} .$$

En efecto, lo anterior puede escribirse como;

$$\frac{x^2+\frac{d}{c}x+\frac{e}{c}-\left(x+\frac{b}{a}\right)\left[x+\left(\frac{d}{c}-\frac{b}{a}\right)\right]}{\left(x+\frac{b}{a}\right)\left(x^2+\frac{d}{c}x+\frac{e}{c}\right)} .$$

Lo cual es equivalente a:

$$\frac{x^2+\frac{d}{c}x+\frac{e}{c}-x^2-x\left(\frac{d}{c}-\frac{b}{a}\right)-\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\left(\frac{d}{c}-\frac{b}{a}\right)}{\left(x+\frac{b}{a}\right)\left(x^2+\frac{d}{c}x+\frac{e}{c}\right)} .$$

Realizando operaciones básicas en el numerador se tiene:

$$\frac{\frac{e}{c}-\frac{b}{a}\left(\frac{d}{c}-\frac{b}{a}\right)}{\left(x+\frac{b}{a}\right)\left(x^2+\frac{d}{c}x+\frac{e}{c}\right)} .$$

Por lo que;

$$k = \frac{1}{\frac{e}{c} - \frac{b}{a}\left(\frac{d}{c} - \frac{b}{a}\right)} \in \mathbb{R}\,.$$

Finalmente, rescribiendo, la *descomposición en fracciones simples* es:

$$\frac{1}{(ax+b)(cx^2+dx+e)} = \frac{r_1}{ax+b} - \frac{r_2x+r_3}{cx^2+dx+e} \quad \text{donde} \quad r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}\,. \quad \blacksquare$$

***Caso* II. 3**. Un factor lineal y un factor cuadrático de tipo general; se repite el factor lineal. Supóngase que se tiene:

$$\boldsymbol{\frac{1}{(ax+b)^n(cx^2+dx+e)}} \qquad \textbf{(4.10)}$$

con $n \in \mathbb{N}$ $(n > 1)$ y $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$.

Algoritmo.

Siempre es posible sacar un factor y escribir:

$$\frac{1}{(ax+b)^n(cx^2+dx+e)} = \frac{1}{(ax+b)^{n-1}}\underbrace{\left[\frac{1}{(ax+b)(cx^2+dx+e)}\right]}_{\textit{Caso}\ \mathrm{II.2}}.$$

Al usar la descomposición en fracciones simples del ***caso* II. 2**, se obtiene:

$$\frac{1}{(ax+b)^n(cx^2+dx+e)} = \frac{1}{(ax+b)^{n-1}}\left(\frac{r_1}{ax+b} - \frac{r_2x+r_3}{cx^2+dx+e}\right).$$

Al aplicar la propiedad distributiva, se obtiene una primera descomposición:

$$\frac{1}{(ax+b)^n(cx^2+dx+e)} = \underbrace{\frac{r_1}{(ax+b)^n}}_{\textit{Fracción Simple}} - \frac{r_2x+r_3}{(ax+b)^{n-1}(cx^2+dx+e)}\,.$$

Basta, entonces, solo descomponer la expresión:

$$\frac{r_2x+r_3}{(ax+b)^{n-1}(cx^2+dx+e)}\,.$$

En efecto, esta expresión se puede escribir como:

$$\frac{r_2x+r_3}{(ax+b)^{n-1}(cx^2+dx+e)} = \frac{\frac{r_2(ax+b)}{a} + r_3 - r_2b/a}{(ax+b)^{n-1}(cx^2+dx+e)}\,.$$

Al simplificar el lado derecho de la igualdad anterior y sustituyendo, se tiene otra descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{(ax+b)^n(cx^2+dx+e)} = \underbrace{\frac{r_1}{(ax+b)^n}}_{\textit{Fracción Simple}} - \underbrace{\frac{r_2/a}{(ax+b)^{n-2}(cx^2+dx+e)}}_{\textit{Repetir el Proceso}} -$$

$$\underbrace{\frac{r_3 - r_2 b/a}{(ax+b)^{n-1}(cx^2+dx+e)}}_{\textit{Repetir el Proceso}} .$$

Es claro que; todos los términos excepto el primero son de la forma del presente caso y, no menos claro es que, se puede repetir el procedimiento hasta obtener la *descomposición en fracciones simples* deseada. ■

***Caso* II. 4**. Un factor lineal y un factor cuadrático de tipo general; el factor cuadrático repetido. Supóngase que se tiene:

$$\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{ax}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{cx^2}+\boldsymbol{dx}+\boldsymbol{e})^{\boldsymbol{n}}} \qquad (\mathbf{4.11})$$

con $n \in \mathbb{N}$ $(n > 1)$ y $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$.

Algoritmo.

Sacando un factor se tiene la expresión:

$$\frac{1}{(ax+b)(cx^2+dx+e)^n} = \frac{1}{(cx^2+dx+e)^{n-1}} \underbrace{\left[\frac{1}{(ax+b)(cx^2+dx+e)}\right]}_{\textit{Caso } \mathbf{II.2}} .$$

Usando la descomposición del ***caso* II. 2**, en el miembro derecho, se tiene:

$$\frac{1}{(cx^2+dx+e)^{n-1}}\left(\frac{r_1}{ax+b} - \frac{r_2x+r_3}{cx^2+dx+e}\right).$$

Aplicando la propiedad distributiva se tiene:

$$\frac{r_1}{(ax+b)(cx^2+dx+e)^{n-1}} - \underbrace{\frac{r_2x+r_3}{(cx^2+dx+e)^n}}_{\textit{Fracción Simple}} .$$

Solo bastaría descomponer la expresión:

$$\frac{1}{(ax+b)(cx^2+dx+e)^{n-1}} .$$

La fracción anterior es del mismo caso que la original, pero disminuida la potencia en $\mathbf{1}$, en ese sentido, se puede volver a aplicar el procedimiento las veces que sea necesario (a saber, n veces) hasta lograr la *descomposición en fracciones simples* deseada. ■

***Caso* II. 5**. Dos factores cuadráticos de tipo básico y ninguno repetido. Supóngase que se tiene:

$$\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d})(\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c})} \qquad (\mathbf{4.12})$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Algoritmo.

Se hace:

$$\frac{1}{x^2+ax+d}-\frac{1}{x^2+bx+c}=\frac{x^2+bx+c-(x^2+ax+d)}{(x^2+ax+d)(x^2+bx+c)} .$$

Al realizar las operaciones respectivas, se tiene;

$$\frac{1}{x^2+ax+d}-\frac{1}{x^2+bx+c}=\frac{(b-a)x+(c-d)}{(x^2+ax+d)(x^2+bx+c)} .$$

Se multiplica ambos miembros de la igualdad por $1/[(b-a)x+(c-d)]$

$$\frac{1}{(x^2+ax+d)(x^2+bx+c)}=\left[\frac{1}{(b-a)x+(c-d)}\right]\left(\frac{1}{x^2+ax+d}-\frac{1}{x^2+bx+c}\right) .$$

Al aplicar la propiedad distributiva, en el miembro derecho, se tiene;

$$\underbrace{\frac{1}{[(b-a)x+(c-d)](x^2+ax+d)}}_{f(x)}-\underbrace{\frac{1}{[(b-a)x+(c-d)](x^2+bx+c)}}_{g(x)} .$$

Por ahora, se concentrará toda la atención en descomponer la expresión $f(x)$;

$$f(x)=\frac{1}{[(b-a)x+(c-d)](x^2+ax+d)} .$$

La expresión anterior se puede escribir como;

$$\frac{1}{[(b-a)x+(c-d)](x^2+ax+d)}=\left(\frac{1}{b-a}\right)\underbrace{\left\{\frac{1}{\left[x+\left(\frac{c-d}{b-a}\right)\right](x^2+ax+d)}\right\}}_{\boldsymbol{Caso}\ \mathbf{II.1}} .$$

Ahora, se usará uno de los resultados de la expresión ($\mathbf{4.8}$) en;

$$\frac{1}{\left[x+\left(\frac{c-d}{b-a}\right)\right](x^2+ax+d)} .$$

En este caso $\boldsymbol{A}=\left(\frac{c-d}{b-a}\right)$, $\boldsymbol{B}=a$ y $\boldsymbol{C}=d$, al sustituir se tiene;

$$\frac{1}{\left[x+\left(\frac{c-d}{b-a}\right)\right](x^2+ax+d)}=k\left[\frac{1}{x+\left(\frac{c-d}{b-a}\right)}-\frac{x+\left[a-\left(\frac{c-d}{b-a}\right)\right]}{x^2+ax+d}\right].$$

Donde;

$$k = \frac{1}{\left(\frac{c-d}{b-a}\right)^2 - a\left(\frac{c-d}{b-a}\right) + d} \in \mathbb{R}\,.$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por $1/(b-a)$, se tiene;

$$\frac{1}{[(b-a)x+(c-d)](x^2+ax+d)} = \left(\frac{k}{b-a}\right)\left[\frac{1}{x+\left(\frac{c-d}{b-a}\right)} - \frac{x+\left[a-\left(\frac{c-d}{b-a}\right)\right]}{x^2+ax+d}\right].$$

De manera similar, se trabaja la expresión $g(x)$;

$$\frac{1}{[(b-a)x+(c-d)](x^2+bx+c)} = \left(\frac{1}{b-a}\right)\underbrace{\left\{\frac{1}{\left[x+\left(\frac{c-d}{b-a}\right)\right](x^2+bx+c)}\right\}}_{\boldsymbol{Caso}\ \mathbf{II.1}}.$$

En forma análoga; usando nuevamente $(\mathbf{4.8})$, pero ahora en:

$$\frac{1}{\left[x+\left(\frac{c-d}{b-a}\right)\right](x^2+bx+c)}\,.$$

En este caso $\boldsymbol{A} = \left(\frac{c-d}{b-a}\right)$, $\boldsymbol{B} = b$ y $\boldsymbol{C} = c$, al sustituir se tiene;

$$\frac{1}{\left[x+\left(\frac{c-d}{b-a}\right)\right](x^2+bx+c)} = k_1\cdot\left[\frac{1}{x+\left(\frac{c-d}{b-a}\right)} - \frac{x+\left[b-\left(\frac{c-d}{b-a}\right)\right]}{x^2+bx+c}\right].$$

Donde;

$$k_1 = \frac{1}{\left(\frac{c-d}{b-a}\right)^2 - b\left(\frac{c-d}{b-a}\right) + c} \in \mathbb{R}\,.$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por $1/(b-a)$, se tiene;

$$\frac{1}{[(b-a)x+(c-d)](x^2+bx+c)} = \left(\frac{k_1}{b-a}\right)\left[\frac{1}{x+\left(\frac{c-d}{b-a}\right)} - \frac{x+\left[b-\left(\frac{c-d}{b-a}\right)\right]}{x^2+bx+c}\right].$$

Observación $\mathbf{4.1}$: no es difícil notar que $k_1 = k$.

A continuación, la prueba de esa igualdad.

Prueba.

$$\frac{1}{\left(\frac{c-d}{b-a}\right)^2 - a\left(\frac{c-d}{b-a}\right) + d} = \frac{1}{\left(\frac{c-d}{b-a}\right)^2 - b\left(\frac{c-d}{b-a}\right) + c}\,.$$

En efecto esto equivale a:

$$\left(\frac{c-d}{b-a}\right)^2 - a\left(\frac{c-d}{b-a}\right) + d = \left(\frac{c-d}{b-a}\right)^2 - b\left(\frac{c-d}{b-a}\right) + c\,.$$

Es decir;

$$b\left(\frac{c-d}{b-a}\right) - a\left(\frac{c-d}{b-a}\right) = c - d\,.$$

Esto puede reescribirse como:

$$(b-a)\left(\frac{c-d}{b-a}\right) = c - d\,.$$

Por lo que;

$$c - d = c - d \;\Rightarrow\; k_1 = k\,.\ \blacksquare\ \ QED$$

Reescribiendo con $k_1 = k$ se tiene la *descomposición en fracciones simples*;

$$\frac{1}{(x^2+ax+d)(x^2+bx+c)} = \left(\frac{k}{b-a}\right)\left[\frac{x+\left[b-\left(\frac{c-d}{b-a}\right)\right]}{x^2+bx+c} - \frac{x+\left[a-\left(\frac{c-d}{b-a}\right)\right]}{x^2+ax+d}\right]. \quad \blacksquare$$

Donde;

$$k = \frac{1}{\left(\frac{c-d}{b-a}\right)^2 - a\left(\frac{c-d}{b-a}\right) + d} \in \mathbb{R}\,.$$

***Caso* II. 6**. Dos factores cuadráticos de tipo general y ninguno repetido. Supóngase que se tiene:

$$\boldsymbol{\frac{1}{(ax^2+bx+c)(dx^2+ex+f)}} \qquad \textbf{(4.13)}$$

donde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

Algoritmo.

Realizando operaciones algebraicas básicas sobre la expresión anterior se tiene:

$$\frac{1}{[(ae-bd)x+(af-cd)]}\left(\frac{a}{ax^2+bx+c} - \frac{d}{dx^2+ex+f}\right) =$$

Aplicando la propiedad distributiva del producto con respecto a la adición se tiene:

$$\frac{a}{\underbrace{[(ae-bd)x+(af-cd)](ax^2+bx+c)}_{\textbf{\textit{Caso}}\ \textbf{II.1}}} -$$

$$\frac{d}{\underbrace{[(ae-bd)x+(af-cd)](dx^2+ex+f)}_{\textbf{\textit{Caso}}\ \textbf{II.1}}}\,.$$

Estas dos (2) últimas expresiones racionales tienen la forma del ***caso* II. 1**, para su *descomposición en fracciones simples* se usa el algoritmo respectivo al caso. ■

Prueba.

Esta prueba se iniciará con la siguiente resta de fracciones;

$$\frac{a}{ax^2+bx+c}-\frac{d}{dx^2+ex+f}=$$

$$\frac{\cancel{adx^2}+aex+af-\cancel{adx^2}-bdx-cd}{(ax^2+bx+c)(dx^2+ex+f)}=$$

$$\frac{(ae-bd)x+(af-cd)}{(ax^2+bx+c)(dx^2+ex+f)}.$$

Multiplicando los miembros de la igualdad por $1/[(ae-bd)x+(af-cd)]$;

$$\frac{1}{(ax^2+bx+c)(dx^2+ex+f)}=$$

$$\frac{1}{[(ae-bd)x+(af-cd)]}\left(\frac{a}{ax^2+bx+c}-\frac{d}{dx^2+ex+f}\right). \quad ■ \; QED$$

***Caso* II. 7**. Dos factores cuadráticos de tipo general; uno se repite. Supóngase que:

$$\boldsymbol{\frac{1}{(ax^2+bx+c)(dx^2+ex+f)^n}} \qquad \textbf{(4.14)}$$

donde $n \in \mathbb{N}$ $(n > 1)$ y $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

Algoritmo.

Siempre se pueda trabajar con las propiedades de la potencia para sacar un factor. Luego, a la expresión resultante se le aplica el ***caso* II. 6**:

$$\frac{1}{(dx^2+ex+f)^{n-1}}\underbrace{\left[\frac{1}{(ax^2+bx+c)(dx^2+ex+f)}\right]}_{\textit{Caso}\ \text{II.6}}=\frac{1}{(dx^2+ex+f)^{n-1}}$$

$$\left\{\frac{1}{[(de-bd)x+(af-dc)]}\left(\frac{a}{ax^2+bx+c}-\frac{d}{dx^2+ex+f}\right)\right\}.$$

Se aplica la propiedad distributiva del producto con respecto a la adición para obtener;

$$\frac{1}{(dx^2+ex+f)^{n-1}}\left\{\underbrace{\frac{a}{[(de-bd)x+(af-dc)](ax^2+bx+c)}}_{\textit{Caso}\ \text{II.2}}\right\}-$$

$$\frac{1}{(dx^2+ex+f)^{n-1}}\left\{\underbrace{\frac{d}{[(de-bd)x+(af-dc)](dx^2+ex+f)}}_{Caso\ \text{II}.2}\right\}.$$

Finalmente; se aplica el ***caso*** **II. 2** en cada sumando, se analiza la situación resultante y, luego, se implementa el caso respectivo hasta obtener la *descomposición en fracciones simples* requerida. ■

Aplicaciones de la DFS con la Técnica Alternativa

Aplicaciones de la *Descomposición en Fracciones Simples*. Esta técnica es muy usual y se aplica con frecuencia, a continuación, se mostrarán algunos ejemplos de su aplicación.

1.- En el tema de series se emplea, este método, con las series *Telescópicas*.

2.- Se usa para calcular primitivas de *Funciones Racionales*.

3.- La Transformada de Laplace es una herramienta matemática que se usa para resolver algunas Ecuaciones Diferenciales. En particular las que modelan algunos circuitos eléctricos. Es por tanto una herramienta útil en Teoría de la Señal. La Transformada de Laplace se estudia en cursos superiores. Allí para calcular *Transformadas Inversas* se usa el método de *Descomposición en Fracciones Simples*.

A continuación, se mostrarán una serie de ejemplos para poner en práctica la *técnica alternativa* en los diferentes casos de la *descomposición en fracciones simples*.

Caso **1**. Dos factores de tipo general; ambos lineales y ninguno repetido.

$$\boldsymbol{\frac{1}{(ax+b)(cx+d)}}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Ejemplo **4. 1**.- Descomponer en fracciones simples la expresión $\frac{1}{x(x+1)}$

Solución.

$$\frac{1}{x(x+1)}=\left[\frac{(x+1)-x}{x(x+1)}\right]=\frac{1}{x}+\frac{-1}{x+1} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1} \ . \quad \square$$

Los coeficientes de la descomposición son: $\boldsymbol{A_1}=1$ y $\boldsymbol{A_2}=-1$.

Nota: observe que;

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1}x}-\frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1}x+1} \ .$$

Esto parece indicar que se puede prescindir de la operación en el corchete.

Ejemplo $\mathbf{4.2}$.- Descomponer en fracciones simples la expresión $\frac{1}{(x-1)(x+1)}$

Solución.

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)}\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} \ . \quad \square$$

Los coeficientes de la descomposición son: $\boldsymbol{A_1} = \frac{1}{2}$ y $\boldsymbol{A_2} = -\frac{1}{2}$.

Nota: observe que;

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1}x-1} - \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1}x+1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} \ .$$

Multiplicando en ambos miembros por $1/2$, se tiene que:

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x-1}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x+1}\right).$$

Como antes, se puede prescindir de la operación del corchete.

Ejemplo $\mathbf{4.3}$.- Dada la fracción propia $\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}$ la factorización del denominador es:

$$x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = x(x+2)(x-1).$$

La *descomposición en fracciones simples*, de la fracción propia, es de la forma:

$$\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x} = \frac{2x+3}{x(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1} \ .$$

Donde A, B y C son coeficientes a determinar. Por esta vía, un camino para determinar esos coeficientes sería recurrir a un *sistema de ecuaciones*.

Ahora bien, si se aplica la *técnica alternativa* propuesta en esta investigación se evita el uso de los *sistemas de ecuaciones*;

$$\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x} = \left(\frac{2x+3}{x+2}\right)\left[\frac{1}{x(x-1)}\right] = \left(\frac{2x+3}{x+2}\right)\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) =$$

$$(2x+3)\left[\frac{1}{(x-1)(x+2)} - \frac{1}{x(x+2)}\right] . \qquad (\mathbf{1})$$

Resolviendo la expresión que está dentro del último corchete se tiene:

I) $\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) = \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3(x+2)}$

II) $\frac{1}{x(x+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x+2)}$

Sustituyendo en ($\mathbf{1}$) se tiene:

$$(2x+3)\left[\frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{6(x+2)} - \frac{1}{2x} + \frac{3}{6(x+2)}\right] =$$

$$\frac{2x+3}{3(x-1)} + \frac{2x+3}{6(x+2)} - \frac{2x+3}{2x} =$$

$$\frac{2(x-1)+5}{3(x-1)} + \frac{2(x+2)-1}{6(x+2)} - \frac{2x+3}{2x} =$$

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{3(x-1)} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6(x+2)} - 1 - \frac{3}{2x} =$$

$$-\frac{3}{2x} - \frac{1}{6(x+2)} + \frac{5}{3(x-1)} \ . \quad \square$$

Finalmente; se tiene que, los coeficientes de la descomposición son:

$$\boldsymbol{A} = -\frac{3}{2} \ \ , \ \ \boldsymbol{B} = -\frac{1}{6} \ \text{ y } \ \boldsymbol{C} = \frac{5}{3} \ .$$

Ejemplo $\mathbf{4.4}$.- Dada la fracción $\frac{7x+3}{x^2+3x-4}$ la factorización del denominador es:

$$x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1).$$

La *descomposición en fracciones simples*, de la fracción propia, es de la forma:

$$\frac{7x+3}{x^2+3x-4} = \frac{7x+3}{(x+4)(x-1)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-1} \ .$$

Donde A y B son coeficientes a determinar.

Al aplicar la *técnica alternativa* se evita el uso de *sistemas de ecuaciones*;

$$\frac{7x+3}{x^2+3x-4} = (7x+3)\left[\frac{1}{(x+4)(x-1)}\right] = (7x+3)\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+4}\right)\frac{1}{5} =$$

Aplicando la propiedad distributiva del producto con respecto a la adición:

$$\frac{7x+3}{5(x-1)} - \frac{7x+3}{5(x+4)} = \frac{7(x-1)+10}{5(x-1)} - \frac{7(x+4)-25}{5(x+4)} =$$

$$\frac{7(x-1)}{5(x-1)} + \frac{10}{5(x-1)} - \frac{7(x+4)}{5(x+4)} + \frac{25}{5(x+4)} =$$

$$\frac{7}{5} + \frac{2}{x-1} - \frac{7}{5} + \frac{5}{x+4} = \frac{5}{x+4} + \frac{2}{x-1} \ . \quad \square$$

Finalmente, los coeficientes de la *descomposición en fracciones simples* son:

$$\boldsymbol{A} = 5 \ \text{ y } \ \boldsymbol{B} = 2.$$

Ejemplo $\mathbf{4.5}$.- Descomponer en fracciones simples a $\frac{1}{(7x-3)(4x+1)}$

Solución.

Se inicia con la siguiente resta de fracciones:

$$\frac{7}{7x-3} - \frac{4}{4x+1} = \frac{19}{(7x-3)(4x+1)} \ .$$

De tal manera que; si se quiere obtener la descomposición en fracciones solo basta con multiplicar ambos miembros de esta última expresión por $1/19$:

$$\frac{1}{(7x-3)(4x+1)} = \frac{1}{19}\left(\frac{7}{7x-3} - \frac{4}{4x+1}\right) = \frac{7}{19(7x-3)} - \frac{4}{19(4x+1)} \ . \quad \square$$

Los coeficientes de la *descomposición en fracciones simples* son:

$$\boldsymbol{A} = \frac{7}{19} \ \text{ y } \ \boldsymbol{B} = -\frac{4}{19} \ .$$

Ejemplo $\mathbf{4.6}$.- Descomponer en fracciones simples la expresión $\frac{1}{(x-2)(x+1)}$

Solución.

$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} = \frac{3}{(x-2)(x+1)} \ .$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por $1/3$, se tiene que:

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{3(x-2)} - \frac{1}{3(x+1)} \ . \quad \square$$

Los coeficientes de la *descomposición en fracciones simples* son:

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{3} \ \text{ y } \ \boldsymbol{B} = -\frac{1}{3} \ .$$

Ejemplo $\mathbf{4.7}$.- Descomponer en fracciones simples a $\frac{1}{(\sqrt{2}x+\sqrt{5})(\sqrt{3}x-\sqrt{7})}$

Solución.

$$\frac{\sqrt{15}+\sqrt{14}}{(\sqrt{2}x+\sqrt{5})(\sqrt{3}x-\sqrt{7})} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}x-\sqrt{7}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}x+\sqrt{5}} \ .$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por $1/\left(\sqrt{15}+\sqrt{14}\right)$, se tiene:

$$\frac{1}{(\sqrt{2}x+\sqrt{5})(\sqrt{3}x-\sqrt{7})} =$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}+\sqrt{14}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}x-\sqrt{7}}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}+\sqrt{14}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}x+\sqrt{5}}\right). \quad \square$$

Los coeficientes de la *descomposición en fracciones simples* son:

$$\boldsymbol{A}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}+\sqrt{14}} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{B}=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}+\sqrt{14}} \ .$$

Ejemplo $\mathbf{4.8}$.- Descomponer en fracciones simples la expresión $\frac{3x^3+5x+1}{(x+1)(2x-3)}$

Solución.

La función racional original es una *fracción impropia*, en ese sentido, se efectúa la división sintética, para obtener:

$$\frac{3x^3+5x+1}{(x+1)(2x-3)}=\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\left[\frac{41x+13}{(x+1)(2x-3)}\right]$$

o equivalentemente;

$$\frac{3x^3+5x+1}{(x+1)(2x-3)}=\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\left[\frac{41(x+1)-28}{(x+1)(2x-3)}\right] \Rightarrow$$

$$\frac{3x^3+5x+1}{(x+1)(2x-3)}=\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}+\frac{41}{4}\left(\frac{1}{2x-3}\right)-\frac{7}{(x+1)(2x-3)} \Rightarrow$$

$$\frac{3x^3+5x+1}{(x+1)(2x-3)}=\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}+\frac{41}{4}\left(\frac{1}{2x-3}\right)-\frac{7}{5}\left(\frac{2}{2x-3}-\frac{1}{x+1}\right).$$

Finalmente; la *descomposición en fracciones simples* viene dada por:

$$\frac{3x^3+5x+1}{(x+1)(2x-3)}=\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}+\frac{149}{20}\left(\frac{1}{2x-3}\right)+\frac{7}{5}\left(\frac{1}{x+1}\right). \quad \square$$

Caso $\mathbf{2}$. Dos factores de tipo general; uno lineal y otro cuadrático, ninguno repetido.

$$\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{ax}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{cx^2}+\boldsymbol{dx}+\boldsymbol{e})}$$

con $a,b,c,d,e \in \mathbb{R}$.

Ejemplo $\mathbf{4.9}$.- Descomponer en fracciones simples la expresión $\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}$

Solución.

Para que en el numerador no aparezcan términos con $\boldsymbol{x}$ y con $\boldsymbol{x^2}$ basta reescribir la expresión como:

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+1}\right).$$

Esto es equivalente a:

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right) \Rightarrow$$

La *descomposición en fracciones simples* queda de la forma:

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}\right). \quad \square$$

Donde, los coeficientes de la descomposición son:

$$\boldsymbol{A_1}=\frac{1}{2} \;\; ; \;\; \boldsymbol{A_2}=-\frac{1}{2} \;\; \text{y} \;\; \boldsymbol{A_3}=-\frac{1}{2}\ .$$

Ejemplo $\mathbf{4.10}$.- Descomponer en fracciones simples a $\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$

Solución.

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x+2}{x^2+x+1}\right) \Rightarrow$$

Finalmente; la *descomposición en fracciones simples* es:

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right)-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right). \quad \square$$

Los coeficientes de la *descomposición en fracciones simples* son:

$$\boldsymbol{A_1}=\frac{1}{3} \;\; ; \;\; \boldsymbol{A_2}=-\frac{1}{3} \;\; \text{y} \;\; \boldsymbol{A_3}=-\frac{2}{3}\ .$$

Ejemplo $\mathbf{4.11}$.- Descomponer en fracciones simples a $\frac{1}{(2x+1)(x^2+x+1)}$

Solución.

$$\frac{1}{(2x+1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{4}{2x+1}-\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right) \Rightarrow$$

Finalmente; la *descomposición en fracciones simples* viene dada por:

$$\frac{1}{(2x+1)(x^2+x+1)}=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2x+1}\right)-\frac{2}{3}\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right). \quad \square$$

Los coeficientes de la *descomposición en fracciones simples* son:

$$\boldsymbol{A_1}=\frac{4}{3} \;\; ; \;\; \boldsymbol{A_2}=-\frac{2}{3} \;\; \text{y} \;\; \boldsymbol{A_3}=-\frac{1}{3}\ .$$

Ejemplo $\mathbf{4.12}$.- Descomponer en fracciones simples a $\frac{1}{(x-1)\left[x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x+2-\sqrt{3}\right]}$

Solución.

$$\frac{1}{(x-1)\left[x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x+2-\sqrt{3}\right]}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{x+\sqrt{3}}{x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x+2-\sqrt{3}}\right]. \quad \square$$

Nota: en forma análoga se puede ver que:

$$\frac{1}{(x-1)\left[x^2-\left(1+\sqrt{3}\right)x+2+\sqrt{3}\right]}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{x-\sqrt{3}}{x^2-\left(1+\sqrt{3}\right)x+2+\sqrt{3}}\right]. \quad \square$$

***Observación* $\mathbf{4.2}$**: una consecuencia inmediata de los dos resultados anteriores es:

$$\frac{1}{\left[x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x+2-\sqrt{3}\right]\left[x^2-\left(1+\sqrt{3}\right)x+2+\sqrt{3}\right]}=\cdots$$

$$\cdots=\frac{1}{4\sqrt{3}}\left[\frac{x+\sqrt{3}}{x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x+2-\sqrt{3}}-\frac{x-\sqrt{3}}{x^2-\left(1+\sqrt{3}\right)x+2+\sqrt{3}}\right].$$

Ejemplo $\mathbf{4.13}$.- Usar el resultado de la *Observación* $\mathbf{4.2}$ para descomponer en fracciones simples a la expresión:

$$\frac{-2x^2-4x+2}{\left[x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x+2-\sqrt{3}\right]\left[x^2-\left(1+\sqrt{3}\right)x+2+\sqrt{3}\right]}\ .$$

Solución.

$$\frac{-2x^2-4x+2}{\left[x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x+2-\sqrt{3}\right]\left[x^2-\left(1+\sqrt{3}\right)x+2+\sqrt{3}\right]}=$$

$$\left(\frac{-2x^2-4x+2}{4\sqrt{3}}\right)\left[\frac{x+\sqrt{3}}{x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x+2-\sqrt{3}}-\frac{x-\sqrt{3}}{x^2-\left(1+\sqrt{3}\right)x+2+\sqrt{3}}\right]=$$

$$\frac{1}{4\sqrt{3}}\left[\frac{-2x^3-\left(4+2\sqrt{3}\right)x^2+\left(2-4\sqrt{3}\right)x+2\sqrt{3}}{x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x+2-\sqrt{3}}-\right.$$

$$\left.\frac{-2x^3-\left(4-2\sqrt{3}\right)x^2+\left(2+4\sqrt{3}\right)x-2\sqrt{3}}{x^2-\left(1+\sqrt{3}\right)x+2+\sqrt{3}}\right]=$$

$$\frac{1}{4\sqrt{3}}\left\{-2x-6+\frac{12-4\sqrt{3}}{x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x+2-\sqrt{3}}-\right.$$

$$\left.\left[-2x-6+\frac{12+4\sqrt{3}}{x^2-\left(1+\sqrt{3}\right)x+2+\sqrt{3}}\right]\right\}.$$

Finalmente, al simplificar se obtiene la *descomposición en fracciones*;

$$\frac{-2x^2-4x+2}{\left[x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x+2-\sqrt{3}\right]\left[x^2-\left(1+\sqrt{3}\right)x+2+\sqrt{3}\right]}=\cdots$$

$$\cdots=-\frac{x-\sqrt{3}}{x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x+2-\sqrt{3}}-\frac{x+\sqrt{3}}{x^2-\left(1+\sqrt{3}\right)x+2+\sqrt{3}}\ . \quad \square$$

Ejemplo $\mathbf{4.14}$.- Descomponer en fracciones simples a $\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+2)}$

Solución.

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+2)} = \frac{(x+1)}{(x+1)(x^2+1)(x^2+x+2)} =$$

$$\frac{1}{x+1}\left[\frac{(x+1)}{(x^2+1)(x^2+x+2)}\right] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+2)} = \frac{1}{x+1}\left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+x+2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+2)} = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} - \frac{1}{(x+1)(x^2+x+2)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-1}{x^2+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+x+2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+x+2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right).$$

La *descomposición en fracciones simples* es de la forma:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+x+2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+1}\right). \quad \square$$

Ejemplo $\mathbf{4.15}$.- Descomponer en fracciones simples a $\frac{x^2}{(x-1)(x^2+x+1)}$

Solución.

$$\frac{x^2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x^2-1+1}{(x-1)(x^2+x+1)} =$$

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} .$$

Usando la *descomposición en fracciones simples* del ejercicio $\mathbf{10}$ se tiene:

$$\frac{x^2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x+1}{x^2+x+1} +$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right). \quad \square$$

Los coeficientes de la *descomposición en fracciones simples* son:

$$\boldsymbol{A_1} = \frac{1}{3} \ ; \ \boldsymbol{A_2} = \frac{2}{3} \ \text{ y } \ \boldsymbol{A_3} = \frac{1}{3} .$$

Ejemplo $\mathbf{4.16}$.- Descomponer en fracciones simples a $\frac{1}{(x^2+x+1)^2(x^2+1)}$

Solución.

$$\frac{1}{(x^2+x+1)^2(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{(x^2+x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}+\frac{Ex+F}{x^2+1}\ .$$

El objetivo es encontrar las constantes A, B, C, D, E y F. Para ello, hay que sumar las fracciones del miembro derecho de la igualdad y seguidamente igualar el polinomio que resulta en el numerador del miembro derecho con la constante del numerador del miembro izquierdo. Todo esto conducirá a un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas el cual es muy sencillo de resolver, al menos, en este caso.

Lo que no se menciona, en esa técnica tradicional, es que para arribar al deseado sistema de ecuaciones el cálculo de la suma de las fracciones del miembro derecho es extenuante ¡aun cuando este es un ejemplo sencillo! En ese sentido, surge la siguiente pregunta:

¿Existirá una *técnica alternativa* que no use sistemas de ecuaciones para este proceso?

La respuesta es, ¡**SI**!

Primero, se hace la resta;

$$\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+x+1}\ .$$

Al desarrollarla, en efecto, la igualdad se verifica

$$\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{x}{(x^2+1)(x^2+x+1)}\ . \qquad (\mathbf{1})$$

Lo anterior es equivalente a:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+x+1}\right).$$

Más aún;

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{x(x^2+1)}-\frac{1}{x(x^2+x+1)}\ .$$

Las dos fracciones del miembro derecho se pueden descomponer en fracciones simples de manera trivial. No es difícil ver que:

$$\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\ .$$

En forma análoga;

$$\frac{1}{x(x^2+x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x^2+x+1}\ .$$

De lo anterior, resulta que:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2+x+1} \ .$$

Es decir que;

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)} = \frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x}{x^2+1} \ . \qquad (\mathbf{2})$$

Calculando ahora la expresión:

$$\frac{1}{(x^2+x+1)^2(x^2+1)} \ .$$

Solución.

$$\frac{1}{(x^2+x+1)^2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2+x+1}\left[\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}\right].$$

Usando el resultado obtenido en ($\mathbf{2}$), se tiene:

$$\frac{1}{(x^2+x+1)^2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2+x+1}\left(\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x}{x^2+1}\right).$$

Aplicando la propiedad distributiva del producto con respecto a la adición:

$$\frac{1}{(x^2+x+1)^2(x^2+1)} = \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2} - \frac{x}{(x^2+x+1)(x^2+1)} \ .$$

Finalmente; usando el resultado obtenido en ($\mathbf{1}$), se tiene:

$$\frac{1}{(x^2+x+1)^2(x^2+1)} = \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{1}{x^2+x+1} - \frac{1}{x^2+1} \ . \quad \square$$

Luego; los coeficientes de la *descomposición en fracciones simples* son:

$$\boldsymbol{A} = 1, \quad \boldsymbol{B} = 1, \quad \boldsymbol{C} = 0, \quad \boldsymbol{D} = 1, \quad \boldsymbol{E} = 0 \ \text{ y } \ \boldsymbol{F} = -1.$$

Nota: es posible que las ideas expuestas anteriormente no sean del todo tan obvias o triviales, pero el autor de esta investigación espera que el estudiante con algo de práctica en esta técnica forme habilidades donde sea capaz de resolver problemas aún más complicados.

Ejemplo $\mathbf{4.17}$.- Descomponer en fracciones simples, de dos maneras distintas, la expresión que se muestra, pero sin usar el método de coeficientes indeterminados $\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)}$

Solución $\mathbf{1}$.

Para que en el numerador no aparezcan términos con x y x^2 basta reescribir esta expresión como:

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{1}{x-1}\left[\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}\right].$$

Al sustituir la descomposición resultante del ejercicio $\mathbf{9}$, en la expresión dentro del corchete, se tiene:

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{1}{x-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)\right]\ \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}\right]-\frac{x}{2}\left[\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}\right].$$

Sustituyendo nuevamente el resultado del ejercicio $\mathbf{9}$, en las expresiones entre corchetes del miembro derecho de la igualdad anterior, se tiene:

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)\right]-$$

$$\frac{x}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)\right]\ \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)-$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{x}{x-1}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right).$$

Al simplificar se obtiene:

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)+$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{x}{x-1}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)\ \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}+1+\frac{x}{x^2+1}\ \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}+\frac{x}{x^2+1}\ .\quad\square$$

Solución $\mathbf{2}$.

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{1}{(x^2-2x+1)(x^2+1)}=\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{x^2-2x+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)\ \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{x^2-2x+1}\right)-\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{x^2+1}\right).\quad\square$$

Ejemplo $\mathbf{4.18}$.- ¿Cuál de las tres expresiones siguientes es más sencilla de descomponer en fracciones simples?

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)} \text{ ó } \frac{x}{(x^2+1)(x^2+x+1)} \text{ ó } \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$$

Solución:

i). Se iniciará con la expresión $\frac{x}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$

$$\frac{x}{(x^2+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+x+1}\ . \quad \square$$

ii). Se sigue con la expresión $\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$

$$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+x+1)} = x\left[\frac{x}{(x^2+1)(x^2+x+1)}\right].$$

Usando el resultado anterior se tiene:

$$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+x+1)} = x\left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+x+1}\right) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+x+1}\ . \quad \square$$

iii). Por último, se tiene la expresión $\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)} = \frac{x}{x(x^2+1)(x^2+x+1)} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x}\left[\frac{x}{(x^2+1)(x^2+x+1)}\right] =$$

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+x+1}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x(x^2+1)} - \frac{1}{x(x^2+x+1)} =$$

$$\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2+x+1} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)} = \frac{x}{x^2+x+1} + \frac{1}{x^2+x+1} - \frac{x}{x^2+1}\ . \quad \square$$

Finalmente, se concluye que la descomposición de $\frac{x}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$ es directa y, por lo tanto, es la más sencilla.

Ejemplo $\mathbf{4.19}$.- Descomponer en fracciones simples a $\frac{1}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$

Solución.

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{1}{x-1}\left[\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}\right].$$

Usando la descomposición obtenida en el ejercicio $\mathbf{10}$ se tiene:

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{1}{x-1}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)\right] =$$

$$\frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{3}\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} - \frac{2}{3}\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) - \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} =$$

$$\frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+x+1}\right) =$$

$$\frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right). \quad \square$$

Finalmente, los coeficientes de la *descomposición en fracciones* son:

$$\boldsymbol{A_1} = \frac{1}{3} \;\; ; \;\; \boldsymbol{A_2} = -\frac{1}{3} \;\; ; \;\; \boldsymbol{A_3} = \frac{1}{3} \;\; \text{y} \;\; \boldsymbol{A_4} = \frac{1}{3}.$$

Ejemplo $\mathbf{4.20}$.- Analizar la integral dada y exprésela como una suma de integrales simples.

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)^2(x+2)}.$$

Solución.

Primero se va a descomponer la expresión:

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+2)}.$$

Se observa que;

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{1}{x-1}\left[\frac{1}{(x-1)(x+2)}\right] = \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)\frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)(x+2)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)\frac{1}{3}\right] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x-1}\right) + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x+2}\right). \quad (\mathbf{1})$$

Ahora se hará la descomposición de la expresión:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)^2(x+2)}.$$

En efecto;

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)^2(x+2)} = \frac{1}{x^2+1}\left[\frac{1}{(x-1)^2(x+2)}\right].$$

Al usar la descomposición de (**1**) se tiene;

$$\frac{1}{(x^2\ +1)(x\ -\ 1)^2(x\ +\ 2)}\ =\ \frac{1}{x^2\ +1}\left[\frac{1}{3}\frac{1}{(x\ -\ 1)^2}-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x\ -\ 1}\right)+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x\ +\ 2}\right)\right]\Rightarrow$$

$$\frac{1}{(x^2\ +1)(x\ -\ 1)^2(x\ +\ 2)}=\frac{1}{3}\frac{1}{(x^2\ +1)(x\ -\ 1)^2}-$$

$$\frac{1}{9}\frac{1}{(x^2\ +1)(x\ -\ 1)}+\frac{1}{9}\frac{1}{(x^2\ +1)(x\ +\ 2)}\,. \qquad (\mathbf{2})$$

Haciendo:

$$\boldsymbol{F_1}=\frac{1}{(x^2\ +1)(x\ -\ 1)}\ ;\ \boldsymbol{F_2}=\frac{1}{(x^2\ +1)(x\ -\ 1)^2}\ \text{ y }\ \boldsymbol{F_3}=\frac{1}{(x^2\ +1)(x\ +\ 2)}\ .$$

Donde;

$$\boldsymbol{F_1}=\frac{1}{(x^2\ +1)(x\ -\ 1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x\ -\ 1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x\ +\ 1}{x^2\ +1}\right). \qquad (\mathbf{3})$$

Ahora se hará la descomposición de $\boldsymbol{F_2}$;

$$\boldsymbol{F_2}=\frac{1}{(x^2\ +1)(x\ -\ 1)^2}\ =\left(\frac{1}{x\ -\ 1}\right)\boldsymbol{F_1}=\frac{1}{x\ -\ 1}\left[\frac{1}{(x^2\ +1)(x\ -\ 1)}\right]\ \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{F_2}=\frac{1}{(x^2\ +1)(x\ -\ 1)^2}\ =\frac{1}{x\ -\ 1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x\ -\ 1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x\ +\ 1}{x^2\ +1}\right)\right]\ \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{F_2}=\frac{1}{(x^2\ +1)(x\ -\ 1)^2}\ =\frac{1}{2}\frac{1}{(x\ -\ 1)^2}-\frac{1}{2}\frac{x\ +\ 1}{(x^2\ +1)(x\ -\ 1)}\ \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{F_2}=\frac{1}{(x^2\ +1)(x\ -\ 1)^2}\ =\frac{1}{2}\frac{1}{(x\ -\ 1)^2}-\frac{1}{2}\frac{(x\ -\ 1)+\ 2}{(x^2\ +1)(x\ -\ 1)}\ \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{F_2}=\frac{1}{(x^2\ +1)(x\ -\ 1)^2}\ =\frac{1}{2}\frac{1}{(x\ -\ 1)^2}\ -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2\ +1}\right)-\frac{1}{(x^2\ +1)(x\ -\ 1)}\ .$$

Usando la descomposición hecha en (**3**) se obtiene:

$$\boldsymbol{F_2}=\frac{1}{(x^2\ +1)(x\ -\ 1)^2}\ =\frac{1}{2}\frac{1}{(x\ -\ 1)^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x\ -\ 1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2\ +1}\right). \qquad (\mathbf{4})$$

Finalmente, se busca la descomposición de $\boldsymbol{F_3}$;

$$\boldsymbol{F_3}=\frac{1}{(x^2\ +1)(x\ +\ 2)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x\ +\ 2}-\frac{x\ -\ 2}{x^2\ +1}\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x\ +\ 2}\right)-\frac{1}{5}\left(\frac{x\ -\ 2}{x^2\ +1}\right)\ \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{F_3}=\frac{1}{(x^2\ +1)(x\ +\ 2)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x\ +\ 2}\right)-\frac{1}{5}\left(\frac{x\ -\ 2}{x^2\ +1}\right). \qquad (\mathbf{5})$$

Usando (**3**), (**4**) y (**5**) en (**2**) se obtiene:

$$\frac{1}{(x^2\ +1)(x\ -\ 1)^2(x\ +\ 2)}\ =\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{(x\ -\ 1)^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x\ -\ 1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2\ +1}\right)\right]-$$

$$\frac{1}{9}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x\ -\ 1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x\ +\ 1}{x^2\ +1}\right)\right]+\frac{1}{9}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x\ +\ 2}\right)-\frac{1}{5}\left(\frac{x\ -\ 2}{x^2\ +1}\right)\right].$$

Sacando las cuentas respectivas y simplificando se obtiene:

$$\frac{1}{(x^2\ +1)(x\ -\ 1)^2(x\ +\ 2)}=\frac{1}{6}\frac{1}{(x\ -\ 1)^2}-\frac{2}{9}\left(\frac{1}{x\ -\ 1}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{x^2\ +1}\right)+$$

$$\frac{1}{10}\left(\frac{1}{x^2\ +1}\right)+\frac{1}{45}\left(\frac{1}{x\ +\ 2}\right).$$

Por lo tanto;

$$\int\frac{dx}{(x^2\ +\ 1)(x\ -\ 1)^2(x\ +\ 2)}\ .$$

Puede expresarse como:

$$\frac{1}{6}\int\frac{dx}{(x\ -\ 1)^2}-\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x\ -\ 1}+\frac{1}{5}\int\frac{xdx}{x^2\ +1}+\frac{1}{10}\int\frac{dx}{x^2\ +1}+\frac{1}{45}\int\frac{dx}{x\ +\ 2}\ .\quad\square$$

Ejemplo $\mathbf{4.21}$.- Dadas las funciones racionales calcular sus primitivas.

$$\boldsymbol{a})\int\frac{dy}{(y-m)(y-n)}\qquad\boldsymbol{b})\int\left(\frac{3x^2-21x+32}{x^3-8x^2+16x}\right)dx\quad\boldsymbol{c})\int\left[\frac{x^3+3x^2+x+6}{(x^2+1)(x^2+2)}\right]dx\ .$$

Solución:

$\boldsymbol{a}$). Usando la *técnica alternativa* para la *descomposición en fracciones simples*, se tiene:

$$\frac{1}{y-m}-\frac{1}{y-n}=\frac{-n+m}{(y-m)(y-n)}\ \Rightarrow$$

Se multiplica por $1/(-n+m)$ ambos miembros de la igualdad:

$$\frac{1}{(y-m)(y-n)}=\frac{1}{m-n}\left(\frac{1}{y-m}-\frac{1}{y-n}\right)=\frac{1}{m-n}\left(\frac{1}{y-m}\right)-\frac{1}{m-n}\left(\frac{1}{y-n}\right).$$

Aplicando transitividad de la igualdad. Se tiene la descomposición;

$$\frac{1}{(y-m)(y-n)}=\frac{1}{m-n}\left(\frac{1}{y-m}\right)-\frac{1}{m-n}\left(\frac{1}{y-n}\right).$$

Integrando en ambos miembros y por propiedad de linealidad de la integral;

$$\int\frac{dy}{(y-m)(y-n)}=\frac{1}{m-n}\int\frac{dy}{y-m}-\frac{1}{m-n}\int\frac{dy}{y-n}\ .$$

Calculando las integrales más simples se tiene:

$$\int\frac{\boldsymbol{dy}}{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{m})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{n})}=\left(\frac{1}{m-n}\right)ln\left|\frac{y-m}{y-n}\right|+C\ .\quad\square$$

$\boldsymbol{b}$). Para la *descomposición en fracciones simples*, con la *técnica alternativa*, se tiene;

$$\frac{3x^2-21x+32}{x^3-8x^2+16x}=\frac{2(x-4)^2+x(x-4)-x}{x(x-4)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{3x^2-21x+32}{x^3-8x^2+16x}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x-4}-\frac{1}{(x-4)^2} \quad \Rightarrow$$

Integrando en ambos miembros y por propiedad de linealidad de la integral;

$$\int\left(\frac{3x^2-21x+32}{x^3-8x^2+16x}\right)dx = 2\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x-4}-\int\frac{dx}{(x-4)^2} \quad \Rightarrow$$

Calculando las integrales más simples se tiene:

$$\int\left(\boldsymbol{\frac{3x^2-21x+32}{x^3-8x^2+16x}}\right)\boldsymbol{dx} = 2ln|x|+ln|x-4|-\frac{1}{x-4}+C\,. \quad \square$$

c). Aplicando la *técnica alternativa*, para la *descomposición en fracciones simples*, se tiene;

$$\frac{x^3+3x^2+x+6}{(x^2+1)(x^2+2)}=\frac{x(x^2+1)+3(x^2+2)}{(x^2+1)(x^2+2)}=\frac{x}{x^2+2}+\frac{3}{x^2+1} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{x^3+3x^2+x+6}{(x^2+1)(x^2+2)}=\frac{x}{x^2+2}+\frac{3}{x^2+1}\,.$$

Integrando en ambos miembros y por propiedad de linealidad de la integral;

$$\int\left[\frac{x^3+3x^2+x+6}{(x^2+1)(x^2+2)}\right]dx=\int\frac{xdx}{x^2+2}+3\int\frac{dx}{x^2+1}\,.$$

Calculando las integrales más simples, se tiene:

$$\int\left[\boldsymbol{\frac{x^3+3x^2+x+6}{(x^2+1)(x^2+2)}}\right]\boldsymbol{dx}=ln\left(\sqrt{x^2+2}\right)+3\,tan^{-1}(x)+C\,. \quad \square$$

Ejemplo $\mathbf{4.22}$.- En el siguiente ejemplo se mostrará el uso de la *descomposición en fracciones simples*, desarrollada con la *técnica alternativa*, para resolver una serie *Telescópica*. En ese sentido, dada la serie resolverla;

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{-2}{(n+1)(n+2)}\,.$$

Solución.

