



REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA  
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR  
INSTITUTO PEDAGÓGICO RURAL “GERVASIO RUBIO”  
SUBDIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO  
PROGRAMA DOCTORADO EN EDUCACIÓN



**CONSTRUCTOS TEORICOS SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO  
MATEMÁTICO DE LOS DOCENTES EN TORNO AL MANEJO DE LOS  
REGISTROS SEMIÓTICOS EN LA ENSEÑANZA DE LAS INECUACIONES**

Tesis de Grado Como Requisito Parcial Para Optar al Grado de Doctor en  
Educación

**Autor:** Darío Rolón  
**Tutor:** Carlos Gámez Sánchez

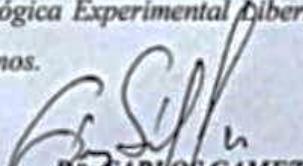
Febrero de 2025



**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR  
INSTITUTO PEDAGÓGICO RURAL "GERVASIO RUBIO"  
SECRETARÍA**

**A C T A**

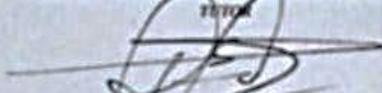
Reunidos el día miércoles, cinco del mes de marzo de dos mil veinticinco, en la sede de la Subdirección de Investigación y Postgrado, del Instituto Pedagógico Rural "Gervasio Rubio" los Doctores: CARLOS GAMEZ (TUTOR), YANIRA MORA, DANIEL DUARTE, MALENA CONTRERAS y ALEXANDER CONTRERAS, Cédulas de Identidad Números V.-14.605.720, V.-9.231.572, V.-10.170.160, V.-11.109.009 y V.-10.157.089, respectivamente, jurados designado en el Consejo Directivo N°625, con fecha del 06 de diciembre de 2023, de conformidad con el Artículo 164 del Reglamento de Estudios de Postgrado Conducentes a Títulos Académicos, para evaluar la Tesis Doctoral Titulada: "CONSTRUCTOS TEORICOS SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO MATEMÁTICO DE LOS DOCENTES EN TORNO AL MANEJO DE LOS REGISTROS SEMIÓTICOS EN LA ENSEÑANZA DE LAS INECUACIONES", presentado por el participante, ROLÓN DIAZ DARIÓ ANTONIO, cédula de Identidad N.-V.- 13.816.536 requisito parcial para optar al título de Doctor en Educación, acuerdan, de conformidad con lo estipulado en