Primero se obtendrá la *descomposición en fracciones simples*, usando la *técnica alternativa*, de la expresión:

$$\frac{-2}{(n+1)(n+2)}=-2\left[\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=-2\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{-2}{(n+1)(n+2)} = -2\left(\frac{1}{n+1}\right) + 2\left(\frac{1}{n+2}\right).$$

Ahora, sustituyendo en la serie se tiene:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{-2}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-2}{n+1} + \frac{2}{n+2}\right) .$$

Desarrollando la serie hasta un $n = N$ se obtiene:

$$\sum_{n=2}^{N} \left(\frac{-2}{n+1} + \frac{2}{n+2}\right) = \underbrace{\left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{4}\right)}_{n=2} + \underbrace{\left(-\frac{2}{4} + \frac{2}{5}\right)}_{n=3} +$$

$$\underbrace{\left(-\frac{2}{5} + \frac{2}{6}\right)}_{n=4} + \cdots + \underbrace{\left(-\frac{2}{N+1} + \frac{2}{N+2}\right)}_{n=N}.$$

Cancelando términos se tiene:

$$\sum_{n=2}^{N} \left(\frac{-2}{n+1} + \frac{2}{n+2}\right) = -\frac{2}{3} + \frac{2}{N+2} .$$

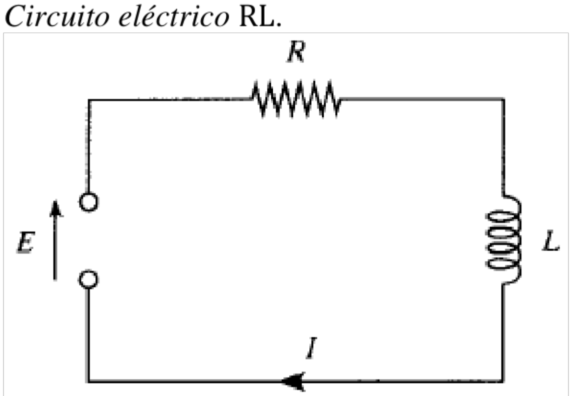
Finalmente, aplicando el límite cuando $N \to \infty$ se obtiene:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{-2}{n+1} + \frac{2}{n+2}\right) = \lim_{N\to\infty} \left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{N+2}\right) = -\frac{2}{3} . \quad \square$$

Ejemplo $\mathbf{4.23}$.- (*Modelación Matemática*). Aplicación de la *descomposición en fracciones simples*, desarrollada con la *técnica alternativa*, para la resolución de un circuito eléctrico RL.

Figura 14

Circuito eléctrico RL.



Nota: el siguiente circuito eléctrico está constituido por una conexión en serie de una fuente de poder, una resistencia y una bobina. Fuente: Autor (2024).

Usar **T**ransformadas de **L**aplace para obtener $\boldsymbol{i}(t)$.

Solución.

Este circuito está modelado por la EDO lineal de primer orden con coeficientes constantes que se muestra a continuación:

$$\frac{di(t)}{dt}+\frac{R}{L}i(t)=\frac{E(t)}{L} \text{ ó } E(t)=Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt} \ .$$

Aplicando las **T**ransformadas de **L**aplace a la EDO se tiene la ecuación algebraica:

$$\frac{E}{s}=RI(s)+LsI(s)=I(s)(R+Ls) \ .$$

Despejando $I(s)$ se obtiene la intensidad de corriente en el dominio de la frecuencia:

$$I(s)=\frac{E}{L}\left[\frac{1}{s\left(s+\frac{R}{L}\right)}\right]. \qquad (\mathbf{1})$$

Realizando la *descomposición en fracciones simples*, con la *técnica alternativa*, de la expresión que está dentro del corchete, en (**1**), se tiene:

$$\frac{1}{s\left(s+\frac{R}{L}\right)}=\frac{L}{R}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right)=\frac{L}{R}\frac{1}{s}-\frac{L}{R}\left(\frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right). \qquad (\mathbf{2})$$

Sustituyendo, (**2**) en (**1**), se tiene:

$$I(s)=\frac{E}{L}\left[\frac{L}{R}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right)\right]=\frac{E}{R}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right) \ \Rightarrow$$

$$I(s)=\frac{E}{R}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right). \qquad (\mathbf{3})$$

Finalmente; aplicando la **T**ransformada **I**nversa de **L**aplace en la expresión (**3**) se obtiene la intensidad de corriente en el dominio del tiempo:

$$\mathcal{L}^{-1}\{I(s)\}=\frac{E}{R}\left(1-e^{\frac{-R}{L}t}\right) \ \Rightarrow \ \boldsymbol{i}(t)=\frac{E}{R}\left(1-e^{\frac{-R}{L}t}\right). \quad \square$$

CAPÍTULO V

“*Las matemáticas podrían definirse como aquello en lo que nunca sabemos de lo que estamos hablando, ni si lo que decimos es verdad*”.

Bertrand Russell

LA TÉCNICA ALTERNATIVA Y LA TEORÍA APOE

El análisis de la comprensión de un concepto en Matemática juega un papel primordial para el especialista ya que contribuye en mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje, y permite develar los procesos cognitivos que se activan en los estudiantes para encapsular un concepto.

Es ese sentido; este apartado se inicia con un mapa cognitivo para desarrollar el objeto matemático de estudio, de la presente investigación, según la teoría APOE. El mencionado mapa es conocido por la teoría APOE como «*Descomposición Genética*».

Una Descomposición Genética Hipotética del Concepto de DFS

La descomposición genética (DG) es una vía para aprender conscientemente un concepto matemático por parte del alumno, en ese sentido, se debe entender que la descomposición genética de un concepto no es única, ésta depende directamente de la visión y experiencia del investigador; en ese orden de ideas “pueden coexistir varias descomposiciones genéticas del mismo concepto en estudio” (Trigueros, 2005, p. 8).

En tal sentido; estudiar la descomposición genética de un objeto matemático, en particular el de la *descomposición en fracciones simples* (DFS), permite estructurar el concepto y orientar la organización del contenido a enseñar y el diseño de actividades y tareas que contribuyan a la construcción de las estructuras que se busca que los estudiantes desarrollen. Además, es el punto de partida para la construcción de unidades didácticas (Asiala *et al*., 1996).

La descomposición genética según Aldana (2011) introduce al profesor en una reflexión epistemológica y didáctica del concepto, que permite, cuestionar y mejorar la comprensión que tiene del concepto, usar y organizar dicho conocimiento en la estructuración de la enseñanza del mismo, orientar el aprendizaje de los estudiantes hacia los procesos de construcción y reconstrucción de los conceptos matemáticos que espera que sus estudiantes desarrollen.

Similarmente; Gavilán, García y Llinares (2007) caracterizan la modelación de la descomposición genética de un concepto matemático como la descripción de las herramientas y actividades que el profesor realiza para lograr la construcción del concepto de manera que su práctica ayuda al proceso de construcción. Por tanto, la descomposición genética de un concepto es un referente para identificar y explicar las herramientas utilizadas por el profesor para que el estudiante logre la construcción del concepto de interés.

A continuación, se analiza cómo se relaciona el modelo (o mapa) cognitivo APOE con la *técnica alternativa* elaborada para la presente investigación y el *modus operandi*.

Ahora bien; en todo proceso de aprendizaje, según la APOE, interesa que los estudiantes logren idealmente la estructura cognitiva de la fase superior, es decir, un «*esquema* subetapa *Trans*», que; mediante *acciones*, *procesos*, *objetos* y otros *esquemas*, el estudiante pueda evocar para resolver un determinado problema. Para ello el estudiante debe haber logrado primero el esquema de una DFS aplicando la *técnica alternativa* y las operaciones entre los distintos casos básicos de DFS, a saber; factores lineales con multiplicidad igual a 1, factores lineales con multiplicidad mayor que 1, factores cuadráticos no reducibles con multiplicidad igual a 1 y factores cuadráticos no reducibles con multiplicidad mayor que 1, así como el esquema sobre la comprensión de una DFS donde se presenten casos más complejos como, por ejemplo, combinaciones de los casos básicos.

Con estos esquemas en mente, se realiza una «*Descomposición Genética*» del concepto matemático «*Descomposición en Fracciones Simples*». Para ello, se hizo el recorrido detallado por los estados mentales que, según la teoría APOE, garantizan el apropiamiento de un aprendizaje significativo del concepto matemático de interés. En ese sentido, a continuación, se describe cómo un estudiante cualquiera va evolucionando cognitivamente en cada estado mental hasta lograr el aprendizaje significativo del concepto matemático.

Estados Mentales Aplicados a la Técnica Alternativa Según la Teoría APOE

1.- Para desarrollar la comprensión a nivel de *acción*, según Aldana;

> la transformación se produce como una reacción a una indicación que ofrece información sobre los pasos a seguir. Cuando un sujeto solo puede realizar este tipo de transformaciones en la resolución de una tarea, decimos que está operando a nivel de acción. (ob. cit., p. 67)

En ese sentido, el investigador considera que; el estudiante responde al nivel de *acción* cuando entiende el concepto de *Descomposición en Fracciones Simples* y su interpretación, maneja algunos procedimientos de forma memorizada en relación a la *técnica alternativa* utilizada para realizar la descomposición y puede realizar descomposiciones inherentes al caso más básico de estudio, a saber; factores lineales con multiplicidad igual a 1. Cabe recalcar que la construcción de *acciones* viene a ser crucial al inicio de la construcción de un concepto matemático.

2.- El nivel de *proceso*, para Aldana;

> Es la interiorización de una acción. Es una construcción producto de una transformación interna, no necesariamente dirigida por un estímulo externo. En el proceso el sujeto puede describir los pasos involucrados en la transformación e incluso puede invertirlos, es decir, tiene más control de la transformación. (ob. cit., p. 67)

Siguiendo la idea anterior; el investigador considera que; un estudiante puede tener una concepción de *proceso* en el concepto de *Descomposición en Fracciones Simples*, si logra interiorizar las *acciones* anteriores por aproximaciones repetidas, en ese sentido, será necesario el manejo de la operatoria y demostraciones simples de las propiedades del concepto de *Descomposición en Fracciones Simples*. En este nivel, el estudiante, usando la repetición, puede describir los pasos involucrados al usar la *técnica alternativa* para el desarrollo de una *Descomposición en Fracciones Simples* e incluso puede invertirlos, es decir, por medio de la repetición de *acciones* sobre la *técnica alternativa* logrará más control en la misma al usarla durante el desarrollo de una DFS. Además; en este nivel, el individuo puede pensar un concepto matemático en términos generales y sin necesidad de hacer cálculos explícitos.

3.- El nivel de *objeto*, según Aldana se refiere;

> cuando el estudiante reflexiona sobre acciones aplicadas a un proceso concreto, siendo consciente del proceso como una totalidad, aprecia que la transformación (acción o proceso) puede actuar sobre él y es capaz de construir la transformación. Entonces, se dice que el estudiante ha reconstruido este proceso en un objeto cognitivo; es decir que el proceso ha sido encapsulado y convertido en un objeto. (ob. cit., p. 67)

En ese sentido; el investigador considera que; un alumno muestra una idea de *objeto*, cuando tiene la capacidad de realizar la DFS con un mayor nivel de abstracción, es decir, puede realizar la DFS de casos más complejos donde no sea suficiente una manipulación algebraica básica. Éste debe ser capaz de encapsular y desencapsular un *proceso*, es decir, revertir un *proceso*, en el sentido de volver al *proceso* inicial, reflexionar sobre las *acciones* que al actuar sobre el *proceso* originaron el *objeto*. Además, coordinar nuevos *procesos*. En otras palabras, el estudiante, en este nivel, reflexiona sobre las operaciones algebraicas necesarias para desarrollar la *técnica alternativa* aplicada a la *Descomposición en Fracciones Simples* y toma conciencia del *proceso* como un todo. El mismo, logra realizar generalizaciones del mecanismo básico de la DFS para resolver situaciones problémicas donde se requiera descomposiciones más complejas como, por ejemplo, combinaciones de los casos básicos.

4.- El nivel de *esquema*. Éste es entendido por Aldana como;

> una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados, consciente o inconscientemente, en una estructura coherente en la mente del individuo y que puede ser evocada para tratar una situación problemática de esa área de la Matemática. Una función importante y característica de la coherencia de un esquema está en poder determinar qué está en el ámbito del esquema y qué no. (ob. cit., p. 68)

En ese orden de ideas, cuando un estudiante es retado a realizar una actividad o trabajo matemático en concreto, evoca un esquema para resolverla, para ello, utiliza los conocimientos previos con los que cuenta o las relaciones entre los conceptos matemáticos que en ese momento dispone.

Ahora bien, aplicado esto al caso de interés, el investigador considera que; el estudiante debe ser capaz de coordinar el *esquema* de la DFS con el *esquema* de la *técnica alternativa* y definir, desde este enfoque, los conceptos involucrados con el análisis cualitativo de la DFS. Esta coordinación le permitirá analizar y realizar dicho estudio vía algebraica y revertir el *proceso* si es necesario, es decir, conociendo el funcionamiento de la *técnica alternativa* puede inferir su aplicación a casos de descomposición más complejos. Aquí, el estudiante reconoce y coordina ambos *esquemas* y lo puede aplicar en la resolución de problemas de *Modelación Matemática* que necesiten de la DFS. Es decir; el estudiante reconoce, modela y resuelve problemas, que involucren a la DFS, cuya representación matemática es una situación de la vida real.

Agregando a todo lo anterior; la construcción de un concepto matemático requiere la construcción de concepciones mentales de los tipos antes mencionados, pero esas concepciones no siguen necesariamente una secuencia lineal. Un individuo puede tener durante mucho tiempo concepciones intermedias o incluso tener una concepción de un tipo para algunos aspectos de un concepto y de otro para otros aspectos del concepto. Sin embargo, hay que subrayar que la forma de trabajo que un individuo pone de manifiesto frente a distintas situaciones problemáticas es diferente cuando responde de una manera que puede caracterizarse en la teoría como un proceso, un objeto o bien una acción (Trigueros y Oktaç, 2005).

Niveles de Desarrollo de un Esquema Aplicados a la Técnica Alternativa

Etapa intra. En este nivel el estudiante posee una colección de reglas para aplicar la *técnica alternativa* y una colección de conceptos que determinan las características cualitativas de una *Descomposición en Fracciones Simples* y sus propiedades, conoce algoritmos de resolución para casos básicos de la DFS, y reconoce cómo abordar modelos de fenómenos que representan situaciones de la vida real, pero no es capaz de reconocer las relaciones existentes entre ellos.

Al respecto; Aldana (ob. cit.) establece una subdivisión de este nivel formando características específicas que guardan correspondencia con lo observado en los estudiantes que conforman la muestra. En ese sentido:

El estudiante se encuentra en el nivel *Intra* porque:

1. "No establece relaciones lógicas entre los elementos matemáticos". Es decir; cuando el estudiante no tiene la capacidad de resolver la tarea, porque no tiene los conocimientos previos para la resolución. No logra establecer ningún tipo de relación lógica, ni usar los elementos que le permiten evidenciar una comprensión mínima del concepto del objeto matemático. Presenta conflictos en el tratamiento del objeto matemático.

2. "Recuerda solo algún elemento matemático a lo largo de todo el cuestionario, vinculado solo a un sistema de representación, algebraico o analítico. Es decir, recuerda solo algunos elementos matemáticos de forma aislada". Cuando el estudiante menciona de memoria y generalmente de forma reiterada, por lo menos, un elemento matemático como producto de la instrucción previa, pero solo es capaz de utilizarlo en la resolución de las actividades o tareas desde un sistema de representación (generalmente algebraica); es decir, que; no logra establecer una transformación entre las diferentes formas de representación: algebraico y analítico.

3. "Recuerda elementos matemáticos con errores y no tiene sintetizados los sistemas de representación". Es propio de este subnivel de desarrollo del esquema que un estudiante al tratar de resolver una tarea recuerde algunos elementos matemáticos y cuando intenta aplicarlos lo haga con ideas erróneas y/o de forma incorrecta y, por tanto; los procedimientos que emplea en la resolución de las situaciones problemáticas sean incorrectos. También, es característico de este nivel que el estudiante logre utilizar uno o varios elementos matemáticos, pero no es capaz de coordinar el uso de estos entre los sistemas de representación algebraica y analítico; es decir, que la resolución que hace el alumno de la tarea, depende mucho si la información dada o la que él mismo produce proviene de un registro analítico o algebraico.

Etapa inter. El estudiante comienza a reconocer que de alguna manera los *esquemas* se relacionan y que pueden mirarse como un todo. Aquí inicia su etapa de maduración del concepto matemático.

Siguiendo a Aldana (ob. cit.), también establece una subdivisión de este nivel formando características específicas. En ese sentido;

El estudiante se encuentra en el nivel *Inter* porque:

1. "Usa la conjunción lógica correctamente entre los elementos matemáticos en una misma forma de representación". Es propio de este nivel de desarrollo que el alumno empiece a establecer relaciones lógicas a través de la conjunción entre elementos de los conceptos matemáticos utilizando el mismo sistema de representación. Generalmente los alumnos establecen con más regularidad conjunción lógica entre elementos matemáticos en modo analítico y/o algebraico.

2. "Recuerda algunos elementos matemáticos expresados a través de diferentes formas de representación (algebraicos y/o analíticos)". Esta categoría tiene que ver con el uso parcial que el alumno hace de algunos elementos matemáticos que recuerda y que utiliza para resolver problemas en alguno de los dos sistemas de representación, pero que generalmente en este nivel lo hace de forma algebraica, aunque algunas veces suele recordar algunos elementos matemáticos de forma analítica.

3. "Tiene un bosquejo de síntesis de las diferentes formas de representación (algebraicos y/o analíticos)". Una manifestación concreta de estas características se establece generalmente cuando el estudiante al resolver una tarea coordina parcialmente el uso de algunos elementos matemáticos haciendo el cambio de registros de representación, es decir, que; para el alumno la tarea la resuelve, pero dependiendo del sistema de representación que utilice.

Etapa trans. Se caracteriza por la construcción de una estructura subyacente, coherente con algunas de las relaciones descubiertas en la etapa de desarrollo *inter*. El estudiante construye una estructura subyacente de conocimientos, propiedades de la *técnica alternativa* y reconoce varias instancias del concepto de *Descomposición en Fracciones Simples*, como la combinación de todos los casos básicos ligados a un *proceso*. Además, construye la estructura formada por los distintos algoritmos de solución para todos los casos de la DFS y los fenómenos que debe modelar. Los *esquemas* pasan a caracterizarse como una colección que se describe por un solo proceso.

Al respecto; Aldana (ob. cit.) establece una subdivisión de este nivel formando características específicas. En ese sentido:

El estudiante se encuentra en el nivel *Trans* porque:

1. "Usa diferentes relaciones lógicas (conjunción lógica, condicional y la contraria de la condicional) entre los elementos matemáticos de forma correcta". La conjunción es la relación lógica que más utilizan los estudiantes en la resolución de las tareas, seguida de la condicional y la relación que menos utilizan los estudiantes es la del contrario de operador condicional.

2. “Recordar los elementos matemáticos necesarios en la resolución de la tarea, usando los significados implícitos para tomar decisiones”. Es propio de este nivel que los estudiantes utilicen los elementos que configuran el concepto de *Descomposición en Fracciones Simples* de forma correcta y establezcan las relaciones lógicas necesarias en la resolución de las tareas. Una evidencia de este hecho se presenta cuando el estudiante a lo largo del cuestionario resuelve correctamente todas las tareas.

3. “Tiene la capacidad para sintetizar las diferentes formas de representación (algebraicos y/o analíticos)”. En este nivel de desarrollo del esquema de *Descomposición en Fracciones Simples* el estudiante ha logrado construir una estructura coherente del esquema del concepto mediante las relaciones establecidas en el nivel inter. Esta coherencia le permite decidir cuál es el ámbito idóneo de aplicación del esquema. Además, los estudiantes son capaces de utilizar los elementos o conceptos matemáticos para resolver problemas independientemente de las formas de representación: algebraico, analítico o los dos a la vez.

Descomposición Genética Para Cada Caso de Estudio

Tabla 8

Conocimientos previos para la descomposición genética.

- Objeto “Fracción”	**-** Proceso “Adición de Fracciones”
- Objeto “Fracción Propia”	**-** Proceso “Producto de Fracciones”
- Objeto “Fracción Impropia”	**-** Proceso “Adición de Números Reales”
- Objeto “Fracción Simple”	**-** Proceso “Factorización”
- Objeto “Número Real”	**-** Proceso “Algoritmo de la División”

Nota: aquí se presenta el conocimiento que debe tener un sujeto para poder acceder al concepto de DFS por medio de la Técnica Alternativa que se propone en este trabajo. Fuente: Autor (2024).

Tarea $\mathbf{5.1}$. Realizar la *Descomposición en Fracciones Simples* para el caso:

$$\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b_1})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b_2})} \qquad (\mathbf{5.1})$$

con $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Realizar la <u>*acción*</u> de construir las fracciones básicas:

$$\frac{1}{x\,+\,b_1} \;\text{ y }\; \frac{1}{x\,+\,b_2}\ .$$

Realizar la <u>*acción*</u>, sobre las fracciones anteriores, de expresarlas como la resta:

$$\frac{1}{x+b_1}-\frac{1}{x+b_2}\ .$$

Realizar el <u>*proceso*</u> de restar las fracciones anteriores para obtener;

$$\frac{x+b_2-(x+b_1)}{(x+b_1)(x+b_2)}\ .$$

A continuación, efectuar el *proceso* de eliminación de paréntesis para obtener:

$$\frac{x+b_2-x-b_1}{(x+b_1)(x+b_2)}\ .$$

Seguidamente, realizar el *objeto* de la "Propiedad Conmutativa" en el numerador de la fracción anterior para obtener:

$$\frac{x-x+b_2-b_1}{(x+b_1)(x+b_2)}\ .$$

Luego, de realizar el *objeto* de la "Propiedad de Cancelación" de términos semejantes en el numerador de la fracción anterior, se obtiene:

$$\frac{b_2-b_1}{(x+b_1)(x+b_2)}\ .$$

Multiplicar ambos miembros de la igualdad por la constante:

$$1/(b_2-b_1).$$

Si el individuo logra realizar esta etapa se encontrará en el nivel *objeto* de la "Propiedad del Inverso Multiplicativo" del numerador.

En este estado mental se está trabajando sobre el *objeto* "Número Real".

$$\frac{1}{b_2-b_1}\left[\frac{b_2-b_1}{(x+b_1)(x+b_2)}\right]=\frac{1}{b_2-b_1}\left(\frac{1}{x+b_1}-\frac{1}{x+b_2}\right).$$

Realizar el *objeto* de la "Propiedad Distributiva" y *encapsular* para obtener la descomposición buscada;

$$\frac{1}{(x+b_1)(x+b_2)}=\left(\frac{1}{b_2-b_1}\right)\frac{1}{x+b_1}-\left(\frac{1}{b_2-b_1}\right)\frac{1}{x+b_2}\ .\quad \blacksquare\ QED$$

Tarea $\mathbf{5.2}$. Realizar la *Descomposición en Fracciones Simples* para el caso:

$$\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b_2})(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{d_1}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e_1})}\qquad(\mathbf{5.2})$$

con $b_2, d_1, e_1 \in \mathbb{R}$.

Realizar la *acción* de construir las siguientes fracciones básicas:

$$\frac{1}{x+b_2}\ \text{ y }\ \frac{1}{x^2+d_1x+e_1}\ .$$

Realizar la *acción*, sobre las fracciones anteriores, de expresarlas como la resta:

$$\frac{1}{x+b_2}-\frac{1}{x^2+d_1x+e_1}\ .$$

Seguidamente; realizar el *proceso* de la resta de fracciones y el *proceso* de la "Propiedad de agrupación de términos semejantes" en el numerador de la fracción para obtener:

$$\frac{x^2+d_1x+e_1-x-b_2}{(x+b_2)(x^2+d_1x+e_1)}=\frac{x^2+(d_1-1)x+(e_1-b_2)}{(x+b_2)(x^2+d_1x+e_1)}\ .$$

Interiorizar la *acción* de restar las fracciones con el objetivo, de darse cuenta, que debe tratar de hacer desaparecer la dependencia de la variable "x" (o al menos reducir en un grado al numerador).

Realizar la *acción* de construir las siguientes fracciones con una ligera modificación en la segunda fracción, con el fin de eliminar la dependencia de "x" en el numerador

$$\frac{1}{x+b_2}\ \text{ y }\ \frac{x+(d_1-b_2)}{x^2+d_1x+e_1}\ .$$

Realizar la *acción* de expresar las nuevas fracciones como la resta:

$$\frac{1}{x+b_2}-\frac{x+(d_1-b_2)}{x^2+d_1x+e_1}\ .$$

Realizar el *proceso* de restar las fracciones para obtener:

$$\frac{x^2+d_1x+e_1-[x^2+b_2x+(d_1-b_2)x+(d_1-b_2)b_2]}{(x+b_2)(x^2+d_1x+e_1)}\ .$$

A continuación, efectuar la *acción* de eliminación de paréntesis y corchetes sobre los términos que involucran a la variable "x" en el numerador, para obtener:

$$\frac{x^2+d_1x+e_1-x^2-b_2x-d_1x+b_2x-(d_1-b_2)b_2}{(x+b_2)(x^2+d_1x+e_1)}\ .$$

Luego, de realizar el *proceso* de la "Propiedad de cancelación de términos semejantes", en el numerador de la fracción anterior, se tiene que:

$$\frac{e_1-(d_1-b_2)b_2}{(x+b_2)(x^2+d_1x+e_1)}\ .$$

Interiorizar que la constante en el numerador, mediante operaciones básicas de los números reales, puede escribirse como:

$$\frac{{b_2}^2-b_2d_1+e_1}{(x+b_2)(x^2+d_1x+e_1)}\ .$$

Una interpretación de lo anterior es que la constante del numerador puede obtenerse por la simple evaluación de $x = -b_2$ en la expresión $x^2 + d_1x + e_1$.

Realizar la *acción* de multiplicar ambos miembros de la igualdad por la constante:

$$1/({b_2}^2 - b_2d_1 + e_1)$$

(se trabaja sobre el *objeto* "Número Real").

$$\frac{1}{{b_2}^2 - b_2d_1 + e_1}\left[\frac{{b_2}^2 - b_2d_1 + e_1}{(x+b_2)(x^2+d_1x+e_1)}\right] =$$

$$\frac{1}{{b_2}^2 - b_2d_1 + e_1}\left[\frac{1}{x+b_2} - \frac{x+(d_1-b_2)}{x^2+d_1x+e_1}\right].$$

Realizar el *proceso* "Propiedad Distributiva" y *encapsular* para obtener la descomposición buscada;

$$\frac{1}{(x+b_2)(x^2+d_1x+e_1)} =$$

$$\left(\frac{1}{{b_2}^2 - b_2d_1 + e_1}\right)\frac{1}{x+b_2} - \left(\frac{1}{{b_2}^2 - b_2d_1 + e_1}\right)\frac{x+(d_1-b_2)}{x^2+d_1x+e_1}. \quad \blacksquare\ QED$$

Tarea $\mathbf{5.3}$. Realizar la *Descomposición en Fracciones Simples* para el caso:

$$\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x^2+d_1x+e_1})(\boldsymbol{x^2+d_2x+e_2})} \qquad (\mathbf{5.3})$$

con $d_1, e_1, d_2, e_2 \in \mathbb{R}$.

Realizar la *acción* de construir las siguientes fracciones básicas:

$$\frac{1}{x^2+d_1x+e_1} \text{ y } \frac{1}{x^2+d_2x+e_2}.$$

Realizar la *acción*, sobre las fracciones anteriores, de expresarlas como la resta:

$$\frac{1}{x^2+d_1x+e_1} - \frac{1}{x^2+d_2x+e_2}.$$

Al realizar el *proceso* de resta de fracciones, se obtiene que;

$$\frac{x^2+d_2x+e_2-(x^2+d_1x+e_1)}{(x^2+d_1x+e_1)(x^2+d_2x+e_2)}.$$

Al efectuar la *acción* de eliminación de paréntesis se tiene que;

$$\frac{x^2+d_2x+e_2-x^2-d_1x-e_1}{(x^2+d_1x+e_1)(x^2+d_2x+e_2)}.$$

Interiorizar que a pesar de que el numerador no es una constante sigue gozando de las propiedades de los números reales. Luego, de realizar los *procesos* “propiedad de cancelación de términos semejantes”, “propiedad conmutativa” y la “propiedad asociativa” en el numerador de la fracción anterior, se tiene que;

$$\frac{(d_2-d_1)x+(e_2-e_1)}{(x^2+d_1x+e_1)(x^2+d_2x+e_2)}=\frac{1}{x^2+d_1x+e_1}-\frac{1}{x^2+d_2x+e_2}\ .$$

Realizar la *acción* de multiplicar ambos miembros de la igualdad por la no constante (función racional) $1/[(d_2-d_1)x+(e_2-e_1)]$ (¡aún se trabaja sobre el *objeto* “Número Real”!).

$$\frac{1}{[(d_2-d_1)x+(e_2-e_1)]}\frac{(d_2-d_1)x+(e_2-e_1)}{(x^2+d_1x+e_1)(x^2+d_2x+e_2)}=$$
$$\frac{1}{[(d_2-d_1)x+(e_2-e_1)]}\left(\frac{1}{x^2+d_1x+e_1}-\frac{1}{x^2+d_2x+e_2}\right).$$

Al realizar el *proceso* “Propiedad Distributiva”, se tiene:

$$\frac{1}{(x^2+d_1x+e_1)(x^2+d_2x+e_2)}=$$
$$\frac{1}{[(d_2-d_1)x+(e_2-e_1)](x^2+d_1x+e_1)}-\frac{1}{[(d_2-d_1)x+(e_2-e_1)](x^2+d_2x+e_2)}\ .$$

El aprendiz debe *interiorizar* que para obtener la descomposición en este caso basta descomponer por separado a:

$$\frac{1}{[(d_2-d_1)x+(e_2-e_1)](x^2+d_1x+e_1)}\qquad(\mathbf{1})$$

y luego a

$$\frac{1}{[(d_2-d_1)x+(e_2-e_1)](x^2+d_2x+e_2)}\ .\qquad(\mathbf{2})$$

Finalmente, la descomposición estaría completa haciendo la diferencia $(\mathbf{1})-(\mathbf{2})$.

Desencapsular el *objeto* “Fracción” con el objetivo de realizar el *proceso* de descomponer la fracción $(\mathbf{1})$ como el producto de dos fracciones. Esto se logra al aplicar el *proceso* “Propiedad Asociativa” para el producto de fracciones y al visualizar la existencia del “Elemento Neutro” multiplicativo.

$$\frac{1}{[(d_2-d_1)x+(e_2-e_1)](x^2+d_1x+e_1)}=\frac{1}{d}\left[\frac{1}{(x+b)(x^2+d_1x+e_1)}\right]$$

donde $d=d_2-d_1$ y $b=(e_2-e_1)/(d_2-d_1)$ con $d_1\neq d_2$.

Interiorizar que el término dentro de los corchetes es del tipo usado en el *esquema* obtenido en la Tarea $\mathbf{2}$. Por tanto, al usar este *esquema* en esta fracción se obtiene:

$$\left(\frac{1}{b^2 - bd_1 + e_1}\right)\frac{1}{x+b} - \left(\frac{1}{b^2 - bd_1 + e_1}\right)\frac{x + (d_1 - b)}{x^2 + d_1 x + e_1} \ . \qquad (\mathbf{3})$$

Interiorizar que por razones de analogía y simetría lo descrito, anteriormente, también va ser válido para la fracción ($\mathbf{2}$). Por lo que en forma análoga se tiene:

$$\left(\frac{1}{b^2 - bd_2 + e_2}\right)\frac{1}{x+b} - \left(\frac{1}{b^2 - bd_2 + e_2}\right)\frac{x + (d_2 - b)}{x^2 + d_2 x + e_2} \ . \qquad (\mathbf{4})$$

El aprendiz se percata de la aparición del término (al que para los efectos en esta investigación se le ha llamado *fantasma*) $1/(x+b)$ que originalmente no está presente en la fracción que se quiere descomponer e *interioriza* que eventualmente éste debe desaparecer.

¡De allí el nombre de *fantasma*!

Al efectuar la *acción* de multiplicar $(\mathbf{3}) - (\mathbf{4})$ por el término $1/d$ es posible obtener:

$$\frac{1}{d}[(\mathbf{3}) - (\mathbf{4})] = \left[\frac{1}{d(b^2 - bd_1 + e_1)}\frac{1}{x+b} - \frac{1}{d(b^2 - bd_1 + e_1)}\frac{x + (d_1 - b)}{x^2 + d_1 x + e_1} - \right.$$

$$\left.\frac{1}{d(b^2 - bd_2 + e_2)}\frac{1}{x+b} - \frac{1}{d(b^2 - bd_2 + e_2)}\frac{x + (d_2 - b)}{x^2 + d_2 x + e_2}\right].$$

Mediante el *proceso* de usar las propiedades en $\mathbb{R}$ el aprendiz *interioriza* que;

$$\frac{1}{b^2 - bd_1 + e_1} = \frac{1}{b^2 - bd_2 + e_2} \ .$$

Encapsular el *proceso* anterior para obtener, finalmente, el *objeto* "*Descomposición en Fracciones Simples*" de este tercer caso de estudio;

$$\frac{1}{(x^2 + d_1 x + e_1)(x^2 + d_2 x + e_2)} =$$

$$\left[\frac{1}{d(b^2 - bd_2 + e_2)}\frac{x + (d_2 - b)}{x^2 + d_2 x + e_2} - \frac{1}{d(b^2 - bd_1 + e_1)}\frac{x + (d_1 - b)}{x^2 + d_1 x + e_1}\right]. \quad \blacksquare \ QED$$

A continuación, se presenta la *descomposición genética* de un caso particular cuando el numerador de la fracción a descomponer es distinto de la unidad; en este caso se hace referencia a un polinomio, en la variable "x", de grado uno.

Tarea $\mathbf{5.4}$. Realizar la *Descomposición en Fracciones Simples* para el caso:

$$\frac{\boldsymbol{\alpha\, x + \beta}}{(\boldsymbol{a\, x + b})(\boldsymbol{c\, x + d})} \qquad (\mathbf{5.4})$$

con $\alpha, \beta, a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Desencapsular el *objeto* “Fracción” con el objetivo de realizar el *proceso* de descomponer la fracción en el producto de dos fracciones. Esto se logra al aplicar la “Propiedad Asociativa” para el producto de fracciones y al visualizar la existencia del “Elemento Neutro” multiplicativo.

La fracción anterior es equivalente a:

$$(\alpha\, x + \beta)\left[\frac{1}{(a\,x + b)(c\,x + d)}\right].$$

Realizar la *acción* de construir las siguientes fracciones básicas:

$$\frac{1}{a\,x + b} \quad \text{y} \quad \frac{1}{c\,x + d} \;. \qquad (\mathbf{1})$$

Realizar la *acción*, sobre las fracciones anteriores, de expresarlas como la resta:

$$\frac{1}{a\,x + b} - \frac{1}{c\,x + d} =$$

Desencapsular el *objeto* “Número Real” y el *objeto* “Fracción” con el objetivo de aplicar una técnica cualquiera para el *proceso* “Resta de Fracciones” y el *proceso* “Operación de Resta de Números Reales”. Para ello se aplicará la “Propiedad Distributiva” en el numerador de la fracción y se aplicará la *acción* de eliminar los paréntesis, obteniendo:

$$\frac{(c\,x + d) - (a\,x + b)}{(a\,x + b)(c\,x + d)} = \frac{cx + d - ax - b}{(a\,x + b)(c\,x + d)} =$$

Seguidamente, se realizará el *proceso* “Propiedad Conmutativa” en el numerador de la fracción anterior para obtener:

$$\frac{cx - ax + d - b}{(a\,x + b)(c\,x + d)} =$$

Luego, al realizar el *proceso* “Propiedad Asociativa” en el numerador de la fracción anterior

$$\frac{(cx - ax) + d - b}{(a\,x + b)(c\,x + d)} =$$

Finalmente, se realizará el *proceso* “Propiedad Distributiva” en el numerador de la fracción anterior para obtener:

$$\frac{(c - a)x + d - b}{(a\,x + b)(c\,x + d)} \;.$$

Se observa que, al hacer la operación de resta de las fracciones aparecen términos que dependen de $\boldsymbol{x}$ en el numerador. Para resolver esta situación se realiza la *acción* de modificar las fracciones básicas en ($\mathbf{1}$) para obtener las nuevas fracciones:

$$\frac{a}{a\,x+b} \quad \text{y} \quad \frac{c}{c\,x+d}\ . \qquad (\mathbf{2})$$

<u>Interiorizar</u> la *<u>acción</u>* de restar las fracciones en $(\mathbf{1})$ para darse cuenta que debe mantener el mismo orden entre el minuendo y sustraendo para la resta de las fracciones en $(\mathbf{2})$

$$\frac{a}{a\,x+b} \ - \ \frac{c}{c\,x+d} =$$

Realizar el *<u>proceso</u>* "Operación de Resta" de las fracciones (se trabaja sobre el *<u>objeto</u>* "Fracción") Para ello se aplicará la "Propiedad Distributiva" en el numerador de la fracción (se trabaja sobre el *<u>objeto</u>* "Número Real")

$$\frac{a(cx+d)-c(ax+d)}{(a\,x+b)(c\,x+d)} = \frac{acx+ad-cax-cd}{(a\,x+b)(c\,x+d)} =$$

Seguidamente, se realizará el *<u>proceso</u>* "Propiedad Conmutativa" y "cancelación de términos semejantes" en el numerador de la fracción anterior (se trabaja sobre el *<u>objeto</u>* "Número Real")

$$\frac{ad-cd+acx-acx}{(a\,x+b)(c\,x+d)} = \frac{ad-cb}{(a\,x+b)(c\,x+d)}\ .$$

Realizar la *<u>acción</u>* de multiplicar ambos miembros de la igualdad por la constante $1/(ad-cb)$ (se trabaja sobre el *<u>objeto</u>* "Número Real")

$$\frac{1}{ad-cb}\left[\frac{ad-cb}{(a\,x+b)(c\,x+d)}\right] = \frac{1}{ad-cb}\left(\frac{a}{a\,x+b} \ - \ \frac{c}{c\,x+d}\right).$$

Realizar el *<u>proceso</u>* de multiplicación de fracciones. Para ello, se aplica: la "Propiedad del Inverso Multiplicativo", la "Propiedad Distributiva" y la "Propiedad Conmutativa para el Producto" (se trabaja sobre el *<u>objeto</u>* "Fracción")

$$\frac{1}{(a\,x+b)(c\,x+d)} = \frac{a}{ad-bc}\left(\frac{1}{a\,x+b}\right) - \frac{c}{ad-bc}\left(\frac{1}{c\,x+d}\right).$$

Aplicar la *<u>acción</u>* de multiplicar ambos miembros de la igualdad por $\alpha\,x+\beta$:

$$(\alpha\,x+\beta)\frac{1}{(a\,x+b)(c\,x+d)} = (\alpha\,x+\beta)\left[\frac{a}{ad-bc}\left(\frac{1}{a\,x+b}\right) - \frac{c}{ad-bc}\left(\frac{1}{c\,x+d}\right)\right].$$

Realizar el *<u>proceso</u>* "Propiedad Distributiva" sobre la fracción anterior para obtener;

$$\frac{\alpha\,x+\beta}{(a\,x+b)(c\,x+d)} = \frac{a}{ad-bc}\left(\frac{\alpha\,x+\beta}{a\,x+b}\right) - \frac{c}{ad-bc}\left(\frac{\alpha\,x+\beta}{c\,x+d}\right).$$

Aplicar el *<u>proceso</u>* "Algoritmo de la División" de polinomios.

Al usar el *Algoritmo de la División* en:

$$\frac{\alpha\,x+\beta}{a\,x+b} \quad \text{y} \quad \frac{\alpha\,x+\beta}{c\,x+d}$$

se tiene;

$$\frac{\alpha\, x+\beta}{a\, x+b}=\frac{a}{ad-bc}\left[\frac{\frac{\alpha}{a}(\, a\, x+b)+\beta-\frac{\alpha b}{a}}{a\, x+b}\right]. \qquad (\mathbf{3})$$

En forma análoga se trabaja con la otra expresión obteniendo;

$$\frac{\alpha\, x+\beta}{c\, x+d}=\frac{c}{ad-bc}\left[\frac{\frac{\alpha}{c}(\, c\, x+d)+\beta-\frac{\alpha d}{c}}{c\, x+d}\right]. \qquad (\mathbf{4})$$

Coordinar los *procesos* ($\mathbf{3}$) y ($\mathbf{4}$) para realizar la agrupación de términos respectivos.

Encapsular el *proceso* anterior para obtener, finalmente, el *objeto* "*Descomposición en Fracciones Simples*" de este caso de estudio, a saber;

$$\frac{\alpha\, x+\beta}{(a\, x+b)(c\, x+d)}=\frac{a\left(\beta-\frac{\alpha b}{a}\right)}{ad-bc}\left(\frac{1}{a\, x+b}\right)-\frac{c\left(\beta-\frac{\alpha d}{c}\right)}{ad-bc}\left(\frac{1}{c\, x+d}\right). \quad \blacksquare\ QED$$

Donde las expresiones $\frac{a\left(\beta-\frac{\alpha b}{a}\right)}{ad-bc}$ y $\frac{c\left(\beta-\frac{\alpha d}{c}\right)}{ad-bc}$ son números reales.

Diseño y Aplicación de Enseñanza según la Teoría APOE

A partir de la descomposición genética de un determinado concepto matemático, se diseñan actividades que serán aplicadas a los estudiantes para determinar si siguen el camino cognitivo que allí se describe.

Estas actividades, generalmente se diseñan con un ciclo de enseñanza denominado ACE (actividades, discusión en clase y ejercicios), asociado a la teoría APOE. En este ciclo se elaboran actividades (que se realizan en forma colaborativa) a partir de una descomposición genética, para ayudar a los estudiantes a hacer las construcciones mentales sugeridas en dicha descomposición. El objetivo de esta fase es incentivar la abstracción reflexiva. Luego se discuten en clase las actividades realizadas en la etapa anterior y finalmente se elaboran ejercicios para que los estudiantes refuercen lo que han hecho en las otras dos etapas. (Arnon *et al.*, 2014).

CAPITÚLO VI

"*No hay rama de la matemática, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real*".

Nikolái Lobachevski

LA TÉCNICA ALTERNATIVA Y LA MODELACIÓN MATEMÁTICA

Introducción

El siglo XX, donde recién concluyó y revolucionó toda la vida económica, política, social, científica, técnica, cultural, etc. de la humanidad; por tanto, comenzó el nuevo siglo con un reto: ponerse a la altura de los adelantos científico-técnicos y poder asimilar, utilizar y hacer aportes a las nuevas tecnologías que hoy se imponen. En ese sentido, la educación debe jugar un papel fundamental; sin embargo, la educación superior ha tenido cierta lentitud para aceptar los resultados de las ciencias, sobre todo de las ciencias pedagógicas y ha sido todavía más lenta en sus aportaciones para la rápida asimilación de las nuevas tecnologías. De ahí, resulta muy ilustrativa la reflexión: "Algunas veces los maestros del siglo XX enseñamos contenidos del siglo XIX, a alumnos que tendrán que sobrevivir en el siglo XXI" (Monereo, 2000, p. s/n).

En ese sentido, es necesario desarrollar habilidades y capacidades matemáticas en los procesos de enseñanza y aprendizaje para contribuir a la comprensión y el avance de las ciencias aplicadas. Siguiendo la misma idea, sin el desarrollo de las ciencias básicas no sería posible el avance de las ciencias aplicadas. Además, estas disciplinas elementales resultan decisivas para llevar adelante al país y ellas desempeñan una función indispensable en la generación de las nuevas tecnologías.

En ese orden de ideas, la modelización matemática es entendida como el proceso de construcción de un modelo matemático útil para estudiar o explicar un fenómeno físico determinado, la cual ha venido tomando fuerza como una estrategia de enseñanza de la matemática en todos los niveles educativos y sobre todo en las ciencias aplicadas (Alsina, García, Gómez y Romero, 2007; Bloom, Galbraith, Henn y Niss, 2007; Bolea, Bosch y Gascón, 2004; Ortiz, Rico y Castro, 2008).

Al mismo tiempo, el objetivo de enseñar a modelar fenómenos físicos a los estudiantes es lograr en ellos la utilización de la modelización como un medio para aplicar la matemática conocida y luego, cultivarse con la matemática necesaria para modelar nuevos fenómenos físicos.

Es en este enfoque, donde los estudiantes deben aprender matemáticas desarrollando, aplicando conceptos y herramientas matemáticas en situaciones de la vida diaria, los cuales tengan sentido para ellos, estas son situaciones realistas, donde "el término «realista» se refiere más a la intención de ofrecer a los estudiantes situaciones problémicas que ellos puedan imaginar que a la «realidad» o autenticidad de los mismos" (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003, p.10).

Modelación Matemática (MM)

Una comprensión teórica coherente del proceso de modelización y del proceso de aprendizaje relacionado con este, ha sido desarrollada durante los últimos 20 años; la cual, ha sucedido a través de una estrecha interrelación entre el desarrollo curricular, prácticas de enseñanza y reflexiones teóricas. De hecho, ahora se dispone de una teoría, tomada como un sistema de puntos de vista interconectados, que puede ser usada para colocar a la modelización como un elemento importante de la enseñanza general de la matemática como así también para analizar, prever y comprender mejor las dificultades del aprendizaje relativas a la modelización (Blum *et al*., 2003).

Cabe decir, la enseñanza de la Matemática se realiza muchas veces mediante ejercicios y problemas contribuyendo solo al desarrollo intelectual. Pero, desde el punto de vista del autor de este trabajo esta posición es un error, porque una de las funciones principales de la Matemática es la de servir de lenguaje de la ciencia ya que los problemas de la realidad se traducen al lenguaje matemático (se modelan matemáticamente), se resuelven matemáticamente y, después, esta solución se expresa en palabras del mundo real.

Por otra parte, las necesidades de la ciencia han sido las impulsoras principales del desarrollo de las más variadas teorías matemáticas, en esta dirección Adler (1968) plantea: "el divorcio entre el pensamiento y la experiencia directa priva al primero de cualquier contenido real y lo transforma en una concha vacía de símbolos sin significados" (p. s/n).

En relación a la problemática expuesta, es conocida entre los educadores de matemática la frase formulada por algunos estudiantes en una clase *–profesor y para qué sirve esto–*, por lo que la poca motivación de cierto número de dicentes para el aprendizaje de la Matemática tiene una relación directa con las dificultades de sus catedráticos para explicar por qué y para qué se enseña uno u otro tema, y en virtud de ello, para presentar problemas prácticos sencillos que justifiquen su utilidad, desde la enseñanza primaria y secundaria, en ese sentido, Bassanezi y Biembengut (1997) plantean que la enseñanza deber estar regida por los intereses y necesidades prácticas de la comunidad, sin abusar de ello.

Debe señalarse lo siguiente, algunos autores cuando se refieren a la modelización matemática lo hacen como el proceso para utilizar conceptos y técnicas, esencialmente matemáticas, para el análisis de situaciones reales; en cambio, son raros los casos donde se emplea tal proceso para el propio estudio de las Matemáticas.

En tal sentido, Villa (2007) establece una diferencia entre «*modelización matemática*» y «*modelación matemática*», la primera caracterizada como propia de la investigación en aplicaciones matemáticas a otras ciencias y la segunda referida a la investigación sobre su aplicación en la enseñanza.

En otras palabras, según Biembengut y Hein (2004) la modelación matemática es un proceso involucrado en la obtención del modelo matemático de un fenómeno físico o situación problema, el cual es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, el fenómeno en cuestión; dicho modelo permite no solo obtener una solución particular, sino, además, sirve de soporte para otras aplicaciones o teorías; ya que, un aspecto de la actividad científica, en particular de la actividad matemática, consiste en crear modelos.

Cabe destacar que, los intentos de hacer uso de la modelización matemática como un método de enseñanza-aprendizaje, han mostrado su eficacia principalmente en proyectos de «Iniciación Científica» y en cursos de «Perfeccionamiento de Profesores», cuando no se dispone a priori de un programa que ha de ser cumplido, por lo menos secuencial y, objetivamente; sobre todo en el uso de las matemáticas con miras a mejorar la comprensión de las situaciones escogidas como tema de estudio.

A modo de explicación, por un lado, un modelo matemático es una relación entre ciertos objetos matemáticos y sus conexiones; por el otro, una situación o fenómeno de naturaleza no matemática (Blomhøj, 2004). Por lo tanto, estos aspectos fundamentales del concepto de modelo tienen significativas implicaciones didácticas.

En primer lugar, esto implica que, cuando la matemática es aplicada a una situación extra-matemática, algún tipo de modelo matemático está involucrado explícita o implícitamente en ella. Segundo, para que un estudiante experimente con un modelo matemático y sea capaz de reflexionar sobre las relaciones existentes en él, es una precondición epistemológica que este alumno sea capaz de percibir la situación o fenómeno modelado y a la matemática en juego como dos objetos separados, pero al mismo tiempo interrelacionados.

Educación Matemática Realista (EMR)

La «*Educación Matemática Realista*» (EMR) es una teoría desarrollada por el educador, matemático, topólogo y algebrista alemán Dr. Hans Freudenthal (1905-1990), esta teoría nace en

Holanda como reacción al movimiento de la Matemática Moderna de los años 70 y al enfoque mecanicista de la enseñanza de la matemática, generalizado en ese entonces en las escuelas holandesas.

Según Bressan, Zolkower y Gallego (2004), Freudenthal presenta constantemente posturas opuestas a las que tradicionalmente se han asumido en el terreno pedagógico didáctico, por considerar, según su concepción, que no representaban el proceso correcto para la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, todo ello devenido de su larga experiencia en las aulas y de su amplio conocimiento de esta disciplina.

Es por esta razón que Freudenthal, confronta algunas ideas y teorías del aprendizaje de algunos notables como Piaget, Gagné, Bloom, entre otros. No obstante, "la EMR no pretende ser una teoría general del aprendizaje (como lo es, por ejemplo, el constructivismo), sino que es más bien una teoría global (una «filosofía» según Freudenthal)" (Bressan *et al.*: ob. cit.: p. 3).

En la EMR, los estudiantes deben aprender Matemáticas desarrollando y aplicando conceptos y herramientas matemáticas en situaciones de la vida diaria que tengan sentido para ellos. Uno de los conceptos básicos de la EMR es la idea de Freudenthal (1973) "No hay Matemáticas sin matematización" (p. 134); el cual consideraba la matemática como una actividad humana para buscar y resolver problemas, y no un cuerpo de conocimientos, es decir, una actividad para organizar a partir de la realidad o de la matemática misma, a lo que llamó «*matematización*».

En el ámbito de la Educación Matemática, esta visión está muy presente en los planteamientos de la Educación Matemática Realista (EMR) de Freudenthal (1991), que parte de la base que las matemáticas se aprenden haciendo matemáticas en contextos reales o realistas, es decir, en situaciones de la vida cotidiana u otros contextos que son reales en la mente de los alumnos.

La EMR, se basa en la idea de que la matemática si ha de tener valor humano, esta debe estar conectada con la realidad, mantenerse cercana a los niños y ser relevante para la sociedad, aunque no todos los niños van a ser matemáticos en la edad adulta, pero sí todos los adultos usaran las matemáticas para resolver los problemas de la vida cotidiana.

Considerando estas ideas, diversos autores han descrito la EMR a partir de los siguientes principios (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000; Martínez, Da Valle, Zolkower y Bressan, 2002; Bressan, Zolkower y Gallego, 2004; Alsina, 2009, 2011):

1. *De actividad*: las matemáticas son una actividad humana y su principal finalidad es matematizar u organizar el mundo que nos rodea.

2. *De realidad*: las matemáticas se aprenden a partir de contextos reales o realistas.

3. *De niveles*: la comprensión de las matemáticas pasa por distintos niveles, que incluyen el nivel situacional (en el contexto de la situación); el nivel referencial (esquematización a través de modelos, descripciones, entre otros); el nivel general (exploración, reflexión y generalización); y, finalmente, el nivel formal (procedimientos estándares y notación convencional).

4. *De reinvención guiada*: el conocimiento matemático formal se reconstruye a través de la mediación del profesor.

5. *De interacción*: la enseñanza de las matemáticas es considerada una actividad social, en ese sentido, la interacción entre los mismos estudiantes, así como entre estudiantes y profesores, puede provocar que cada uno reflexione a partir de lo que aportan los demás para poder alcanzar niveles más altos de comprensión.

6. *De interconexión*: los bloques de contenido matemático (numeración y cálculo, álgebra, geometría, etc.) no pueden ser tratados como entidades separadas.

En ese orden, la EMR para Bressan, Gallego, Pérez y Zolkower (2016), tiene como idea central "que la enseñanza de la matemática debe estar conectada con la realidad, permanecer cercana a los alumnos y ser relevante para la sociedad en orden a constituirse en un valor humano" (p. 2). Es decir, se debe partir de las realidades concretas para luego ser llevadas a entidades abstractas que el ser humano ya procesa de manera natural en su cerebro, porque la Matemática no es una materia o una asignatura sino parte de la vida misma del ser humano.

En ese contexto, entonces se trata de matematizar la cotidianidad, la realidad, haciendo de ella un valor, un patrón o un modelo que explica los fenómenos del día a día.

En su etapa inicial la EMR, según De Lange (1996), se sustentó en las siguientes características:

- El uso de contextos como vehículos para el crecimiento entre lo concreto y lo abstracto.

- El uso de modelos como columna vertebral del progreso.

- El uso de las construcciones y producciones libres de los alumnos en los procesos de enseñanza/aprendizaje.

- El entrelazado de los diversos ejes en el currículum de matemáticas.

Actualmente, la EMR se fundamenta en los principios que se mencionan a continuación (De Lange 1996, Freudenthal 1991, Gravemeijer 1994):

-. Pensar la matemática como una actividad humana (a la que Freudenthal denomina *matematización*) y que, siendo así, debe existir una matemática para todos.

-. Aceptar que el desarrollo de la comprensión matemática pasa por distintos niveles donde los *contextos* y los *modelos* poseen un papel relevante y que ese desarrollo se lleva a cabo por el proceso didáctico denominado *reinvención guiada*, en un ambiente de heterogeneidad cognitiva.

-. Que, desde el punto de vista curricular, *la reinvención guiada* de la matemática en tanto actividad de matematización, requiere de la *fenomenología didáctica* como metodología de investigación, esto es, la búsqueda de contextos y situaciones que generen la necesidad de ser organizados matemáticamente, siendo las dos fuentes principales de esta búsqueda la *historia de la matemática* y las *invenciones y producciones matemáticas espontáneas de los estudiantes.*

Así, los rasgos más significativos de la EMR son los siguientes:

- Se trata de un enfoque en el que se utilizan situaciones de la vida cotidiana o problemas contextuales como punto de partida para aprender matemáticas. Progresivamente, estas situaciones son matematizadas a través de modelos, mediadores entre lo abstracto y lo concreto, para formar relaciones más formales y estructuras abstractas (Heuvel-Panhuizen, 2002).

- Se apoya en la interacción en el aula entre los mismos estudiantes, así como entre el profesor y éstos. Esta acción, que debe ser intensa, permitirá a los docentes construir sus clases teniendo en cuenta las producciones de los dicentes (Fauzan, Plomp y Slettenhaar; 2002).

- Otra idea clave es que a los educandos se les debería dar la oportunidad de reinventar las matemáticas bajo la guía de un adulto en lugar de intentar trasmitirles una matemática preconstruida (De Corte, Greer y Verschaffel, 1996).

Para Freudenthal (1991), la matemática no es otra cosa que una forma de sentido común solo que más organizada, quien señala:

> Para transformarlo en matemática genuina y para progresar, el sentido común debe ser sistematizado y organizado. Las experiencias del sentido común cristalizan en reglas (por ejemplo, la conmutatividad de la suma) y estas reglas se transforman de nuevo en sentido común, pero a un nivel más alto, constituyendo así la base para una matemática de orden aún mayor, una jerarquía tremenda, construida gracias a un notable interjuego de fuerzas. (p. 13)

Este proceso se realiza en las aulas conjugando los roles y responsabilidades del docente y del alumno a través de una forma de interacción que Freudenthal (ob. cit.) denomina «reinvención guiada» y la entiende como el equilibrio entre la independencia de crear y la potencia de guiar.

Modelación Matemática y la DFS

Como se observó en el capítulo IV; una de las aplicaciones de la *descomposición en fracciones simples* se da al resolver un tipo muy particular de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs). A saber; las EDOs lineales con coeficientes constantes. Éstas son resueltas en muchos casos utilizando las **T**ransformadas de **L**aplace, en ese sentido, durante el proceso de solución surge la necesidad de realizar una *descomposición en fracciones simples* y es ahí donde entra en acción, la protagonista de este estudio, a saber; la *Técnica Alternativa* creada para esta investigación.

Por otro lado, las EDOs son extraordinariamente útiles al momento de modelar fenómenos de la vida real. Por ejemplo; las EDOs lineales con coeficientes constantes son utilizadas para la modelación matemática de circuitos eléctricos con corriente alterna. Siguiendo esa idea se realizó el resto de este capítulo.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs)

Para dar inicio a este apartado, es importante precisar lo concerniente a la educación de adultos; para ello, se considera a Malcolm Knowles (1913-1997), quien introdujo la teoría de la «*andragogía*» como el arte y la ciencia de ayudar a adultos a aprender. Aunado a esto, él consideraba "[…] los adultos aprenden de manera diferente a los niños y que los facilitadores deben utilizar estrategias diferentes para guiar el aprendizaje" (Rodríguez, 2015, p. 274); en este caso, se hace necesario considerar el principio de horizontalidad el cual se refiere a que el educando adulto y el facilitador al momento de aprender y enseñar se hallan en contextos similares; es decir, desde una direccionalidad de iguales cuando comparten saberes en los escenarios didácticos.

Ahora bien, una de las asignaturas de mayor importancia en la formación de ingenieros, por su amplia relación con fenómenos físicos y sociales, son las Ecuaciones Diferenciales, con ellas se logra el traslado a la modelización de problemas del entorno; en este sentido, se entiende por «*modelización matemática*», al traslado de un problema del mundo real a un problema matemático, resolver el problema matemático y, por último, interpretar la solución en el lenguaje del mundo real. A pesar de ello, la enseñanza de esta materia ha estado subordinada a la memorización de procedimientos analíticos lo que ha llevado a la incomprensión de sus aplicaciones en los diversos contextos profesionales (Artigue, 1995; Blanchard, 1994).

Para ilustrar, una aplicación de la modelización matemática en un curso de EDOs para estudiantes de ingeniería se presenta, por ejemplo, en la clase que corresponde a introducir el método analítico para resolver una EDO Lineal de Segundo Orden no Homogénea y con Coeficientes Constantes, la ecuación general de la forma;

$$Ay'' + By' + Cy = D(x) \text{ con } A \neq 0. \quad \mathbf{(6.1)}$$

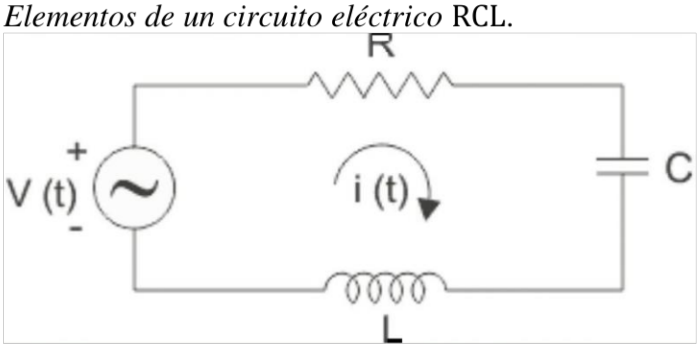
En esta clase, normalmente, se decide debido a la enseñanza por medio de la modelación, que la actividad inicie justamente en la necesidad de comprender la modelación de un fenómeno eléctrico, considerando un circuito eléctrico y aplicando las «*Leyes de Kirchoff*» se llega a:

$$L\frac{d^2i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = E_0\omega\cos(\omega t), \qquad \mathbf{(6.2)}$$

donde la corriente «i» es función del tiempo «t» en el circuito. En la siguiente figura, se muestra un circuito eléctrico RCL (resistencia, capacitancia e inductancia);

Figura 15

Elementos de un circuito eléctrico RCL.



Nota: se muestran los componentes eléctricos de un circuito RCL. Fuente: Alexander y Sadiku (2006).

Las ventajas de introducir la modelización en las aulas, junto a la aplicación de las matemáticas y la resolución de problemas, han sido ya reflejadas en diversos artículos (Blum y Niss, 1991; Burkhardt, 2006), proporcionándose numerosos argumentos en su favor, entre los que se destaca: *pragmáticos*, la enseñanza de las matemáticas debe servir para ayudar a los alumnos a entender, analizar, evaluar y juzgar situaciones y problemas del mundo real, para los que la modelización es indispensable; *formativos*, la modelización, la aplicación de las matemáticas y la resolución de problemas son los medios adecuados para desarrollar competencias en los alumnos; *culturales*, la modelización, las aplicaciones y la resolución de problemas constituyen una categoría fundamental en todos los procesos creativos matemáticos; y *psicológicos*, la incorporación de la modelización puede ayudar a tener una comprensión más profunda y a facilitar la retención de los conceptos, nociones, métodos y resultados matemáticos.

La introducción de la modelización en el aula supone un cambio metodológico importante, para esto, es recomendable promover el trabajo en pequeños grupos (en la experiencia del autor de este trabajo, se deben formar grupos de 2 o 3 miembros) y las estrategias de enseñanza basadas en el aprendizaje cooperativo (como las descritas en Borromeo-Ferri, 2018, p. 6). Asimismo, los educandos deben asumir el protagonismo y trabajar de forma autónoma en la resolución de las tareas planteadas (Blum y Borromeo-Ferri, 2009; Blum, 2011). Mientras, el profesor debe asumir un papel de facilitador (Burkhardt, 2006), en el que su principal objetivo será apoyar a los dicentes en la superación de sus bloqueos y dificultades, manteniendo un permanente equilibrio entre su rol de guía, el cual debe ser mínimo, y la independencia de sus discípulos, que debe ser máxima.

La Modelación Matemática, entre otros elementos, está constituida por un «*modelo matemático*» que puede ser: una función, una ecuación, una desigualdad, una tabla, una gráfica o cualquier otro objeto matemático y, al ser usada en el aula como estrategia de aprendizaje se puede caracterizar por las siguientes fases:

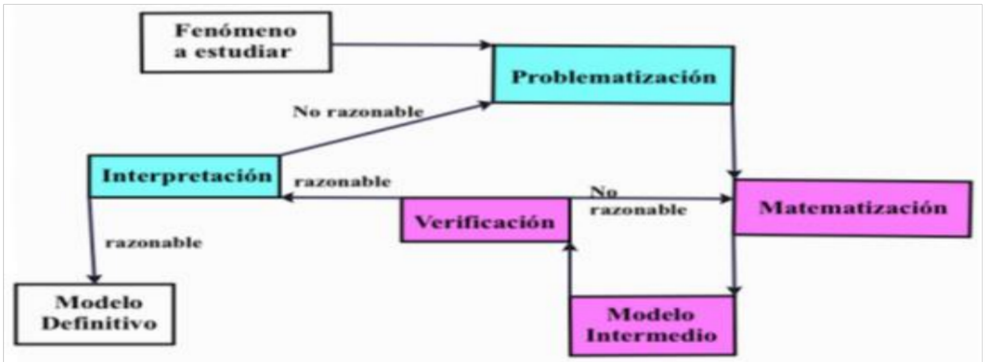
($\boldsymbol{a}$) Identificar el fenómeno físico que se quiere estudiar, ($\boldsymbol{b}$) convertir los aspectos que interesan del fenómeno en un problema a resolver, ya sea planteando preguntas o conjeturas, ($\boldsymbol{c}$) matematizar el problema definiendo las variables involucradas y los datos relevantes para determinar la relación entre ellas, ($\boldsymbol{d}$) proponer un modelo matemático con la información obtenida (a saber, modelo intermedio), ($\boldsymbol{e}$) verificar el modelo intermedio para determinar si cumple con las condiciones del problema matematizado, (en caso de que el modelo no sea satisfactorio es necesario regresar a la fase de Matematización con el fin de revisar la pertinencia tanto del problema matemático como la del modelo, en este punto es posible que se forme un ciclo «*Matematización-Modelo Intermedio-Verificación*», llamado *Ciclo Matemático*, el cual se rompe cuando el modelo intermedio satisfaga la verificación).

($\boldsymbol{f}$) Interpretar el modelo intermedio satisfactorio con respecto al fenómeno problematizado, (si la interpretación del modelo no es consistente con el fenómeno problematizado, se entraría en un ciclo más amplio «*Problematización-Ciclo Matemático-Interpretación*», llamado *Ciclo de Interpretación* que se rompería cuando el modelo matemático es consistente con el fenómeno) y, por último, ($\boldsymbol{g}$) modelo matemático definitivo obtenido después de la fase de Interpretación.

En la siguiente figura, se presenta un diagrama de flujo mostrando el desarrollo de la modelación en el aula.

Figura 16

Proceso de modelación matemática en el aula.



Nota: diagrama de flujo mostrando el desarrollo de la modelación en el aula. Fuente: Flores y Falconi (2013).

El proceso se inicia con la intención de estudiar un cierto fenómeno físico, éste se traduce en un problema o una serie de problemas a ser resueltos en lo que se ha llamado Problematización. Una vez problematizado el fenómeno, se procede a expresarlo en términos matemáticos, es decir, se matematiza convirtiéndolo en un problema matemático. La solución del problema es un modelo que es llamado intermedio pues es necesario verificar que realmente esté resolviendo el problema de manera razonable. De no ser este el caso, se regresa al problema en busca de un modelo más adecuado, hasta que parezca razonable o resuelva realmente el problema matemático. Cuando el modelo es aceptable se pasa a interpretarlo en términos del problema original y si la interpretación no es razonable, se inicia el proceso revisando el problema o planteando uno nuevo, hasta llegar a un modelo definitivo. En este esquema se puede entrar en dos ciclos, uno que cae enteramente en el ámbito matemático y se refiere a la solución del problema matematizado, y el otro que tiene que ver con la interpretación del modelo y que incluye el ciclo anterior.

Si se desea preparar a economistas, ingenieros, matemáticos, biólogos, entre otros, para la modelización de problemas complejos, en los que una masa de información irrelevante oscurece el objetivo central y, además, la habilidad principal consiste en destacar dicho objetivo y seleccionar la información necesaria, entonces la formación debe diferir claramente de la tradicional, en la cual según Brousseau (1986), las clases están dirigidas a comprender conceptos abstractos, demostrar teoremas y resolver ecuaciones, muy conveniente para la formación de matemáticos puros; pero insuficientes para el que va a aplicar la matemática o en la formación inicial de un profesor de matemática (Almeida, Bruna, Espinel, García, Bermúdez y González, 1998).

En el ámbito de la Educación Matemática, se reconoce la importancia de la «Resolución de Problemas» como estrategia en la construcción del sentido de un conocimiento matemático, y como herramienta para desarrollar procesos de: interacción, argumentación, modelización y toma de decisiones (Charnay, 1988; González, 2007; De Guzmán Ozamiz, 1997).

Siguiendo la idea anterior, si desde la enseñanza obligatoria se llegara al conocimiento matemático resolviendo problemas en íntima conexión con la vida diaria, las ciencias humanas o con la física, y se educara al alumno en la modelización de tales problemas, entonces el ciudadano medio tendría un mejor concepto sobre la necesidad, el interés y el poder de las Matemáticas. Por todo ello, existe en la actualidad una corriente en Educación Matemática que sostiene con fuerza la necesidad de que el aprendizaje de las matemáticas se realice en continuo contacto con las situaciones del mundo real que les dieron y le siguen dando su motivo y vitalidad.

Uno de los conceptos básicos de la EMR es la idea de Freudenthal (1973) de las matemáticas como una actividad humana, como se ha señalado, para él las matemáticas no eran el cuerpo de conocimientos matemáticos, sino la actividad de resolver problemas, buscar problemas y, en términos más generales, la actividad de organizar la disciplina a partir de la realidad o de la matemática misma, a lo que llamó «matematización» (Freudenthal, 1973). En términos muy claros, Freudenthal (1973) explicó de qué tratan las matemáticas; “No hay matemáticas sin matematización” (p. 134).

Esta interpretación de las matemáticas basada en la actividad tuvo también consecuencias importantes respecto a cómo se conceptualizaba la Educación Matemática. De un modo más preciso, afectó tanto los objetivos de la Educación Matemática como los métodos de enseñanza, según Freudenthal, la mejor forma de aprender matemáticas es haciendo (*ibid.*, 1973, 1991), y la matematización es la meta central de la Educación Matemática “Lo que los seres humanos tienen que aprender no es matemáticas como sistema cerrado, sino como una actividad: el proceso de matematizar la realidad y, de ser posible incluso, el de matematizar las matemáticas” (Freudenthal, 1973, p. 7).

En ese sentido; Bressan, Zolkower y Gallego (2006) basados en las ideas de la EMR proponen los siguientes niveles de matematización: situacional, referencial, general y formal, los cuales representan el pasaje de conocimiento informal al formal.

Retomando la idea de las ecuaciones diferenciales, éstas constituyen uno de los cursos con mayor número de aplicaciones tanto en licenciaturas de matemáticas como en las de ingeniería o economía. Además, es un curso en el que el desarrollo reciente de las investigaciones en matemáticas y el de la tecnología imponen, en principio, el diseño de nuevas estrategias didácticas.

La investigación acerca del aprendizaje y la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias ha estado presente en la investigación en Educación Matemática desde hace muchos años. Algunos autores trabajaron este tema desde el ámbito de la matemática en contexto, por ejemplo, Camarena (1987) llevó a cabo el análisis y desarrollo de un curso relacionado con los circuitos eléctricos para favorecer el interés y la motivación de sus estudiantes.

Los modelos matemáticos usados en las EDOs son los llamados «*modelos determinísticos*», es decir, son aquellos en los cuales los valores de las variables están especificados de forma precisa para cualquier conjunto de condiciones establecidas. Adicional a lo anterior, el «*modelo estacionario*» considera que no existen variaciones con respecto al tiempo de las diferentes variables y parámetros del sistema. Por el contrario, un «*modelo no estacionario*» considera variaciones con respecto al tiempo, estos modelos también se denominan transitorios o dinámicos, los cuales, sin duda son de mayor complejidad que los modelos estacionarios.

Al respecto; Brito, Alemán, Fraga, Parra y Arias (2011) comentan que:

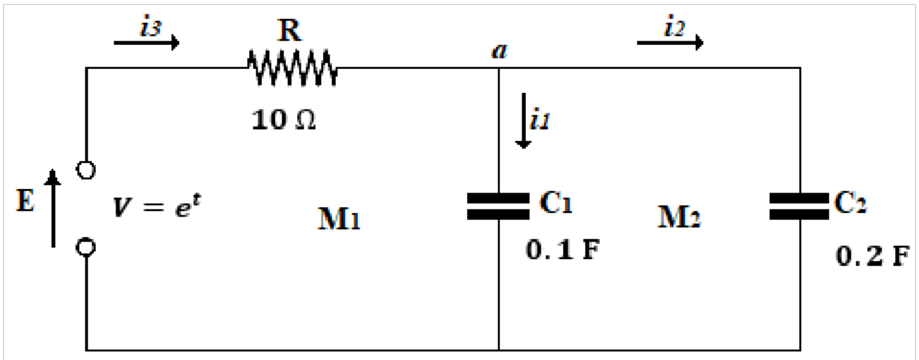
> Las ecuaciones diferenciales ordinarias se utilizan para la descripción matemática de regímenes no estacionarios de los modelos con parámetros combinados, así como regímenes estacionarios de modelos con parámetros distribuidos, en los cuales los valores de los parámetros solo dependen de una coordenada espacial. En el primer caso, en calidad de variable independiente se utiliza el tiempo; en el segundo, la coordenada espacial. Este tipo de descripción matemática tiene una amplía utilización ya que, el tratamiento matemático no es muy complejo. (p 136)

Ejemplo $\mathbf{6.1}$. A continuación, se presenta un problema en el campo de la ingeniería o la física; para visualizar el trabajo a realizar con la *descomposición en fracciones simples*, la *técnica alternativa* de esta investigación, la metodología de *modelación matemática* y la teoría de *Educación Matemática Realista*.

Antes de abordar el ejemplo en cuestión, el autor de la presente investigación trae a colación una cita de Freudenthal en la cual define el término fundamental de la EMR a saber, la *matematización*. Éste dice que; "matematizar es organizar la realidad con medios matemáticos […] incluida la matemática misma" (1973, p. 44).

Figura 17

Circuito eléctrico RC.



Nota: el circuito eléctrico está constituido por una conexión en paralelo con una fuente de poder, una resistencia y dos capacitores. Fuente: Autor (2024).

Se da un circuito eléctrico RC compuesto por dos mallas y se pide calcular la intensidad de corriente que pasa por la rama 1, dibujada en el circuito, $\boldsymbol{i_1(t)}$. La forma de trabajo en este problema será por medio de las ***T**ransformadas de **L**aplace* y en el proceso se desarrollará la *descomposición en fracciones simples* con la *técnica alternativa* creada en esta investigación.

Poniendo en práctica los elementos que involucran el proceso de *matematización* en la *Educación Matemática Realista* (EMR), se tiene lo siguiente:

1.- **Reconocer**. *Características esenciales en situaciones, problemas, procedimientos, algoritmos, formulaciones, simbolizaciones y sistemas axiomáticos*. En ese sentido; el estudiante debe reconocer que este tipo de problemas (o situaciones) se modela dentro de las ecuaciones diferenciales, el término a calcular $[i(t)]$ es una función que depende de la variable tiempo (t). También, debe reconocer que; la ecuación general para el modelado de este tipo de situaciones es como la presentada en la expresión $(\mathbf{6.1})$, más específicamente, después de aplicar leyes de *Kirchoff* este tipo de problemas se resuelve con *ecuaciones diferenciales ordinarias* de la forma:

$$L\frac{d^2i(t)}{dt^2}+R\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}i(t)=E(t),$$

donde i es la función a determinar, t es la variable independiente, E es una función (no homogénea) que depende de t y los valores: L, R, C son coeficientes constantes.

2.- **Descubrir**. *Características comunes, similitudes, analogías e isomorfismos*. Aquí el estudiante puede descubrir las similitudes en la aplicación de las ***T**ransformadas de **L**aplace* y la *técnica alternativa* cuando desarrolla la *descomposición en fracciones simples*, en problemas de modelación de circuitos eléctricos del tipo RC y RL.

3.- **Ejemplificar**. *Ideas generales*. En este sentido; el estudiante debe manejar fluidamente de forma general la *técnica alternativa* de esta investigación para poder utilizarla en el caso particular que se requiere en este tipo de problema.

4.- **Encarar**. *Situaciones problemáticas de manera paradigmática*. Al usar las ***T**ransformadas de **L**aplace*, para resolver la EDO que modela este tipo de problema, y la *técnica alternativa* para desarrollar la *descomposición en fracciones simples*, el estudiante está enfrentando la situación problémica bajo el paradigma del Álgebra. Con lo cual, las cuentas a desarrollar son más llevaderas para un estudiante novel.

5.- **Irrupción repentina**. *De nuevos objetos mentales y operaciones*. Aquí el estudiante debe ser capaz de entender el manejo de las ***T**ransformadas de **L**aplace*, el desarrollo de una *descomposición en fracciones simples* y la manipulación correcta de la *técnica alternativa* de esta investigación.

6.- **Buscar**. *Atajos*. En este sentido; el estudiante debe ser capaz de resolver este tipo de problemas por medio de las ***T**ransformadas de **L**aplace* y, darse cuenta que, al desarrollar la *descomposición en fracciones simples* con la *técnica alternativa* de esta investigación se ahorra tiempo y esfuerzo de trabajo; con ésto minimiza considerablemente el camino a recorrer para llegar a la solución deseada.

7.- **Abreviar**. *Estrategias y simbolizaciones iniciales con miras a esquematizarlas, algoritmizarlas, simbolizarlas y formalizarlas*. En esta etapa del proceso de matematización; el estudiante al emplear las ***T**ransformadas de **L**aplace* debe ser capaz de algoritmizar la *técnica alternativa* creada en esta investigación con el objetivo de usarla de forma fluida al momento de realizar la *descomposición en fracciones simples* requerida para este tipo de situación problémica.

8.- **Reflexionar**. *Acerca de la actividad matematizadora, considerando los fenómenos en cuestión desde diferentes perspectivas*. Desde la perspectiva del Álgebra; el estudiante debe comprender que al aplicar las ***T**ransformadas de **L**aplace* convierte una ecuación diferencial en una ecuación algebraica, con lo cual, el desarrollo se hace más sencillo recurriendo a herramientas del Álgebra como, por ejemplo, la *descomposición en fracciones simples* y aquí la *técnica alternativa* de esta investigación es una mejor vía para la reflexión ya que no requiere de procesos mecanizados o memorísticos. Desde la perspectiva de la Física; con este tipo de modelos, al usar las ***T**ransformadas de **L**aplace* el estudiante debe ser capaz de reflexionar cuándo y por qué la intensidad de corriente está en el dominio de la frecuencia o el dominio del tiempo.

Niveles de matematización. Los niveles del proceso de *matematización*, según Freudenthal, para problemas con circuitos eléctricos de este tipo, se describen a continuación:

1.- **Matematización horizontal**. En este nivel; los estudiantes logran describir en forma particular la situación problema, es decir; ellos manejan la idea vaga de tener que resolver el circuito eléctrico con una EDO usando ***T****ransformadas de* ***L****aplace* y, posteriormente, tener que usar la *técnica alternativa* para evitar el uso de sistemas de ecuaciones al momento de desarrollar una *descomposición en fracciones simples*. Este nivel tiene como punto de partida crear acciones que buscan entender la situación problema, éstas son; el reconocimiento de los datos, la esquematización, formulación y diversas formas de representación de un objeto o imagen. En ese sentido, a este nivel; el estudiante reconoce que la función incógnita en la EDO es la intensidad de corriente que debe obtener y sabe qué significa cada símbolo (o imagen) dentro del circuito eléctrico.

2.- **Matematización vertical**. Los estudiantes alcanzan un nivel más formal de la matemática, aplican estrategias metacognitivas que los llevan a hacer más reflexivos de su realidad. En este nivel; el estudiante cuando se enfrenta a circuitos eléctricos de este tipo entiende por qué el mismo se modela con una EDO muy particular, conoce la teoría general de la corriente alterna, es decir; sabe interpretar las leyes de *Kirchoff* dentro del circuito, sabe formalmente cómo pasar de una ecuación diferencial a una ecuación algebraica usando las ***T****ransformadas de* ***L****aplace* y maneja correctamente la *técnica alternativa* al momento de desarrollar una *descomposición en fracciones simples*.

Solución del Ejemplo $\mathbf{6.1}$.

En el nodo a: $i_3(t) = i_1(t) + i_2(t)$.

Por **T**ransformadas de **L**aplace $I_3(s) = I_1(s) + I_2(s)$. $\quad (\mathbf{1})$

En la malla 1 se tiene la ecuación integro-diferencial dada por la expresión:

$$e^t = 10\, i_3(t) + \frac{1}{0.1}\int i_1(t)\, dt\,. \qquad (\mathbf{2})$$

Por **T**ransformadas de **L**aplace la ecuación (**2**) se convierte en la ecuación algebraica:

$$\frac{1}{s-1} = 10\, I_3(s) + 10\,\frac{I_1(s)}{s}\,. \quad (\mathbf{3})$$

En la malla 2 la ecuación integro-diferencial viene dada por:

$$-\frac{1}{0.1}\int i_1(t)\, dt + \frac{1}{0.2}\int i_2(t)\, dt = 0\,. \quad (\mathbf{4})$$

Por **T**ransformadas de **L**aplace la ecuación (**4**) se convierte en la ecuación algebraica:

$$10\,\frac{I_1(s)}{s} \;=\; 5\,\frac{I_2(s)}{s} \quad\Rightarrow\quad I_2(s) \;=\; 2\,I_1(s)\,. \quad (\mathbf{5})$$

(**5**) en (**1**):

$$I_3(s) \;=\; I_1(s) \;+\; 2\,I_1(s) \;=\; 3\,I_1(s)\,. \quad (\mathbf{6})$$

(**6**) en (**3**):

$$\frac{1}{s-1} \;=\; 30\,I_1(s) \;+\; 10\,\frac{I_1(s)}{s} \;=\; \frac{(30\,s \;+\; 10)}{s}\,I_1(s) \quad\Rightarrow$$

$$I_1(s) \;=\; \frac{1}{30}\left[\frac{s}{(s-1)\left(s+\frac{1}{3}\right)}\right]. \qquad (\mathbf{7})$$

Aplicando la **T**ransformada **I**nversa de **L**aplace en $I_1(s)$ se obtiene la intensidad de corriente en el dominio del tiempo. Antes de aplicar TL en la expresión (**7**) se hará la *descomposición en fracciones simples*, usando la *técnica alternativa*, del término encerrado entre los corchetes.

$$\frac{s}{(s-1)\left(s+\frac{1}{3}\right)} \;=\; s\left[\frac{1}{(s-1)\left(s+\frac{1}{3}\right)}\right] = s\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+\frac{1}{3}}\right)\frac{3}{4} \quad\Rightarrow$$

$$\frac{s}{(s-1)\left(s+\frac{1}{3}\right)} = \left(\frac{s}{s-1} - \frac{s}{s+\frac{1}{3}}\right)\frac{3}{4}\,.$$

Realizando la división en cada término dentro de los paréntesis del miembro derecho:

$$\frac{s}{(s-1)\left(s+\frac{1}{3}\right)} \;=\; \left[1 \;+\; \frac{1}{s\;-\;1} \;-\; 1 \;+\; \frac{1}{3\left(s+\frac{1}{3}\right)}\right]\frac{3}{4} \quad\Rightarrow$$

Luego, la *descomposición en fracciones simples* queda de la forma:

$$\frac{s}{(s-1)\left(s+\frac{1}{3}\right)} \;=\; \left[\frac{3}{4}\left(\frac{1}{s-1}\right) \;+\; \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s+\frac{1}{3}}\right)\right]. \quad \square$$

Sustituyendo la descomposición obtenida, en la expresión (**7**), se tiene:

$$I_1(s) \;=\; \frac{1}{30}\left[\frac{3}{4}\left(\frac{1}{s-1}\right) \;+\; \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s+\frac{1}{3}}\right)\right]. \quad (\mathbf{8})$$

Finalmente; aplicando la **T**ransformada **I**nversa de **L**aplace, en la expresión (**8**), se obtiene la intensidad de corriente, solicitada, en el dominio del tiempo:

$$\mathcal{L}^{-1}\{I_1(s)\} = \frac{1}{30}\,\frac{3}{4}\,e^{t} + \frac{1}{30}\,\frac{e^{-\frac{1}{3}t}}{4} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{i_1(t)} = \frac{1}{4}\,e^{t} + \frac{1}{120}\,e^{-\frac{1}{3}t}. \quad \square$$

CAPÍTULO VII

“*Es un error absurdo teorizar antes de tener datos*”.
Sir Arthur Conan Doyle

EL ANÁLISIS ESTADÍSTICO

Análisis Estadístico Descriptivo

Prueba Diagnóstica

A continuación, se presentan las observaciones (datos) de la «*Sección* 1» después de aplicar la «*prueba diagnóstica*»; en esta sección solo participaron $\mathbf{37}$ de $\mathbf{40}$ estudiantes.

Tabla 9
Resultados de la prueba diagnóstica para la sección 1.

17	15	11	17	17	14	15	12
16	12	11	15	17	18	13	14
13	16	14	16	16	13	16	16
10	12	12	11	15	15	15	11
11	13	12	11	15			

Nota: $\mathbf{37}$ calificaciones de la prueba diagnóstica en la Sección 1. Fuente: Propia (2024).

Tabla 10
Frecuencia de los datos para la prueba diagnóstica en la sección 1.

Datos	f	F
10	1	1
11	6	7
12	5	12
13	4	16
14	3	19
15	7	26
16	6	32
17	4	36
18	1	37
	37	

Nota: Fuente: Propia (2024).

Al calcular la media aritmética y la desviación típica de los datos de esta sección se obtuvo;

$$\overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{S_1}} = \mathbf{13,97297} \quad ; \quad \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{S_1}} = \mathbf{2,217186}\ .$$

A continuación, se presentan las observaciones de la «*Sección* 2» después de aplicar la «*prueba diagnóstica*»; en esta sección solo participaron $\mathbf{39}$ de $\mathbf{40}$ estudiantes.

Tabla 11
Resultados de la prueba diagnóstica para la sección 2.

13	18	14	12	13	14	15	12
10	15	16	14	15	12	14	13
15	10	10	16	15	16	10	14
17	12	18	15	13	19	16	13
15	14	13	12	10	14	15	

Nota: $\mathbf{39}$ calificaciones de la prueba diagnóstica en la Sección 2. Fuente: Propia (2024).

Tabla 12

Frecuencia de los datos para la prueba diagnóstica en la sección 2.

Datos	f	F
10	5	5
12	5	10
13	6	16
14	7	23
15	8	31
16	4	35
17	1	36
18	2	38
19	1	39
	39	

Nota: Fuente: Autor (2024).

Al calcular la media aritmética y la desviación típica de los datos de esta sección se obtuvo;

$$\overline{X}_{S_2} = 13,89744 \quad ; \quad S_{S_2} = 2,268722 \ .$$

A continuación; se presentan las observaciones (datos) de la sección 3 para la «*prueba diagnóstica*», en la misma solo participaron $\mathbf{38}$ de $\mathbf{40}$ estudiantes. Se recuerda que; la «*Sección* 3» fue administrada por otro docente de la FaCyT-UC.

Tabla 13

Resultados de la prueba diagnóstica para la sección 3.

17	17	16	15	11	9	15	17
15	13	10	14	16	15	10	14
16	11	14	14	15	13	16	14
16	12	14	16	16	13	15	17
18	18	12	13	15	13		

Nota: $\mathbf{38}$ calificaciones de la prueba diagnóstica en la Sección 3. Fuente: Propia (2024).

Tabla 14

Frecuencia de los datos para la prueba diagnóstica en la sección 3.

Datos	f	F
9	1	1
10	2	3
11	2	5
12	2	7
13	5	12
14	6	18
15	7	25
16	7	32
17	4	36
18	2	38
	38	

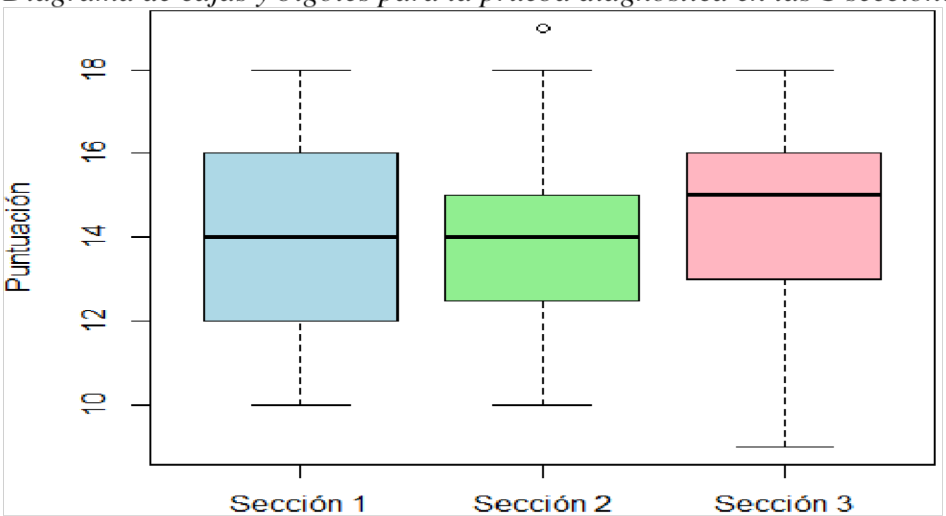
Nota: Fuente: Autor (2024).

Al calcular la media aritmética y la desviación típica de los datos de esta sección se obtuvo;

$$\bar{X}_{S_3} = 14,34211 \;\; ; \;\; S_{S_3} = 2,245432 \; .$$

Figura 18

Diagrama de cajas y bigotes para la prueba diagnóstica en las 3 secciones.



Fuente: Propia (2024).

Interpretación.

La información general que arroja este tipo de gráfico es en relación a ciertas medidas de orden en la distribución. En particular, se puede observar una recta horizontal en negro ubicada dentro de cada caja, la cual simula a la *mediana* ($X_d = Q_2$). En ese sentido, según su definición, por encima y por debajo de ella se encuentra el 50 % de los casos. Los extremos: inferior y superior de cada caja son respectivamente: el primer cuartil (Q_1) y el tercer cuartil (Q_3).

A continuación, la descripción del hecho de que la mediana esté posicionada en 14 (confirmación de la tendencia central) para las secciones 1 y 2: el hecho de que la $X_{d_{1,2}} = 14$: indica que un 50 % de las calificaciones, de la prueba diagnóstica, se encuentra por encima de 14 puntos para estas dos secciones. En el caso de la sección 3 la $X_{d_3} = 15$, lo cual indica que; un 50 % de las calificaciones de la prueba diagnóstica está por encima de 15 puntos.

Otra información interesante que arroja este tipo de gráfico es la siguiente. En la sección 1 se puede observar que la mediana (Q_2) está ubicada en el centro de la caja, ésto indica que la distribución para este caso es *simétrica*. Es decir, hay una mayor concentración de datos en la parte central de la escala. Con respecto a las secciones: 2 y 3, se observa que la mediana (Q_2) está más cerca del Q_3 que del Q_1. Esto indica que la distribución en ambos casos es *asimétrica negativa* o sesgada hacia la izquierda. Es decir, más del 50 % de los datos son superiores al valor de la media aritmética ($\bar{X}$).

Se visualiza un dato atípico en el extremo superior de la distribución para la sección 2. Ese dato atípico es una observación que está distante del resto de los datos.

Rango: indica la dispersión total de los datos, es decir, la diferencia entre el valor máximo y el mínimo de la distribución. En este caso, el rango para las secciones: 1 y 2 parece ser similar, lo que sugiere una variabilidad similar en los resultados de la prueba diagnóstica para esas secciones.

Rango intercuartílico (IQR): indica la dispersión de la mitad central de los datos. En ese sentido, se observa una mayor dispersión de los datos en la sección 1 y una mayor concentración de los datos para la sección 2. Limitaciones del IQR: en este caso particular, el IQR podría no ser el estadístico más adecuado para describir la variabilidad, debido a la asimetría negativa y a la presencia de valores atípicos.

Prueba de Rendimiento Académico

A continuación, se presentan las observaciones del «*grupo experimental*» ($\boldsymbol{G_E}$) después de aplicar la «*prueba de rendimiento académico*» (o posttest). En la misma participaron $\mathbf{39}$ de $\mathbf{40}$ estudiantes. Se realiza la siguiente observación; usando un muestreo aleatorio simple la sección 1 quedó seleccionada como grupo experimental (G_E).

Tabla 15

Resultados de la prueba de rendimiento académico para el G_E.

13	14	18	16	13	9	18	13
13	18	18	20	18	16	12	19
16	13	9	12	12	8	14	14
17	16	12	14	14	13	12	17
13	18	9	18	12	17	16	

Nota: $\mathbf{39}$ calificaciones de la prueba de rendimiento académico para el G_E. Fuente: Autor (2024).

Tabla 16

Frecuencia de los datos para la prueba de rendimiento académico en el G_E.

Datos	f	F
8	1	1
9	3	4
12	6	10
13	7	17
14	5	22
16	5	27
17	3	30
18	7	37
19	1	38
20	1	39
	39	

Nota: Fuente: Propia (2024).

Tabla 17

Valores para las dimensiones del rendimiento académico inmediato en el G_E.

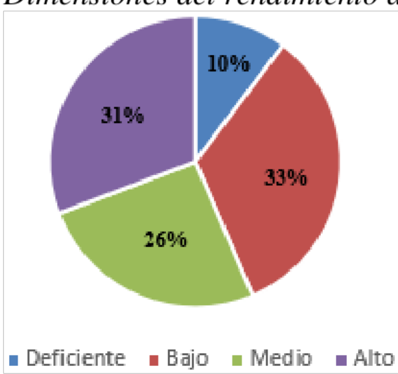
RENDIMIENTO ACADÉMICO INMEDIATO DEL G_E		
DIMENSIÓN	**INDICADOR**	**VÁLIDOS**
Alto	17-20	12
Medio	14-16	10
Bajo	10-13	13
Deficiente	0-9	4
TOTAL		**39**

Nota: Fuente: Propia (2024).

La Tabla 17 muestra, para el grupo experimental; en su primera columna las cuatro (4) dimensiones del rendimiento académico inmediato, en la segunda columna el rango (intervalo) que ubica cada calificación en su respectiva dimensión y en la tercera columna el número de datos que caen en una dimensión específica.

Figura 19

Dimensiones del rendimiento académico inmediato para el G_E



Nota: Fuente: Autor (2024).

Al calcular la media aritmética y la desviación típica de los datos del $\boldsymbol{G_E}$ se obtuvo;

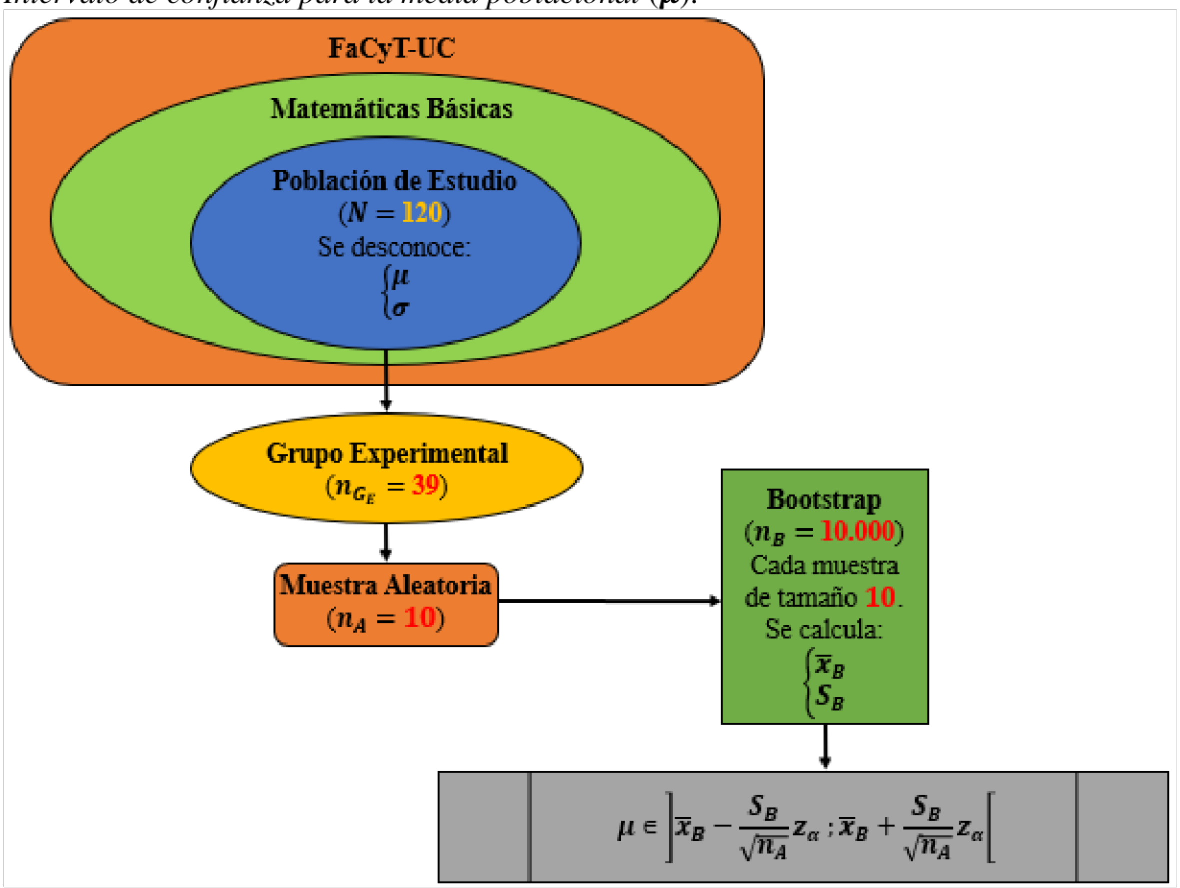
$$\overline{X}_{G_E} = 14{,}46154 \;\; ; \;\; S_{G_E} = 3{,}050851 \; .$$

La siguiente figura muestra una aplicación de la técnica de remuestreo *Bootstrap*, sobre el grupo experimental, para calcular un intervalo de confianza de la media poblacional ($\boldsymbol{\mu}$). Se debe tener presente que; el parámetro $\boldsymbol{\mu}$ es desconocido y, es ese sentido, el cálculo de un intervalo donde él esté contenido es de interés, ya que, con éste el investigador puede realizar inferencias relacionadas, para este caso, con el tratamiento didáctico.

Una explicación a la figura que viene es la siguiente; a partir de una población de $\mathbf{120}$ sujetos de estudio (conformada por tres (3) secciones de cálculo II) se seleccionó de forma aleatoria el grupo experimental ($\boldsymbol{G_E}$). Después de aplicado el tratamiento didáctico a dicho grupo se le suministró la prueba de rendimiento académico (o posttest), participando en ella solamente $\mathbf{39}$ estudiantes. De esos $\mathbf{39}$ valores numéricos obtenidos después de corregir el posttest, se tomó una muestra aleatoria de tamaño $\boldsymbol{n_A = 10}$ (usando un muestreo aleatorio simple con reposición). Luego, a dicha muestra se le aplicó un muestreo repetitivo (*Bootstrap*) generando así diez mil ($\mathbf{10.000}$) muestras aleatorias (cada una de tamaño $\mathbf{10}$), éstas fueron obtenidas usando un muestreo aleatorio simple con reposición. Finalmente; con ese número ($\mathbf{10.000}$) elevado de muestras aleatorias se calculó la media aritmética ($\boldsymbol{\bar{x}_B}$) y la desviación típica ($\boldsymbol{S_B}$) bootstrap para luego, calcular con esas medidas de descripción el intervalo de confianza que contiene al parámetro poblacional $\boldsymbol{\mu}$.

Figura 20

Intervalo de confianza para la media poblacional ($\boldsymbol{\mu}$).



Nota: Fuente: Autor (2024).

Los cálculos para obtener el intervalo se realizaron utilizando el lenguaje de programación $\boldsymbol{R}$, con un nivel de confianza de $\mathbf{97,5}$ %, dando como resultado:

$$\boldsymbol{\mu} \in \left]\mathbf{12,61839; 18,81467}\right[\ .$$

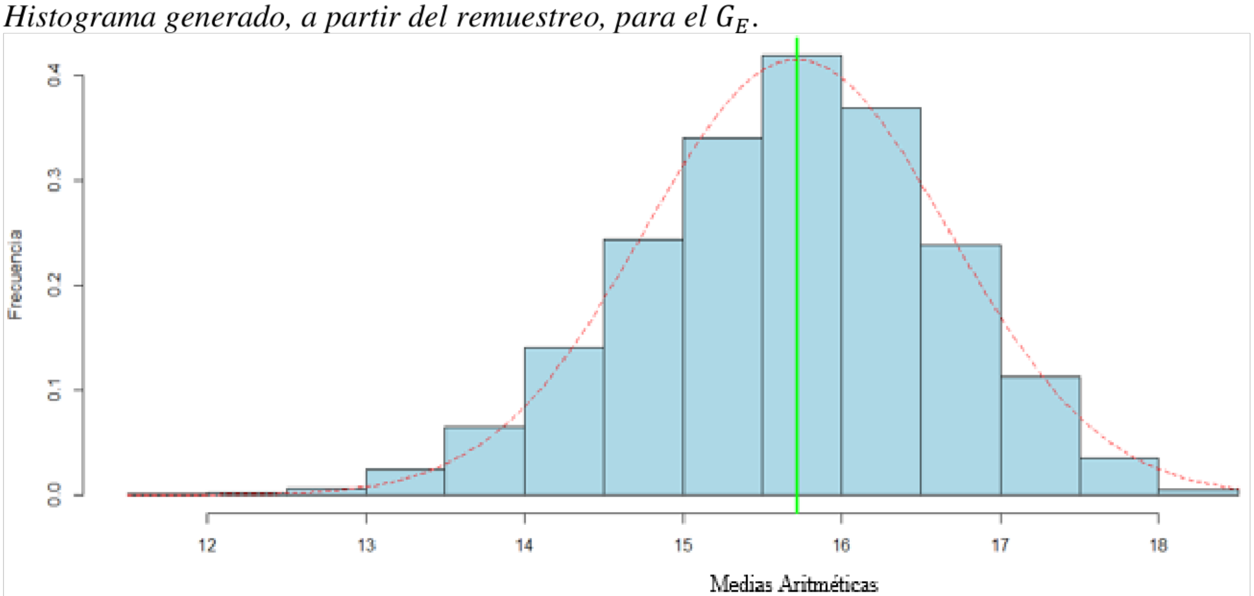
Sin conocer el parámetro $\boldsymbol{\mu}$ ahora se puede saber entre qué valores se encuentra y con esta información se pueden realizar inferencias en relación a esa población. En ese sentido, la relevancia en la aplicación del *Bootstrap* para este caso; es que con él se logra un número elevado de simulaciones del experimento, en otras palabras; es como si el investigador realizó el tratamiento, en este caso, $\mathbf{10.000}$ veces. Es decir; todas esas muestras aleatorias del experimento hechas por la misma persona, con ese enfoque se logra minimizar la aparición de sesgos; y, sí apareciera alguno sería solo producto del azar.

Por otro lado; con el *Bootstrap* se logra un refinamiento al momento de simular la distribución de los datos muestrales. La teoría detrás de esta técnica de remuestreo está fundamentada en el Teorema del Limite Central, y en ese sentido, el estadístico $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{B}}$ es una muy buena aproximación al parámetro $\boldsymbol{\mu}$ y el número elevado de medias aritméticas sigue una distribución normal, con lo cual, ahora se pueden realizar ciertas suposiciones apoyadas en las probabilidades.

A continuación; se presenta una figura donde se visualiza un histograma simulando la distribución que siguen los $\mathbf{10.000}$ datos (medias aritméticas) obtenidos a partir del remuestreo.

Figura 21

Histograma generado, a partir del remuestreo, para el G_E.



Nota: Fuente: Autor (2024).

Interpretación.

En este gráfico (histograma) se observa claramente, que la distribución de las diez mil (10.000) *medias aritméticas* presentan un comportamiento de *normalidad*. Este hecho se visualiza con la campana de Gauss dibujada sobre el histograma, la cual se acopla perfectamente a éste. Adicionalmente, la recta vertical en color verde simula una super media (a saber, la media bootstrap $\overline{X}_B$) que por el *Teorema del Límite Central* es una muy buena aproximación para el parámetro poblacional $\boldsymbol{\mu}$.

$$\overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{B}} \approx \boldsymbol{\mu}\,.$$

Con esta información se pueden realizar inferencias y dar aportes desde el punto de vista de las probabilidades en relación a la población de interés.

A continuación, se presentan las observaciones del primer «*grupo control*» ($\boldsymbol{G_C}$) después de aplicar la «*prueba de rendimiento académico*» (o posttest). En esta prueba participaron $\mathbf{36}$ de $\mathbf{40}$ estudiantes. Observación; usando un muestreo aleatorio simple la sección 2 quedó seleccionada como primer grupo control (G_C).

Tabla 18

Resultados de la prueba de rendimiento académico para el G_C.

10	11	15	13	15	9	13	10
14	19	9	8	13	13	11	15
11	8	16	15	16	10	13	11
12	10	15	11	13	7	9	10
11	13	18	16				

Nota: $\mathbf{36}$ calificaciones de la prueba de rendimiento académico para el G_c. Fuente: Propia (2024).

Tabla 19

Frecuencia de los datos para la prueba de rendimiento académico en el G_C.

Datos	f	F
7	1	1
8	2	3
9	3	6
10	5	11
11	6	17
12	1	18
13	7	25
14	1	26
15	5	31
16	3	34
18	1	35
19	1	36
	36	

Nota: Fuente: Propia (2024).

Tabla 20

Valores para las dimensiones del rendimiento académico inmediato en el G_C.

RENDIMIENTO ACADÉMICO INMEDIATO DEL $\boldsymbol{G_C}$		
DIMENSIÓN	**INDICADOR**	**VÁLIDOS**
Alto	17-20	2

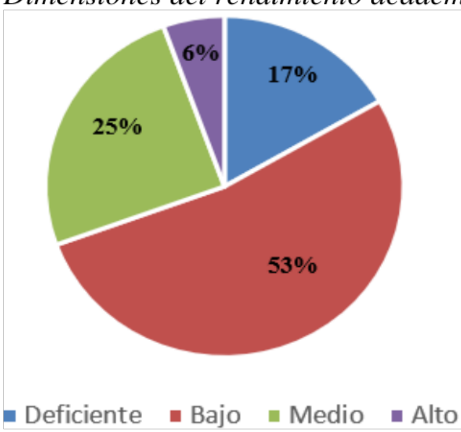
Medio	14-16	9
Bajo	10-13	19
Deficiente	0-9	6
TOTAL		**36**

Nota: Fuente: Autor (2024).

La Tabla 20 muestra, para el primer grupo control; en su primera columna las cuatro (4) dimensiones del rendimiento académico inmediato, en la segunda columna el rango (intervalo) que ubica cada calificación en su respectiva dimensión y en la tercera columna el número de datos que caen en una dimensión específica.

Figura 22

Dimensiones del rendimiento académico inmediato para el G_C.



Nota: Fuente: Propia (2024).

Al calcular la media aritmética y la desviación típica de los datos del $\boldsymbol{G_C}$ se obtuvo;

$$\overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{G_C}} = \mathbf{12,30556} \ \ ; \ \ \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{G_C}} = \mathbf{2,906342} \ .$$

Observaciones del segundo grupo control ($\boldsymbol{G_C^*}$). A continuación; se presentan los resultados de la «*prueba de rendimiento académico*» (o posttest). En esta prueba participaron $\mathbf{40}$ de $\mathbf{40}$ estudiantes. Este grupo está conformado por la sección 3.

Tabla 21

Resultados de la prueba de rendimiento académico para el G_C^*.

8	13	11	13	11	9	12	15
11	8	4	10	11	11	16	6
13	9	12	8	15	13	12	15
12	12	13	15	8	8	8	11
11	9	10	18	9	11	12	12

Nota: $\mathbf{40}$ calificaciones de la prueba de rendimiento académico para el G_C^*. Fuente: Propia (2024).

Tabla 22

Frecuencia de los datos para la prueba de rendimiento académico en el G_C^*.

Datos	f	F

4	1	1
6	1	2
8	6	8
9	4	12
10	2	14
11	8	22
12	7	29
13	5	34
15	4	38
16	1	39
18	1	40
	40	

Nota: Fuente: Propia (2024).

Tabla 23

Valores para las dimensiones del rendimiento académico inmediato en el G_C^*.

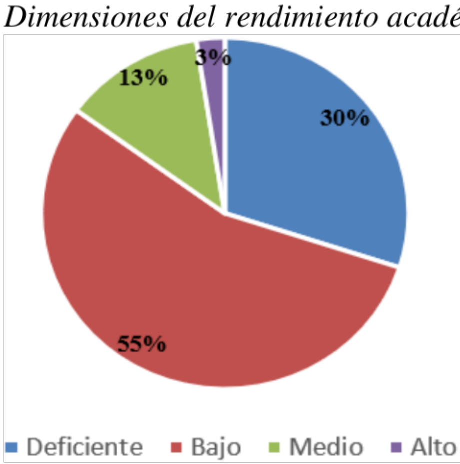
RENDIMIENTO ACADÉMICO INMEDIATO DEL G_C^*		
DIMENSIÓN	**INDICADOR**	**VÁLIDOS**
Alto	17-20	1
Medio	14-16	5
Bajo	10-13	22
Deficiente	0-9	12
TOTAL		**40**

Nota: Fuente: Propia (2024).

La Tabla 23 muestra, para el segundo grupo control (G_C^*); en su primera columna las cuatro (4) dimensiones del rendimiento académico inmediato, en la segunda columna el rango (intervalo) que ubica cada calificación en su respectiva dimensión y en la tercera columna el número de datos que caen en una dimensión específica.

Figura 23

Dimensiones del rendimiento académico inmediato para el G_C^*.



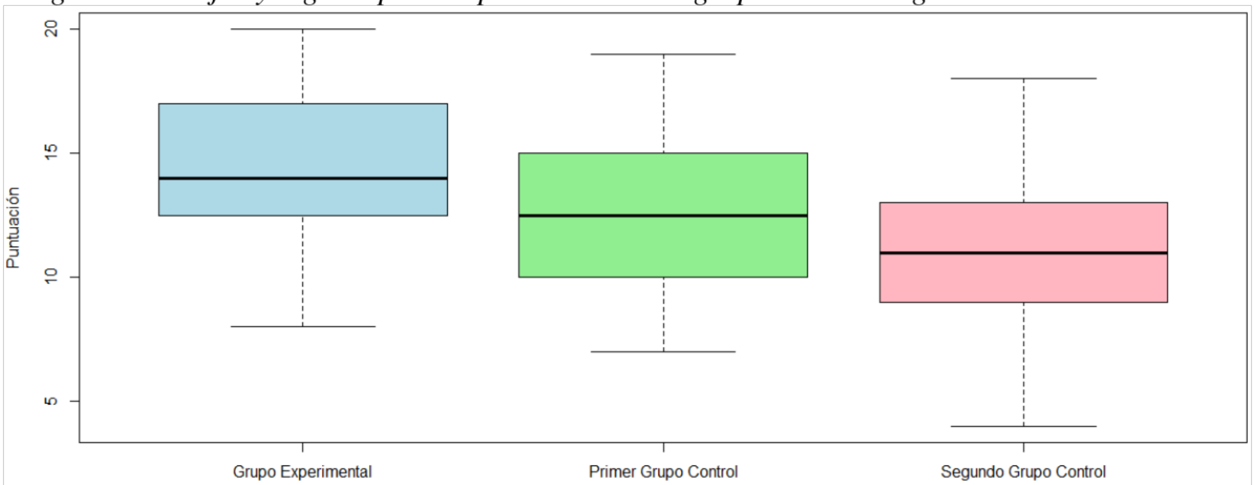
Nota: Fuente: Autor (2024).

Al calcular la media aritmética y la desviación típica de los datos del $\boldsymbol{G_C^*}$ se obtuvo:

$$\overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{G_C^*}} = \mathbf{11,125} \quad ; \quad \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{G_C^*}} = \mathbf{2,821052} \ .$$

Figura 24

Diagrama de cajas y bigotes para el posttest en los 3 grupos de investigación.



Fuente: Autor (2024).

***Interpretación*.**

Para el grupo experimental la $X_{d_{G_E}} = 14$: ésto indica que un 50 % de las calificaciones, en la prueba de rendimiento académico, se encuentra por encima de 14 puntos. Para el primer grupo control la $X_{d_{G_C}} = 12{,}5$: ésto indica que; un 50 % de las calificaciones de la prueba de rendimiento académico está por encima de 12,5 puntos. Para el segundo grupo control la $X_{d_{G_C^*}} = 11$: ésto indica que; un 50 % de las calificaciones de la prueba de rendimiento académico está por encima de 11 puntos. Una interpretación de esta información es que; el grupo experimental obtuvo mejor rendimiento en la prueba.

En el grupo experimental la mediana ($X_{d_{G_E}}$) está más cerca del primer cuartil (Q_1) que del tercero (Q_3): ésto indica que la distribución es *asimétrica positiva* o sesgada hacia la derecha. Es decir, más del 50 % de los datos son inferiores al valor de la media aritmética ($\bar{X}_{G_E}$).

Con respecto al primero y segundo grupo control se puede observar que la mediana (Q_2) está ubicada en el centro de la caja, ésto indica que la distribución para estos grupos es *simétrica*. Es decir, hay una mayor concentración de datos en la parte central de la escala.

Rango intercuartílico (IQR): se observa una mayor dispersión en la región central para los datos del primer grupo control y, ligeramente, una mayor concentración en la región central para los datos del segundo grupo control.

No se presentan datos atípicos en ninguno de los grupos de investigación.

Análisis Estadístico Inferencial

En este apartado se realizaron tres (3) «*Pruebas de Hipótesis*», las cuales, son descritas a continuación.

1.- Prueba de hipótesis para determinar la «*Equivalencia Inicial*» entre los tres (3) grupos de estudio. Con esta prueba se determinó la «*Homogeneidad*» de los grupos en cuanto al conocimiento matemático previo necesario para el desarrollo del experimento. En relación a los datos, se emplearon los resultados de la «*prueba diagnóstica*» aplicada a los tres (3) grupos de investigación.

2.- Prueba de hipótesis para confirmar que los resultados del grupo experimental ($\boldsymbol{G_E}$) son mejores que los del primer grupo control ($\boldsymbol{G_C}$) y los del segundo grupo control ($\boldsymbol{G_C^*}$). En relación a los datos, se usaron los resultados de la «*prueba de rendimiento académico*» aplicada a los tres (3) grupos de investigación.

3.- Prueba de hipótesis para confirmar que la descomposición en fracciones simples, desarrollada con un modelo instruccional, tiene mejor desempeño en estudiantes egresados de instituciones privadas. En esta prueba solo se utilizaron los resultados de la «*prueba de rendimiento académico*» aplicada al grupo experimental ($\boldsymbol{G_E}$).

El tipo de prueba de hipótesis que se utilizó en todos estos análisis fue para la «diferencia de medias y varianzas conocidas» a nivel de las poblaciones.

Es decir; $\mu_x - \mu_y$ con $\sigma^2_{x_{P1}}$ y $\sigma^2_{y_{P2}}$ conocidas, ver (Lipschutz y Schiller, 2000, p. 361).

Según Lipschutz y Schiller, (ob. cit.), si se está interesado en realizar un contraste (o prueba) de hipótesis para diferencia de medias con varianzas conocidas, se puede utilizar el siguiente «*Estadístico de Contraste*»:

$$z\left(X_1, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2}\right) = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\dfrac{S_x^2}{n_1} + \dfrac{S_y^2}{n_2}}} \approx N(0,1), \qquad (\mathbf{7.1})$$

calculado a partir de dos (2) grupos de datos de tamaño n_1 y n_2.

Para una mejor comprensión de la metodología usada en el análisis estadístico de cada prueba de hipótesis, las mismas, se realizaron siguiendo una secuencia de pasos tal como lo presenta Chourio (1987). Dividiendo el proceso en dos (2) etapas, las cuales son; factores involucrados y procedimiento.

Homogeneidad Entre los Grupos de Estudio

Grupo experimental $(\mathbf{G_E})$ ***y primer grupo control*** $(\mathbf{G_C})$. Se les aplicó a ambos grupos de investigación una «*prueba diagnóstica*», antes de iniciar el tratamiento didáctico, para determinar la «*homogeneidad*» de los mismos. Es decir, se buscó medir si ambos grupos tienen conocimientos previos en matemática similares. Observación; el grupo experimental $(\boldsymbol{G_E})$ está conformado por la sección 1 y el primer grupo control $(\boldsymbol{G_C})$ está conformado por la sección 2.

Tabla 24

Resultados de la prueba diagnóstica para el G_E y el G_C.

Grupo:	Experimental	Control
n (números de casos):	$\mathbf{37}$	$\mathbf{39}$
Media:	$\mathbf{13,97297}$	$\mathbf{13,89744}$
Varianza:	$\mathbf{4,915914}$	$\mathbf{5,147099}$

Nota: Fuente: Propia (2024).

Se desea saber si la diferencia observada entre las medias aritméticas es significativa con un nivel de riesgo de $\mathbf{5}$ % (ó $\mathbf{0,05}$).

Factores:

a. Varianza a nivel de la población: *Conocidas* (los dos grupos funcionan como dos poblaciones).
b. Tamaño de los grupos: *Grande* $(\boldsymbol{n} > \mathbf{30})$ (por el Teorema del Límite Central se puede hacer uso de una distribución *Normal*).
c. Tipo de grupos: *No Correlacionados* (son dos grupos independientes).
d. Tipo de contraste: *Bilateral* (la región de rechazo queda ubicada en ambas colas de la campana Gaussiana).

Procedimiento:

1. Se plantea el sistema de hipótesis:

$$\begin{cases} H_0\colon \mu_{\boldsymbol{G_E}} = \mu_{\boldsymbol{G_C}}, \\ \qquad vs. \\ H_1\colon \mu_{\boldsymbol{G_E}} \neq \mu_{\boldsymbol{G_C}}. \end{cases}$$

2. Se calcula el error típico de la diferencia entre las medias aritméticas.

$$\left(S_{\bar{x}_{G_E}} - S_{\bar{x}_{G_C}}\right) = \sqrt{\frac{S^2_{\boldsymbol{G_E}}}{n_{\boldsymbol{G_E}}} + \frac{S^2_{\boldsymbol{G_C}}}{n_{\boldsymbol{G_C}}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{4,9159}}{\mathbf{37}} + \frac{\mathbf{5,1471}}{\mathbf{39}}} \cong \mathbf{0,5146}\,.$$

3. Se calcula la razón crítica.

$$z_{Cál.} = \frac{\left|\bar{x}_{G_E} - \bar{x}_{G_C}\right|}{\sqrt{\frac{S_{G_E}^2}{n_{G_E}} + \frac{S_{G_C}^2}{n_{G_C}}}} = \frac{|\mathbf{13,97297 - 13,89744}|}{\mathbf{0,5146}} \cong \mathbf{0,1468}\ .$$

4. Se busca en la tabla de áreas de la distribución normal, el valor crítico de z (z_α), con un nivel de riesgo de $\mathbf{5}$ % (ó $\mathbf{0,05}$) y un contraste bilateral (H_1: $\mu_{G_E} \neq \mu_{G_C}$):

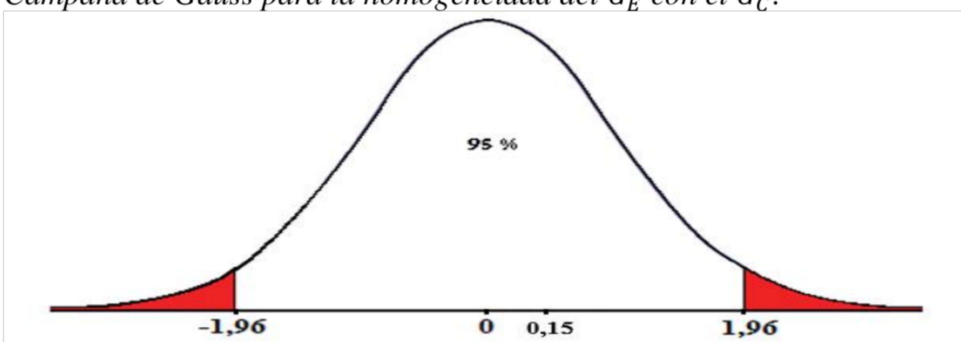
$$1 - \alpha = 0{,}95 \Leftrightarrow \alpha = 0{,}05 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}025\ .$$

$$\therefore\ -\boldsymbol{z_{0,025}} = \mathbf{-1,96} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{z_{0,025}} = \mathbf{1,96}\ .$$

5. Se aplica la regla de decisión:
   - ***a.*** Si $z_{Cál.} < z_\alpha$ entonces se acepta la H_0.
   - ***b.*** Si $z_{Cál.} \geq z_\alpha$ entonces no se acepta la H_0.

Figura 25

Campana de Gauss para la homogeneidad del G_E con el G_C.



Nota: Fuente: Autor (2024).

Decisión: $\boldsymbol{z_{Cál.}} = 0{,}1468 \cong \mathbf{0,15} < \boldsymbol{z_\alpha} = \mathbf{1,96}$; se acepta la $\boldsymbol{H_0}$.

6. Se realiza la interpretación objetiva del resultado obtenido en el paso anterior:

Se rechaza la $\boldsymbol{H_1}$: $\mu_{G_E} \neq \mu_{G_C}$, en favor de la $\boldsymbol{H_0}$: $\mu_{G_E} = \mu_{G_C}$, al nivel de riesgo de $\mathbf{5}$ %, en otras palabras; la diferencia entre las medias aritméticas de ambos grupos no es significativa, por consiguiente, no se pudo asegurar que el $\boldsymbol{G_E}$ aventajó en superioridad al $\boldsymbol{G_C}$. Es decir, se determinó que los dos grupos son homogéneos con respecto al conocimiento previo en Matemática necesario para realizar el experimento. □

Grupo experimental $(\mathbf{G_E})$ ***y segundo grupo control*** $(\mathbf{G_C^*})$. En este estudió de homogeneidad la sección 3 actuó como segundo grupo control ($\boldsymbol{G_C^*}$) y en el análisis se usó una «*prueba de Fisher*».

La prueba de Fisher, también, conocida como contraste de la razón de varianzas, contrasta la hipótesis nula de dos poblaciones normales para la igualdad o no de las varianzas, esta prueba es muy potente, detecta diferencias muy sutiles, pero es muy sensible a violaciones de la normalidad de las poblaciones. En el caso de la presente investigación no fue un problema puesto que ambos grupos son extraídos de una misma población que se asumió normal.

Tabla 25

Resultados de la prueba diagnóstica para el G_E y el G_C^*.

$\boldsymbol{G_E}$	$\boldsymbol{G_C^*}$
$\boldsymbol{n_{G_E} = 37}$	$\boldsymbol{n_{G_C^*} = 38}$
$\boldsymbol{\overline{X}_{G_E} = 13,97297}$	$\boldsymbol{\overline{X}_{G_C^*} = 14,34211}$
$\boldsymbol{S_{G_E}^2 = 4,915914}$	$\boldsymbol{S_{G_C^*}^2 = 5,04196}$

Nota: Fuente: Propia (2024).

Supóngase que, por un instante, se pueda creer que las varianzas son distintas, en ese sentido, se hará una prueba de Fisher (con $\boldsymbol{\alpha = 0,05}$). Esto es:

$$\begin{cases} H_0: \sigma_{G_E}^2 = \sigma_{G_C^*}^2 \,, \\ \qquad vs. \\ H_1: \sigma_{G_E}^2 \neq \sigma_{G_C^*}^2 \,. \end{cases}$$

En este caso;

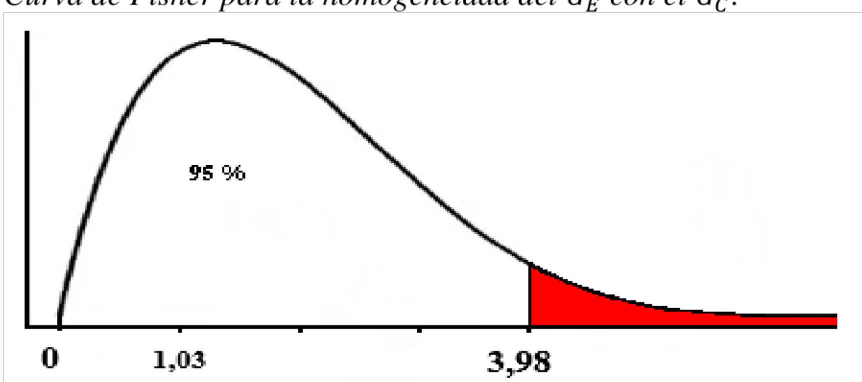
$$\boldsymbol{F} = \frac{S_{G_C^*}^2}{S_{G_E}^2} = \frac{5,04196}{4,915914} \cong \boldsymbol{1,03} \,.$$

Por otro lado, el valor crítico es;

$$\boldsymbol{F_{73,1} = 3,98} \,.$$

Figura 26

Curva de Fisher para la homogeneidad del G_E con el G_C^*.



Nota: Fuente: Propia (2024).

No es posible rechazar la hipótesis nula. De acuerdo a lo anterior; la evidencia demostró que no hubo razón válida para creer que las varianzas sean distintas. Es decir; se determinó que los dos grupos de investigación son homogéneos (o equivalentes) en relación al conocimiento previo en Matemática, necesario, para realizar el experimento. □

Confirmar que los Resultados del G_E son Mejores que los del G_C y los del G_C^*

Los resultados del G_E son mejores que los del G_C. Al $\boldsymbol{G_E}$ y al $\boldsymbol{G_C}$ se les aplicó una «*prueba de rendimiento académico*» (o posttest), culminado el tratamiento didáctico, con el objetivo de confirmar que los resultados del $\boldsymbol{G_E}$ son mejores que los del $\boldsymbol{G_C}$. Se adoptó un nivel de confianza de $\mathbf{99}$ % (ó $\mathbf{0,99}$) y un contraste unilateral, con lo cual se obtuvo el valor de z_α ubicándolo en una tabla de distribución Normal.

Tabla 26

Resultados de la prueba de rendimiento académico para el G_E y el G_C.

Grupo:	Experimental	Control
n (números de casos):	$\mathbf{39}$	$\mathbf{36}$
Media:	$\mathbf{14,46154}$	$\mathbf{12,30556}$
Varianza:	$\mathbf{9,30769}$	$\mathbf{8,44682}$

Nota: Fuente: Propia (2024).

Factores:

a. Varianza a nivel de la población: *Conocidas* (los dos grupos funcionan como dos poblaciones).

b. Tamaño de los grupos: *Grande* ($\boldsymbol{n} > \mathbf{30}$) (por el Teorema del Límite Central se puede hacer uso de una distribución *Normal*).

c. Tipo de grupos: *No Correlacionados* (son dos grupos independientes, *Control* y *Experimental*).

d. Tipo de contraste: *Unilateral*.

Procedimiento:

1. Se plantean las hipótesis:

$$\begin{cases} H_{0:1}: \mu_{\boldsymbol{G_E}} - \mu_{\boldsymbol{G_C}} = 0, \\ \qquad vs. \\ H_1: \mu_{\boldsymbol{G_E}} - \mu_{\boldsymbol{G_C}} > 0. \end{cases}$$

2. Se calcula el error típico de la diferencia entre las medias aritméticas:

$$\left(S_{\bar{x}_{G_E}} - S_{\bar{x}_{G_C}}\right) = \sqrt{\frac{S_{G_E}^2}{n_{G_E}} + \frac{S_{G_C}^2}{n_{G_C}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{9,30769}}{\mathbf{39}} + \frac{\mathbf{8,44682}}{\mathbf{36}}} \cong \mathbf{0,68796}\,.$$

3. Se calcula la razón crítica:

$$\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{C}\text{ál.}} = \frac{\left|\bar{x}_{G_E} - \bar{x}_{G_C}\right|}{\sqrt{\frac{S_{G_E}^2}{n_{G_E}} + \frac{S_{G_C}^2}{n_{G_C}}}} = \frac{|\mathbf{14,46154} - \mathbf{12,30556}|}{\mathbf{0,68796}} = \mathbf{3,1339}\,.$$

4. Se busca en la tabla de áreas de la distribución normal, el valor crítico de z (z_α), con un nivel de riesgo de $\mathbf{1}$ % (ó $\mathbf{0,01}$) y un contraste unilateral (H_1: $\mu_{\boldsymbol{G_C}} < \mu_{\boldsymbol{G_E}}$):

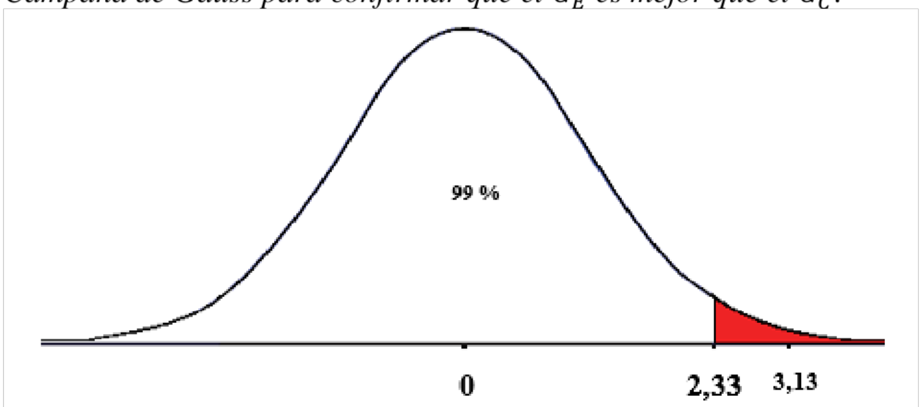
$$1-\alpha = 0{,}99 \;\Rightarrow\; \alpha = 0{,}01 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{z_{\alpha=0,01}} = \mathbf{2,33}\,.$$

5. Se aplica la regla de decisión:

Se rechaza la $H_{0:1}$: $\mu_{\boldsymbol{G_C}} = \mu_{\boldsymbol{G_E}}$, a favor de la H_1: $\mu_{\boldsymbol{G_C}} < \mu_{\boldsymbol{G_E}}$, si $z_{Cál.} > z_\alpha$.

Figura 27

Campana de Gauss para confirmar que el G_E es mejor que el G_C.



Nota: Fuente: Propia (2024).

Decisión: $\boldsymbol{z_{Cál.}} = 3{,}1339 \cong \mathbf{3,13} > \boldsymbol{z_\alpha} = \mathbf{2,33}$; se acepta la $\boldsymbol{H_1}$: $\mu_{\boldsymbol{G_E}} > \mu_{\boldsymbol{G_C}}$.

6. Se realiza la interpretación objetiva del resultado obtenido en el paso anterior:

Se rechaza la $\boldsymbol{H_{0:1}}$: $\mu_{\boldsymbol{G_C}} = \mu_{\boldsymbol{G_E}}$, en favor de la $\boldsymbol{H_1}$: $\mu_{\boldsymbol{G_C}} < \mu_{\boldsymbol{G_E}}$, al nivel de riesgo de $\mathbf{1}$ % (ó $\mathbf{0,01}$). Es decir; para efectos del tratamiento didáctico los resultados obtenidos, después de aplicar la «*prueba de rendimiento académico*», en el $\boldsymbol{G_E}$ son mejores que los obtenidos en el $\boldsymbol{G_C}$.

Con todo lo anterior; se confirmó que la descomposición en fracciones simples desarrollada con el «*Modelo Instruccional*», colaboró significativamente en la mejora del «*Rendimiento Académico Inmediato*» de los sujetos de estudio del $\boldsymbol{G_E}$ con respecto al grupo control ($\boldsymbol{G_C}$). □

Los resultados del $\boldsymbol{G_E}$ son mejores que los del $\boldsymbol{G_C^*}$. A continuación; se confirmó que los resultados del $\boldsymbol{G_E}$ son mejores que los del segundo grupo control ($\boldsymbol{G_C^*}$). Para ello; se asumió un nivel de confianza de $\mathbf{99}$ % (ó $\mathbf{0,99}$) y un contraste unilateral, con lo cual se obtuvo el valor de z_α ubicándolo en una tabla de distribución Normal.

Tabla 27

Resultados de la prueba de rendimiento académico para el G_E y el G_C^*.

$\boldsymbol{G_E}$	$\boldsymbol{G_C^*}$
$\boldsymbol{n_{G_E}} = \mathbf{39}$	$\boldsymbol{n_{G_C^*}} = \mathbf{40}$
$\boldsymbol{\bar{X}_{G_E}} = \mathbf{14,46154}$	$\boldsymbol{\bar{X}_{G_C^*}} = \mathbf{11,125}$

$\boldsymbol{S^2_{G_E} = 9,30769}$	$\boldsymbol{S^2_{G^*_C} = 7,95833}$

Nota: Fuente: Autor (2024).

Factores:

a. Varianza a nivel de la población: *Conocidas* (los dos grupos funcionan como dos poblaciones).

b. Tamaño de los grupos: *Grande* ($\boldsymbol{n > 30}$) (por el Teorema del Límite Central se puede hacer uso de una distribución *Normal*).

c. Tipo de grupos: *No Correlacionados* (son dos grupos independientes, *Control* y *Experimental*).

d. Tipo de contraste: *Unilateral*.

Procedimiento:

1. Se plantean las hipótesis:

$$\begin{cases} H_{0:1}: \mu_{\boldsymbol{G_E}} - \mu_{\boldsymbol{G^*_C}} = 0\ , \\ \qquad vs. \\ H_1: \mu_{\boldsymbol{G_E}} - \mu_{\boldsymbol{G^*_C}} > 0\ . \end{cases}$$

2. Se calcula el error típico de la diferencia entre las medias aritméticas:

$$\left(S_{\bar{x}_{G_E}} - S_{\bar{x}_{G^*_C}}\right) = \sqrt{\frac{S^2_{G_E}}{n_{G_E}} + \frac{S^2_{G^*_C}}{n_{G^*_C}}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{9,30769}}{\boldsymbol{39}} + \frac{\boldsymbol{7,95833}}{\boldsymbol{40}}} \cong \boldsymbol{0,66153}\ .$$

3. Se calcula la razón crítica:

$$\boldsymbol{z_{C\acute{a}l.}} = \frac{\left|\bar{x}_{\boldsymbol{G_E}} - \bar{x}_{\boldsymbol{G^*_C}}\right|}{\sqrt{\frac{S^2_{\boldsymbol{G_E}}}{n_{\boldsymbol{G_E}}} + \frac{S^2_{\boldsymbol{G^*_C}}}{n_{\boldsymbol{G^*_C}}}}} = \frac{\boldsymbol{|14,46154 - 11,125|}}{\boldsymbol{0,66153}} = \boldsymbol{5,04367}\ .$$

4. Se busca en la tabla de áreas de la distribución normal, el valor crítico de z (z_α), con un nivel de riesgo de $\boldsymbol{1}$ % (ó $\boldsymbol{0,01}$) y un contraste unilateral ($H_1: \mu_{\boldsymbol{G_E}} > \mu_{\boldsymbol{G^*_C}}$):

$$1 - \alpha = 0{,}99 \ \Rightarrow\ \alpha = 0{,}01 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{z_{\alpha=0,01} = 2,33}\ .$$

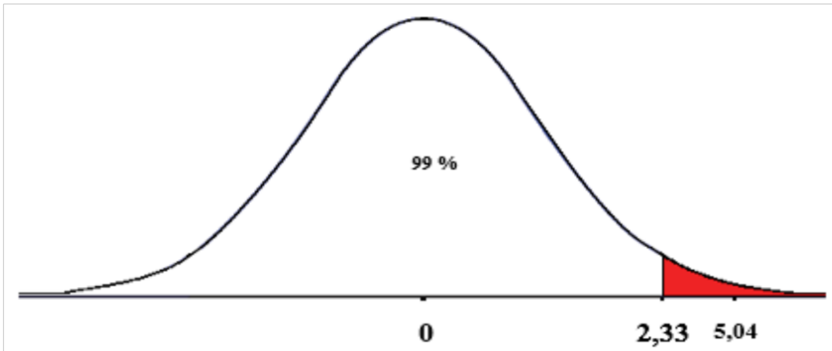
5. Se aplica la regla de decisión:

Se rechaza la $H_{0:1}: \mu_{\boldsymbol{G^*_C}} = \mu_{\boldsymbol{G_E}}$, a favor de la $H_1: \mu_{\boldsymbol{G_E}} > \mu_{\boldsymbol{G^*_C}}$, si $z_{C\acute{a}l.} > z_\alpha$.

En la siguiente figura se muestra la campana de Gauss que resulta de los cálculos realizados.

Figura 28

Campana de Gauss para confirmar que el G_E es mejor que el G^*_C.



Nota: Fuente: Propia (2024).

Decisión: $\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{C\acute{a}l.}} = 5{,}04367 \cong \mathbf{5{,}04} > \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{2{,}33}$; se acepta la $\boldsymbol{H}_{\mathbf{1}}$: $\mu_{G_E} > \mu_{G_C^*}$.

6. Se realiza la interpretación objetiva del resultado obtenido en el paso anterior:

Se rechaza la $\boldsymbol{H}_{\mathbf{0:1}}$: $\mu_{G_C^*} = \mu_{G_E}$, en favor de la $\boldsymbol{H}_{\mathbf{1}}$: $\mu_{G_E} > \mu_{G_C^*}$, al nivel de riesgo de $\mathbf{1}$ % (ó $\mathbf{0{,}01}$). Es decir; para efectos del tratamiento didáctico los resultados obtenidos en el $\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{E}}$ son mejores que los obtenidos en el $\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{C}}^{*}$.

Con todo lo anterior; se confirmó que la descomposición en fracciones simples desarrollada con el «*Modelo Instruccional*», colaboró significativamente en la mejora del «*Rendimiento Académico Inmediato*» de los sujetos de estudio del $\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{E}}$ con respecto al grupo control ($\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{C}}^{*}$). □

Confirmar que los Egresados de Privados Tienen Mejor desempeño

Los datos del grupo experimental ($\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{E}}$) fueron divididos en dos subgrupos (o muestras intencionales), a saber; valores provenientes de: estudiantes egresados de instituciones privadas y estudiantes egresados de instituciones públicas.

A continuación; se muestran los datos de los estudiantes egresados de instituciones privadas, que pertenecen al grupo $\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{E}}$.

Tabla 28

Resultados del posttest para egresados de instituciones privadas.

18	18	18	18	16
16	13	13	13	18
14	14	12	12	12
17	17	9	9	20

Nota: $\mathbf{20}$ calificaciones de la prueba de rendimiento académico para los estudiantes egresados de instituciones privadas en el G_E. Fuente: Propia (2024).

Tabla 29

Frecuencia de los datos para el posttest en egresados de instituciones privadas.

Datos	f	F
9	2	2
12	3	5
13	3	8

14	2	10
16	2	12
17	2	14
18	5	19
20	1	20
	20	

Nota: Fuente: Propia (2024).

El siguiente subgrupo está conformado por los datos de los estudiantes egresados de instituciones públicas, que pertenecen al grupo $\boldsymbol{G_E}$.

Tabla 30

Resultados del posttest para egresados de instituciones públicas.

18	18	13	16	16
16	13	13	13	14
14	14	12	12	12
17	9	8	19	

Nota: **19** calificaciones de la prueba de rendimiento académico para los estudiantes egresados de instituciones públicas en el G_E. Fuente: Propia (2024).

Tabla 31

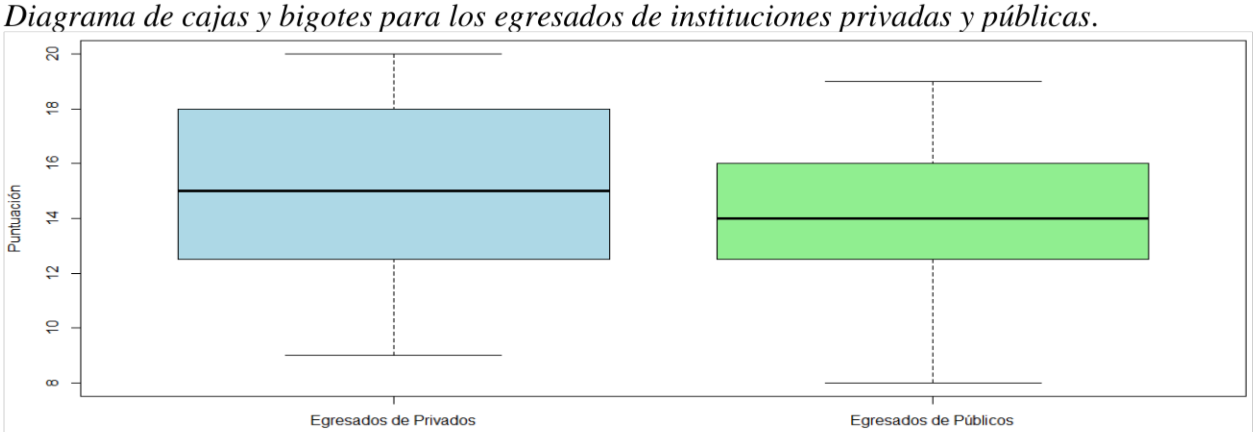
Frecuencia de los datos para el posttest en egresados de instituciones públicas.

Datos	f	F
8	1	1
9	1	2
12	3	5
13	4	9
14	3	12
16	3	15
17	1	16
18	2	18
19	1	19
	19	

Nota: Fuente: Propia (2024).

Figura 29

Diagrama de cajas y bigotes para los egresados de instituciones privadas y públicas.



Fuente: Autor (2024).

Interpretación.

Para los egresados de instituciones privadas la $X_{d_{Privadas}} = 15$: ésto indica que un 50 % de las calificaciones de esta muestra se encuentra por encima de 15 puntos. Para los egresados de instituciones públicas la $X_{d_{Públicas}} = 14$: ésto indica que; un 50 % de las calificaciones de esta muestra está por encima de 14 puntos. Una posible interpretación de esta información es que; los egresados de instituciones privadas obtuvieron ligeramente un mejor desempeño, con el tratamiento didáctico, que los egresados de instituciones públicas.

En ambos casos la mediana está más cerca del primer cuartil (Q_1) que del tercero (Q_3): ésto indica que la distribución es *asimétrica positiva* o sesgada hacia la derecha. Es decir, más del 50 % de los datos son inferiores al valor de la media aritmética.

Rango intercuartílico (IQR): se observa una mayor dispersión para la región central de la distribución en los egresados de instituciones privadas y una mayor concentración en la región central de la distribución para los egresados de instituciones públicas.

No se presentan datos atípicos en ninguna de las muestras.

A continuación, se presenta la media aritmética y la desviación típica para cada subgrupo.

Tabla 32

Resultados para los egresados de instituciones privadas y públicas.

G_{pri}	$G_{púb}$
$n_{pri} = 20$	$n_{púb} = 19$
$\bar{X}_{pri} = 14,85$	$\bar{X}_{púb} = 14,05$
$S_{pri} = 3,18$	$S_{púb} = 2,93$

Nota: Fuente: Propia (2024).

Aquí se observa otra aplicación del *Bootstrap* de interés a la investigación. Cuando se está en presencia de una muestra pequeña ($n < 30$) el remuestreo es una herramienta de valor considerable, gracias a él se logra realizar un número elevado (10.000) de simulaciones; con estas simulaciones calculadas se garantiza, por el Teorema del Límite Central, que los datos muestrales siguen una distribución normal y, además, se asegura desde el punto de vista de las probabilidades que la muestra de trabajo es representativa con respecto a la población de interés.

Remuestreo con la técnica bootstrap. A continuación, se muestran los valores generados a partir del remuestreo que se le realizó a cada subgrupo (o muestra intencional).

Tabla 33

Resultados del remuestreo con diez mil (10.000) *repeticiones*.

G_{pri}	$G_{púb}$

$\overline{\boldsymbol{x}}_{B_{pri}} = \mathbf{14,84}$	$\overline{\boldsymbol{x}}_{B_{púb}} = \mathbf{14,19}$
$\boldsymbol{S}_{B_{pri}} = \mathbf{0,6954}$	$\boldsymbol{S}_{B_{púb}} = \mathbf{0,9014}$

Nota: Fuente: Propia (2024).

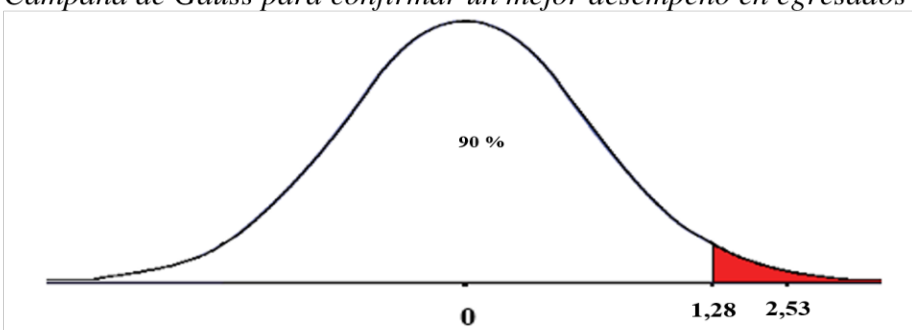
Se usó $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{10}$ % ($\boldsymbol{Z_\alpha} \cong \mathbf{1,28}$). Se quiere realizar una prueba de la forma:

$$\begin{cases} H_{0:2}\colon \mu_{\boldsymbol{B_{pri}}} - \mu_{\boldsymbol{B_{púb}}} = 0\,, \\ \qquad\qquad vs. \\ H_a\colon \mu_{\boldsymbol{B_{pri}}} - \mu_{\boldsymbol{B_{púb}}} > 0\,. \end{cases}$$

$$\boldsymbol{z_{Cál.}} = \frac{\left|\bar{x}_{\boldsymbol{B_{pri}}} - \bar{x}_{\boldsymbol{B_{púb}}}\right|}{\sqrt{\frac{S^2_{\boldsymbol{B_{pri}}}}{n_{pri}} + \frac{S^2_{\boldsymbol{B_{púb}}}}{n_{púb}}}} = \frac{\mathbf{|14,84 - 14,19|}}{\sqrt{\frac{\mathbf{0,6954^2}}{\mathbf{20}} + \frac{\mathbf{0,9014^2}}{\mathbf{19}}}} \cong \mathbf{2,53}\,.$$

Figura 30

Campana de Gauss para confirmar un mejor desempeño en egresados de privadas.



Nota: Fuente: Propia (2024).

Al nivel de significación del $\mathbf{10}$ % se rechaza la $\boldsymbol{H_{0:2}}$ y, por tanto, se acepta la $\boldsymbol{H_a}$. Es decir, con los cálculos realizados se ha confirmado que; la *técnica alternativa* concebida para esta investigación fue mejor aprovechada por el grupo de estudiantes que provienen de instituciones privadas. □

CAPÍTULO VIII

“*Las matemáticas son axiomas y definiciones, y lo que de unos y otras podamos extraer mediante las reglas de la lógica*”.
Eduardo Sáenz de Cabezón

EL CONSTRUCTO TEÓRICO

El corpus teórico de este trabajo está basado en la construcción de un *sistema axiomático formal* para la *descomposición en fracciones simples* utilizando la *técnica alternativa* concebida en esta investigación.

Interpretación de un Sistema Axiomático

Según Campos (2008); para obtener interpretaciones se da contenido a las formas del sistema: términos no definidos y relaciones dadas entre los términos no definidos. Las formas proposicionales del sistema, en particular los axiomas, deben convertirse en proposiciones verdaderas, semánticamente hablando. Esta adecuación de un *sistema axiomático formal* a una interpretación, realización o modelo, tiene generalmente problemas peculiares, que requieren ser resueltos diligentemente para que las relaciones abstractas sean significativas en la situación de interés al ser concretadas.

La matemática pura tiene problemas específicos, la matemática interpretada tiene igualmente los suyos. Es una razón para distinguir la una de la otra. Una estructura, en la interpretación, organiza elementos observables, da sentido a comportamientos dispersos, así permite entenderlos de una manera; al cambiar de estructura es posible que pueda entendérselos de otra manera. La matemática cumple así su función social de lenguaje para traducir una situación, para comunicar, de instrumento científico y de cantera de explicaciones. Para poder dar diversos contenidos, es menester solamente disponer de las formas: es el sentido de la evolución hacia lo estructural.

Definiciones Involucradas en los Sistemas Axiomáticos Formales

***Definición* 8.1**. Un objeto es una unidad elemental sobre la que se pueden hacer observaciones y cuya estructura interna no existe o se puede desconocer. Un sistema es una colección de objetos relacionados entre sí. Una descripción es una representación de un fenómeno por medio de un lenguaje, en nuestro caso, matemático, en el que se explican sus distintas etapas, partes o cualidades. Un modelo es una descripción matemática de un sistema (Moya y Rojas, 2020).

El método axiomático consiste sencillamente en coleccionar todos aquellos conceptos básicos, así como, todos aquellos hechos básicos a partir de los cuales se han de derivar por definición y deducción respectivamente todos los conceptos y teoremas de una ciencia, Weyl (1965) citado por Contreras (2017).

Siguiendo la idea anterior, se presenta una definición de sistema axiomático formal tal como la plantea Rojo (2001).

***Definición* $\mathbf{8.2}$.** (*Sistema Axiomático Formal*). Un sistema axiomático formal, en matemática, consiste en los siguientes objetos:

$\boldsymbol{i}$) *Lenguaje*. Símbolos y reglas de formación de expresiones válidas.

$\boldsymbol{ii}$) *Términos primitivos*. Éstos están constituidos por elementos, conjuntos, o relaciones cuya naturaleza no queda especificada de antemano. Al respecto, Medina (s.f.) comenta que; éstos son términos iniciales que no se definen.

$\boldsymbol{iii}$) *Axiomas*. Son funciones proposicionales cuantificadas, relativas a las variables que representan a los términos primitivos; es decir, son propiedades a las que deben satisfacer dichos términos primitivos. Los axiomas definen implícitamente a éstos. Medina (s.f.) dice que; los axiomas son afirmaciones que se asumen como verdaderas, sin demostración.

Al respecto, Blumenthal (s.f.) dice que; "cada sistema de esta especie tiene como base un conjunto de proposiciones sin demostración. Estas proposiciones reciben el nombre de axiomas, postulados o, simplemente, hipótesis" (p. 4).

$\boldsymbol{iv}$) *Definiciones*. Éstas están conformadas por los términos no primitivos.

$\boldsymbol{v}$) *Teoremas*. Éstos son propiedades que se deducen, a partir, de los axiomas. Para Medina (s.f.) los teoremas son afirmaciones que se derivan (se demuestran), a partir de los axiomas, utilizando las reglas de inferencia, es decir; las leyes establecidas en la Lógica bivalente.

$\boldsymbol{vi}$) *Reglas de inferencia*. Reglas (o leyes), provenientes de la Lógica bivalente, que indican cómo se transforman ciertas expresiones, de entrada, en nuevas expresiones.

Según Medina (s.f.), desde un punto de vista lógico: *proposición*, *teorema*, *corolario* y *lema* son sinónimos; éstos son afirmaciones que requieren ser demostradas. Se suelen usar estos términos para indicar importancia y/o dificultad. El uso de uno u otro término por lo general es subjetivo y depende del tratamiento que se dé del tema considerado.

Proposición: Afirmación importante.

Teorema: Afirmación más importante que una *proposición*; normalmente su prueba es más compleja que la de una *proposición* o un *lema*.

Corolario: Consecuencia rápida de un resultado (éste puede ser de un teorema) que recién se ha probado.

Lema: Afirmación auxiliar (su demostración suele ser más sencilla que la de un teorema) que se utiliza en la demostración de otros teoremas o proposiciones.

También es común el uso de *conjetura* para referirse a una afirmación que no se ha demostrado, pero que se sospecha que es verdadera (la conjetura de Goldbach, por ejemplo).

En el mismo sentido, se usa *hipótesis* (por ejemplo, la hipótesis de Riemann). No debe confundirse esta acepción de «hipótesis» con la de premisa de una demostración.

El Modelo Axiomático Formal de la Técnica Alternativa para la DFS

En el siguiente apartado se va a desarrollar el proceso de axiomatización de la *descomposición en fracciones simples* utilizando la *técnica alternativa* creada para la presente investigación.

Antes de dar inicio, es importante comentar que; una de las demostraciones más sencillas para la *descomposición en fracciones simples* (o parciales) es usando la teoría de funciones de *variable compleja*. El modelo propuesto en esta investigación tiene un enfoque diferente.

En ese sentido; el *modelo axiomático formal* que se presenta a continuación está sustentado en el sistema axiomático formal de los números reales. Es decir; cualquier axioma, proposición o teorema, entre otros, perteneciente al sistema axiomático de los números reales que se necesite, y que no pertenezca directamente a la axiomatización del modelo que aquí se presenta, será invocado y utilizado sin problema alguno.

Lenguaje. El lenguaje a utilizar en esta axiomatización es un lenguaje de tipo algebraico. Entre los símbolos a utilizar se encuentran los signos ($+$, $-$, $\cdot$, $/$), se realizarán las demostraciones de las distintas proposiciones utilizando literales (o letras) para lograr una generalización de los casos planteados. Toda demostración iniciará con la palabra "Demostración" y el símbolo (■) será usado para indicar el final de la misma.

Término Primitivo. El literal $\boldsymbol{x}$.

Axiomas. A continuación, se presenta el conjunto de axiomas que fue necesario para desarrollar el modelo axiomático formal propuesto en este trabajo de investigación.

Axioma $\mathbf{8.1}$. Escribir la expresión original como la diferencia (o resta) de los recíprocos de cada factor del denominador.

***Axioma* $\mathbf{8.2}$**. En cada fracción colocar en el numerador el coeficiente del término de mayor grado del denominador de la misma fracción.

***Axioma* $\mathbf{8.3}$**. Realizar la suma algebraica de fracciones.

***Axioma* $\mathbf{8.4}$**. Multiplicar por el recíproco (o inverso multiplicativo) del numerador.

Definiciones. Para ver las definiciones que se requieren en el desarrollo del modelo axiomático formal ir a los capítulos II y IV.

Antes de dar inicio al proceso de demostración de cada proposición que surgió de este modelo axiomático, el autor quiere aclarar lo siguiente; las demostraciones hechas acá se realizaron utilizando procesos recursivos y, en ese sentido, se sabe que otra forma de demostración para estas proposiciones sería utilizando el método de *Inducción Matemática*. Sin embargo, se prefirió no usarlo con el objetivo de reservar esa tarea para futuros trabajos y/o publicaciones.

***Proposición* $\mathbf{8.1}$**. Demostrar que al realizar la *descomposición en fracciones simples* de la expresión:

$$\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}_2)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}_1)^{\boldsymbol{k}}}$$

donde $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 1)$. El resultado es de la forma;

$$\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{k}} \frac{\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{i}}}{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}_1)^{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{i}+\mathbf{1}}}+\frac{\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{0}}}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}_2}$$

y los α_i $(\forall i = 0,1, \ldots, k)$ no son obtenidos por medio de *sistemas de ecuaciones*.

<u>Demostración</u>.

Se comenzará con la *descomposición en fracciones simples* para el caso $k = 1$.

$$\frac{1}{(x+b_2)(x+b_1)} .$$

En este caso, se hace:

$$\frac{1}{x+b_1}-\frac{1}{x+b_2}=\frac{x+b_2-(x+b_1)}{(x+b_1)(x+b_2)}=\frac{b_2-b_1}{(x+b_1)(x+b_2)} .$$

De lo anterior, al multiplicar ambos miembros por $1/(b_2-b_1)$, se tiene que;

$$\frac{1}{(x+b_2)(x+b_1)}=\frac{1}{b_2-b_1}\left(\frac{1}{x+b_1}-\frac{1}{x+b_2}\right).$$

Es decir, que; la descomposición para este caso viene dada por:

$$\frac{1}{(x+b_2)(x+b_1)}= \frac{1}{b_2-b_1}\left(\frac{1}{x+b_1}\right)-\frac{1}{b_2-b_1}\left(\frac{1}{x+b_2}\right). \quad (\mathbf{1})$$

En este primer caso, se tiene:

$$\alpha_0 = \frac{1}{b_2 - b_1} \quad \text{y} \quad \alpha_1 = \frac{-1}{b_2 - b_1} \ .$$

Se observa que los coeficientes α_0 y α_1 son obtenidos sin usar *sistemas de ecuaciones*.

Ahora, se encontrará la descomposición en fracciones simples para $k = 2$.

$$\frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)^2} \ .$$

Sacando como factor $1/(x + b_1)$, se obtiene:

$$\frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)^2} = \frac{1}{x + b_1}\left[\frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)}\right].$$

Al usar la descomposición (**1**), en la expresión anterior, se tiene:

$$\frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)^2} = \frac{1}{x + b_1}\left[\frac{1}{b_2 - b_1}\left(\frac{1}{x + b_1}\right) - \frac{1}{b_2 - b_1}\left(\frac{1}{x + b_2}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)^2} = \frac{1}{b_2 - b_1}\frac{1}{(x + b_1)^2} - \frac{1}{b_2 - b_1}\ \frac{1}{(x + b_1)(x + b_2)} \ .$$

Usando nuevamente la descomposición (**1**) es posible obtener:

$$\frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)^2} = \frac{1}{b_2 - b_1}\frac{1}{(x + b_1)^2} -$$

$$\frac{1}{b_2 - b_1}\ \left[\frac{1}{b_2 - b_1}\left(\frac{1}{x + b_1}\right) - \frac{1}{b_2 - b_1}\left(\frac{1}{x + b_2}\right)\ \right].$$

Finalmente, la descomposición en este caso está dada por:

$$\frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)^2} = \frac{1}{b_2 - b_1}\frac{1}{(x + b_1)^2} -$$

$$\frac{1}{(b_2 - b_1)^2}\ \frac{1}{x + b_1} + \frac{1}{(b_2 - b_1)^2}\ \frac{1}{x + b_2} \ . \qquad (\mathbf{2})$$

Ahora, se encontrará, también, la descomposición para el caso $k = 3$.

$$\frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)^3} \ .$$

Lo anterior puede escribirse como;

$$\frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)^3} = \frac{1}{x + b_1}\left[\frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)^2}\right].$$

Al usar la descomposición obtenida en (**2**), dentro de los corchetes, se tiene:

$$\frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)^3} = \frac{1}{x + b_1}$$

$$\left[\frac{1}{b_2-b_1}\frac{1}{(x+b_1)^2}-\frac{1}{(b_2-b_1)^2}\,\frac{1}{x+b_1}+\frac{1}{(b_2-b_1)^2}\,\frac{1}{x+b_2}\right].$$

Lo anterior se puede escribir como:

$$\frac{1}{(x+b_2)(x+b_1)^3}=\frac{1}{b_2-b_1}\frac{1}{(x+b_1)^3}-$$

$$\frac{1}{(b_2-b_1)^2}\,\frac{1}{(x+b_1)^2}+\frac{1}{(b_2-b_1)^2}\,\frac{1}{(x+b_1)(x+b_2)}\ .$$

Usando la descomposición ($\mathbf{1}$), en la igualdad anterior, se tiene;

$$\frac{1}{(x+b_2)(x+b_1)^3}=\frac{1}{b_2-b_1}\frac{1}{(x+b_1)^3}-\frac{1}{(b_2-b_1)^2}\frac{1}{(x+b_1)^2}+$$

$$\frac{1}{(b_2-b_1)^2}\left[\frac{1}{b_2-b_1}\left(\frac{1}{x+b_1}\right)-\frac{1}{b_2-b_1}\left(\frac{1}{x+b_2}\right)\right].$$

Pero esto puede escribirse como:

$$\frac{1}{(x+b_2)(x+b_1)^3}=\frac{1}{b_2-b_1}\frac{1}{(x+b_1)^3}-$$

$$\frac{1}{(b_2-b_1)^2}\,\frac{1}{(x+b_1)^2}+\frac{1}{(b_2-b_1)^3}\frac{1}{x+b_1}-\frac{1}{(b_2-b_1)^3}\,\frac{1}{x+b_2}\ .$$

Si se repite el mismo procedimiento es posible arribar a la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\frac{1}{(x+b_2)(x+b_1)^k}=\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{i+1}}{(b_2-b_1)^i}\frac{1}{(x+b_1)^{k-i+1}}+\frac{(-1)^k}{(b_2-b_1)^k}\,\frac{1}{x+b_2}}\ .$$

Esto prueba la *Proposición* $\mathbf{8.1}$, donde;

$$\boldsymbol{\alpha_i}=\frac{(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{i+1}}}{(\boldsymbol{b_2-b_1})^{\boldsymbol{i}}}\ (\text{con } i=1,2,\dots,k)\ \ \text{y}\ \ \boldsymbol{\alpha_0}=\frac{(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{k}}}{(\boldsymbol{b_2-b_1})^{\boldsymbol{k}}}\ .$$

En el desarrollo de la prueba, se observa que ninguno de los coeficientes de la descomposición fue obtenido usando *sistemas de ecuaciones*. ■ QED

Proposición $\mathbf{8.2}$. Demostrar que al realizar la *descomposición en fracciones simples* de la expresión:

$$\boldsymbol{\frac{1}{(x+b_2)(x^2+d_1x+e_1)^k}}$$

donde $b_2,\ d_1,\ e_1 \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}\ (k \geq 1)$. El resultado es de la forma;

$$\boldsymbol{\frac{\alpha_0}{x+b_2}+\sum_{i=1}^{k}\frac{\beta_i x+\gamma_i}{(x+b_1)^{k-i+1}}}$$

$y\ \ \beta_i, \gamma_i\ (\forall i = 1, \dots, k)$ y α_0 no son obtenidos usando *sistemas de ecuaciones*.

Demostración.

Se iniciará con la *descomposición en fracciones simples* para el caso $k = 1$:

$$\frac{1}{(x+b_2)(x^2+d_1x+e_1)} \, .$$

Haciendo la diferencia, se tiene;

$$\frac{1}{x+b_2} - \frac{x+(d_1-b_2)}{x^2+d_1x+e_1} =$$

$$\frac{x^2+d_1x+e_1-[x^2+(d_1-b_2)x+b_2x+(d_1-b_2)b_2]}{(x+b_2)(x^2+d_1x+e_1)} =$$

$$\frac{{b_2}^2-d_1b_2+e_1}{(x+b_1)(x+b_2)(x+b_2)(x^2+d_1x+e_1)} \, .$$

De lo anterior, se tiene que:

$$\frac{1}{(x+b_2)(x^2+d_1x+e_1)} = \frac{1}{{b_2}^2-d_1b_2+e_1}\left[\frac{1}{x+b_2} - \frac{x+(d_1-b_2)}{x^2+d_1x+e_1}\right].$$

Es decir que;

$$\frac{1}{(x+b_2)(x^2+d_1x+e_1)} =$$

$$\frac{1}{{b_2}^2-d_1b_2+e_1}\left(\frac{1}{x+b_2}\right) - \frac{1}{{b_2}^2-d_1b_2+e_1}\left[\frac{x+(d_1-b_2)}{x^2+d_1x+e_1}\right]. \qquad (\mathbf{1})$$

En este primer caso, se tienen los coeficientes:

$$\alpha_0 = \frac{1}{{b_2}^2-d_1b_2+e_1}, \qquad \beta_1 = -\frac{1}{{b_2}^2-d_1b_2+e_1} \quad \text{y} \quad \gamma_1 = -\frac{d_1-b_2}{{b_2}^2-d_1b_2+e_1} \, .$$

Y como se observó, éstos fueron obtenidos sin usar *sistemas de ecuaciones*.

Si se repite este procedimiento y se usa la fórmula ($\mathbf{1}$) se tiene que;

$$\boldsymbol{\frac{1}{(x+b_2)(x^2+d_1x+e_1)^k} = \frac{1}{\left({b_2}^2-d_1b_2+e_1\right)^k}\frac{1}{x+b_2} -}$$

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\left({b_2}^2-d_1b_2+e_1\right)^{k-i+1}}\frac{x+(d_1-b_2)}{(x^2+d_1x+e_1)^i}} \, .$$

Donde los coeficientes que vienen dados por las expresiones:

$$\boldsymbol{\alpha_0 = \frac{1}{\left({b_2}^2-d_1b_2+e_1\right)^k} \ ; \ \beta_1 = -\frac{1}{\left({b_2}^2-d_1b_2+e_1\right)^{k-i+1}}}$$

$$\text{y} \quad \boldsymbol{\gamma_1 = -\frac{d_1 - b_2}{\left(b_2{}^2 - d_1 b_2 + e_1\right)^i}}$$

no fueron obtenidos usando *sistemas de ecuaciones*. ■ QED

***Lema* 8. 1**. Demostrar que la siguiente igualdad se verifica

$$\boldsymbol{\frac{1}{(x^2 + d_2 x + e_2)(x^2 + d_1 x + e_1)} = \delta\ \frac{x + (d_2 - b)}{x^2 + d_2 x + e_2} - \delta\ \frac{x + (d_1 - b)}{x^2 + d_1 x + e_1}}$$

donde $b\ ,\ d_1\ ,\ d_2\ ,\ e_1\ ,\ e_2\ \in\ \mathbb{R}\ ;\ d_1 \neq d_2\ ;\ \delta = \frac{1}{(d_2 - d_1)(b^2 - d_1 b + e_1)}$.

Demostración.

$$\frac{1}{(x^2 + d_2 x + e_2)(x^2 + d_1 x + e_1)} =$$

$$\frac{1}{(d_2 - d_1)x - (e_2 - e_1)}\left(\frac{1}{x^2 + d_1 x + e_1} - \frac{1}{x^2 + d_2 x + e_2}\right).$$

Pero;

$$\frac{1}{[(d_2 - d_1)x - (e_2 - e_1)](x^2 + d_1 x + e_1)} = \frac{1}{(d_2 - d_1)}\left[\frac{1}{(x + b)(x^2 + d_1 x + e_1)}\right]$$

$$\frac{1}{[(d_2 - d_1)x - (e_2 - e_1)](x^2 + d_1 x + e_1)} = \frac{1}{(d_2 - d_1)}$$

$$\left[\frac{1}{x + b} - \frac{x + (d_1 - b)}{x^2 + d_1 x + e_1}\right]\frac{1}{b^2 - d_1 b + e_1}\ .$$

En forma análoga;

$$\frac{1}{[(d_2 - d_1)x - (e_2 - e_1)](x^2 + d_2 x + e_2)} = \frac{1}{(d_2 - d_1)}$$

$$\left[\frac{1}{x + b} - \frac{x + (d_2 - b)}{x^2 + d_2 x + e_2}\right]\frac{1}{b^2 - d_2 b + e_2}\ .$$

Donde $b = \frac{e_2 - e_1}{d_2 - d_1}$.

Por otro lado, no es difícil probar que;

$$\frac{1}{b^2 - d_1 b + e_1} = \frac{1}{b^2 - d_2 b + e_2}\ .$$

De esto resulta que;

$$\frac{1}{(x^2 + d_2 x + e_2)(x^2 + d_1 x + e_1)} =$$

$$\frac{1}{(d_2 - d_1)}\left[\frac{x + (d_2 - b)}{x^2 + d_2 x + e_2} - \frac{x + (d_1 - b)}{x^2 + d_1 x + e_1}\right]\frac{1}{b^2 - d_1 b + e_1} =$$

$$\frac{1}{(x^2+d_2x+e_2)(x^2+d_1x+e_1)}=\delta\ \frac{x+(d_2-b)}{x^2+d_2x+e_2}-\delta\ \frac{x+(d_1-b)}{x^2+d_1x+e_1}\quad \blacksquare\ QED$$

donde $\delta=\frac{1}{(d_2-d_1)(b^2-d_1b+e_1)}$.

***Proposición* $\mathbf{8.3}$**. Demostrar que al realizar la *descomposición en fracciones simples* de la expresión:

$$\boldsymbol{\frac{1}{(x^2+d_2x+e_2)(x^2+d_1x+e_1)^k}}$$

donde d_1, d_2, e_1, e_2 $\in$ $\mathbb{R}$ y k $\in$ $\mathbb{N}$ $(k \geq 1)$. Es posible obtener;

$$\boldsymbol{\frac{1}{(x^2+d_2x+e_2)(x^2+d_1x+e_1)^k}=\frac{\mu_0x+\rho_0}{x^2+d_2x+e_2}+\sum_{i=1}^{k}\frac{\mu_ix+\rho_i}{(x^2+d_1x+e_1)^i}}$$

sin usar *sistemas de ecuaciones*.

Demostración.

Primero se hará la *descomposición en fracciones simples* para el caso $k = 2$:

$$\frac{1}{(x^2+d_2x+e_2)(x^2+d_1x+e_1)^2}\ .$$

En efecto;

$$\frac{1}{(x^2+d_2x+e_2)(x^2+d_1x+e_1)^2}=\frac{1}{x^2+d_1x+e_1}$$

$$\left[\frac{1}{(x^2+d_2x+e_2)(x^2+d_1x+e_1)}\right]=$$

$$\frac{1}{x^2+d_1x+e_1}\ \left[\delta\ \frac{x+(d_2-b)}{x^2+d_2x+e_2}-\delta\ \frac{x+(d_1-b)}{x^2+d_1x+e_1}\right]=$$

$$\delta\ \frac{x+(d_2-b)}{(x^2+d_1x+e_1)(x^2+d_2x+e_2)}-\delta\ \frac{x+(d_1-b)}{(x^2+d_1x+e_1)^2}=$$

$$\delta\,[x+(d_2-b)]\,\frac{1}{(x^2+d_1x+e_1)(x^2+d_2x+e_2)}-\delta\ \frac{x+(d_1-b)}{(x^2+d_1x+e_1)^2}\ .$$

Al usar el *Lema* $\mathbf{8.1}$, en la última expresión, se tiene que;

$$\frac{1}{(x^2+d_2x+e_2)(x^2+d_1x+e_1)^2}=$$

$$\delta\,[x+(d_2-b)]\left[\delta\ \frac{x+(d_2-b)}{x^2+d_2x+e_2}-\delta\ \frac{x+(d_1-b)}{x^2+d_1x+e_1}\right]-\delta\ \frac{x+(d_1-b)}{(x^2+d_1x+e_1)^2}=$$

$$\delta^2\,\frac{[x+(d_2-b)]^2}{x^2+d_2x+e_2}-\frac{[x+(d_2-b)][x+(d_1-b)]}{x^2+d_1x+e_1}-\delta\ \frac{x+(d_1-b)}{(x^2+d_1x+e_1)^2}=$$

$$\delta^2 + \delta^2 \frac{(d_2 - 2b)x + [(d_2 - b)^2 - e_2]}{x^2 + d_2x + e_2} -$$

$$\left\{\delta^2 + \delta^2 \frac{(d_2 - 2b)x + (d_1 - b)(d_2 - b) - e_1}{x^2 + d_1x + e_1}\right\} - \delta \; \frac{x + (d_1 - b)}{(x^2 + d_1x + e_1)^2} \; .$$

Finalmente,

$$\frac{1}{(x^2 + d_2x + e_2)(x^2 + d_1x + e_1)^2} =$$

$$\delta^2 \frac{(d_2 - 2b)x + \varepsilon_1}{x^2 + d_2x + e_2} - \delta^2 \frac{(d_2 - 2b)x + \varepsilon_2}{x^2 + d_1x + e_1} - \delta \; \frac{x + (d_1 - b)}{(x^2 + d_1x + e_1)^2}$$

donde;

$$\varepsilon_1 = (d_2 - b)^2 - e_2 \;\; ; \;\; \varepsilon_2 = (d_1 - b)(d_2 - b) - e_1 \;\; \text{y}$$

$$\delta = \frac{1}{(d_2 - d_1)(b^2 - d_1b + e_1)} \; .$$

Este procedimiento puede repetirse k veces y así obtener la expresión que se muestra, sin usar *sistemas de ecuaciones*.

$$\boldsymbol{\frac{1}{(x^2 + d_2x + e_2)(x^2 + d_1x + e_1)^k} = \frac{\mu_0 x + \rho_0}{x^2 + d_2x + e_2} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\mu_i x + \rho_i}{(x^2 + d_1x + e_1)^i}} \; . \quad \blacksquare \; QED$$

***Teorema* $\mathbf{8.1}$**. Demostrar que la expresión

$$\boldsymbol{\frac{1}{(x + b_2)^n (x + b_1)^k}}$$

donde b_1 , b_2 $\in \mathbb{R}$ y $n, k \in \mathbb{N}$ $(n, k \geq 1)$ puede ser *descompuesta en fracciones simples* sin emplear *sistemas de ecuaciones*.

<u>Demostración</u>.

Se debe probar que, se puede escribir;

$$\frac{1}{(x + b_2)^n (x + b_1)^k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{(x + b_2)^i} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_j}{(x + b_1)^j}$$

donde α_i $(i = 1, \dots, n)$ y β_j $(j = 1, \dots, k)$ se pueden obtener sin usar *sistemas de ecuaciones*.

En efecto de acuerdo a la *Proposición* $\mathbf{8.1}$, se tiene;

$$\boldsymbol{\frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)^k} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{(x + b_1)^{k-i+1}} + \frac{\alpha_0}{x + b_2}}$$

donde;

$$\boldsymbol{\alpha_i} = \frac{(-\mathbf{1})^{i+1}}{(\boldsymbol{b_2} - \boldsymbol{b_1})^i} \text{ con } i = 1,2,\dots,k \text{ y } \boldsymbol{\alpha_0} = \frac{(-\mathbf{1})^{k}}{(\boldsymbol{b_2} - \boldsymbol{b_1})^k} .$$

Por lo que;

$$\frac{1}{(x+b_2)^2(x+b_1)^k} = \frac{1}{x+b_2}\left[\frac{1}{(x+b_2)(x+b_1)^k}\right] =$$

$$\frac{1}{x+b_2}\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{\boldsymbol{\alpha_i}}{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b_1})^{k-i+1}} + \frac{\boldsymbol{\alpha_0}}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b_2}}\right].$$

Es decir que;

$$\frac{1}{(x+b_2)^2(x+b_1)^k} = \sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{\alpha_i}\underbrace{\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b_2})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b_1})^{k-i+1}}}_{(\mathbf{A})} + \frac{\boldsymbol{\alpha_0}}{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b_2})^2} .$$

Pero a cada término de la forma ($\mathbf{A}$) en la sumatoria se le puede aplicar la *Proposición* $\mathbf{8.1}$ y así se obtiene una descomposición para cada expresión de la forma:

$$\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b_2})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b_1})^{k-i+1}} .$$

Este procedimiento puede repetirse en forma recursiva hasta obtener una *descomposición en fracciones simples*, sin usar *sistemas de ecuaciones*, para la expresión:

$$\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b_2})^n(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b_1})^k} . \quad \blacksquare\ QED$$

Teorema $\mathbf{8.2}$. Demostrar que la expresión:

$$\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b_2})^n(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{d_1}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e_1})^k} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\boldsymbol{\alpha_i}}{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b_2})^i} + \sum_{j=1}^{k}\frac{\boldsymbol{\mu_j}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\rho_j}}{(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{d_1}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e_1})^j}$$

$b_2, d_1, e_1 \in \mathbb{R}$; $n, k \in \mathbb{N}\ (n, k \geq 1)$; $\alpha_i, \mu_j, \rho_j \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n\,;\ j = 1, \dots, k)$.

Puede ser *descompuesta en fracciones simples* sin emplear *sistemas de ecuaciones*.

<u>Demostración</u>.

Se siguen las líneas de la demostración del *Teorema* $\mathbf{8.1}$, pero con la novedad que se debe usar la *Proposición* $\mathbf{8.1}$ y la *Proposición* $\mathbf{8.2}$. $\blacksquare\ QED$

Teorema $\mathbf{8.3}$. Demostrar que la expresión:

$$\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{d_2}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e_2})^n(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{d_1}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e_1})^k} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\boldsymbol{\alpha_i x + \beta_i}}{\boldsymbol{(x^2 + d_2 x + e_2)^i}} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\boldsymbol{\mu_j x + \rho_j}}{\boldsymbol{(x^2 + d_1 x + e_1)^j}}$$

con $d_2, d_1, e_1, e_2 \in \mathbb{R}$; $n, k \in \mathbb{N}\ (n, k \geq 1)$; $\alpha_i, \beta_i, \mu_j, \rho_j \in \mathbb{R}$

para $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, k$.

Puede ser *descompuesta en fracciones simples* sin emplear *sistemas de ecuaciones*.

Demostración.

Siguiendo la demostración del *Teorema* $\mathbf{8.1}$ y usando la *Proposición* $\mathbf{8.3}$. ■ QED

Observación $\mathbf{8.1}$. La maquinaria anteriormente expuesta es aplicable al caso:

$$\frac{1}{Q(x)} \ . \quad (\mathbf{8.1})$$

Donde;

$$Q(x) = (\boldsymbol{x + b_1})^{\boldsymbol{n_1}} \ldots \left(\boldsymbol{x + b_p}\right)^{\boldsymbol{n_p}} (\boldsymbol{x^2 + d_1 x + e_1})^{\boldsymbol{m_1}} \ldots (\boldsymbol{x^2 + d_s x + e_s})^{\boldsymbol{m_s}} ;$$

$n_i \in \mathbb{N}\ (i = 1, \ldots, p)$; $m_j \in \mathbb{N}\ (j = 1, \ldots, s)$ y cada $x^2 + d_j x + e_j$ es irreducible en $\mathbb{R}$,

$$\forall j = 1, \ldots, s.$$

Ahora, con el apartado siguiente el autor del presente trabajo cubre el caso más general. A saber; si se quisiera *descomponer en fracciones simples* una expresión de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \ . \quad (\mathbf{8.2})$$

En ese sentido, para la expresión ($\mathbf{8.2}$), se consideran los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ con coeficientes reales. Se llamará **función racional propia** a la fracción $P(x)/Q(x)$ donde el grado del polinomio $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$. Cuando $P(x)/Q(x)$ no es propia, de acuerdo al algoritmo de la división de Euclides siempre se podrá escribir;

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

donde $R(x), P_1(x)$ y $Q(x)$ son tales que ahora,

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

es una función racional *propia*.

Lema $\mathbf{8.2}$. Sea $P(x)/Q(x)$ una función racional *propia*. Y sea a una raíz real de multiplicidad $\beta \geq 1$ del polinomio $Q(x)$. En ese sentido; se puede escribir:

$$Q(x) = (x - a)^{\beta} Q_1(x) \ \text{ y } \ Q_1(a) \neq 0,$$

entonces existen $A \in \mathbb{R}$ y un polinomio $P_1(x)$ con coeficientes reales tales que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^{\beta}} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{\beta-1}Q_1(x)},$$

donde $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{\beta-1}Q_1(x)}$ también es *propia*.

<u>Demostración</u>. Es claro que;

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^{\beta}Q_1(x)} \ .$$

Y no menos claro es que;

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left[\frac{P(x)}{(x-a)^{\beta}Q_1(x)} - \frac{A}{(x-a)^{\beta}}\right] + \frac{A}{(x-a)^{\beta}}$$

de lo anterior, se infiere que;

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^{\beta}} + \underbrace{\frac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^{\beta}Q_1(x)}}_{\text{(I)}} \qquad \mathbf{(1)}$$

por definición de fracción racional *propia* el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$. Es obvio que el grado del polinomio $Q_1(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$ (puesto que $\beta \geq 1$) por lo que independientemente de quien sea "A", la fracción

$$\frac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^{\beta}Q_1(x)}$$

es regular.

Se elije ahora "A" de forma tal que "a" sea raíz del polinomio $P(x) - AQ_1(x)$ y, por lo tanto, que este polinomio sea divisible por $x - a$, donde $a \in \mathbb{R}$.

En términos simples, se elije "A" con la condición de que $P(a) - AQ_1(a) = 0$. De este hecho, se infiere que $A = P(a)/Q_1(a)$. Para tal elección de "A" el término (I) del lado derecho en ($\mathbf{1}$) se puede simplificar por $x - a$ y de eso resulta que la fracción ha de ser del tipo:

$$\frac{P_1(x)}{(x-a)^{\beta-1}Q_1(x)} \ .$$

Ya que ella, fue obtenida con la simplificación de una fracción racional *propia* con coeficientes reales por el factor $x - a$, donde $a \in \mathbb{R}$, entonces ella misma también es una función racional *propia* con coeficientes reales. ■ QED

***Observación* $\mathbf{8.2}$**. Si los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$ tienen coeficientes complejos y $z = a$ es una raíz compleja de multiplicidad $\beta \geq 1$ del polinomio $Q(z)$, entonces la descomposición anterior también ocurre; pero el "A" obtenido es en general un número complejo.

Para ilustrar el *Lema* $\mathbf{8.2}$, se considera el siguiente problema.

Ejemplo $\mathbf{8.1}$.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2(x^2+2)} \ .$$

En este caso;

$$P(x) = 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \ \text{ y } \ Q(x) = (x-1)^2(x^2+2)$$

de esto se tiene que $Q_1(x) = x^2 + 2$ con $Q_1(a) \neq 0$ y $a = 1$. De acuerdo al *Lema* $\mathbf{8.2}$ es fácil ver que $A = P(1)/Q_1(1) = 1$, por lo que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 - (x^2+2)}{(x-1)^2(x^2+2)} = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2x^3 + x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2(x^2+2)}.$$

Pero de acuerdo al *Lema* $\mathbf{8.2}$ el numerador es divisible por $x + 1$, por lo que;

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{(x-1)^2} + \underbrace{\frac{2x^2 + 3x + 1}{(x-1)(x^2+2)}}_{(a)} \qquad (\mathbf{1})$$

de donde $P_1(x) = 2x^2 + 3x + 1$ y $A_1 = A = 1$.

Usando nuevamente el *Lema* $\mathbf{8.2}$, pero ahora con el término (a), del lado derecho de $(\mathbf{1})$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^2 + 3x + 1}{(x-1)(x^2+2)}.$$

Aquí;

$$P(x) = 2x^2 + 3x + 1 \ \text{ y } \ Q(x) = (x-1)(x^2+2)$$

de esto se tiene que $Q_1(x) = x^2 + 2$ con $Q_1(a) \neq 0$ y $a = 1$. Y de acuerdo al *Lema* $\mathbf{8.2}$ es fácil ver que $A = P(1)/Q_1(1) = 2$, por lo que;

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2}{x-1} + \frac{2x^2 + 3x + 1 - 2(x^2+2)}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{3x - 3}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x^2+2} \ .$$

Finalmente,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x^2+2} \qquad \square$$

donde $P_1(x) = 3$ y $A_2 = A = 2$.

Ejemplo $\mathbf{8.2}$.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2(x + 1)} \ .$$

Aquí;

$$P(x) = x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8, \ \ Q(x) = (x^2 + 2x + 3)^2(x + 1)$$

y $Q_1(x) = (x^2 + 2x + 3)^2$ con $Q_1(a) \neq 0$ y $a = -1$. Y de acuerdo al *Lema* $\mathbf{8.2}$ es fácil ver qué;

$A = P(-1)/Q_1(-1) = 1$, por lo que;

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x + 1} + \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8 - (x^2 + 2x + 3)^2}{(x^2 + 2x + 3)^2(x + 1)}.$$

Lo anterior equivale a;

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x + 1} + \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8 - (x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 9)}{(x^2 + 2x + 3)^2(x + 1)}.$$

Simplificando, se tiene que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x + 1} + \frac{x - 1}{(x^2 + 2x + 3)^2} \ . \quad \square$$

Lema $\mathbf{8.3}$. Sea $P(x)/Q(x)$ una fracción racional *propia*. Si el número complejo $z_1 = a + ib$ (con a y b números reales, $b \neq 0$), es una raíz de multiplicidad $\alpha \geq 1$ del polinomio $Q(x)$, es decir;

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^\alpha Q_1(x),$$

donde $Q_1(z_1) \neq 0$ y $x^2 + px + q = (x - z_1)(x - \overline{z_1})$, entonces existen números reales M, N y el polinomio $P_1(x)$ con coeficientes reales, tales que;

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\alpha} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\alpha - 1}Q_1(x)}$$

donde la fracción

$$\frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\alpha - 1}Q_1(x)}$$

también es *propia*.

<u>Demostración</u>.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^\alpha Q_1(x)}$$

es claro que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\alpha} + \left[\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^\alpha Q_1(x)} - \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\alpha}\right].$$

Lo anterior puede escribirse como;

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\alpha} + \underbrace{\left[\frac{P(x)-(Mx+N)Q_1(x)}{(x^2+px+q)^\alpha Q_1(x)}\right]}_{\text{(A)}}. \quad (\mathbf{1})$$

Además, el término (A) del lado derecho en ($\mathbf{1}$), también es una fracción racional *propia*.

Se escogerá a "M" y "N" de forma tal que el numerador de esta fracción sea divisible por

$$x^2+px+q = (x-z_1)(x-\overline{z_1}).$$

Para ello; basta elegir "M" y "N" de forma tal que z_1 y $\overline{z_1}$ son raíces de la expresión:

$$P(x)-(Mx+N)Q_1(x).$$

De ésto se tiene que; este polinomio es divisible por x^2+px+q. Así, sea

$$P(z_1)-(Mz_1+N)Q_1(z_1)=0.$$

Por lo que;

$$Mz_1+N = P_1(z_1)/Q_1(z_1),$$

donde $Q_1(z_1)\neq 0$.

Sea $z_1 = a+ib$, $P_1(z_1)/Q_1(z_1) = A+iB$, entonces

$$A+iB = Mz_1+N = M(a+ib)+N.$$

De lo anterior, es posible inferir que;

$$M = \frac{B}{b} \text{ y } N = A - \frac{a}{b}B.$$

Para estos valores de "M" y "N" el polinomio

$$P(x)-(Mx+N)Q_1(x)$$

es divisible por x^2+px+q. Al simplificar el término (A) del lado derecho en ($\mathbf{1}$) se obtiene una fracción del tipo;

$$\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{\alpha-1}Q_1(x)}$$

esta fracción racional también es *propia* con coeficientes reales. ■ QED

Para ilustrar el *Lema* $\mathbf{8.3}$, se considera el siguiente ejemplo.

Ejemplo $\mathbf{8.3}$.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{3x^4+2x^3+7x^2+2x+3}{(x^2+1)^2(x^2+x+1)}.$$

En este caso;

$$P(x) = 3x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 2x + 3 \;\text{ y }\; Q(x) = (x^2+1)^2(x^2+x+1)$$

de esto se tiene que $Q_1(x) = x^2 + x + 1$ con $Q_1(i) \neq 0$ y $a = i$. De acuerdo al *Lema* $\mathbf{8.3}$ es fácil ver que $A + Bi = P(i)/Q_1(i) = 3(i)^4 + 2(i)^3 + 7(i)^2 + 2(i) + 3/[(i)^2 + (i) + 1] = i$, por lo que $A = 0, B = 1 \Longrightarrow M = 1$ y $N = 0$. En ese sentido;

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 2x + 3 - x(x^2+x+1)}{(x-1)^2(x^2+2)} \; .$$

En consecuencia, se tiene que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3x^4 + x^3 + 6x^2 + x + 3}{(x^2+1)^2(x^2+x+1)} \; .$$

Pero de acuerdo al *Lema* $\mathbf{8.3}$, el numerador es divisible por $x^2 + 1$, es decir que;

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3x^2 + x + 3}{\underbrace{(x^2+1)(x^2+x+1)}_{(i)}} \; . \; (\mathbf{1})$$

Usando nuevamente el *Lema* $\mathbf{8.3}$, pero ahora en el término (i), del lado derecho de $(\mathbf{1})$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{3x^2 + x + 3}{(x^2+1)(x^2+x+1)} \; .$$

En efecto;

$$P(x) = 3x^2 + x + 3 \text{ y } Q(x) = (x^2+1)(x^2+x+1).$$

De esto se tiene que $Q_1(x) = x^2 + x + 1$ con $Q_1(i) \neq 0$ y $a = i$. De acuerdo al *Lema* $\mathbf{8.3}$ es fácil ver que $A + Bi = P(i)/Q_1(i) = 3(i)^2 + (i) + 3/((i)^2 + (i) + 1) = 1$, por lo que;

$$A = 1, B = 0 \Longrightarrow M = 0 \text{ y } N = 1.$$

De ahí que;

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{3x^2 + x + 3 - (x^2+x+1)}{(x^2+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{2x^2+2}{(x^2+1)(x^2+x+1)} \; .$$

Al simplificar se tiene que,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+x+1} \; .$$

Finalmente,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+x+1} \; . \quad \square$$

En el siguiente ejemplo, $P(x)/Q(x)$ es descompuesto de dos (2) formas distintas.

Caso 1: aplicando el *Lema* $\mathbf{8.2}$ y Caso 2: aplicando el *Lema* $\mathbf{8.3}$.

Ejemplo $\mathbf{8.4}$.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{2x^4+x^3+4x^2+1}{(x^2+1)^2(x-1)}\ .$$

Solución.

<u>Caso $\mathbf{1}$</u>: $Q_1(x)=(x^2+1)^2$ y $a=1$.

De acuerdo al *Lema* $\mathbf{8.2}$ es fácil ver que $A=P(1)/Q_1(1)=2$, por lo que;

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{2}{x-1}+\frac{2x^4+x^3+4x^2+1-2(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2(x-1)}=\frac{2}{x-1}+\frac{x^3-1}{(x^2+1)^2(x-1)}\ .$$

Factorizando y simplificando, se tiene que;

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{2}{x-1}+\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2+1)^2(x-1)}=$$

$$\frac{2}{x-1}+\frac{(x^2+1)+x}{(x^2+1)^2}=\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x^2+1}+\frac{x}{(x^2+1)^2}\ . \quad \square$$

De donde;

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{2x^4+x^3+4x^2+1}{(x^2+1)^2(x-1)}\ .$$

<u>Caso $\mathbf{2}$</u>: $Q_1(x)=x-1$ y $z_1=a+bi=i\Longrightarrow a=0$ y $b=1$.

De acuerdo al *Lema* $\mathbf{8.3}$, es fácil ver qué;

$$A+Bi=P(i)/Q_1(i)=[2(i)^4+(i)^3+4(i)^2+1]/[(i)-1]=i,$$

por lo que; $A=0, B=1$.

De lo anterior, se tiene que;

$$M=\frac{B}{b}=\frac{1}{1}=1\ \text{ y }\ N=A-\frac{a}{b}B=0-\frac{0}{1}\times 1\Longrightarrow M=1\ \text{ y }\ N=0.$$

Por lo tanto;

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x}{(x^2+1)^2}+\frac{2x^4+x^3+4x^2+1-x(x-1)}{(x^2+1)^2(x-1)}=$$

$$\frac{x}{(x^2+1)^2}+\frac{2x^4+x^3+3x^2+x+1}{(x^2+1)^2(x-1)}\ .$$

Pero de acuerdo al *Lema* $\mathbf{8.3}$, el polinomio $2x^4+x^3+3x^2+x+1$ es divisible por x^2+1. En efecto, al realizar esta división resulta;

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x}{(x^2+1)^2} + \underbrace{\frac{2x^2+x+1}{(x^2+1)(x-1)}}_{\text{(I)}} \ . \quad (\mathbf{1})$$

Aplicando nuevamente el *Lema* $\mathbf{8.3}$, pero al término (I) en ($\mathbf{1}$)

$$\frac{P^*(x)}{Q^*(x)} = \frac{2x^2+x+1}{(x^2+1)(x-1)} \ .$$

El nuevo $P(x) = 2x^2 + x + 1$ y $Q_1(x) = x - 1$. $z_i = a + bi = i \Longrightarrow a = 0$ y $b = 1$.

De acuerdo al *Lema* $\mathbf{8.3}$, es fácil ver que:

$A + Bi = P(i)/Q_1(i) = [-2 + i + 1]/[i - 1] = 1$, por lo que: $A = 1, B = 0$.

De lo anterior, se tiene que;

$$M = \frac{B}{b} = \frac{0}{1} = 0 \ \text{y} \ N = A - \frac{a}{b}B = 1 - \frac{0}{1} \times 0 \Longrightarrow M = 0 \ \text{y} \ N = 1.$$

Por lo tanto;

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{2x^2+x+1-(x-1)}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{2x^2+2}{(x^2+1)(x-1)} \ .$$

Al simplificar, se tiene que;

$$\frac{P^*(x)}{Q^*(x)} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{2}{x-1} \ . \quad (\mathbf{2})$$

Se sustituye ($\mathbf{2}$) en ($\mathbf{1}$) se tiene:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2} \ . \quad \square$$

Observación $\mathbf{8.3}$. A veces conviene, dependiendo del problema, aplicar alguna de las dos (2) opciones siguientes o incluso combinarlas:

Opción $\mathbf{8.1}$: se escribe la expresión ($\mathbf{8.2}$) como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = r(x) \cdot \frac{1}{Q(x)}$$

después, se aplica la *descomposición en fracciones simples*, con la *técnica alternativa*, a la expresión ($\mathbf{8.1}$), a saber $\frac{1}{Q(x)}$; lo siguiente es efectuar el producto de $r(x)$ por cada término de la descomposición de $\frac{1}{Q(x)}$.

Este producto estará formado por términos de la forma:

$$\frac{p_i(x)}{(a_i x + b_i)^{t_i}} \quad \text{ó} \quad \frac{p_j(x)}{\left(c_j x^2 + d_j x + e_j\right)^{s_j}} \ .$$

Si el grado del numerador [$p(x)$] es mayor o igual al grado del denominador hay que hacer la respetiva división y para finalizar se agrupan los términos semejantes.

***Opción* $\mathbf{8.2}$**: se expresa $r(x)$ como sumas de términos de:

$$(a_i x + b_i)^{k_i} \ \text{ y/o } \ \left(c_j x^2 + d_j x + e_j\right)^{d_j}.$$

Y, luego, se simplifica. Cada término que se obtiene, ahora, es más sencillo de descomponer.

En general; esta última opción es la más sencilla y óptima, no obstante, a veces es conveniente combinar ambas opciones.

CAPÍTULO IX

"*Las Matemáticas obligan a tener un espíritu de poeta, por esa necesidad de ver en profundidad lo que otros no ven*".

Sofia Kovalevskaya

LAS CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En relación, de modo más concreto, con los resultados obtenidos tras la recogida de datos y su análisis, se ponen de manifiesto las siguientes evidencias. En ese sentido; se señalan aquellas afirmaciones, sobre el trabajo del modelo instruccional desarrollado para la *descomposición en fracciones simples*, que este estudio ha constatado.

1.- Con respecto a las Hipótesis de la Investigación:

- En la *hipótesis de investigación* se confirmó que la *descomposición en fracciones simples* desarrollada con un modelo instruccional; constituido por una estrategia didáctica alternativa y la modelación matemática, mejoró significativamente el rendimiento académico inmediato en estudiantes de cálculo II de la FaCyT-UC durante el lapso académico $1 - 2023$. En ese sentido; se destaca que la efectividad de esta *técnica alternativa* permitió en los estudiantes un incremento significativo en sus conocimientos con respecto a la comprensión de la *descomposición en fracciones simples* como concepto matemático.

- En la *hipótesis alternativa* se confirmó que la *descomposición en fracciones simples*, desarrollada con un modelo instruccional, tiene mejor desempeño en estudiantes egresados de instituciones privadas. Con esto se pudiera evidenciar que los salarios del personal docente de las instituciones públicas, junto con las condiciones laborales a las que se enfrentan día a día, han logrado mermar el desempeño académico de estos profesionales frente a sus estudiantes; disminuyendo el nivel de formación de éstos.

2.- En relación a la Teoría APOE:

- El estudio de los esquemas de los estudiantes dentro del marco de la teoría APOE ha mostrado ser, en este y en otros estudios, una herramienta útil y versátil. La información que se obtiene utilizándolos sobre el fenómeno estudiado es muy rica y, a nivel de didáctica, proporciona mucha información al poner de relieve dificultades de los estudiantes que pasan inadvertidas en otro tipo de estudios y en el trabajo en el aula. Los estudios apoyados en la noción de esquema señalan, además, aquellas relaciones en las que hay que hacer mayor énfasis en la docencia y proporcionan indicadores de la manera de hacerlo.

- En el modelo APOE, Asiala *et al*. (1996) consideran que, para conseguir la comprensión de un concepto, es necesaria “una colección de procesos y objetos que pueden ser organizados de manera estructurada formando un esquema”. La modelación de la *descomposición genética* utilizada para describir la práctica del profesor permite dar cuenta de cómo éste construye las situaciones de aula para que los estudiantes puedan llegar a organizar la colección de objetos y procesos que constituyen el esquema de la noción de *descomposición en fracciones simples*.

- El uso de un modelo de *descomposición genética* permite identificar las formas de conocer que el profesor potencia para los distintos conceptos y las relaciones entre ellas. De esta manera, el modo en el que el profesor constituye los diferentes contextos para que los estudiantes tengan la posibilidad de generar los mecanismos de construcción de los significados matemáticos traza una hipótesis de cómo puede desarrollarse el aprendizaje de los estudiantes.

- La *descomposición genética* permite reflexionar sobre el cómo explicar y desarrollar el concepto de *descomposición en fracciones simples*, usando la *técnica alternativa*, en clases para activar en los estudiantes procesos tales como reflexión, abstracción, síntesis, y generalización, que generan la encapsulación de la definición. Así mismo, contribuye a conocer las características de la comprensión del concepto del objeto matemático de estudio.

- Los resultados de esta investigación proporcionan evidencias que muestran que cuando se diseña una estrategia didáctica basada en una teoría de la Educación Matemática, es posible superar las dificultades encontradas en otras investigaciones y se discute, además, cuáles son las causas de algunas de las dificultades encontradas. En ese sentido, los resultados permitieron concluir que; sí es posible diseñar una estrategia didáctica en la que se favorezcan las construcciones necesarias para el aprendizaje del concepto de *descomposición en fracciones simples* mediante actividades diseñadas con la teoría APOE.

- El análisis estadístico de los datos recolectados de este trabajo pone de manifiesto que la *descomposición genética* propuesta mostró ser un modelo válido para predecir y describir las construcciones mentales necesarias para el aprendizaje del concepto de *descomposición en fracciones simples*; mediante la *técnica alternativa* concebida en esta investigación.

- Esta investigación pone de manifiesto, además, que mediante un modelo basado en la teoría APOE de la construcción del concepto de *descomposición en fracciones simples* y el diseño de actividades a partir de él, es posible lograr que los alumnos profundicen en la definición y el significado de la *descomposición en fracciones simples* desarrollada con la *técnica alternativa*.

- La relación inicial entre elementos previos y un nuevo concepto determina la construcción del conocimiento matemático, por las relaciones que pueden establecerse. Cuando estas relaciones no se dan por la ausencia de los mecanismos de asimilación y reacomodación, los conceptos son simplemente mecanizados por los individuos sin que haya una verdadera comprensión de los mismos. Por tanto, la estructuración del conocimiento lógico matemático se ve afectada por dichos factores, ya que, lo que se aprende se va incorporando a las nuevas construcciones o reconstrucciones de un cierto conocimiento.

3.- En relación a la Modelación Matemática:

- Se ha creado un escenario de aprendizaje.

- Se ha fomentado la interactividad entre los discentes.

- La Modelación ha transformado la noción abstracta de la Matemática en situaciones de la vida real, facilitando su aprendizaje y comprensión.

- El trabajo en modelización se ha llevado a cabo con los alumnos trabajando en grupo, maximizando su independencia y autonomía y minimizando las intervenciones del profesor, destacando el papel principal del debate como herramienta para superar los posibles bloqueos y dificultades.

- La enseñanza basada en la resolución de tareas de modelización puede mejorar el desarrollo de las competencias matemáticas en general, y de modelización, en particular, y dejar una huella más sensible en los alumnos, siendo la contextualización del pensamiento matemático, a nuestro entender, la principal razón de dicha mejora. En la modelización, la necesidad de un conocimiento matemático viene a través de la toma de conciencia por parte del alumno de una necesidad, no de la propia disciplina que estudia, sino de un problema externo que el alumno debe resolver y que se relaciona directamente con una realidad que conoce y le concierne. Aunque el alumno necesite, en algunos casos, ayuda para avanzar, la presentación de este conocimiento matemático puede dejar una huella "más sensible", ya que nace de un contexto real.

- El desarrollo de habilidades algebraicas y algorítmicas por sí solas no garantiza la comprensión de los conceptos básicos de las ecuaciones diferenciales ordinarias, ahora bien, si a las habilidades anteriores le agregamos la realización de problemas situacionales de la vida cotidiana, esto llevaría sin lugar a duda al estudiante a crear actividades de «*modelación*», es decir; a plantear y resolver problemas de fenómenos físicos usando «*modelos matemáticos*» ya existentes, a utilizar un leguaje simbólico matemático y a crear procesos de metacognición; mejorando considerablemente la comprensión de las EDOs.

Siguiendo la idea anterior, lo que se propone en esta investigación no es enseñar «*modelización*» como área de aplicaciones matemáticas a otras ciencias sino enseñar Matemáticas usando la «*modelación*».

4.- En relación a la Educación Matemática Realista:

- En la EMR, los estudiantes deben aprender matemáticas desarrollando y aplicando conceptos, y herramientas matemáticas en situaciones de la vida diaria que tengan sentido para ellos, sin perder de vista que, esto impone ciertas exigencias a una situación problema de esta índole entre ellas, se tiene; que la situación problema pueda esquematizarse fácilmente y que desde el punto de vista de los estudiantes, exista la necesidad de construir modelos, en ese sentido, este aspecto demanda que el problema incluya actividades que estimulen modelos como, por ejemplo, planear y ejecutar etapas de soluciones, generar explicaciones, identificar semejanzas, diferencias y hacer predicciones.

- La Educación Matemática Realista, ofrece un marco teórico y metodológico que podría ser fructífero para promover un acercamiento particular a los procesos de «*modelación matemática*» en el aula y materializarse en estrategias de intervención en las aulas de matemáticas. En efecto; esta investigación, en el contexto de la EMR, puede extenderse a otros dominios matemáticos y entrar en contacto con enfoques en Didáctica de las Matemáticas que también abordan desde lo teórico y metodológico la modelación matemática o entrar en contacto con enfoques de la modelación matemática que se realizan en el marco del trabajo con las tecnologías de la información y la comunicación en la universidad.

- Para desarrollar en los alumnos competencias en la construcción y uso de modelos matemáticos, plantearse situaciones problemáticas resulta muy enriquecedor. Ausubel (2002), sostiene que lo importante para lograr un conocimiento significativo es que el nuevo conocimiento se relacione con los anteriores, pero a la vez se introduzcan diferencias entre ellos. En este sentido, se considera que el trabajo con modelos matemáticos sencillos propicia en los estudiantes la adquisición de conocimientos significativos, ahora bien, para resolver una situación problemática más compleja los estudiantes apoyados en modelos sencillos deben elaborar nuevas estrategias, buscar nuevas relaciones, revisar teorías y evaluar la coherencia del producto, como corolario de esto.

- El empleo de este tipo de aplicaciones resulta positivo ya que permiten al estudiante relacionar conocimientos adquiridos con situaciones nuevas, fortaleciendo la relación existente entre la teoría y la realidad, además, ayuda al educando a aprender a interpretar dicha realidad mediante modelos y, por sí solas, presentan actividades motivadoras para los estudiantes pues rompen con los rígidos esquemas de ejemplos clásicos, adicionalmente, el autor de la presente investigación quiere aclarar que; los contextos de los modelos no están necesariamente restringidos a situaciones de la vida real, es decir, el mundo de fantasía de los cuentos de hadas, e incluso el mundo formal de las Matemáticas, son contextos idóneos para problemas, siempre y cuando sean "reales" en la mente de los estudiantes.

- Los procesos formativos han sido más abiertos y flexibles, pudiéndose recapacitar más sobre las ideas trabajadas.

- Los alumnos han interactuado con la información.

- El interés y la motivación de los alumnos a aumentado.

- Se ha potenciado el aprendizaje por descubrimiento.

- Se ha visto incrementada la autonomía de los discentes.

- Se han visualizado afirmaciones de los estudiantes diciendo que el uso de la modelación de la que han podido disponer les ha ayudado a entender el contenido de matemática trabajado.

- Para concluir, investigaciones realizadas han mostrado que la inserción de modelos matemáticos en los procesos de enseñanza-aprendizaje son un medio que propicia un mejor desempeño del estudiante, convirtiéndolos en uno de los principales agentes de cambio.

5.- En relación a la <u>Técnica Alternativa</u> concebida para esta investigación:

Una función racional se puede definir como:

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios en $\mathbb{R}$ de grados arbitrarios. Si el grado de $p(x)$ es mayor o igual al de $q(x)$, siempre es posible escribir:

$$R(x) = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \ .$$

La igualdad anterior es gracias al algoritmo de la división de Euclides, donde ahora;

$$\text{grado}[r(x)] < \text{grado}[q(x)] \ .$$

La *técnica alternativa* propuesta en este trabajo es eficiente para *descomponer en fracciones simples* funciones racionales del tipo:

$$R(x) = \frac{1}{q(x)} \ .$$

Sin pérdida de generalidad, se supondrá que $q(x)$ se puede escribir como:

$$q(x) = (x + b_1)^{t_1} \dots (x + b_n)^{t_n} (x^2 + d_1 x + e_1)^{s_1} \dots (x^2 + d_k x + e_k)^{s_k}$$

donde los b_i (con $i = 1,2, \dots, n$) y d_j y e_j (con $j = 1,2, \dots, k$) están en $\mathbb{R}$ y los $t_i \geq 1$ y $s_j \geq 1$ (con $i = 1,2, \dots, n$ y $j = 1,2, \dots, k$) están en $\mathbb{N}$.

Una de las bondades que ofrece la *técnica alternativa* de esta investigación es la libertad que tiene el aprendiz al usar su creatividad en la solución de algún problema donde se requiera la DFS.

A continuación; como ilustración, se mostrarán algunos ejemplos. Que exponen el potencial de la mencionada *técnica alternativa* para trabajar la creatividad del estudiante:

Ejemplo $\mathbf{9.1}$: con el siguiente ejercicio se puede mostrar la creatividad de un estudiante si éste desarrolla el trabajo de descomposición de la siguiente manera:

Descomponer en fracciones simples la expresión:

$$\boldsymbol{\frac{1}{(x+3)^2(x^2+x+2)^2}} \ .$$

Una posible solución es:

$$\frac{1}{(x+3)(x^2+x+2)} = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{x+3} - \frac{x-2}{x^2+x+2}\right] = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x+3}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{x-2}{x^2+x+2}\right). \quad (\mathbf{1})$$

Es decir, que;

$$\frac{1}{(x+3)^2(x^2+x+2)^2} = \left[\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x+3}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{x-2}{x^2+x+2}\right)\right]^2.$$

Usando el cuadrado de la diferencia en el lado derecho, se tiene que;

$$= \frac{1}{64}\,\frac{1}{(x+3)^2} - \frac{1}{32}\,\frac{x-2}{(x+3)(x^2+x+2)} + \frac{1}{64}\,\frac{(x-2)^2}{(x^2+x+2)^2} \ .$$

Mejor aún;

$$= \frac{1}{64}\,\frac{1}{(x+3)^2} - \frac{1}{32}\,\frac{(x+3)-5}{(x+3)(x^2+x+2)} + \frac{1}{64}\,\frac{x^2+x+2-5x+2}{(x^2+x+2)^2} \ .$$

Haciendo algo de álgebra básica, se tiene que;

$$\boldsymbol{\frac{1}{(x+3)^2(x^2+x+2)^2}} =$$

$$\boldsymbol{\frac{5}{256}\left(\frac{1}{x+3}\right) + \frac{1}{64}\,\frac{1}{(x+3)^2} - \frac{1}{256}\left(\frac{5x}{x^2+x+2}\right) +}$$

$$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{128}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{x}+\mathbf{2}}\right)+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{64}}\,\frac{-\mathbf{5}\boldsymbol{x}+\mathbf{2}}{(\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{x}+\mathbf{2})^{\mathbf{2}}}\ . \quad \square$$

Ejemplo $\mathbf{9.2}$: este ejercicio es una aplicación de la *descomposición en fracciones simples* y, para ser resuelto, requiere de cierta creatividad por parte del estudiante.

Calcular la integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}\ .$$

Al hacer el cambio de variable; $z^2 = \tan x \ \Rightarrow\ 2z\,dz = \sec^2 x$.

Se obtiene una integral equivalente dada por;

$$\int \frac{2dz}{z^4+1}\ .$$

La dificultad de esta nueva integral radica al realizar la *descomposición en fracciones simples* del integrando;

$$\frac{2}{z^4+1} = \frac{1}{\left(z^2-\sqrt{2}z+1\right)\left(z^2+\sqrt{2}z+1\right)}\ .$$

En ese sentido, éste queda expresado como:

$$\frac{2}{z^4+1} = \frac{1}{\sqrt{2}z}\left[\frac{1}{z^2-\sqrt{2}z+1}-\frac{1}{z^2+\sqrt{2}z+1}\right]\ .$$

Mejor aún;

$$\frac{2}{z^4+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{z\left(z^2-\sqrt{2}z+1\right)}-\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{z\left(z^2+\sqrt{2}z+1\right)}\ .$$

Basta hacer la *descomposición en fracciones simples* a la expresión:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{z\left(z^2-\sqrt{2}z+1\right)}$$

ya que, el otro sumando se trabaja en forma análoga por razones de simetría. En efecto;

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{z\left(z^2-\sqrt{2}z+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{z}-\frac{z-\sqrt{2}}{z^2-\sqrt{2}z+1}\right).$$

Por lo comentado, en relación del otro término, se tiene;

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{z\left(z^2+\sqrt{2}z+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{z}-\frac{z+\sqrt{2}}{z^2+\sqrt{2}z+1}\right).$$

Finalmente, la descomposición queda de la forma:

$$\frac{2}{z^4+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{z+\sqrt{2}}{z^2+\sqrt{2}z+1}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{z-\sqrt{2}}{z^2-\sqrt{2}z+1}\right). \quad \square$$

Ejemplo $\mathbf{9.3}$: éste fue extraído del (Piskunov: 1978, 422) y el problema consiste en calcular

$$\int\left[\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}\right]dx\,.$$

Para calcular esa integral es necesario descomponer la función racional:

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}\,,$$

en fracciones simples. El desarrollo se limitará a hacer solo la descomposición y, la misma, se hará con el método sugerido por Piskunov (a saber, Coeficientes Indeterminados y Evaluación). También, se trabajará por el método propuesto (técnica alternativa) en esta investigación y así se hará la comparación de ambos métodos.

Usando el método sugerido por *Piskunov*:

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}=\frac{Ax+B}{(x^2+2x+3)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+3}+\frac{E}{x+1}\,.$$

Lo anterior puede escribirse como:

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2}=(x+1)\left[\frac{Ax+B}{(x^2+2x+3)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+3}\right]+E\,.$$

Donde al sustituir $x=-1$ en la ecuación anterior, se tiene:

$$\frac{1-4+11-12+8}{(1-2+3)^2}=0+E\Rightarrow \boldsymbol{E}=\mathbf{1}\,.$$

Basta comparar el numerador. En efecto;

$$x^4+4x^3+11x^2+12x+8=(Ax+B)(x+1)+$$
$$(Cx+D)(x^3+3x^2+5x+3)+$$
$$E(x^4+4x^3+10x^2+12x+9)\,.$$

Para el caso x^4 se tiene: $C+E=1\Rightarrow \boldsymbol{C}=\mathbf{0}$.

Para el caso x^3 se tiene: $3C+D+4E=4\Rightarrow \boldsymbol{D}=\mathbf{0}$.

Para el caso x^2 se tiene: $A+\ 5C+3D+10E=11\Rightarrow \boldsymbol{A}=\mathbf{1}$.

Para el caso x se tiene: $A+B++3C+12E=12\Rightarrow \boldsymbol{B}=-\mathbf{1}$,

de esta forma se han encontrado los coeficientes de cada una de las fracciones más simples. $\square$

Lo siguiente es integrar. Esta última parte no se hará, como ya se había dicho, porque el interés es determinar los coeficientes y comparar la *técnica alternativa* de esta investigación con el método que propone Piskunov.

Usando la *Técnica Alternativa*:

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} = \frac{(x^2+2x+3)^2+(x+1)(x-1)}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} \ .$$

Al simplificar el lado izquierdo queda como:

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} = \frac{1}{x+1}+\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} \ .$$

Por lo que; $\boldsymbol{E=1}$, $\boldsymbol{A=1}$, $\boldsymbol{B=-1}$, $\boldsymbol{C=0}$ y $\boldsymbol{D=0}$. □ QED

A continuación, dos problemas que formaron parte de un examen parcial aplicado en la FaCyT-UC (se muestra la solución completa por un método tradicional y por la *técnica alternativa* de esta investigación).

Ejemplo $\mathbf{9.4}$. Calcular las siguientes integrales de funciones racionales:

$$\boldsymbol{a}) \quad \int \left(\frac{3x^2-21x+32}{x^3-8x^2+16x}\right) dx \qquad \boldsymbol{b}) \quad \int \left[\frac{x^3+3x^2+x+6}{(x^2+1)(x^2+2)}\right] dx \ .$$

$\boldsymbol{a}.$ 1) Solución (usando un *Método Tradicional*).

$$\frac{3x^2-21x+32}{x^3-8x^2+16x} = \frac{3x^2-21x+32}{x(x-4)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-4}+\frac{C}{(x-4)^2} \Rightarrow$$

$$A(x-4)^2+Bx(x-4)+Cx = 3x^2-21x+32 \Rightarrow$$

$$A(x^2-8x+16)+B(x^2-4x)+Cx = 3x^2-21x+32 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A + B = 3, \\ -8A-4B+C = -21, \\ 16A = 32. \end{cases}$$

De lo anterior, al resolver el *sistema de ecuaciones*, resulta; $A=2$, $B=1$ y $C=-1$.

Por lo que;

$$\int \left(\frac{3x^2-21x+32}{x^3-8x^2+16x}\right) dx = 2\int \frac{dx}{x}+\int \frac{dx}{x-4}-\int \frac{dx}{(x-4)^2} \ .$$

Finalmente, se tiene que;

$$\int \left(\boldsymbol{\frac{3x^2-21x+32}{x^3-8x^2+16x}}\right) \boldsymbol{dx = 2ln|x| + ln|x-4| + \frac{1}{x-4} + C} \ . \quad □$$

$\boldsymbol{a}.$ 2) Solución (usando la *Técnica Alternativa*).

$$\frac{3x^2-21x+32}{x^3-8x^2+16x}=\frac{2(x-4)^2+x(x-4)-x}{x(x-4)^2}=$$

$$\frac{2(x-4)^2}{x(x-4)^2}+\frac{x(x-4)}{x(x-4)^2}+\frac{-x}{x(x-4)^2}\Rightarrow$$

$$\frac{3x^2-21x+32}{x^3-8x^2+16x}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x-4}-\frac{1}{(x-4)^2}\Rightarrow$$

$$\int\left(\frac{3x^2-21x+32}{x^3-8x^2+16x}\right)dx=\int\left[\frac{2}{x}+\frac{1}{x-4}-\frac{1}{(x-4)^2}\right]dx\Rightarrow$$

$$\int\left(\frac{\mathbf{3x^2-21x+32}}{\mathbf{x^3-8x^2+16x}}\right)\boldsymbol{dx}=\boldsymbol{2ln|x|+ln|x-4|+\frac{1}{x-4}+C}\,.\quad\square\quad QED$$

b. 1) Solución (usando un *Método Tradicional*).

$$\frac{x^3+3x^2+x+6}{(x^2+1)(x^2+2)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2}\Rightarrow$$

$$\frac{(Ax+B)(x^2+2)+(Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+2)}\Rightarrow$$

$$Ax^3+2Ax+Bx^2+2B+Cx^3+Cx+Dx^2+D=x^3+3x^2+x+6\Rightarrow$$

$$\begin{cases} A+C=1, \\ B+D=3, \\ 2A+C=1, \\ 2B+D=6. \end{cases}$$

El *sistema de ecuaciones* anterior es equivalente a;

$$\begin{cases} A+C=1 \\ 2A+C=1 \end{cases}\ \text{y}\ \begin{cases} B+D=3 \\ 2B+D=6 \end{cases}$$

De los dos sistemas anteriores, se tiene que; $A=0, C=1, B=3$ y $D=0$.

De lo anterior, resulta;

$$\frac{x^3+3x^2+x+6}{(x^2+1)(x^2+2)}=\frac{3}{x^2+1}+\frac{x}{x^2+2}\Rightarrow$$

$$\int\left[\frac{x^3+3x^2+x+6}{(x^2+1)(x^2+2)}\right]dx=3\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+2}dx\Rightarrow$$

$$\int\left[\frac{\mathbf{x^3+3x^2+x+6}}{\mathbf{(x^2+1)(x^2+2)}}\right]\boldsymbol{dx}=\boldsymbol{3\,tan^{-1}(x)+ln\left(\sqrt{x^2+2}\right)+C}\,.\quad\square$$

b. 2) Solución (usando la *Técnica Alternativa*).

$$\frac{x^3+3x^2+x+6}{(x^2+1)(x^2+2)}=\frac{x(x^2+1)+3(x^2+2)}{(x^2+1)(x^2+2)}=$$

$$\frac{x(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+2)}+\frac{3(x^2+2)}{(x^2+1)(x^2+2)}\Rightarrow$$

$$\frac{x^3+3x^2+x+6}{(x^2+1)(x^2+2)}=\frac{x}{x^2+2}+\frac{3}{x^2+1}\Rightarrow$$

$$\int\left[\frac{\boldsymbol{x^3+3x^2+x+6}}{\boldsymbol{(x^2+1)(x^2+2)}}\right]\boldsymbol{dx}=\boldsymbol{ln}\left(\sqrt{\boldsymbol{x^2+2}}\right)+\boldsymbol{3\,tan^{-1}(x)}\ \ +\boldsymbol{C}.\quad \square\ \ QED$$

No es difícil notar que; los pilares donde descansa la *técnica alternativa* de este trabajo son: La *descomposición en fracciones simples* de las expresiones:

$$\frac{1}{(x+b_2)(x+b_1)}=\frac{1}{b_2-b_1}\left(\frac{1}{x+b_1}\right)-\frac{1}{b_2-b_1}\left(\frac{1}{x+b_2}\right).\quad (\mathbf{1})$$

$$\frac{1}{(x+b_2)(x^2+d_1x+e_1)}=\frac{1}{{b_2}^2-d_1b_2+e_1}\left(\frac{1}{x+b_2}\right)-$$

$$\frac{1}{{b_2}^2-d_1b_2+e_1}\left[\frac{x+(d_1-b_2)}{x^2+d_1x+e_1}\right].\quad (\mathbf{2})$$

$$\frac{1}{[(d_2-d_1)x-(e_2-e_1)](x^2+d_2x+e_2)}=$$

$$\frac{1}{(d_2-d_1)}\left[\frac{1}{x+b}-\frac{x+(d_2-b)}{x^2+d_2x+e_2}\right]\frac{1}{b^2-d_2b+e_2}.\quad (\mathbf{3})$$

donde $b=\frac{e_2-e_1}{d_2-d_1}$.

Estas tres (3) relaciones unidas a la recursividad, que aparece en forma natural cuando se realizan las descomposiciones, sugieren la posibilidad de un trabajo posterior en el cual se hagan implementaciones computacionales donde las funciones racionales tienen factores con potencias grandes. Con el objetivo de comparar el tiempo de cómputo usando la *técnica alternativa* de esta investigación y el tiempo invertido usando un método tradicional cualquiera.

6.- En relación a la Técnica de Remuestreo:

- El método *Bootstrap* es un modo de resolver el problema de estimación cuando se desconoce la distribución de la muestra, en ese sentido el practicante de computación estadística puede prescindir del supuesto de *normalidad* para construir sus estimaciones. La simplicidad con la que puede aplicarse el método *Bootstrap*. Un ejemplo de ello es la segunda de las aplicaciones que aquí se ha presentado, en el cual se utilizó únicamente la diferencia de medias y no se precisó de ningún tipo de expresión algebraica para describir los parámetros de su distribución muestral. Esta simplicidad hace que el método constituya un enfoque atractivo en la enseñanza de la estadística. La simulación a partir de muestras permite trabajar sin fórmulas ni descripciones matemáticas, que no siempre son comprendidas por el alumnado y que a menudo constituyen un obstáculo para el aprendizaje.

- Un inconveniente de los métodos estadísticos convencionales está no sólo en el manejo correcto de las nociones aritméticas, sino también en la elección correcta de las fórmulas que es preciso aplicar en cada situación. Para algunos estudiantes, el manejo de las fórmulas y métodos estadísticos llega a adquirir un carácter mágico. Saliendo al paso de esta situación, los métodos basados en el remuestreo; éstos presentan como ventaja la utilización de técnicas simples e intuitivas basadas en la simulación de un modelo a partir de un número elevado de muestras aleatorias. La resolución de los problemas estadísticos deja de estar vinculada a la pericia matemática y pasa a ser una cuestión de claridad de pensamiento sobre los problemas planteados.

- La construcción de la distribución de un estadístico a partir de un conjunto de datos es de difícil visualización, pues se la debe obtener ya sea mediante fórmulas o mediante simulaciones, pero en ambos casos haciendo supuestos distribucionales acerca de la población muestreada. El uso de la metodología *Bootstrap*, basada en el remuestreo, permite apreciar, prescindiendo de fórmulas, cómo varía un estadístico de muestra a muestra y, por lo tanto, cómo se va construyendo la distribución muestral.

- EL método de remuestreo *Bootstrap*, propuesto, es una nueva alternativa científica para hipótesis concernientes a la diferencia de medias en variables independientes. La falta de condición de normalidad y tamaños pequeños (≤ 30) de las muestras en el método *Bootstrap* propuesto, hace que éste sea muy flexible y ampliamente aplicable, a diferencia del método Paramétrico.

7.- En relación al Modelo Axiomático Formal generado en esta investigación:

- La axiomatización es un proceso posterior al conocimiento sensorial de los entes que se axiomatizan. La axiomática es una manera de hacer la presentación final de una teoría matemática.

- La axiomática no es un método didáctico sino, más bien, un método de estructuración de la propia matemática. Sin embargo, axiomatizar o hacer un sistema axiomático podría ser una actividad muy productiva para estudiantes avanzados. De los dos tipos de axiomatización que existen; la utilizada en esta investigación es la axiomatización formal; ésta está reservada o limitada a la lógica y a la matemática.

ANEXOS

Anexo A-1

<u>TÉCNICA</u>
[**PRUEBA DE EVALUACIÓN**]
[**Aplicada al Estudiante**]

UNIVERSIDAD **P**EDAGÓGICA **E**XPERIMENTAL **L**IBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO "RAFAEL ALBERTO ESCOBAR LARA"
COORDINACIÓN GENERAL DE ESTUDIOS DE POSTGRADO
DOCTORADO EN **E**DUCACIÓN **M**ATEMÁTICA

INFORMACIÓN SOBRE EL INSTRUMENTO DE MEDICIÓN

Sección: ______________________ Fecha: ______________________

Estimado(a) estudiante:

El instrumento, que se presenta a continuación, tiene como propósito recabar los datos necesarios para el desarrollo de la investigación titulada:

APROXIMACIÓN TEÓRICA PARA
LA DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES Y SU EFECTO
EN EL RENDIMIENTO ACADÉMICO INMEDIATO.
Una Estrategia Didáctica Alternativa y la Modelación Matemática.

Instrucciones:

Este instrumento de recolección de datos es una «*Prueba de Rendimiento Académico*» que consta de diez (10) reactivos, respóndalo y la información que usted proporcione con él será de carácter confidencial; únicamente se utilizará con fines de estudio para una investigación a nivel «*Doctoral*».

Atentamente,

F. $\frac{2}{4}$ $\frac{1}{3}$ F.
____
Prof. **Franzyuri Hernández**, M.Sc.
V-10.732.822

PRUEBA DE RENDIMIENTO ACADÉMICO

[Instrumento de Medición]

Nombre y Apellido:	**Sección:**

1.- Realice un esbozo del concepto de Descomposición en Fracciones Simples.

2.- Seleccione la opción que considere correcta para dar respuesta a la siguiente pregunta. ¿Cuáles son los casos posibles que se pueden presentar al momento de realizar una Descomposición en Fracciones Simples?

Opciones de Respuesta:

a) Factores lineales con multiplicidad menor que 1, Factores lineales con multiplicidad mayor que 1, Factores cuadráticos no reducibles con multiplicidad menor que 1, Factores cuadráticos no reducibles con multiplicidad mayor que 1 y una combinación de los anteriores.

b) Factores lineales con multiplicidad igual a 1, Factores lineales con multiplicidad mayor que 1, Factores cuadráticos reducibles con multiplicidad igual a 1, Factores cuadráticos reducibles con multiplicidad mayor que 1 y una combinación de los anteriores.

c) Factores lineales con multiplicidad igual a 1, Factores lineales con multiplicidad menor que 1, Factores cuadráticos no reducibles con multiplicidad igual a 1, Factores cuadráticos no reducibles con multiplicidad menor que 1 y una combinación de los anteriores.

d) Factores lineales con multiplicidad igual a 1, Factores lineales con multiplicidad mayor que 1, Factores cuadráticos no reducibles con multiplicidad igual a 1, Factores cuadráticos no reducibles con multiplicidad mayor que 1 y una combinación de los anteriores.

3.- Realice los cálculos necesarios para llenar los espacios vacíos en la expresión ($\mathbf{1}$). Documente el procedimiento a usar.

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} = (\quad) + (\quad)\,. \qquad (\mathbf{1})$$

4.- Calcule el valor faltante en la expresión ($\mathbf{1}$). Documente el procedimiento a usar.

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{(\quad)} \cdot \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b}\right). \qquad (\mathbf{1})$$

5.- Aplique las operaciones adecuadas para llenar los espacios vacíos en la expresión ($\mathbf{1}$) luego, indique cuál de las cuatro opciones de respuesta es la correcta. Documente el procedimiento a usar.

$$\frac{1}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{1}{(\quad)} \cdot \left(\frac{1}{x+1} - \frac{(\quad)}{x^2+1}\right). \qquad (\mathbf{1})$$

Opciones de Respuesta:

a) $2,\ x+1$

b) $2,\ x-1$

c) $-2,\ x-1$

d) $-2,\ 1-x$

6.- Analice la expresión ($\mathbf{1}$), realice la descomposición en fracciones simples y luego, seleccione la opción de respuesta correcta. Documente el procedimiento a usar.

$$\frac{1}{(x^2+1)^2(x+1)} \,. \qquad (\mathbf{1})$$

Opciones de Respuesta:

a) $\frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}\frac{x-1}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{4}\frac{x+1}{x^2+1}$

b) $\frac{1}{4}\frac{x-1}{(x^2+1)^2} + \frac{x-1}{x^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}$

c) $\frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{x-1}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{4}\frac{x-1}{x^2+1}$

d) $\frac{1}{4}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{x-1}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{4}\frac{x-1}{x^2+1}$

7.- Analice la integral ($\mathbf{1}$) y exprésela como suma de integrales simples luego, seleccione la opción de respuesta correcta. Documente el procedimiento a usar.

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)^2(x+2)} \,. \qquad (\mathbf{1})$$

Opciones de Respuesta:

a) $\frac{1}{6}\int \frac{1}{(x-1)^2}dx - \frac{2}{9}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{45}\int \frac{1}{x+2}dx + \frac{1}{10}\int \frac{1}{x^2+1}dx + \frac{1}{5}\int \frac{x}{x^2+1}dx$

b) $-\frac{1}{6}\int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \frac{2}{9}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{x+2}dx - \frac{1}{10}\int \frac{1}{x^2+1}dx + \frac{1}{45}\int \frac{x}{x^2+1}dx$

c) $\frac{2}{9}\int \frac{1}{(x-1)^2}dx - \frac{1}{6}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{45}\int \frac{1}{x+2}dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{x^2+1}dx - \frac{1}{5}\int \frac{x}{x^2+1}dx$

d) $-\frac{1}{10}\int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \frac{2}{9}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{45}\int \frac{1}{x+2}dx - \frac{1}{10}\int \frac{1}{x^2+1}dx + \frac{1}{45}\int \frac{x}{x^2+1}dx$

8.- Después de hacer el cambio de variable $t = tg\, x$ en la integral ($\mathbf{1}$) y realizar la descomposición necesaria en fracciones simples, seleccione entre las opciones de respuesta los valores de los coeficientes así obtenidos. Documente el procedimiento a usar.

$$\int \frac{sen^2x\, cos\, x}{sen\, x + cos\, x}\, dx \,. \qquad (\mathbf{1})$$

Opciones de Respuesta:

a) $1/4,\ -1/2,\ -1/2,\ -1/4$ y $-1/4$

b) $1/4,\ 1/2,\ -1/2,\ -1/4$ y $1/4$

c) $1/4,\ 1/2,\ 1/2,\ 1/4$ y $1/4$

d) $-1/4,\ 1/2,\ -1/2,\ -1/4$ y $-1/4$

9.- Dos sustancias A y B, se convierten en un solo compuesto C. En el laboratorio se ha mostrado que para estas sustancias se cumple la siguiente ley de conversión: la velocidad de variación con el tiempo de la cantidad x del compuesto C es proporcional al producto de las cantidades de las sustancias no convertidas A y B. Supóngase que las unidades de medida se eligen de tal forma que una unidad del compuesto C está formada de la combinación de una unidad de A con una unidad de B. Si al tiempo $t = 0$ hay a unidades de sustancia A, b unidades de sustancia B y ninguna del compuesto C presente, muéstrese que la ley de conversión puede expresarse con la ecuación;

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x) \,. \qquad (\mathbf{1})$$

Resuelva la ecuación (**1**) con la condición inicial dada y luego, seleccione la opción de respuesta correcta entre las que se muestran. Documente el procedimiento a usar.

Opciones de Respuesta:

a) Si $b \neq a,\ x(t) = \frac{ab\left[e^{k(b-a)t}+1\right]}{be^{k(b-a)t}+a}$

b) Si $b \neq a,\ x(t) = \frac{ab\left[e^{k(b-a)t}-a\right]}{be^{k(b-a)t}-1}$

c) Si $b \neq a,\ x(t) = \frac{ab\left[e^{k(b-a)t}-1\right]}{be^{k(b-a)t}-a}$

d) Si $b \neq a,\ x(t) = \frac{b\left[e^{k(b-a)t}-1\right]}{abe^{k(b-a)t}-a}$

10.- Calcule el volumen de un tanque de almacenamiento de agua, cuya forma fue diseñada al hacer rotar la región R limitada por: la curva definida por la ecuación (**1**) y los ejes $y = 0,\ x = 0$ y $x = 3$ alrededor del eje x. Luego, seleccione la opción de respuesta correcta. Documente el procedimiento a usar.

$$y = \frac{2}{(x+2)\sqrt{x+1}}\ . \qquad (\mathbf{1})$$

Opciones de Respuesta:

a) $4\pi\left[Ln(2) + Ln(5) - Ln(4) + \frac{3}{5}\right]\ u.v.$

b) $4\pi\left[Ln(4) - Ln(5) + Ln(2) - \frac{3}{10}\right]\ u.v.$

c) $4\pi\left[Ln(4) + Ln(2) + Ln(5) + \frac{3}{10}\right]\ u.v.$

d) $4\pi\left[Ln(5) + Ln(4) - Ln(2) - \frac{3}{5}\right]\ u.v.$

Tabla 34

Instrumento de análisis para la prueba de rendimiento académico.

Estándares de Aprendizaje	Indicadores de Logro	Tipo de Reactivo	Respuestas Correctas	Estados Mentales según la teoría APOE
El sujeto de prueba, comprende el concepto de *Descomposición en Fracciones Simples* y su interpretación.	$Reactivo_{\mathbf{1}}$	Desarrollo	Desarrollo	ACCIÓN
El sujeto de prueba, comprende el concepto de *Descomposición en Fracciones Simples* y su interpretación.	$Reactivo_{\mathbf{2}}$	Selección Simple	Opción (d)	ACCIÓN
El sujeto de prueba, maneja algunos procedimientos memorizados en relación a la *técnica alternativa*. En otras palabras, son aquellas primeras ideas matemáticas que se perciben por el sujeto de prueba como externas, producto de algún tipo de estímulo.	$Reactivo_{\mathbf{3}}$	Mixto: Desarrollo/Completación	$\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}$ y $-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}$	ACCIÓN
El sujeto de prueba, por repetición, puede describir los pasos involucrados al usar la *técnica alternativa* para la *Descomposición en Fracciones Simples* e incluso puede invertirlos, es decir, por medio de la repetición de *acciones* sobre la *técnica alternativa* logra más control en la misma al usarla durante el proceso de descomposición.	$Reactivo_{\mathbf{4}}$	Mixto: Desarrollo/Completación	$b-a$	PROCESO
El sujeto de prueba, reflexiona sobre las operaciones algebraicas necesarias para desarrollar la *técnica alternativa* aplicada a la *Descomposición en Fracciones Simples*, toma conciencia del *proceso* como un todo. Logra realizar generalizaciones del mecanismo básico de descomposición para resolver situaciones problémicas donde se requiera descomposiciones más complejas.	$Reactivo_{\mathbf{5}}$	Mixto: Desarrollo/Selección Simple/Completación	Opción (b)	OBJETO
El sujeto de prueba, analiza situaciones donde esté involucrado el mecanismo de *Descomposición en Fracciones Simples*, desarrollando: *acciones*, *procesos*, *objetos* y otros *esquemas*. Comprende y aplica criterios para el buen desarrollo de la *técnica alternativa*.	$Reactivo_{\mathbf{6}}$	Mixto: Desarrollo/Selección Simple	Opción (d)	ESQUEMA
El sujeto de prueba, analiza situaciones donde esté involucrado el mecanismo de *Descomposición en Fracciones Simples*, desarrollando: *acciones*, *procesos*, *objetos* y otros *esquemas*. Comprende y aplica criterios para el buen desarrollo de la *técnica alternativa*.	$Reactivo_{\mathbf{7}}$	Mixto: Desarrollo/Selección Simple	Opción (a)	ESQUEMA
El sujeto de prueba, analiza situaciones donde esté involucrado el mecanismo de *Descomposición en Fracciones Simples*, desarrollando: *acciones*, *procesos*, *objetos* y otros *esquemas*. Comprende y aplica criterios para el buen desarrollo de la *técnica alternativa*.	$Reactivo_{\mathbf{8}}$	Mixto: Desarrollo/Selección Simple	Opción (b)	ESQUEMA
El sujeto de prueba, es capaz de matematizar situaciones de la vida real, usando la *modelación matemática* en problemas donde se requiera el mecanismo de *Descomposición en Fracciones Simples*, desarrollando: *acciones*, *procesos*, *objetos* y otros *esquemas*. Comprende y aplica los criterios necesarios para el buen desarrollo de la *técnica alternativa* en situaciones de la vida cotidiana.	$Reactivo_{\mathbf{9}}$	Mixto: Desarrollo/Selección Simple	Opción (c)	ESQUEMA
El sujeto de prueba, es capaz de matematizar situaciones de la vida real, usando la *modelación matemática* en problemas donde se requiera el mecanismo de *Descomposición en Fracciones Simples*, desarrollando: *acciones*, *procesos*, *objetos* y otros *esquemas*. Comprende y aplica los criterios necesarios para el buen desarrollo de la *técnica alternativa* en situaciones de la vida cotidiana.	$Reactivo_{\mathbf{10}}$	Mixto: Desarrollo/Selección Simple	Opción (b)	ESQUEMA

Nota: Fuente: Autor (2023).

Tabla 35

Criterios para medir cada reactivo según el logro del sujeto de estudio.

Instrucciones para la corrección de cada reactivo		
Reactivo	**Valor del Reactivo**	**Descripción del Logro**
1	**0.5** ptos.	1.- Si relaciona la Descomposición en Fracciones Simples con una fracción propia. Se le concede **0.25** ptos.
		2.- Si expresa que cada fracción simple se relaciona con la factorización del denominador de la fracción original. Se le concede **0.25** ptos.
2	**0.5** ptos.	1.- Por la selección de la respuesta correcta. Se le concede **0.5** ptos.
3	**0.5** ptos.	1.- Sí logra un procedimiento correcto, pero se equivoca en el resultado. Se le concede **0.25** ptos.
		2.- Por la obtención de las fracciones simples. Se le concede **0.25** ptos.
4	**1** pto.	1.- Sí logra un procedimiento correcto, pero se equivoca en el resultado. Se le concede **0.5** ptos.
		2.- Por la obtención de la constante. Se le concede **0.5** ptos.
5	**2** ptos.	1.- Sí logra un procedimiento correcto, pero se equivoca en el resultado. Se le concede **0.5** ptos.
		2.- Por la obtención de las dos expresiones solicitadas. Se le concede **1.5** ptos.
6	**2.5** ptos.	1.- Sí plantea y ejecuta el procedimiento a usar, pero con posibles errores en el cálculo de las constantes. Se le concede **1** pto.
		2.- Por cada constante correcta. Se le concede **0.5** ptos.
7	**3.5** ptos.	1.- Sí plantea y ejecuta el procedimiento a usar, pero con posibles errores en el cálculo de las constantes. Se le concede **1** pto.
		2.- Por cada constante correcta. Se le concede **0.5** ptos.
8	**3.5** ptos.	1.- Por hacer el cambio de variable correctamente. Se le concede **0.5** ptos.
		2.- Por el planteamiento y ejecución del procedimiento a usar. Se le concede **1.5** ptos.
		3.- Por la obtención de las constantes. Se le concede **1.5** ptos.
9	**3** ptos.	1.- Por la descripción de la variable a estudiar. Se le concede **0.5** ptos.
		2.- Por el planteamiento y ejecución del procedimiento a usar. Se le concede **1.5** ptos.
		3.- Por el uso correcto de la condición inicial en el cálculo de la constante de integración. Se le concede **0.5** ptos.
		4.- Por la respuesta final. Se le concede **0.5** ptos.
10	**3** ptos.	1.- Por el planteamiento de la integral definida. Se le concede **1** pto.
		2.- Por el planteamiento y ejecución del procedimiento a usar. Se le concede **1** pto.
		3.- Por el cálculo y evaluación de las integrales definidas obtenidas. Se le concede **1** pto.

Nota: Fuente: Propia (2023).

Anexo A-2

Tabla 36

Jueces expertos para la validación de contenido del instrumento de medición.

"Prueba de Rendimiento Académico"			
Nº	**Nombre y Apellido**	**Institución donde Labora**	**Área de Experticia**
1	Dr. Aristides Méndez	FaCE **UC** – Bárbula	Metodología de la Investigación
2	Dr. José López	FaCE **UC** – Bárbula	Metodología de la Investigación
3	Dr. Wilmer Barico	FaCE **UC** – Bárbula	Metodología de la Investigación
4	Dra. Omaira Timudez	FaCE **UC** – Bárbula	Metodología de la Investigación
5	Dra. Francis Moreno	FaCE **UC** – Bárbula	Metodología de la Investigación
6	Dr. Roger Meléndez	FaCE **UC** – Bárbula	Metodología de la Investigación
7	Dr. Carlos Jiménez	FacIng **UC** – Bárbula	Metodología de la Investigación
8	Dra. Gabriela Gardié	IPRAEL **UPEL** – Maracay	Metodología de la Investigación
9	Dra. Geraldine Escalona	IPRAEL **UPEL** – Maracay	Metodología de la Investigación
10	Dr. John Chipman	Investigador Independiente	Metodología de la Investigación
11	Dr. Rolando García	IPRAEL **UPEL** – Maracay	Educación Matemática
12	Dr. Mario Arrieche	IPRAEL **UPEL** – Maracay	Educación Matemática
13	Dra. Martha Iglesias	IPRAEL **UPEL** – Maracay	Educación Matemática
14	Dr. José Chirinos	IPREMLF **UPEL** – El Mácaro	Educación Matemática
15	Dra. Zoraida Villegas	FaCE **UC** – Bárbula	Educación Matemática
16	Dr. José Tesorero	FaCE **UC** – Bárbula	Educación Matemática
17	Dra. María Ferreira	FaCE **UC** – Bárbula	Educación Matemática
18	Dra. Violerva Alastre	FaCE **UC** – Bárbula	Educación Matemática
19	Dr. Alexis Espinoza	FaCE **UC** – Bárbula	Educación Matemática
20	Dra. Iliana Rodríguez	FaCE **UC** – Bárbula	Educación Matemática
21	Dr. Rubén Parra	**UDO** – Anzoátegui	Educación Matemática
22	Dr. Agustín Mejías	FacIng **UC** – Bárbula	Educación Matemática
23	Dr. Lucas Galvis	Investigador Independiente	Educación Matemática
24	Dr. Miguel Méndez	**UAN** – Bogotá Colombia	Matemática
25	Dr. José León	**UR** – Montevideo Uruguay	Matemática
26	Dr. Ramón Bruzual	FaC **UCV** – Caracas	Matemática
27	Dr. José Marcano	FaCyT **UC** – Bárbula	Matemática
28	Dr. Luis Rodríguez	FaCyT **UC** – Bárbula	Matemática
29	Dr. Wilfredo Illas	FaCE **UC** – Bárbula	Escritura
30	Dra. Alexandra Bolívar	IPRAEL **UPEL** – Maracay	Escritura

Nota: Fuente: Autor (2023).

A continuación, se dará una síntesis curricular de los treinta (30) especialistas que participaron en la validación de contenido del instrumento de recolección de datos para la presente investigación. Los mismos revisaron el instrumento según se área de experticia y, en ese sentido, se repartieron las tareas de validación con el objetivo de mejorar cada reactivo hasta conseguir el instrumento ideal para esta investigación.

Área de experticia *Matemática*. En este grupo hubo cinco (5) especialistas, estos jueces se encargaron de verificar y/o corregir que los elementos apropiados en la formulación matemática de cada reactivo estuviesen presentes en el instrumento.

1.- **Dr. *Miguel Méndez***. Este juez; es Licenciado en Matemática, Magíster en Ciencias Mención: Matemática y Doctor en Ciencias Mención: Matemática por la Universidad Central de Venezuela (UCV), tiene estudios Postdoctorales en Matemática por el MIT-EEUU, en el año 1993 fue ganador del premio científico Fundación Empresas Polar "Lorenzo Mendoza Fleury", es Profesor Titular (Jubilado) a dedicación exclusiva por la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, tiene una experiencia como docente-investigador de 46 años y, actualmente, está laborando en la "Universidad Antonio Nariño" de Bogotá-Colombia. Su área de experticia es el Álgebra Abstracta y la Teoría Combinatoria.

2.- **Dr. *José León***. Este juez; es Licenciado en Matemática por la Universidad de los Andes (ULA) (Mérida-Venezuela), Magister Scientiarum en Matemática por el Instituto Venezolano de Investigación Científica (IVIC), Doctor en Ciencias Mención: Matemática por la Universidad Central de Venezuela (UCV), en el año 1997 ganó el premio científico Fundación Empresas Polar "Lorenzo Mendoza Fleury", es Profesor Titular (Jubilado) a dedicación exclusiva por la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, tiene una experiencia como docente-investigador de 40 años, actualmente, es Profesor Titular en el Instituto de Matemática y Estadística Ingeniero "Rafael Laguardia" (IMERL) Facultad de Ingeniería de la "Universidad de la República" Montevideo-Uruguay. Ha dirigido 20 Tesis Doctorales, la mayoría de ellas en la Universidad Central de Venezuela, además, dirigió dos (2) Tesis Doctorales en el IVIC, 22 Trabajos de Grado de Maestría entre el IVIC y la UCV y 26 Trabajos Especiales de Grado de Licenciatura en la UCV. Ha publicado, al menos, 107 artículos científicos en revistas arbitradas. Su área de experticia es el Análisis Armónico, la Probabilidad, la Estadística y sus aplicaciones como, por ejemplo, modelado del mar.

3.- **Dr. *Ramón Bruzual***. Este juez; es Licenciado en Matemática por la Universidad Simón Bolívar (USB), Magister Scientiarum en Matemática por el Instituto Venezolano de Investigación Científica (IVIC), Doctor en Ciencias Mención: Matemática por la Universidad Central de Venezuela (UCV), es Profesor Titular (Jubilado) a dedicación exclusiva por la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, tiene una experiencia como docente-investigador de 30 años, fue jefe del departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias de la UCV-Caracas y su área de experticia es el Análisis Armónico y la teoría de Operadores.

4.- **Dr. *José Marcano***. Este juez; es Licenciado en Matemática, Magíster en Ciencias Mención: Matemática y Doctor en Ciencias Mención: Matemática por la Universidad Central de Venezuela (UCV). Es Profesor Titular (Activo) a dedicación exclusiva por la Facultad de Ciencias y Tecnología (FaCyT) de la Universidad de Carabobo (UC), tiene una experiencia de 33 años como docente-investigador y, actualmente, es el decano de la institución donde se realizó el experimento didáctico de la presente investigación, a saber; la Facultad de Ciencias y Tecnología (FaCyT) de la Universidad de Carabobo (UC) sede Bárbula, sus áreas de experticia son: el Análisis Matemático, la Probabilidad y la Estadística.

5.- **Dr. *Luis Rodríguez***. Este juez; es Licenciado en Matemática, Magíster en Ciencias Mención: Matemática y Doctor en Ciencias Mención: Matemática por la Universidad Central de Venezuela (UCV), tiene estudios Postdoctorales en Matemática por la "Universidad de Valparaíso" (Chile). Es Profesor Titular (Activo) a dedicación exclusiva por la Facultad de Ciencias y Tecnología (FaCyT) de la Universidad de Carabobo (UC), tiene una experiencia de 23 años como docente-investigador y, actualmente, es el director del departamento de Matemática de la institución donde se realizó el experimento didáctico de la presente investigación, a saber; la Facultad de Ciencias y Tecnología (FaCyT) de la Universidad de Carabobo (UC) sede Bárbula, sus áreas de experticia son: la Probabilidad, la Estadística y sus aplicaciones.

Área de experticia *Educación Matemática*. Este grupo estuvo conformado por trece (13) especialistas, éstos se encargaron de velar que cada reactivo encajara perfectamente dentro del espectro del área educativa y que la matriz de ponderación del instrumento, diseñada por el investigador, estuviese acorde con la finalidad esperada.

6.- **Dr. *Rolando García***. Este juez; es Profesor en la Especialidad: Matemática, Especialista en Docencia en Educación Superior, Especialista en Educación para la Integración de las Personas con Discapacidades, Magíster en Educación Mención: Enseñanza de la Matemática, Doctor en Educación y Doctor en Cultura Latinoamericana y Caribeña por el Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara" (UPEL-Maracay). Este especialista es Profesor Titular (Activo) a dedicación exclusiva adscrito al dpto. de Matemática del Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara" de la UPEL Maracay, es el creador de la Línea de Investigación "Didáctica del Cálculo" (código: $D0086$) por el IPMAR-UPEL, tiene dieciocho (18) años de experiencia como docente-investigador y, actualmente, es el coordinador del programa de "*Doctorado en Educación Matemática*" del IPMAR-UPEL cargo que ocupa desde el año 2018. Ha dictado una variedad de unidades curriculares en el programa de "*Doctorado en Educación Matemática*" y ha dirigido veintiuna (21) investigaciones conducentes a grado académico, a nivel de postgrado, distribuidas de la siguiente forma: una (1) Tesis del Doctorado en Educación, catorce (14) Tesis del Doctorado en Educación Matemática (de las cuales cinco (5) pertenecen al convenio con Colombia) y seis (6) Trabajos de Grados de la Maestría en Educación mención: Enseñanza de la Matemática; todas las investigaciones pertenecientes al IPRAEL UPEL-Maracay.

7.- **Dr. *Mario Arrieche***. Este juez; es Profesor en la Especialidad: Matemática, Magíster en Educación Superior Mención: Matemática por el Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara" de la UPEL de Maracay, es Doctor en Ciencias Matemáticas por el Programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada-España, tiene una experiencia como docente-investigador de 40 años, es Profesor Titular (Jubilado) a dedicación exclusiva adscrito al dpto. de Matemática del IPMAR-UPEL, ha sido profesor del área de Postgrado (Maestría enseñanza de la Matemática de la UPEL-Maracay, UNERG-San Juan de los Morros; Maestría en Estadística de la UCV-Maracay; Doctorado en Educación y Doctorado en Educación Matemática de la UPEL-Maracay). Fue coordinador de la Maestría en Enseñanza de la Matemática del IPMAR-UPEL (2003 − 2007), Coordinador General de Estudios de Postgrado del IPMAR-UPEL (2007 − 2009), investigador reconocido por el Programa de Promoción al investigador del Ministerio del poder Popular de la Ciencia y Tecnología, miembro fundador del Núcleo de Investigación en Educación Matemática Dr. "Emilio Medina" del IPMAR-UPEL, Miembro de la Comisión Nacional creadora del "*Doctorado en Educación Matemática*" del IPMAR-UPEL y coordinador de la Línea de Investigación "Perspectivas del Enfoque Semiótico Antropológico para la Didáctica de la Matemática" (IPMAR-UPEL).

8.- **Dra. *Martha Iglesias***. Esta jueza; es Profesora en la Especialidad: Matemática, Magíster en Educación Mención: Enseñanza de la Matemática y Doctora en Educación por el Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara" de la UPEL-Maracay. Tiene una experiencia como docente-investigadora de 34 años, es Profesora Asociado (Jubilada) a dedicación exclusiva, adscrita al dpto. de Matemática del IPMAR-UPEL, es integrante del CEINEM NT y del NIEM, su área de especialidad es la "Didáctica de la Geometría".

9.- **Dr. *José Chirinos***. Este juez; es Profesor en la Especialidad: Matemática y Magíster en Educación Superior Mención: Matemática por el IPMAR-UPEL, es Magíster en Investigación Educativa por la Universidad Nacional Experimental de los Llanos Centrales “Rómulo Gallegos”, es Doctor en Ciencias de la Educación por la Universidad Santa María (USM), tiene un Postdoctorado en Educación Latinoamericana (IPMAR-UPEL), tiene un Postdoctorado en Investigación Educativa (IPRAEL UPEL-Maracay), tiene un Postdoctorado en Investigación (UBA-Maracay), tiene un Postdoctorado en Investigación Transcompleja (UBA-Maracay). Tiene una experiencia como docente-investigador de 43 años y es Profesor Titular (Jubilado) a dedicación exclusiva adscrito al dpto. de Matemática del Instituto Pedagógico Rural El Mácaro “Luis Fermín” UPEL-El Mácaro. Fue; jefe de la Unidad de Control de Estudio (UPEL-El Mácaro), secretario del Consejo Directivo (UPEL-El Mácaro), subdirector de Docencia (UPEL-El Mácaro), secretario de organización de la APROUPEL, representante profesor ante el Consejo Directivo (UPEL-El Mácaro), coordinador del Área de Matemática (UPEL-El Mácaro) y director-decano del Instituto Pedagógico Rural El Mácaro “Luis Fermín” de la UPEL-El Mácaro.

10.- **Dr. *Rubén Parra***. Este juez; es Profesor en Matemática por la UPEL de Maturín, es Magister Scientiarum en Educación Mención: Enseñanza de las Matemáticas Básicas (UDO-Sucre), es Doctor en Ciencias de la Educación (UBA-Maracay). Fue jefe del dpto. de Ciencias Básicas del núcleo Anzoátegui de la Universidad de Oriente, tiene una experiencia como docente-investigador de 30 años y es Profesor Titular (Jubilado) a dedicación exclusiva adscrito al dpto. de Ciencias de la Unidad de Cursos Básicos del núcleo Anzoátegui de la Universidad de Oriente, fue docente de la unidad curricular “Epistemología” en el programa de Doctorado en Educación (IPRAEL UPEL-Maracay), su línea de investigación es la Enseñanza de la Matemática bajo el enfoque cualitativo.

11.- **Dr. *Agustín Mejías***. Este juez; es Ingeniero Industrial y Magíster en Ingeniería Industrial por la Facultad de Ingeniería (FacIng) de la Universidad de Carabobo (UC) sede Bárbula. Es Doctor en Ciencias Agrícolas por la Universidad Central de Venezuela (UCV) sede Maracay. Es Profesor Titular (Activo) a dedicación exclusiva adscrito al dpto. de Investigación de Operaciones de la Escuela de Industrial por la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Carabobo sede Bárbula, tiene 22 años de servicio como docente-investigador, es jefe de la Cátedra de Estadística y Calidad en la Escuela de Industrial por la Facultad de Ingeniería de la UC-Bárbula, es el director de la Revista “Ingeniería Industrial. Actualidad y Nuevas Tendencias” (FacIng UC-

Bárbula) y fue coordinador del "*Doctorado en Ingeniería*" por la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Carabobo sede Bárbula.

12.- **Dra. *Zoraida Villegas***. Esta jueza; es Licenciada en Educación Mención: Matemática, Magíster en Educación Mención: Enseñanza de la Matemática y Doctora en Educación por la Facultad de Ciencias de la Educación (FaCE) de la Universidad de Carabobo (UC) sede Bárbula. Está adscrita al Dpto de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo sede Bárbula, es Profesora Titular (Activa) a dedicación exclusiva con una experiencia como docente-investigadora de 21 años y, actualmente, es la directora de Asuntos Profesorales de la FaCE-UC.

13.- **Dr. *José Tesorero***. Este juez; es Licenciado en Educación Mención: Matemática por la Facultad de Ciencias de la Educación (FaCE) de la Universidad de Carabobo (UC) sede Bárbula, es Magíster en Matemática Mención: Docencia por la Facultad de Ingeniería (FacIng) de la Universidad de Carabobo (UC) sede Bárbula y es Doctor en Educación por la Facultad de Ciencias de la Educación (FaCE) de la Universidad de Carabobo (UC) sede Bárbula. Es Profesor Titular (Activo) a dedicación exclusiva con una experiencia de 22 años como docente-investigador y en la actualidad es el jefe del Departamento de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación (FaCE) de la Universidad de Carabobo (UC) sede Bárbula.

14.- **Dra. *María Ferreira***. Esta jueza; es Licenciada en Educación Mención: Matemática, Magíster en Educación Matemática y Doctora en Educación por la Facultad de Ciencias de la Educación (FaCE) de la Universidad de Carabobo (UC) sede Bárbula, es Profesora Titular (Activa) a dedicación exclusiva, está adscrita al dpto. de Ciencias Agógicas de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo sede Bárbula y tiene una experiencia como docente de 20 años. En la actualidad, es la directora editor-jefe de la Revista "Ciencias de la Educación" (FaCE UC-Bárbula) y es investigadora activa con reconocimiento PPII $2014 - 2016$ ante el Ministerio de Ciencias y Tecnología.

15.- **Dra. *Violerva Alastre***. Esta jueza; es Licenciada en Educación Mención: Matemática, Magíster en Educación Matemática y Doctora en Educación por la Facultad de Ciencias de la Educación (FaCE) de la Universidad de Carabobo (UC) sede Bárbula, es Profesora Titular (Activa) a dedicación exclusiva con 18 años de servicio como docente-investigadora, está adscrita al dpto. de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo sede Bárbula. Fue miembro de la Comisión Coordinadora de la Maestría en Educación en Física

(FaCE UC-Bárbula), fue Miembro de la Comisión de Investigación (FaCE UC-Bárbula), fue Miembro de la Comisión Revisión de las Líneas de Investigación de la Mención: Matemática del dpto. de Matemática y Física (FaCE UC-Bárbula) y, actualmente, es la jefe de Cátedra de Cálculo para la mención Matemática (FaCE UC-Bárbula).

16.- **Dr. *Alexis Espinoza***. Este juez; es Licenciado en Educación Mención: Matemática (FaCE UC-Bárbula), es Magister Scientiarum en Educación, Mención: Geometría por la Universidad de San Paulo (Ginebra-Suiza), es Especialista en Educación Técnica por la UPEL y Doctor en Ciencias Sociales, Mención: Estudios Culturales (UC-Bárbula), es Profesor Titular (Activo) a dedicación exclusiva con 22 años de servicio, está adscrito al dpto. de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo sede Bárbula y, actualmente, es el Asesor de la Secretaría de la Universidad de Carabobo.

17.- **Dra. *Iliana Rodríguez***. Esta jueza; es Licenciada en Educación Mención: Matemática, Magíster en Educación Matemática y Doctora en Educación por la FaCE UC-Bárbula, es Profesora Titular (Activa) a dedicación exclusiva con 18 años de servicio como docente-investigadora adscrita al dpto. de Ciencias Agógicas de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo sede Bárbula, en la actualidad, es Miembro de la Comisión de Auditoría Académica de la FaCE UC-Bárbula.

18.- **Dr. *Lucas Galvis***. Este juez; es Profesor en la Especialidad: Matemática, Magíster en Educación Mención: Enseñanza de la Matemática y Doctor en Educación por el Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara" de la UPEL de Maracay, tiene una experiencia docente de 19 años y labora en el Liceo Bicentenario Gabriela Mistral.

Área de experticia *Metodología de la Investigación*. Este grupo estuvo conformado por diez (10) especialistas, los mismos, se enfocaron en cuidar que cada reactivo engranara cuidadosamente con su respectivo objetivo de investigación y que el instrumento fuese el indicado según la técnica, paradigma, enfoque, diseño y metodología seleccionados para el trabajo.

19.- **Dra. *Gabriela Gardié***. Esta jueza; es Ingeniero de Sistemas y Magíster en Gerencia Mención: Administración de Empresas por la Universidad Bicentenaria de Aragua (UBA-Maracay), es Doctora en Educación y tiene estudios Postdoctorales en Investigación por el Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara" (UPEL-Maracay). Es Profesora Titular (Activa) a dedicación exclusiva, adscrita al dpto. de Matemática del IPMAR-UPEL, con 28 años de experiencia como docente-investigadora, fue coordinadora de la Especialidad de Informática y jefe de las Salas OPSU (IPRAEL UPEL-Maracay), fue coordinadora Institucional de Investigación (IPRAEL UPEL-Maracay) y, actualmente, coordina su Línea de Investigación "Informática y Gestión del Conocimiento" (IPRAEL UPEL-Maracay).

20.- **Dra. *Geraldine Escalona***. Esta jueza; es Administradora RRHH (UNESR), es Magíster en Gerencia RRHH (UNEFA), es Doctora en Ciencias Gerenciales y tiene estudios Postdoctorales en Organizaciones Transcomplejas (UNY-Barquisimeto). Fue Líder de la Gerencia de Personal del Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara" (UPEL-Maracay) 2003 – 2022, jefe de la Unidad de Personal del IPMAR-UPEL hasta noviembre del 2022, ha sido profesora del programa de "Doctorado en Educación: Gestión del Desarrollo Humano" (IPRAEL UPEL-Maracay), tiene una experiencia docente de 18 años, es Profesora Asociado en la UNY-Barquisimeto, ha impartido clases en el Doctorado en Gerencia por la Universidad de Yacambú sede Barquisimeto y es la directora general del Grupo Empodérate Consultores Empresariales C.A.

21.- **Dr. *Aristides Méndez***. Este juez; es Profesor. Especialidad: Educación Física (IPB, UPEL-Barquisimeto), tiene una Maestría en Investigación Educativa (FaCE UC-Bárbula), es Doctor en Educación (PIDE) por la (UCLA-UNEXPO-UPEL), es Profesor Asociado (Activo) a dedicación exclusiva, adscrito al dpto. de Educación Física de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo sede Bárbula, tiene 20 años de experiencia como docente-investigador, es docente del Seminario de Investigación y Trabajo de Grado en el programa de "*Maestría en Investigación Educativa*" del Área de Postgrado de la FaCE UC-Bárbula y, actualmente, es el jefe de Sección de Grado de la Dirección de Investigación y Producción Intelectual para la FaCE UC-Bárbula.

22.- **Dr. *José López***. Este juez; es Licenciado en Educación Mención: Matemática, Magíster en Educación Mención: Investigación Educativa y Doctor en Educación por la FaCE UC-Bárbula, está adscrito al dpto. de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación (FaCE) de la Universidad de Carabobo sede Bárbula con 26 años de experiencia como docente-investigador, es Profesor Titular (Activo) a dedicación exclusiva, es el coordinador de la "*Maestría en Educación Matemática*" (FaCE UC-Bárbula), es investigador nivel II por el Ministerio de Ciencias y Tecnología, fue jefe del dpto. de Matemática y Física y, actualmente, es el director de Administración Sectorial de la FaCE UC-Bárbula.

23.- **Dra. *Francis Moreno***. Esta jueza; es Ingeniero de Sistemas (UBA-Maracay), es Especialista en Docencia en Educación Superior (IPRAEL, UPEL-Maracay), es Doctora en

Educación (IPRAEL, UPEL-Maracay), es Profesora Asociado (Activa) a dedicación exclusiva con 12 años de experiencia como docente-investigadora en el dpto. de Informática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo sede Bárbula, fue directora de Tecnología de Información y Comunicación de la FaCE UC-Bárbula y miembro de la Comisión del "*Doctorado en Educación*" de la FaCE UC-Bárbula.

24.- **Dr. *Roger Meléndez***. Este juez; es Licenciado en Educación Mención Matemática, tiene una Especialización en TIC, una Maestría en Enseñanza de la Física, una Maestría en Desarrollo Curricular y es Doctor en Educación; todos esos grados los obtuvo por la Facultad de Ciencias de la Educación (FaCE) de la Universidad de Carabobo (UC) sede Bárbula. Está adscrito como Profesor Titular (activo) al dpto. de Informática la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo sede Bárbula, con una experiencia de 20 años de servicio como docente-investigador. Actualmente, es el jefe del dpto. de Informática de la FaCE UC, ha sido coordinador de la especialización TIC y coordinador de diseño curricular en la especialidad de Informática.

25.- **Dr. *Carlos Jiménez***. Este juez; es Ingeniero Electricista y Magíster en Ingeniería Eléctrica por la Facultad de Ingeniería (FacIng) de la Universidad de Carabobo (UC) sede Bárbula. Es Doctor en Ciencias de la Educación y tiene una Especialización en Gestión Pública por la Universidad Nacional Experimental de los Llanos Centrales "Rómulo Gallegos" (UNERG). Es Profesor Titular (Activo) a dedicación exclusiva con 30 años de experiencia como docente-investigadora en el dpto. de Circuitos y Mediciones de la Escuela de Ingeniería Eléctrica por la Facultad de Ingeniería de la UC-Bárbula. Ha sido director de la Escuela de Ingeniería Eléctrica UC (12 años), jefe del dpto. de Circuitos y Mediciones de la Escuela de Ingeniería Eléctrica UC y secretario de la Universidad Nacional Experimental de los Llanos Centrales "Rómulo Gallegos" (UNERG) (7 años).

26.- **Dra. *Omaira Timúdez***. Esta jueza; es Licenciada en Educación Mención: Educación para el Trabajo, Magíster en Investigación Educativa y Doctora en Educación por la FaCE UC-Bárbula. Es Profesora Asociado (Activa) a dedicación exclusiva, adscrita al dpto. de Ciencias Agógicas de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo sede Bárbula, tiene 14 años de experiencia como docente-investigadora en la FaCE UC-Bárbula. Fue miembro de la comisión del PEDES (2018 – 2022) y miembro de la comisión para la transformación curricular de la FaCE UC-Bárbula.

27.- **Dr. *Wilmer Barico***. Este juez; es Licenciado en Educación Mención: Informática, Magíster en Investigación Educativa y Doctor en Educación por la FaCE UC-Bárbula, tiene una experiencia como docente-investigador de 13 años, es Profesor Agregado (Activo) a dedicación exclusiva y está adscrito al dpto. de Informática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo sede Bárbula.

28.- **Dr. *John Chipman***. Este juez; es Ingeniero Industrial y Abogado por la Universidad José Antonio Páez (UJAP) sede del Municipio San Diego en Valencia, es Magíster en Derecho Penal y Criminología (UBA-Maracay), es Magíster en Gestión y Auditorías Ambientales Módulo Optativo en Aplicación de Energía Renovable (UNIB-Puerto Rico), es Doctor en Ciencias de la Educación y tiene estudios Postdoctorales en Investigación por la Universidad Bicentenaria de Aragua (UBA-Maracay).

Área de experticia *Escritura*. Este grupo fue constituido por dos (2) especialistas, estos profesionales se encargaron de revisar minuciosamente la ortografía y/o redacción de cada reactivo presente en el instrumento.

29.- **Dr. *Wilfredo Illas***. Este juez; es Profesor de Literatura (IPB UPEL-Barquisimeto), Especialista en Educación de Adultos (UNESR), Magíster en Literatura Venezolana (FaCE UC-Bárbula), Doctor en Educación (FaCE UC-Bárbula), Doctor en Literatura Latinoamericana por la Universidad de Concepción (Chile), tiene estudios Postdoctorales en: Ciencias de la Educación (FaCE UC-Bárbula), Ciencias Humanas (LUZ) e Investigación Literaria (ULAC). Es Profesor Titular (Activo) a dedicación exclusiva con 23 años de experiencia como docente-investigador, está adscrito al dpto. de Lengua y Literatura de la Facultad de Ciencias de la Educación (FaCE) de la Universidad de Carabobo (UC) sede Bárbula, es jefe de la cátedra de Teorías y Métodos de Investigación Literaria del dpto. de Lengua y Literatura de la FaCE UC-Bárbula, fue director-editor de la Revista de Postgrado ARJÉ de la FaCE UC-Bárbula y, actualmente, es el coordinador del programa de "*Doctorado en Educación*" de la FaCE UC-Bárbula.

30.- **Dra. *Alexandra Bolívar***. Esta jueza; es Profesora en la Especialidad: Lengua y Literatura, Magíster en Lingüística y Doctora en Educación por el Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara" (UPEL-Maracay), está adscrita al dpto. de Castellano y Literatura del IPMAR-UPEL, tiene 8 años de experiencia como docente-investigadora, es Profesora Agregado (Activa) a dedicación exclusiva y es la jefe del área de Lingüística y Enlace departamental de Currículo por el IPRAEL UPEL-Maracay.

Anexo A-3

DOCUMENTOS PARA LA VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO DE MEDICIÓN

[**CARTA DIRIGIDA AL JUEZ EXPERTO**]

UNIVERSIDAD **P**EDAGÓGICA **E**XPERIMENTAL **L**IBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO "RAFAEL ALBERTO ESCOBAR LARA"
COORDINACIÓN GENERAL DE ESTUDIOS DE POSTGRADO
DOCTORADO EN **E**DUCACIÓN **M**ATEMÁTICA

Ciudadano(a):

Me dirijo a usted muy respetuosamente para solicitar su valiosa colaboración profesional en el sentido de emitir su juicio, como experto(a) en el área de «___________________», acerca del instrumento de recolección de datos que le anexo a la presente.

Dicho instrumento ha sido diseñado para recabar datos relacionados con la investigación titulada: "**APROXIMACIÓN TEÓRICA PARA LA DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES Y SU EFECTO EN EL RENDIMIENTO ACADÉMICO INMEDIATO. Una Estrategia Didáctica Alternativa y la Modelación Matemática**". Este estudio será presentado como «*Tesis Doctoral*» para el programa de «*Doctorado en Educación Matemática*» por el IPRAEL de la UPEL de Maracay y está bajo la tutoría del Dr. Esteban Flores. Tiene como objetivo principal «Generar una aproximación teórica para la descomposición en fracciones simples desarrollada con un modelo instruccional, para analizar su efecto sobre el rendimiento académico inmediato en estudiantes de cálculo II de la FaCyT-UC durante el lapso académico $1-2023$».

En tal sentido; le agradezco emitir su opinión experta sobre el mencionado instrumento de manera que pueda determinarse su validez de contenido, para ello le suministro un formato de validación.

Atentamente,

Prof. **Franzyuri Hernández**, M.Sc.
V-10.732.822

[**FORMATO DE VALIDACIÓN DE CONTENIDO**]

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO "RAFAEL ALBERTO ESCOBAR LARA"
COORDINACIÓN GENERAL DE ESTUDIOS DE POSTGRADO
DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

FORMATO DE VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO DE MEDICIÓN

A) INFORMACIÓN GENERAL

A1) *Objetivo del instrumento de validación*

El objetivo del presente instrumento es determinar la «*Validez de Contenido*» de una «*Prueba de Rendimiento Académico*», que se aplicará a una muestra estudiantil durante el desarrollo de la investigación: "**APROXIMACIÓN TEÓRICA PARA LA DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES Y SU EFECTO EN EL RENDIMIENTO ACADÉMICO INMEDIATO. Una Estrategia Didáctica Alternativa y la Modelación Matemática**", utilizando el método de «*Juicios de Expertos*». Este método permitirá establecer la validez de contenido de cada reactivo y la validez de contenido de todo el instrumento; el nivel de concordancia entre los jueces será calculado a través del **C**oeficiente de **V**alidez de **C**ontenido propuesto por Hernández-Nieto, en ese sentido, se necesita de su colaboración en el proceso de evaluación de cada uno de los reactivos de la mencionada prueba.

A2) *Instrucciones para usar el instrumento de validación*

1. Lea cuidadosamente cada una de las instrucciones y los criterios de evaluación.

2. Anote sus datos incluyendo nombres y apellidos, profesión, nivel académico y años de experiencia.

3. Evalúe cada uno de los reactivos marcando con una equis (**X**) para escoger solamente una de las opciones que a continuación se señalan:

- ✓ *Pertinencia*: referida concretamente a reactivos ajustados a lo que se va a evaluar.
- ✓ *Redacción*: interpretación unívoca del enunciado del reactivo a través de la claridad y precisión en el uso del vocabulario técnico.
- ✓ *Adecuación*: correspondencia entre el contenido de cada reactivo y el nivel de preparación o desempeño del entrevistado.

CÓDIGO	APRECIACIÓN CUALITATIVA
B	**BUENO**: El indicador se presenta en grado igual o ligeramente superior al mínimo aceptable.
R	**REGULAR**: El indicador no llega al mínimo aceptable, pero se acerca a él.
D	**DEFICIENTE**: El indicador está lejos de alcanzar el mínimo aceptable.

Nota: Fuente: Palella y Martins (2012, p. 162)

4. En caso de ser necesario utilice la sección de observaciones en forma breve y precisa.

B) EVALUACIÓN DEL INSTRUMENTO DE MEDICIÓN

B1) *Datos del juez experto que valida el instrumento de medición*

Nombres y Apellidos:	
Número de Cédula de Identidad:	
Título de Pregrado:	
Grado de Maestría:	
Grado de Doctorado:	
Estudios Culminados de Postdoctorado:	
Años de Experiencia como Docente:	
Lugar de Trabajo como Docente:	
Cargo Directivo que Ocupa u Ocupó:	
Escalafón Docente:	
Identificador de correo electrónico:	
Número Telefónico:	

B2) *Tabla de ponderación para el instrumento de medición*

Reactivos	**Pertinencia**			**Redacción**			**Adecuación**			**Observaciones**
	3	2	1	3	2	1	3	2	1	
	B	**R**	**D**	**B**	**R**	**D**	**B**	**R**	**D**	
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Aspectos Generales	**Si**	**No**	**Observaciones**
¿El instrumento contiene instrucciones para su solución?			
¿El número de reactivos es adecuado?			
¿Los reactivos están presentados en forma lógica secuencial?			

VALIDEZ					
Válido		Válido con Observaciones		No Válido	

____

Firma del Juez Experto

Fecha:	
Hora:	

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO "RAFAEL ALBERTO ESCOBAR LARA"
COORDINACIÓN GENERAL DE ESTUDIOS DE POSTGRADO
DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ACTA DE VALIDACIÓN

Yo, __________________________, titular de la C.I.: _____________ y especialista en el área «_____________________________», hago constar que he revisado minuciosamente el instrumento de recolección de datos para el estudio titulado: "**APROXIMACIÓN TEÓRICA PARA LA DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES Y SU EFECTO EN EL RENDIMIENTO ACADÉMICO INMEDIATO. Una Estrategia Didáctica Alternativa y la Modelación Matemática**", presentado por el ciudadano: (M.Sc.) **Franzyuri Fernando Hernández Fajardo**, titular de la cédula de identidad **V-10732822**. Este estudio está bajo la tutoría del Dr. Esteban Flores y será presentado como «*Tesis Doctoral*», ante la Subdirección de Investigación y Postgrado del Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara" de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador de Maracay, para optar al título académico de «*Doctor en Educación Matemática*».

En tal sentido; encuentro que el instrumento en cuestión reúne los requisitos suficientes y necesarios para ser considerado válido y, por lo tanto, apto para ser aplicado a la muestra estudiantil en el logro de los objetivos que se desean obtener.

Valencia, a los _______ días del mes ______________ de **2023**

____
Firma del Juez Experto

Anexo A-4

Tabla 37

Resultados del coeficiente de validez de contenido del instrumento de medición.

Reactivos	Treinta (30) Jueces Expertos																														Sx_i	Mx	CVC_i	Pe_i	CVC
	Matemática					Educación Matemática													Metodología de la Investigación										Escritura						
	J1	J2	J3	J4	J5	J1	J2	J3	J4	J5	J6	J7	J8	J9	J10	J11	J12	J13	J1	J2	J3	J4	J5	J6	J7	J8	J9	J10	J1	J2					
R1	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	269	29,8889	0,9963	4,8569E-45	**0,99630**
R2	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	270	30,0000	1,0000	4,8569E-45	**1,00000**
R3	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9	8	9	268	29,7778	0,9926	4,8569E-45	**0,99259**
R4	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9	8	9	268	29,7778	0,9926	4,8569E-45	**0,99259**
R5	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	269	29,8889	0,9963	4,8569E-45	**0,99630**
R6	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	269	29,8889	0,9963	4,8569E-45	**0,99630**
R7	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	269	29,8889	0,9963	4,8569E-45	**0,99630**
R8	8	9	9	9	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	267	29,6667	0,9889	4,8569E-45	**0,98889**
R9	8	9	9	9	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	267	29,6667	0,9889	4,8569E-45	**0,98889**
R10	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	268	29,7778	0,9926	4,8569E-45	**0,99259**
CVC del Instrumento (Promedio)																																			**0,99407**

Nota: Fuente: Propia (2023).

Interpretación.

La Tabla 37 presenta los resultados de los treinta (30) jueces expertos que participaron en el proceso de validación del instrumento, éstos fueron distribuidos en cuatro (4) renglones, a saber: *matemática* con cinco (5) especialistas, *educación matemática* con trece (13) especialistas, *metodología de la investigación* con diez (10) especialistas y *escritura* con dos (2) especialistas. Los cálculos para el llenado de la Tabla 37 se hicieron por medio del estadístico que presenta Hernández-Nieto (2002).

Tomando en cuenta la Tabla 38 con los intervalos para la interpretación del $\boldsymbol{CVC}$ que presenta Hernández-Nieto (2011);

Tabla 38

Interpretación del coeficiente de validez de contenido del instrumento de medición.

Si $\boldsymbol{CVC} \in [0; 0.6[$, entonces la validez y concordancia son *inaceptables*.
Si $\boldsymbol{CVC} \in [0.6; 0.7]$, entonces la validez y concordancia son *deficientes*.
Si $\boldsymbol{CVC} \in]0.7; 0.8]$, entonces la validez y concordancia son *aceptables*.
Si $\boldsymbol{CVC} \in]0.8; 0.9]$, entonces la validez y concordancia son *buenas*.
Si $\boldsymbol{CVC} \in]0.9; 1]$, entonces la validez y concordancia son *excelentes*.

Nota: Fuente: Autor (2023).

Se tiene que; por los coeficientes mostrados en la Tabla 37, la validez de contenido de cada uno de los 10 reactivos y la del instrumento en general es *excelente*.

Anexo A-5

CONFIABILIDAD DE CONSISTENCIA INTERNA DEL INSTRUMENTO DE MEDICIÓN

Para la confiabilidad de la «*prueba de rendimiento académico*» (o posttest) se usó una técnica conocida como prueba «*Test/Retest*», ésta consiste en aplicar el instrumento a todos los grupos de investigación en dos (2) momentos y después correlacionar en cada grupo los puntajes obtenidos; este coeficiente calculado representa una estimación de la confiabilidad del instrumento en cuestión. Entre el primer momento y el segundo momento de prueba, en cada grupo, hubo aproximadamente una semana.

En relación al cálculo de este coeficiente se utilizó la «*Correlación de Pearson*» cuya fórmula según Ruiz (2013) es la siguiente:

$$\boldsymbol{r_{xy}} = \frac{\boldsymbol{N\sum XY - \sum X \sum Y}}{\sqrt{[\boldsymbol{N\sum X^2 - (\sum X)^2}][\boldsymbol{N\sum Y^2 - (\sum Y)^2}]}} \ . \qquad (\mathbf{1})$$

Donde:

$\boldsymbol{r_{xy}}$ ≔ *Coeficiente de correlación*.

$\boldsymbol{N}$ ≔ *Número de sujetos*.

$\boldsymbol{X}$ ≔ *Valores de X*. (1ra aplicación del Post-Test).

$\boldsymbol{Y}$ ≔ *Valores de Y*. (2da aplicación del Post-Test).

El coeficiente $\boldsymbol{r_{xy}}$ puede tomar valores en el intervalo $\boldsymbol{-1 \le r_{xy} \le 1}$. Un valor del coeficiente $\boldsymbol{r_{xy}}$ de $\boldsymbol{-1}$ describe una correlación negativa perfecta, es decir, todos los puntos experimentales están sobre una recta de pendiente negativa. De manera similar, cuando $\boldsymbol{r_{xy} = 1}$ se tiene una correlación positiva perfecta, es decir, todos los puntos están exactamente sobre una recta de pendiente positiva. Cuando no existe correlación entre $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ el valor de $\boldsymbol{r_{xy}}$ es cero (Miller, J. N. y Miller, J. C., 2002).

Confiabilidad del Post-Test con respecto al grupo experimental ($\mathbf{G_E}$). Para el análisis se trabajó con el siguiente grupo de datos. En esta prueba participaron $\mathbf{38}$ de $\mathbf{40}$ estudiantes.

Tabla 39

Resultados de la primera aplicación del posttest al G_E.

14	9	14	17	18	14	9	18
15	15	12	13	13	17	14	12
14	15	15	11	15	18	16	16
12	13	15	14	17	11	12	19
20	17	19	18	14	15		

Nota: 38 calificaciones de la prueba de rendimiento académico en el G_E al aplicarla la primera vez. Fuente: Propia (2023).

Tabla 40

Frecuencia de los datos de la primera aplicación del posttest al G_E.

Dato	f	F
9	2	2
11	2	4
12	4	8
13	3	11
14	7	18
15	7	25
16	2	27
17	4	31
18	4	35
19	2	37
20	1	38
	38	

Nota: Fuente: Autor (2023).

Para obtener los datos numéricos después de aplicar por segunda vez el posttest en el $\boldsymbol{G_E}$ se usó la información de las Tablas 15 y 16.

A continuación; se realizó la estimación del coeficiente de confiabilidad del posttest aplicado al $\boldsymbol{G_E}$, para ello, se utilizó la «*Correlación de Pearson*». Antes de realizar este cálculo fue necesario igualar en ambos momentos de prueba el número de unidades de estudio con el objetivo de poder utilizar la fórmula para obtener el coeficiente de correlación de Pearson. En este caso; se eliminó en forma aleatoria una calificación del segundo momento, ver Tabla 15, de prueba (a saber, un **18**) y, con esto se igualaron las cantidades en ambos momentos de prueba a **38** unidades de estudio.

Tabla 41

Correlación del posttest para el grupo experimental (G_E).

Sujeto (Grupo Experimental)	1er Momento de Prueba		2do Momento de Prueba		XY
	X	X^2	Y	Y^2	
1	9	81	8	64	72
2	9	81	9	81	81
3	11	121	9	81	99
4	11	121	9	81	99
5	12	144	12	144	144
6	12	144	12	144	144
7	12	144	12	144	144
8	12	144	12	144	144
9	13	169	12	144	156
10	13	169	12	144	156
11	13	169	13	169	169
12	14	196	13	169	182
13	14	196	13	169	182
14	14	196	13	169	182
15	14	196	13	169	182
16	14	196	13	169	182
17	14	196	13	169	182
18	14	196	14	196	196

19	15	225	14	196	210
20	15	225	14	196	210
21	15	225	14	196	210
22	15	225	14	196	210
23	15	225	16	256	240
24	15	225	16	256	240
25	15	225	16	256	240
26	16	256	16	256	256
27	16	256	16	256	256
28	17	289	17	289	289
29	17	289	17	289	289
30	17	289	17	289	289
31	17	289	18	324	306
32	18	324	18	324	324
33	18	324	18	324	324
34	18	324	18	324	324
35	18	324	18	324	324
36	19	361	18	324	342
37	19	361	19	361	361
38	20	400	20	400	400
Σ	560	8520	546	8186	8340

Nota: Fuente: Ruiz (2023).

$$\boldsymbol{r_{xy}} = \frac{38 \cdot 8340 - 560 \cdot 546}{\sqrt{[38 \cdot 8520 - 313600][38 \cdot 8186 - 298116]}} \cong \mathbf{0,97}\,.$$

Como se puede observar el $\boldsymbol{r_{xy}} = \mathbf{0,97}$. Este resultado indicó que existe una correlación "muy alta" entre las puntuaciones de la primera y la segunda medición, lo cual equivale a decir que; el instrumento analizado (a saber, el Post-Test) es altamente confiable con respecto al $\boldsymbol{G_E}$ en cuanto a la estabilidad de las puntuaciones a través del tiempo (Ruiz, ob. cit.).

A continuación; se calculó entre qué límites se encuentra el coeficiente de correlación de Pearson en relación al $\boldsymbol{G_E}$ con un $\mathbf{95}$ % de confianza. Para ello, se usaron los criterios de la significación del coeficiente de correlación de Pearson que muestra (Chourio: 1987, p. 107).

Como n es menor que 100 (a saber, $\boldsymbol{n = 38}$), se aplicó la fórmula $\boldsymbol{z}$ de Fisher y se calculó el error típico $\boldsymbol{\sigma z}$.

$$\boldsymbol{\sigma z} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{n} - \mathbf{3}}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{38 - 3}}} \cong \mathbf{0,17}\,.$$

Para encontrar los límites fue necesario convertir el coeficiente de correlación obtenido a $\boldsymbol{z}$ de Fisher. Esto se logró usando una tabla de conversión de $\boldsymbol{r}$ en $\boldsymbol{z}$.

Conversión de $\boldsymbol{r}$ en $\boldsymbol{z}$: $\boldsymbol{r} = \mathbf{0,97} \rightarrow \boldsymbol{z} = \mathbf{2,09}$.

Se calculan los límites de confianza:

$$\boldsymbol{z} \pm VC \cdot \boldsymbol{\sigma z} \rightarrow 95\ \%\ (\text{ó } 0{,}05)\text{: } Valor\ Crítico = VC = 1{,}96.$$

$$2{,}09 \pm 1{,}96\ (0{,}17) = 2{,}09 \pm 0{,}3332.$$

El intervalo de confianza obtenido al $95\,\%$ fue: $(1{,}757\ ;\ 2{,}423)$. Para realizar la interpretación fue necesario convertir los límites conseguidos de $\boldsymbol{z}$ a $\boldsymbol{r}$ utilizando la misma tabla de conversión.

$\boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{r}$
1,757	0,945
2,423	0,985

Interpretación: en el $\mathbf{95}$ % de los casos, el coeficiente de correlación del $\boldsymbol{G_E}$ no será mayor de $\mathbf{0,985}$ ni menor de $\mathbf{0,945}$. Es decir; 0,97 $\in\ (\mathbf{0,945}\ ;\ \mathbf{0,985})_{\mathbf{95}\,\%}$.

Confiabilidad del Post-Test con respecto al primer grupo control $(\mathbf{G_C})$. Para este estudio de confiabilidad se utilizó el siguiente grupo de datos. En este momento de prueba participaron $\mathbf{37}$ de $\mathbf{40}$ estudiantes.

Tabla 42

Resultados de la primera aplicación del posttest al G_C.

13	10	11	13	11	16	12	12
11	10	7	14	10	10	11	10
11	9	13	5	15	13	15	9
11	12	6	16	8	9	13	14
15	9	14	14	16			

Nota: 37 calificaciones de la prueba de rendimiento académico en el G_C al aplicarla la primera vez. Fuente: Autor (2023).

Tabla 43

Frecuencia de los datos de la primera aplicación del posttest al G_C.

Dato	f	F
5	1	1
6	1	2
7	1	3
8	1	4
9	4	8
10	5	13
11	6	19
12	3	22
13	5	27
14	4	31
15	3	34
16	3	37
	37	

Nota: Fuente: Propia (2023).

Para obtener los datos numéricos después de aplicar por segunda vez el posttest en el $\boldsymbol{G_C}$ se usó la información de las Tablas 18 y 19.

A continuación; se realizó la estimación del coeficiente de confiabilidad del posttest aplicado al $\boldsymbol{G_C}$ usando la «*Correlación de Pearson*». En este caso; se eliminó en forma aleatoria una calificación del primer momento de prueba, ver Tabla 42, (a saber, un $\mathbf{13}$) y, con esto se igualaron las cantidades en ambos momentos de prueba a $\mathbf{36}$ unidades de estudio.

Tabla 44

Correlación del posttest para el primer grupo control (G_C).

Sujeto (Grupo Control)	1er Momento de Prueba		2do Momento de Prueba		XY
	X	X^2	Y	Y^2	
1	5	25	7	49	35
2	6	36	8	64	48
3	7	49	8	64	56
4	8	64	9	81	72
5	9	81	9	81	81
6	9	81	9	81	81
7	9	81	10	100	90
8	9	81	10	100	90
9	10	100	10	100	100
10	10	100	10	100	100
11	10	100	10	100	100
12	10	100	11	121	110
13	10	100	11	121	110
14	11	121	11	121	121
15	11	121	11	121	121
16	11	121	11	121	121
17	11	121	11	121	121
18	11	121	12	144	132
19	11	121	13	169	143
20	12	144	13	169	156
21	12	144	13	169	156
22	12	144	13	169	156
23	13	169	13	169	169
24	13	169	13	169	169
25	13	169	13	169	169
26	13	169	14	196	182
27	14	196	15	225	210
28	14	196	15	225	210
29	14	196	15	225	210
30	14	196	15	225	210
31	15	225	15	225	225
32	15	225	16	256	240
33	15	225	16	256	240
34	16	256	16	256	256
35	16	256	18	324	288
36	16	256	19	361	304
Σ	415	5059	443	5747	5382

Nota: Fuente: Ruiz (2023).

$$\boldsymbol{r_{xy}} = \frac{36 \cdot 5382 - 415 \cdot 443}{\sqrt{[36 \cdot 5059 - 172225][36 \cdot 5747 - 196249]}} \cong \mathbf{0,97}\ .$$

Como se puede observar el $\boldsymbol{r_{xy}} = \mathbf{0,97}$. Este resultado indicó que existe una correlación "muy alta" entre las puntuaciones del primer momento y del segundo momento de prueba, lo cual equivale a decir que; el posttest es altamente confiable con respecto al $\boldsymbol{G_C}$ en cuanto a la estabilidad de las puntuaciones a través del tiempo.

Se calculó entre qué límites se encuentra el coeficiente de correlación de Pearson en relación al $\boldsymbol{G_C}$ con un $\mathbf{95}$ % de confianza. Como n es menor que 100 (a saber, $\boldsymbol{n = 36}$), se aplicó la fórmula $\boldsymbol{z}$ de Fisher y se calculó el error típico $\boldsymbol{\sigma z}$.

$$\boldsymbol{\sigma z = \frac{1}{\sqrt{n-3}} = \frac{1}{\sqrt{36-3}} \cong 0,17} \,.$$

Para este caso, al realizar las cuentas respectivas se observó que el intervalo de confianza al 95 % coincide con el calculado en el $\boldsymbol{G_E}$. En ese sentido, se interpretó lo siguiente; en el $\mathbf{95}$ % de los casos, el coeficiente de correlación del $\boldsymbol{G_C}$ no será mayor de $\mathbf{0,985}$ ni menor de $\mathbf{0,945}$. Es decir; 0,97 $\in$ $(\mathbf{0,945}\,;\ \mathbf{0,985})_{\mathbf{95}\,\%}$.

Confiabilidad del Post-Test con respecto al segundo grupo control **($\mathbf{G_C^*}$)**. Para este análisis se usó el siguiente grupo de datos. En este momento de prueba participaron $\mathbf{40}$ de $\mathbf{40}$ estudiantes.

Tabla 45

Resultados de la primera aplicación del posttest al G_C^*.

11	12	9	4	11	7	10	9
15	15	7	14	12	11	8	7
16	17	13	11	6	11	11	12
9	11	7	11	8	8	20	11
5	14	9	11	16	9	13	13

Nota: 40 calificaciones de la prueba de rendimiento académico en el G_C^* al aplicarla la primera vez. Fuente: Propia (2023).

Tabla 46

Frecuencia de los datos de la primera aplicación del posttest al G_C^*.

Dato	f	F
4	1	1
5	1	2
6	1	3
7	4	7
8	3	10
9	5	15
10	1	16
11	10	26
12	3	29
13	3	32
14	2	34
15	2	36
16	2	38
17	1	39
20	1	40
	40	

Nota: Fuente: Propia (2023).

Para obtener los datos numéricos después de aplicar por segunda vez el posttest en el $\boldsymbol{G_C^*}$ se usó la información de las Tablas 21 y 22.

A continuación; se realizó la estimación del coeficiente de confiabilidad del posttest aplicado al $\boldsymbol{G_C^*}$ usando la «*Correlación de Pearson*». En este caso; no fue necesario eliminar unidades de estudio (o calificaciones) en ninguno de los momentos de prueba.

Tabla 47

Correlación del posttest para el segundo grupo control (G_C^*).

Sujeto (Grupo Control)	1^er^ Momento de Prueba		2^do^ Momento de Prueba		XY
	X	X^2	Y	Y^2	
1	4	16	4	16	16
2	5	25	6	36	30
3	6	36	8	64	48
4	7	49	8	64	56
5	7	49	8	64	56
6	7	49	8	64	56
7	7	49	8	64	56
8	8	64	8	64	64
9	8	64	9	81	72
10	8	64	9	81	72
11	9	81	9	81	81
12	9	81	9	81	81
13	9	81	10	100	90
14	9	81	10	100	90
15	9	81	11	121	99
16	10	100	11	121	110
17	11	121	11	121	121
18	11	121	11	121	121
19	11	121	11	121	121
20	11	121	11	121	121
21	11	121	11	121	121
22	11	121	11	121	121
23	11	121	12	144	132
24	11	121	12	144	132
25	11	121	12	144	132
26	11	121	12	144	132
27	12	144	12	144	144
28	12	144	12	144	144
29	12	144	12	144	144
30	13	169	13	169	169
31	13	169	13	169	169
32	13	169	13	169	169
33	14	196	13	169	182
34	14	196	13	169	182
35	15	225	15	225	225
36	15	225	15	225	225
37	16	256	15	225	240
38	16	256	15	225	240
39	17	289	16	256	272
40	20	400	18	324	360
Σ	434	5162	445	5261	5196

Nota: Fuente: Ruiz (2023).

$$\boldsymbol{r_{xy}} = \frac{40 \cdot 5196 - 434 \cdot 445}{\sqrt{[40 \cdot 5162 - 188356][40 \cdot 5261 - 198025]}} \cong \boldsymbol{0,98}\,.$$

Como se puede observar el $\boldsymbol{r_{xy}} = \boldsymbol{0,98}$. Este resultado revela que existe una correlación "muy alta" entre las calificaciones del primer momento y del segundo momento de prueba, lo cual equivale a decir que; el instrumento es altamente confiable con respecto al segundo grupo control ($\boldsymbol{G_C^*}$) en cuanto a la estabilidad de las calificaciones a través del tiempo.

Se calculó entre qué límites se encuentra el coeficiente de correlación de Pearson en relación al $\boldsymbol{G_C^*}$ con un $\mathbf{95}$ % de confianza.

Como n es menor que 100 (a saber, $\boldsymbol{n = 40}$), se aplica la fórmula $\boldsymbol{z}$ de Fisher y se calcula el error típico $\boldsymbol{\sigma z}$.

$$\boldsymbol{\sigma z = \frac{1}{\sqrt{n-3}} = \frac{1}{\sqrt{40-3}} \cong 0,16} \, .$$

Para encontrar los límites fue necesario convertir el coeficiente de correlación obtenido a $\boldsymbol{z}$ de Fisher. Esto se logró usando una tabla de conversión de $\boldsymbol{r}$ en $\boldsymbol{z}$.

Conversión de $\boldsymbol{r}$ en $\boldsymbol{z}$: $\boldsymbol{r \ = \ 0,98 \ \rightarrow \ z = 2,30}$.

Se calcularon los límites de confianza:

$$\boldsymbol{z} \ \pm \ VC \ \cdot \ \boldsymbol{\sigma z} \ \rightarrow \ 95\ \% \ (\text{ó } 0{,}05)\text{: } Valor\ Crítico \ = \ VC \ = \ 1{,}96.$$

$$2{,}30 \ \pm \ 1{,}96 \ (0{,}16) \ = \ 2{,}30 \ \pm \ 0{,}3136.$$

El intervalo de confianza que se obtuvo al 95 % fue: $(1{,}986 \ ; \ 2{,}614)$. Para la interpretación fue necesario convertir los límites conseguidos de $\boldsymbol{z}$ a $\boldsymbol{r}$ utilizando la misma tabla de conversión.

$\boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{r}$
1,986	0,965
2,614	0,990

Interpretación: en el $\mathbf{95}$ % de los casos, el coeficiente de correlación del $\boldsymbol{G_C^*}$ no será mayor de $\mathbf{0,990}$ ni menor de $\mathbf{0,965}$. Es decir; $0{,}98 \ \in \ (\mathbf{0,965} \ ; \ \mathbf{0,990})_{\mathbf{95}\ \%}$.

Anexo A-6

PRUEBA DIAGNÓSTICA

Nombre y Apellido:	**Sección:**

1.- En las siguientes secuencias de números, selecciones aquella en la que están representados un número natural, un entero, un racional y un irracional.

A)$-\frac{1}{3}$; 0 ; $1{,}41$; 6 **B**)-2 ; $-\frac{1}{9}$; $\frac{2}{15}$; $\sqrt{4}$ **C**)$-\sqrt{3}$; -1 ; $5{,}2$; 6 **D**)$-\frac{5}{2}$; -1 ; $\sqrt{5}$; $2{,}5$

2.- Luis, un estudiante de bachillerato, realiza la operación $4-(5-7)+(4-15)$ y obtiene como resultado final:

A)8 **B**)$-\frac{1}{3}$ **C**)-3 **D**)$-\frac{7}{12}$

3.- El profesor Arturo, quien imparte matemática en primer año de bachillerato, solicita a sus estudiantes que realicen la siguiente operación: $\frac{-1+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}{2-\frac{1}{4}}$; la respuesta correcta es:

A)-5 **B**)-19 **C**)13 **D**)26

4.- Josué tiene 24 $ y Oscar tiene $\frac{1}{3}$ menos de lo que tiene Josué, ¿cuánto dinero tienen entre los dos?

A)8 $ **B**)16 $ **C**)32 $ **D**)40 $

5.- ¿Qué resultado se obtiene de operar $\sqrt[4]{25}+3\sqrt[6]{125}-\sqrt{80}$?

A)0 **B**)$3\sqrt{70}$ **C**)$2\sqrt[9]{70}$ **D**)$\sqrt[8]{320}$

6.- En un día de clases en una escuela de Santa Ana, llegaron 516 estudiantes, si por cada 5 niños asisten 7 niñas, ¿cuántos niños asistieron?

A)43 **B**)215 **C**)257 **D**)301

7.- Si de $\frac{1}{3}a+\frac{1}{4}b$ se resta la suma de $\frac{2}{5}a+6$ con $\frac{3}{10}a-\frac{3}{8}b-7$ se obtiene como resultado

A)$\frac{6}{18}a-\frac{2}{4}b-1$ **B**)$-\frac{11}{30}a+\frac{5}{8}b+1$ **C**)$-\frac{3}{14}ab$ **D**)$\frac{11}{30}a-\frac{5}{8}b-13$

8.- La expresión $8x^2-2{,}6x$ representa el área de una puerta rectangular. Si $x=0{,}9\ m$, el área es

A)$4{,}14\ m^2$ **B**)$4{,}86\ m^2$ **C**)$12{,}06\ m^2$ **D**)$414\ m^2$

9.- En la factorización de $(x^2-9y^2)-(3x-3y)$, uno de los factores resultante es

A)$(x+3y)^2$ **B**)$(x-3y)^2$ **C**)$x+3y-3$ **D**)$x-3y+3$

10.- Al desarrollar y efectuar las operaciones $(a^2-b^2)-(a-b)^2$ se obtiene como resultado

A)$-2ab-2b^2$ **B**)$2ab-2b^2$ **C**)$2ab$ **D**)0

11.- Al simplificar la expresión $\frac{(x+y)^2}{x^4-y^4}$ se obtiene

A)$\frac{x+y}{x^2-y^2}$ **B**)$\frac{2xy}{x^2-y^2}$ **C**)$\frac{x+y}{(x-y)(x^2+y^2)}$ **D**) $\frac{x+y}{(x-y)^2}$

12.- Resuelva la siguiente ecuación $3(x-2)=-2(4-x)+5$ y seleccione entre las siguientes opciones su solución

A)0 **B**)$-\frac{1}{4}$ **C**)$-\frac{9}{5}$ **D**)3

13.- El promedio de un número entero y su antecesor es 6,5. El sucesor de dicho número entero es

A)6 **B**)7 **C**)8 **D**)14

14.- ¿Para qué valores de x se cumplen simultáneamente las siguientes igualdades?

$$\begin{cases} 6x+4y=-7 \\ 4x-2y=-7 \end{cases}$$

A)$\frac{1}{2}$ **B**)$-\frac{7}{6}$ **C**)$\frac{21}{2}$ **D**)$-\frac{3}{2}$

15.- ¿Para qué valores de la variable x se cumple la igualdad $x^2-4x=-3$?

A)1 y 0 **B**)3 y 0 **C**)-3 y -1 **D**)1 y 3

16.- Resuelva por el método que le resulte más cómodo

$$\begin{cases} 3x-5y=27 \\ -6x+10y=-54 \end{cases}$$

17.- La edad de María es el doble que la edad de Julia. Hace diez años la suma de las edades de las dos era igual al cuádruplo de la edad actual de María. ¿Cuáles son las edades actuales de María y Julia?

18.- Clasificar los siguientes sistemas:

A)

$$\begin{cases} 3x-4y=-6 \\ 2x+4y=16 \end{cases}$$

B)

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$$

C)

$$\begin{cases} y=2x+4 \\ y=2x-5 \end{cases}$$

19.- Se está acondicionando una zona dentro del parque "Cuscatlán" para formar un jardín. La forma que tendrá el espacio será de un triángulo equilátero de lado $2a$.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta sobre dicho triángulo?

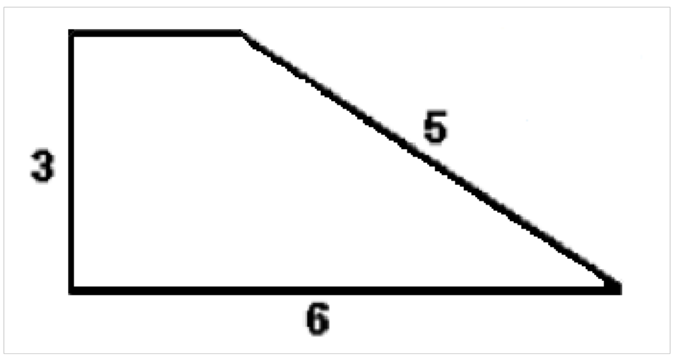
A) La altura correspondiente al triángulo equilátero es $\sqrt{3}a$.

B) Los ángulos iguales del triángulo equilátero miden 45°.

C) En el triángulo equilátero solo la altura y la mediatriz coinciden.

D) El trazo de una de las alturas del triángulo equilátero forma dos triángulos isósceles.

20.- En el Parque de la Familia ubicado en los Planes de Renderos, se tiene planeado construir una pista para practicar caminata, ciclismo o patinaje y tendrá el diseño que se muestra en la siguiente figura:



Si las longitudes que se muestran están expresadas en kilómetros y Luis, un estudiante de primer año de bachillerato, realizó todo el recorrido en su bicicleta. La distancia que recorrió fue:

A) 14 km **B**) 16 km **C**) 18 km **D**) 20 km

Anexo A-7

Naguanagua, 28 de febrero de 2023

Ciudadano:
M.Sc. **Franzyuri F. Hernández F.**
C.I.: V-10732822
Instituto Pedagógico “Rafael Alberto Escobar Lara” de Maracay
UPEL
Presente. –

Junto con saludar, es grato informarle que la dirección del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias y Tecnología de la Universidad de Carabobo (FaCyT-UC) autoriza el permiso correspondiente a los fines de obtener una **muestra estudiantil**, dentro de los inscritos en la asignatura «Cálculo II» cód.: TAO201 (secciones: 1, 2 y 3), perteneciente al lapso académico $1-2023$; a la cual usted le aplicará un tratamiento didáctico, junto con un instrumento de recolección de datos, que le permitirá llevar a cabo el estudio titulado “**APROXIMACIÓN TEÓRICA PARA LA DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES Y SU EFECTO EN EL RENDIMIENTO ACADÉMICO INMEDIATO. Una Estrategia Didáctica Alternativa y la Modelación Matemática**”. Desarrollado en el marco de su investigación doctoral, perteneciente al “**D**octorado en **E**ducación **M**atemática” por el Instituto Pedagógico de Maracay. La mencionada investigación está bajo la dirección (o tutoría) del Dr. Esteban Marino Flores Revette, quien es profesor activo de este departamento.

Atentamente,

Luis A. Rodríguez
Luis Rodríguez
Director del Departamento
11.678.882

REPUBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA UNIVERSIDAD DE CARABOBO FACULTAD EXPERIMENTAL DE CIENCIAS Y TECNOLOGIA Dpto. de Matematica DIRECCION

c.c. Archivo
Luis Rodríguez/yojana.

Luz de una tierra inmortal…
Departamento de Matemáticas, entrada Arco, Campus Bárbula,
E-mail: matematicafacyt@gmail.com, dir.dm.facyt@uc.edu.ve, dm.facyt@uc.edu.ve

Anexo A-8

PUBLICACIONES FRUTO DE LA PRESENTE TESIS DOCTORAL

A continuación, se muestran los artículos científicos que se han generado (o están en proceso de desarrollo) a partir del trabajo de investigación que ha concluido en esta Tesis Doctoral.

Revista:	***ARJ***É – Facultad de Ciencias de la Educación – Universidad de Carabobo
Volumen:	16
Número:	30
Título:	Modelación Matemática y Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Una visión desde la Educación Matemática Realista.
Autores:	Franzyuri Fernando Hernández Fajardo y Esteban Marino Flores Revette
Páginas:	231 – 257
Edición:	enero-junio 2022

Revista:	***ARJ***É – Facultad de Ciencias de la Educación – Universidad de Carabobo
Volumen:	18
Número:	35
Título:	Una Técnica Alternativa y la teoría APOE para la Descomposición en Fracciones Simples. Caso: Factores Lineales no Repetidos.
Autores:	Franzyuri Fernando Hernández Fajardo y Esteban Marino Flores Revette
Edición:	julio-diciembre 2024

Revista:	***Divulgaciones Matemáticas*** – La Universidad del Zulia
Título:	Sistema Axiomático Formal de una Técnica Alternativa para la Descomposición en Fracciones Simples.
Autores:	Franzyuri Fernando Hernández Fajardo y Esteban Marino Flores Revette
Observación:	El artículo se encuentra en desarrollo

REFERENCIAS

Abad, F.; Olea, J.; Ponsoda, V. y García, C. (2011). *Medición en ciencias sociales y de la salud* [Measurement in Social and Educational Sciences]. Madrid, España: Síntesis.

Adler, I. (1968). *Mathematics and Mental Growth*. New York: National Council of Teachers of Mathematics. USA.

Aiken, L. (2003). *Test Psicológicos y Evaluación*. México: Pearson Education.

Aldana, E. (2011). *Comprensión del concepto de Integral Definida en el marco de la teoría "APOE"*. [Tesis Doctoral, Universidad de Salamanca].

Alexander, C. y Sadiku, M. (2006). *Fundamentos de Circuitos Eléctricos*. Tercera Edición. McGraw-Hill. México, D.F.

Allende, J. (2004). Rigor la Esencia del Trabajo Científico. Hacia un Desarrollo de la Ciencia. *Editorial Revista Electrónica de Biotecnología. Electronic Journal of Biotechnology*. [Versión en Línea]. Electrón. J. Biotechnol. Vol. 7, No. 1. Valparaíso.

Almeida, V.; Bruna, A.; Espinel, M.C.; García, J.A.; Bermúdez, M. y González, M. (1998). *Matemáticas Para Nuestro Tiempo*. Consejería de Educación, Cultura y Deportes. Canarias.

Alsina, Á. (2009). "El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado". En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII.* (Pp. 119-127). Santander: SEIEM.

Alsina, Á. (2011). *Educación matemática en contexto de 3 a 6 años*. Barcelona: ICE-Horsori.

Alsina, Á.; García, L.; Gómez, J. y Romero, S. (2007). *Modelling in science education and learning*. *SUMA.* (Vol. 54, pp. 51-54).

Anastasi, A. (1976). *Psicological testing*. New York: McMillan Publishing, Co.

Araya, V.; Alfaro, M. y Andonegui, M. (2007). Constructivismo: Orígenes y perspectivas. *LAURUS: Revista de Educación. Vol. 13*, No. 24, pp. 76-92. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Caracas, Venezuela.

Arias, F. G. (2012). *El Proyecto de Investigación: Introducción a la metodología científica*. (6ta Edición). Editorial Episteme, C.A. Caracas, República Bolivariana de Venezuela.

Artigue, M. (1995). *El lugar de la didáctica en la formación de profesores*. En Gómez, P. (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica. (Pp. 7-23).

Arnon, I.; Cottrill, J.; Dubinsky, E.; Oktac, A.; Fuentes, S.; Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer, Berlin.

Asiala, M.; Brown, A.; Devries, D.; Dubinsky, E.; Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in collegiate mathematics education, 2*(3), 1-32.

Ausubel, D. (1983). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo.* (2a ed.) Trillas, México.

Ayala, M. (2017). *Habilidades directivas y gestión del conocimiento en el nivel de comunicación interna desde la percepción docente, Los Olivos, 2016*. [Tesis Doctoral, Universidad César Vallejo].

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10*, 2, 135-149.

Balbinotti, M. A. A. (2004). "Estou Testando o que Imagino Estar? Reflexoes acerca da Validade dos Testes Psicológicos". En C. E. Vaz y R. L. Graff (Eds.), Técnicas Projetivas: Produtividade em Pesquisa (pp. 6-22, 1.ª Ed.). Sao Paulo, Brasil: Casa do Psicólogo.

Ballina, F. (1995). Paradigmas y Perspectivas Teórico-Metodológicas en el Estudio de la Administración.

Barbosa, J. (2001). Modelagem Matemática e os professores: A questão da formação. *Bolema, Rio Claro. Vol. 14*, No. 15, pp. 5-23.

Bassanezi, R. (2002). *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: Uma nova estratégia*. São Paulo, Brasil: Editora Contexto.

Bassanezi, R. y Biembengut, M. (1997). Modelación Matemática: Una antigua forma de investigación - un nuevo método de enseñanza. *NÚMEROS: Revista de Didáctica de las Matemáticas*. No. 32, pp. 13-25.

Behar, D. (2008). *Metodología de la Investigación*. (1ra Edición). Editorial Shalom.

Biembengut, M. y Hein, N. (2004). Modelación Matemática y los desafíos para enseñar Matemática. *Educación Matemática. Vol. 16*, No. 2, pp. 105-125.

Blanchard, P. (1994). Teaching Differential Equations with a Dynamical Systems Viewpoint. *The College Mathematics Journal*. (Vol. 1, No. 25, pp. 385-393).

Blomhøj, M. (2004). *Modelización Matemática - Una teoría para la práctica*. Disponible en: www.famaf.unc.edu.ar/~revm/Volumen23/digital23-2/Modelizacion1.pdf

Bloom, W., Galbraith, P., Henn, H. y Niss, M. (2007). *Modeling and applications in Mathematics Education*. The 14th ICMI study. New York: Springer.

Blum, W. (2011). "Can Modelling Be Taught and Learnt? Some Answers from Empirical Research". En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer. (Pp. 15-30).

Blum, W. y Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application. Vol. 1*, No. 1, pp. 45-58.

Blum, W. *et al*. (2003). *ICMI-Study 14. Applications and modelling in mathematics education*. Discussion Document. Special issue of ICMI – Bulletin (2003).

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modeling, Applications, and Links to other Subjects? State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*. 22, pp. 37-68.

Blumenthal, L. (s.f.). *Geometría Axiomática*. Editorial Aguilar. Universidad de Missouri. Traducido del inglés por Mario Melendez Rolla, Universidad de Madrid.

Bolea, P.; Bosch, P. y Gascón, J. (2004). Why is modelling not included in the teaching of algebra at secundary School. *Quadernidi Ricerca in Didattica*. (Vol. 14, pp. 125-133).

Borromeo-Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer.

Bosch, M.; García, F.; Gascón, J. e Higueras, L. (2006). La Modelización Matemática y el problema de la articulación de la Matemática Escolar. Una propuesta desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Educación Matemática. Vol. 18*, No. 2, pp. 37-74.

Bressan, A.; Gallego, M.; Pérez, S. y Zolkower, B. (2016). *Educación Matemática Realista*. Bases Teóricas.

Bressan, A.; Zolkower, B. y Gallego, M. (2004). *La educación matemática realista. Principios en que se sustenta*. Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática. Pp. 1-13.

Bressan, A.; Zolkower, B. y Gallego, F. (2006). La Corriente Realista de Didáctica de la Matemática. *Experiencias de un Grupo de Docentes y Capacitadores. Yupana.* (Vol. 3, No. 6, pp. 11-33).

Brito, M.; Alemán, I.; Fraga, E.; Parra, J. y Arias, R. (2011). Papel de la Modelación Matemática en la formación de los ingenieros. *Ingeniería Mecánica. Vol. 14*, No. 2, pp. 129-139.

Brousseau, G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches En Didactique des Mathématiques.* (Vol. 7.2, pp. 33-115).

Burkhardt, H. (2006). Modelling in Mathematics Classrooms: Reflections on past developments and the future. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. Vol. 38*, No. 2, pp. 178-195.

Cabassut, R. y Ferrando, I. (2017). Difficulties in Teaching Modelling: A French-Spanish Exploration. *In Mathematical Modelling and Applications. Springer. Cham.* (pp. 223-232).

Calandra, M.V. y Argeri, J.G. (2009). Análisis de la evolución de los resultados de los alumnos y la metodología Bootstrap para detección de cambios. *II Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales. Actas*, II (2): 6-13. La Plata. Argentina.

Camarena, G. P. (1987). *Diseño de un curso de ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos eléctricos*. [Trabajo de Grado de Maestría]. México, Cinvestav, IPN.

Camilloni, A. (2007). *El saber didáctico*. (1ra Edición). Editorial Paidós SAICE. Buenos Aires – Argentina.

Campbell, D. T. (1988). *Methodology and epistemology for social science: Selected papers*. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Campbell, D. T. y Stanley, J. C. (1995). *Diseños experimentales y cuasiexperimentales en la investigación social*. (1ra Edición en Castellano). 7ma Reimpresión. Editorial Amorrortu. Buenos Aires, Argentina.

Campos, A. (2008). *Introducción a la historia y a la filosofía de la matemática. Volumen II. Hacia la formalización en Hilbert y en Bourbaki*. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. Departamento de Matemáticas.

Cao, A. R. y Fernández, C. R. (2021). Técnicas de Remuestreo. [Versión electrónica]. Disponible en: https://rubenfcasal.github.io/book_remuestreo [Consultado: 2022, septiembre 18].

Cárcamo, A. (2017). *Una innovación docente basada en los modelos emergentes y la modelización matemática para conjunto generador y espacio generado*. [Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona].

Carlson, D.; Johnson, C.; Lay, D. y Porter, A. (1993). The linear algebra curriculum study group recommendations for the first course in linear algebra. *The College: Mathematics Journal*. *Vol. 24*, No. 1, pp. 41-46.

Carrillo, M. (2017). *Enseñanza de los sistemas lineales en Secundaria: Una propuesta de mejora a través de la integración de tecnologías*. [Tesis Doctoral, Universidad de las Islas Baleares].

Charnay, R. (1988). "Aprender (por medio de) la resolución de problemas". En Parra y Saiz (comps), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. Paidós, Buenos Aires. (Pp. 51-63).

Chourio, J. H. (1987). *Estadística II*. (1ra edición). Editorial Biosfera. Caracas, Venezuela.

Chrystal, G. (1961). *Textbook of algebra*. (vol. part one). Dover Publications.

Chung, V. (2017). *Impacto de la cultura organizacional en la relación entre el liderazgo y la gestión del conocimiento en las escuelas profesionales de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo*. [Tesis Doctoral, Universidad Peruana Unión].

Cifuentes, R. (2011). *Diseño de Proyectos de Investigación Cualitativa*. Primera Edición. Centro de Publicaciones Educativas y Material Didáctico. Ediciones de Novedades Educativas. Noveduc Libros. S.A. de C.V.

Colina, A. (2019). Naturaleza Ontológica de la Investigación Socioeducativa: Elementos Orientadores. *INNOVA Research Journal. Vol. 4*, No. 3.1, pp. 150-167. Revista de la Universidad Internacional del Ecuador.

Congacha, J. (2016). *Estadística aplicada a la educación con actividades de aprendizaje*. (2da edición). Editorial Académica Española.

Constitución de la República Bolivariana de Venezuela. (1999, diciembre). *Gaceta Oficial Extraordinario Nº 36.860*. (Pp. 1-81). Caracas, Venezuela.

Contreras, F. (2017). La axiomática. *Horizonte de la Ciencia, vol. 7*, núm. 12, pp. 111-121. Universidad Nacional del Centro del Perú. [Versión en Línea]. Disponible en: DOI: https://doi.org/10.26490/uncp.horizonteciencia.2017.12.315

Cook, T. D. y Campbell, D. T. (1986). The causal assumptions of quasiexperimental practice. *Synthese, 68*, 141-180.

Creswell, J. (2003). *Research Design: Qualitative, Quantitative and Mixed Methods Approaches*. Sage Publications. Traducción a cargo de Delia Inés Ceniceros Cázares.

Day, J. y Kalman, D. (1999). Teaching Linear Algebra: What are the questions. *Department of Mathematics at American University in Washington DC*, pp. 1-16.

De Corte, E., Greer, B. y Verschaffel, L. (1996). "Mathematics Teaching and Learning". En D. Berliner y C. Calfee (Eds.). *Handbook of Educational Psychology.* (Pp. 491-549). New York: Simon & Schuster Macmillan.

De Guzmán Ozamiz, M. (1997). *Aventuras Matemáticas*. Ediciones Pirámide, Madrid.

De Lange, J. (1996). “Using and applying mathematics in education”. En A.J. Bishop (Ed). *International Handbook of Mathematics Education, Part I.* (Pp. 49-97). Utrecht: Kluwer Academia Press.

Del Valle, J. (2011). *Álgebra Lineal para Estudiantes de Ingeniería y Ciencias*. McGraw Hill Editores.

Descartes, R. (1975). *El Discurso del Método*. Vosgos S.A.

DeVries, D. J. (2001). RUMEC / APOS Theory Glossary. Georgia Collage & State University. Milledgeville. Disponible en: http://www.cs.gsu.edu/~rumec/Papers/glossary.hl.

Díaz, J. (2017). Técnicas alternativas para el cálculo de fracciones parciales. *El Cálculo y su Enseñanza. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*, *Vol. 9*, pp. 24-41. Universidad de Sonora, México.

Dorier, J. (2003). Teaching linear algebra at university. *arXiv preprint math*/0305018.

Dorier, J. y Sierpinska, A. (2001). *Research into the teaching and learning of linear algebra. In the Teaching and Learning of Mathematics at University Level.* pp. 255-273. Springer Netherlands.

Dubinsky, E. (1991a). “Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking”. En Tall, D. (ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers, pp. 95-123.

Dubinsky, E. (1991b). *The Constructive Aspects of Reflective Abstraction in Advanced Mathematics*. L. P. Steffe (ed.). Epistemological Foundations of Mathematical Experiences. Nueva York, Springer-Verlag.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la Educación Matemática universitaria. *Educación Matemática, 8*(3), 24-41.

Dubinsky, E. (2015, febrero 20). *En la página Web de Ed Dubinsky*. http://www.math.kent.edu/~edd/edpic.html

Dreyfus, T. (1991). “Advanced in Mathematical Thinking Processes”. En D. Tall. (Ed.). *Advanced in Mathematical Thinking* (pp. 25-41). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Dwyer, J. H. (1983). *Statistical models for the social and behavioral sciences*. New York: Oxford University Press.

Efron, B. (2013, febrero 15). *En Wikipedia*. https://en.m.wikipedia.org/wiki/Bradley_Efron

Efron, B. y Tibshirani, R.J. (1993). An Introduction to the Bootstrap, Monographs on Statistics and Applied Probability 57, Chapman & Hall, New York.

Escobar-Pérez, J. y Cuervo-Martínez, Á. (2008). Validez de Contenido y Juicio de Expertos: Una Aproximación a su Utilización. *Avances en Medición*. 6, pp. 27–36.

Espinoza, E. (2019). Las variables y su operacionalización en la investigación educativa. Segunda parte. *Revista: Conrado. Vol. 15*, No. 69, pp. 171-180. Revista pedagógica de la Universidad de Cienfuegos.

Fauzan, A.; Plomp, T. y Slettenhaar, D. (2002). “Traditional mathematics education vs. realistic mathematics education: Hoping for Changes”. En *Proceedings of the 3rd International Mathematics Education and Society Conference.* (Pp. 1-4). Copenhagen: Centre for Research in Learning Mathematics.

Fernández, Y. y Martínez, A. (2015). ¿Ha mejorado la productividad docente e investigadora de las universidades públicas españolas desde la aprobación de la LOU?: Evidencia a partir del Bootstrap. *Revista de Educación*. No. 367, pp. 91-116.

Ferreira, J. (2018). *Diseño, implementación y evaluación de un Modelo Pedagógico de Indagación Colaborativa de la Física*. [Tesis Doctoral, Universitat de Lleida].

Ferrer, H. (2007). *Metodología de la Investigación Científica*. (2da Edición). Editorial Paidos.

Flores, A., y Falconi, M. (2013). Enseñanza-Aprendizaje de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias mediante Modelación Matemática. (Pp. 1850-1857). *Actas del VII CIBEM*. Montevideo, Uruguay.

Flores, W. y Auzmendi, E. (2016). Los problemas de comprensión del álgebra en estudiantes universitarios. *CIENCIA E INTERCULTURALIDAD*. Año 9, Vol. 19, No. 2.

Freudenthal, H. (2008, abril 21). https://es.m.wikipedia.org/wiki/Archivo:Hans_Freudenthal.jpg

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Reidel Publishing Co.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*, Kluwer, Dordrecht, Reidel Publishing Co.

Fuentealba, C. (2017). *Análisis del esquema de la derivada en estudiantes universitarios*. [Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona].

Gabriel, F.; Coché, F.; Szucs, D.; Carette, V.; Rey, B. y Content, A. (2013). A componential view of children's difficulties in learning fractions. *Frontiers in Psychology. 4*, 715.

Gallart, C. (2016). *La modelización como herramienta de evaluación competencial*. [Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia].

Gallart, C.; García-Raffi, L. y Ferrando, I. (2019). Modelización Matemática en la educación secundaria: Manual de uso. *MISEL: Modelling in Science Education and Learning. Vol. 12*, No. 1, pp. 71-85. Universidad Politécnica de Valencia, Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada, España.

Gavilán, J.; García, M. y Llinares, S. (2007). La modelación de la descomposición genética de una noción matemática. Explicando la práctica del profesor desde el punto de vista del aprendizaje de los estudiantes. *Educación Matemática, 19*(2), pp. 5-39.

Gil, J. (2005). Aplicación del método Bootstrap al contraste de hipótesis en la Investigación Educativa. *Revista de Educación*. No. 336, pp. 251-265.

González, F. (2007). "Cómo desarrollar clases de matemática centradas en Resolución de Problemas". En Abrate, R. & Pochulu, M. (Comps.). *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de Matemática*. Universidad Nacional de Villa María. (Pp. 235-262). Disponible en: http://www.gratisweb.com/unvm/Introduccion.pdf

Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education.* Utrecht: Freudenthal Institute.

Haaser, N.; LaSalle, J. y Sullivan, J. (1974). *Análisis Matemático 1: Curso de introducción*. (1ra edición en español). 8va reimpresión. Editorial Trillas. México D. F.

Henson, K. y Eller, B. (2000). *Psicología educativa para la enseñanza eficaz*. International Thomson Editores. México D. F.

Hernández, A. (2008). El Método Hipotético Deductivo Como Legado del Positivismo Lógico y el Racionalismo Crítico: Su Influencia en la Economía. *Revista Ciencias Económicas. Vol. 26*, No. 2, pp. 183-195.

Hernández, F. (2017). *Fundamentos Teórico Metodológicos en Blended Learning para los Programas de la Dirección de Postgrado de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica Andrés Bello*. [Tesis Doctoral, Universidad Católica Andrés Bello].

Hernández, R.; Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la Investigación*. (5ª ed.). México: McGraw-Hill.

Hernández, R.; Fernández, C. y Baptista, M. (2014). *Metodología de la Investigación*. (6ta Edición). McGraw-Hill Interamericana. Editores. S.A. de C.V.

Hernández-Nieto, R. A. (2002). *Contributions to Statistical Analysis*. Mérida, Venezuela: Universidad de Los Andes.

Hernández-Nieto, R. A. (2011). *Instrumentos de recolección de datos. Validez y Confiabilidad. Normas y Formatos*. Mérida, Venezuela: Consejo de Estudios de Postgrado, Universidad de Los Andes. Disponible en: Amazon.com

Heuvel-Panhuizen, M. (2002). "Realistic mathematics education as work in progress". En Fou-Lai Lin (Eds.). *Common sense in mathematics education. Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education.* (Pp. 1-43). Taiwan: National Taiwan Normal University.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. *In J.L. Dorier (Ed.). On the teaching of linear algebra*. (pp. 191-208). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Huang, X. (1991). A shortcut in partial fractions. *The College: Mathematics Journal.* 22, pp. 413-415.

Huincahue, J.; Borromeo, R. y Mena, J. (2018). El conocimiento de la modelación matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemática. *ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS. Investigaciones Didácticas. Vol. 1*, No. 36, pp. 99-115.

Hurtado, J. (1998). *Metodología de la investigación Holística*. (1ra Edición). Venezuela: Sypal.

Hurtado, J. (2000). *Metodología de la investigación Holística*. (3ra Edición). Venezuela: Sypal.

Infante, F. (2016). *La enseñanza y aprendizaje de la modelización y las familias de funciones con el uso de Geogebra en un primer curso de ciencias administrativas y económicas en Colombia*. [Tesis Doctoral, Universidad de Valencia].

Jiménez, C. (2022). *Aproximación teórica del concepto de número en educación media general*. [Tesis Doctoral, Universidad Pedagógica Experimental Libertador].

Joseph, H. y Straight, R. (1984). An alternative method for funding the partial fraction decomposition of a rational function. *The American Mathematical Monthly. Vol. 91*, No. 6, pp. 365-367.

Juárez, M. y Aguilar, M. (2018). El método Singapur, propuesta para mejorar el aprendizaje de las Matemáticas en Primaria. *NÚMEROS: Revista de Didáctica de las Matemáticas*. *Vol. 98*, pp. 75-86.

Judd, C. y Kenny, D. (1981). *Estimating the effects of social interventions*. Cambridge: Cambridge University Press.

Kaiser, G. (2010). Introduction: ICTMA and the teaching of modeling and applications. *In Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies*. (pp. 1-2). Springer US.

Kerlinger, F. (1979). *Enfoque conceptual de la Investigación del Comportamiento*. Nueva Editorial Interamericana. México.

Kerlinger, F. y Lee, H. (2002). *Investigación del Comportamiento*. (4ta ed.). México: McGraw-Hill Interamericana.

Landeta, L. (2018). *La motivación y el rendimiento académico en las materias de Matemáticas y Estadística*. [Tesis Doctoral, Universidad de Alicante].

Leiß, D.; Schukajlow, S.; Blum, W.; Messner, R. y Pekrum, R. (2010). The role of the situation model in Mathematical Modeling-Task analyses, student competencies and teacher interventions. *Journal für Didaktik*. 31, pp. 119-141.

Leithold, L. (1998). *Cálculo.* (7ª ed.). Oxford University Press.

Ley Orgánica de Educación. (2009, agosto). *Gaceta Oficial Extraordinario Nº 5.929*. (Pp. 1-23). Caracas, Venezuela.

Lipschutz, S. y Schiller, J. (2000). *Introducción a la Probabilidad y Estadística*. (1ª ed.). Madrid, España: McGraw-Hill.

Llabata, P. (2016). *Un enfoque de complejidad del aprendizaje. La metodología cooperativa en el ámbito universitario*. [Tesis Doctoral, Universidad de las Islas Baleares].

Lombardía, M.; González-Manteiga, W. y Prada-Sánchez, J. (2003). Una revisión de la estimación de la función de distribución y métodos de remuestreo bootstrap en poblaciones finitas. *ESTADÍSTICA ESPAÑOLA. Vol. 45*, Núm. 154, pp. 335-361.

Lortie-Forgues, H.; Tian, J. y Siegler, R. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review. Vol. 38*, pp. 201-221.

López, I. (2011). *Paradigmas de Evaluación. Enfoques, Técnicas e Instrumentos*. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara", Subdirección de Investigación y Postgrado.

López-Roldán, P. y Fachelli, S. (2015). *Metodología de la Investigación Social Cuantitativa*. (1ª ed.). Depósito Digital de Documentos. Universidad Autónoma de Barcelona. España.

Macías, E. (2011). *Validación y confiabilidad de pruebas de opción múltiple para la evaluación de habilidades*. [Trabajo de Grado de Maestría, Centro de Investigación en Matemáticas].

Martínez, A. (2006). Descomposición en Fracciones Parciales. *Scientia et Technica*. Año XII, No. 31, pp. 259-264.

Martínez, A. M.; Iglesias, M. y Rodríguez, I. (2022). Historia y legado de un Núcleo de Investigación en la Educación Matemática venezolana: El NIEM. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática (REVIEM)*, 2(2), e202207.

Martínez, L. (2013). *Paradigmas de Investigación*. Manual Multimedia para el Desarrollo de Trabajos de Investigación. Una Visión Desde la Epistemología Dialéctico Crítica.

Martínez, M.; Da Valle, N.; Zolkower, B. y Bressan, A. (2002). La relevancia de los contextos en los contextos en la Resolución de Problemas de Matemática: una experiencia para docentes y sus capacitadores. *Paradigma.* (Vol. 23, No. 1, pp. 59-94).

Martínez-Otero, V. (2007). *La Buena Educación: Reflexiones y Propuestas de Psicopedagogía Humanista*. Editorial Anthropos. España.

Martínez-Pérez, R. y Rodríguez-Esponda, E. (s.f.). *Manual de Metodología de la Investigación Científica*.

Maúrtua, J. (2019). *Estrategias metodológicas basadas en acción proceso objeto esquema y comprensión de la integral definida en estudiantes de los colegios de alto rendimiento*. [Tesis Doctoral, Universidad Nacional Mayor de San Marcos].

Mayer, R. (2004). *La ilusionada búsqueda de los aspectos enseñables para la transferencia. En Psicología de la Educación*. Enseñar para un Aprendizaje Significativo (pp. 1-18). Madrid: Pearson Educación, S.A.

McGartland, D.; Berg, M.; Tebb, S.; Lee, E. y Rauch, S. (2003). Objectifying content validity: Conducting a content validity study in social work research. *Social Work Research, Vol. 27*, Nº 2, pp. 94-104.

Medina, G. (s.f.). *Fundamentos de Matemáticas. Notas de clase*. Departamento de Matemáticas y Estadística. Universidad Nacional de Colombia.

Miller, J. N. y Miller, J. C. (2002). Estadística y Quimiometría para Química Analítica. (4ta ed.). Editorial Pearson Prentice Hall.

Miller, R. G. (1974). The jackknife: a review. *En Biometrika. 61*, pp. 1-17.

Monereo, C. (2000). *Habilidades para sobrevivir en el siglo XXI, la sociedad del conocimiento*. Conferencia. VTTT Jomada Pedagógicas de la Escuela Superior de Nayarit. Tepic, México.

Monje, C. (2011). *Metodología de la Investigación Cuantitativa y Cualitativa*. Guía Didáctica. Universidad Sur colombiana. Facultad de Ciencias Sociales y Humanas. Programa de Comunicación Social y Periodismo. Neiva Colombia. Ediciones de la Universidad Sur colombiana.

Mooney, C. Z. (1997). *Monte Carlo simulation*. Thousand Oaks, Sage Publications.

Moya, L. y Rojas, E. (2020). *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Técnicas de Resolución*. (1era edición). Facultad de Ciencias. Universidad Nacional de Colombia.

Nakamura, Shoichiro. (1992). *Métodos Numéricos Aplicados con Software*. (1ª Edición). Editorial Pearson Prentice Hall.

Olarte, J. (2020). Homogeneizar la práctica de la modelación: Un reto del sistema educativo colombiano. *Revista Educación. Vol. 44*, No. 1. Universidad de Costa Rica, Costa Rica.

Orcos, L. (2019). *Diferentes experiencias de aprendizaje en ciencias y matemáticas a través de Tecnologías de la Información y la Comunicación*. [Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia].

Ortega, M. (2018). *Un modelo de enseñanza de la Modelización para trabajar las funciones elementales con el uso de datos reales y tabletas.* [Tesis Doctoral, Universidad de Valencia].

Ortiz, D. (2015). El constructivismo como teoría y método de enseñanza. *Sophia: Colección de Filosofía de la Educación. Vol. 19*, No. 1, pp. 93-110. Universidad Politécnica Salesiana, Cuenca, Ecuador.

Ortiz, J.; Rico, L. y Castro, E. (2008). La enseñanza del álgebra lineal utilizando modelización y calculadora gráfica: un estudio con profesores en formación. *PNA*. (Vol. 2, No. 4, pp. 181-189).

Otzen, T. y Manterola, C. (2017). Técnicas de Muestreo sobre una Población a Estudio. *Int. J. Morphol., 35*(1), pp. 227-232.

Palella, S. y Martins, F. (2012). *Metodología de la Investigación Cuantitativa*. (3^{ra} Edición). 1ra Reimpresión. Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador. (FEDUPEL).

Paolini R., Jorge (1999). El Método Bootstrap: un paradigma en la formación de los Ingenieros en Computación, Informática y de Sistemas. *III Conferencia Latinoamericana de Facultades y Escuelas de Ingeniería de Sistemas y Computación*. Pp. 1-10. Universidad Nacional Experimental de Guayana. Ingeniería Informática. Ciudad Guayana. Venezuela.

Pedhazur, E. J. y Schmelkin, L. P. (1991). *Measurement, design, and analysis. An integrated approach*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Peña, L. y Morales, J. (2016). La modelación matemática como estrategia de enseñanza-aprendizaje: El caso del área bajo la curva. *Revista Educación en Ingeniería, 11*(21), pp. 64-71. Bogotá.

Pérez, A. (2006). *Guía Metodológica para Anteproyectos de Investigación*. (2^{a} edición). FEDUPEL. Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

Pérez, F. (2008). *Cálculo Diferencial e Integral de Funciones de una Variable*. Universidad de Granada, Departamento de Análisis Matemático. Granada, España.

Piaget, J. y García, R. (1982). Psicogénesis e historia de la ciencia. México, España, Argentina, Colombia (Madrid): Siglo XXI.

Piskunov, N. (1978). *Cálculo Diferencial e Integral*. (1^{era} ed.). Editorial Montaner y Simon, S.A. Barcelona.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Purcell, E. (2007). *Cálculo*. (9^{na} ed.). Pearson Educación.

Ramírez, T. (2007). *Cómo hacer un Proyecto de Investigación*. Editorial Panapo.

Real Academia Española. (2019). *Diccionario de la lengua española.* Disponible en: http://dle.rae.es/

Rendón, M.; Villasís, M. y Miranda, M. (2016). Estadística descriptiva. *Revista Alergia México*. Vol. 63, No. 4, pp. 397-407.

Rico, L. y Sierra, M. (2000). "Didáctica de las matemáticas e investigación". En J. Carrillo y L. C. Contreras (eds.). *Matemática española en los albores del siglo XXI* (pp. 77-131). Huelva: Hergué.

Ricoy, C. (2006). Contribución Sobre los Paradigmas de Investigación. *Educação. Revista do Centro de Educação. Vol. 31*, No. 1, pp. 11-22. Universida de Federal de Santa María.

Rodríguez, C. (2015). Andragogía en Venezuela: un proceso histórico en la educación y formación de adultos. *Revista: Ciencias de la Educación.* (Vol. 26, No. 47, pp. 271-283).

Rodríguez, D. y Valldeoriola, R. (2013). *Metodología de la Investigación*. PID_00148555 © FUOC • PID_00148555

Rodríguez, M. [Mabel Rodríguez]. (2021, febrero 20). *Imágenes conceptuales, modelos mentales y Teoría APOS* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=GyfsLxknlB4

Rodríguez, M. y Agnelli, H. (2014). El Bootstrap como Herramienta para la Enseñanza de la Distribución Muestral. *IV Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos*. Pp. 1-8. Universidad Nacional de Río Cuarto. Argentina.

Rodríguez, M.; Parraguez, M. y Trigueros, M. (2018). Construcción cognitiva del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. *Revista Latinoamericano de Investigación Matemática, Vol. 21*, No. 1.

Rodríguez, P. (2019). *El conocimiento del profesor como variable explicativa del aprendizaje del alumno en la conceptualización de las fracciones.* [Tesis Doctoral, Universidad Católica de Valparaíso].

Rodríguez, R. (2020). *Fundamentos Pedagógicos en la Formación Docente: Perspectivas y Retos de los Egresados de un Instituto Superior Pedagógico de Ecuador*. [Tesis Doctoral, Universidad Católica Andrés Bello].

Rojas, M. (2015). Tipos de Investigación Científica: Una Simplificación de la Complicada Incoherente Nomenclatura y Clasificación. *REDVET. Revista Electrónica de Veterinaria. Vol. 16*, No. 1, pp. 1-14. Veterinaria Organización Málaga, España.

Rojas, Y. (2020). *Estadística Inferencial*. Research Gate. [Versión electrónica]. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/343006962 [10/12/2020].

Rojo, A. (2001). *Álgebra I*. (Vigésima edición). Editorial El Ateneo. Buenos Aires. Argentina.

Rose, D. (2007). Partial Fractions by Substitution. *The College: Mathematics Journal. Vol. 38*, No. 2, pp. 145-147.

Ruiz, B. C. (2013). *Instrumentos y Técnicas de Investigación Educativa. Un Enfoque Cuantitativo y Cualitativo para la Recolección y Análisis de Datos*. (3ra ed.). DANAGA Training and Consulting.

Rustom, J. (2012). *Estadística Descriptiva, Probabilidad e Inferencia. Una Visión Conceptual y aplicada*. Facultad de Ciencias Agronómicas. Universidad de Chile. [Versión electrónica]. Disponible en: http://www.agren.cl/estadistica [11/12/2020].

Salgado, H. y Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models APOS theory. *The Journal of Mathematical Behavior. Vol. 39*, pp. 100-120.

Santivañez, V. (2004). La didáctica, el constructivismo y su aplicación en el aula. *Revista Cultura. Vol. 18* (1817-0285), pp. 138-148. [Versión electrónica]. Disponible en: http://www.revistacultura.com.pe/revistas/RCU_18_1_la-didactica-el-constructivismo-y-su-aplicacion-en-el-aula.pdf [Consultado: 2020, junio 5].

Sardón, D. (2014). *Estrategias metodológicas para desarrollar habilidades geométricas en los estudiantes del IV ciclo de la IEP N° 70390 de Patapata*. [Tesis Doctoral, Universidad del Altiplano].

Schultz, P. (1983). An algebraic approach to partial fractions. *The Two-Year College: Mathematics Journal*. *Vol. 14*, No. 4, pp. 346-348.

Serna, G. (2013). *Estrategias de aprendizaje (ACRA), estrategias metodológicas del docente y rendimiento académico en estudiantes de Maestría de las Facultades de educación y administración de la Universidad Nacional San Antonio de Abad de Cusco. Año 2011*. [Tesis Doctoral, Universidad Nacional Mayor de San Marcos].

Serrano, J. y Pons, R. (2011). El constructivismo hoy: enfoques constructivistas en educación. *REDIE: Revista Electrónica de Investigación Educativa. Vol. 13*, No. 1. Disponible en: http://redie.uabc.mx/vol13no1/contenido-serranopons.html [Consultado: 2020, junio 10].

Sierra, B. (2007). *Técnicas de Investigación Social*. Ed. Thomson, Madrid.

Sireci, S. G. (1998). The construct of content validity. *Social Indicators Research*, 45, 83-117.

Skjong, R. y Wentworth, B. (2000). Expert Judgement and risk perception. [Versión electrónica]. Disponible en: http://research.dnv.com/skj/Papers/SkjWen.pdf [15/01/2022].

Smith, R. y Minton, R. (2003). *Cálculo.* (2da ed., Vol. 1). Mc Graw-Hill.

Steward, J. (2010). *Cálculo de una variable conceptos y contextos.* (4ta ed.). Cengage.

Steward, J. (2012). *Calculus.* (7ma ed.). Cengage.

Tejedor, F. y Rodríguez, J. (1996). *Evaluación Educativa: Evaluación de los Aprendizajes de los Alumnos*. Ediciones de la Universidad de Salamanca. España.

Thomas, G. (2010). *Cálculo de una variable.* (12va ed.). Pearson Educación.

Tian, J. y Siegler, R. (2017). Fractions learning in children with mathematics difficulties. *Journal of learning disabilities. Vol. 50*, No. 6, pp. 614-620.

Tong, H. (1977). Fast algorithms for partial fraction decomposition. *SIAM: Journal on Computing*. *Vol. 6*, No. 3, pp. 582-593.

Trigueros, G. (2009). El uso de la Modelación en la enseñanza de las Matemáticas. *Innovación Educativa*. *Vol. 9*, No. 46, pp. 75-87.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática. Vol. 17*, No. 1, pp. 5-31. [Revista en Línea]. Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40517101 [Consulta: 2020, septiembre 15].

Trigueros, M. [Maestría en Enseñanza de las Matemáticas]. (2020, octubre 24). *Dra. María Trigueros* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=32eiqnh4edk

Trigueros, M. y Oktaç, A. (2005). La théorie apos et l'enseingnement de l'algèbre linéaire. *Annales de didactique et sciences cognitives, vol. 10*, pp. 157-176.

Universidad Pedagógica Experimental Libertador. (2016). *Manual de Trabajo de Grado de Especialización y Maestría y Tesis Doctorales*. Ediciones FEDUPEL. Caracas. Venezuela.

Usher, R. y Bryant, L. (1992). *La Educación de Adultos como Teoría, Práctica e Investigación*. Editorial Morata.

Utrera, G. (2017). *Influencia de los Patrones de Aprendizaje en el Rendimiento Académico y en la Deserción Escolar de Estudiantes Universitarios de Nuevo Ingreso*. [Tesis Doctoral, Universidad Católica Andrés Bello].

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour.* Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9. Utrecht: Utrecht University.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics.* (Vol. 54, pp. 9-35).

Vanegas, J. y Henao, S. (2013). Educación Matemática Realista: La Modelización Matemática en la producción y uso de modelos cuadráticos. *Actas del VII CIBEM ISSN*, 2301(0797).

Vargas, R. (2019). *Educación Matemática Realista en el desarrollo de las competencias matemáticas en estudiantes de I ciclo de la carrera profesional de Educación Inicial, Trujillo 2017*. [Tesis Doctoral, Universidad César Vallejo].

Vasilachis, I. (1997). El Pensamiento de Habermas a la Luz de una Metodología Propuesta de Acceso a la Teoría. *Revista Estudios Sociológicos. Vol. XV*, No. 43. [Versión en Línea]. Disponible en: http://codex.colmex.mx:8991/F/?func=service&doc

Vergara, M. y Vitola, F. [s.n.]. (2021, octubre 5). *Teoría APOE de la Educación Matemática* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=hPVHvq2NO2g

Villa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas*. (Vol. 19, pp. 63-85).

Wiener, J. (1986). An algebraic approach to partial fractions. *The College: Mathematics Journal. Vol. 17*, No. 1, pp. 71-72.

Zbiek, R. y Conner, A. (2006). Beyond motivation: Exploring mathematical modeling as a context for deepening students' understandings of curricular mathematics. *Educational Studies in Mathematics. Vol. 63*, No. 1, pp. 89-112.

Zill, D. (2011). *Cálculo de una variable.* (4ta ed.). Mc Graw-Hill.

RESUMENES CURRICULARES

AUTOR: Franzyuri Fernando Hernández Fajardo

Es Licenciado en Matemática Mención: Análisis Numérico egresado de la **U**niversidad **N**acional **A**bierta (UNA) y Magíster Scientiarum Mención Matemática egresado de la Facultad de Ciencias de la **U**niversidad **C**entral de **V**enezuela (UCV). Es Profesor Titular (activo) a Dedicación Exclusiva para el Departamento de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación (FaCE) en la **U**niversidad de **C**arabobo (UC). Emails: franzyurihernandez@gmail.com y fhernan@uc.edu.ve

Prof. **Franzyuri Hernández**, M.Sc.
V-10.732.822

TUTOR: Esteban Marino Flores Revette

Es Licenciado en Matemática, Magister Scientiarum Mención Matemática y Doctor en Ciencias Mención: Matemática egresado de la Facultad de Ciencias de la **U**niversidad **C**entral de **V**enezuela (UCV). Es Profesor Asociado (activo) a Dedicación Exclusiva para el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias y Tecnología (FaCyT) en la **U**niversidad de **C**arabobo (UC). Emails: marinorevette@gmail.com y eflores@uc.edu.ve

Prof. **Esteban Flores**, Dr.
V-6.999.346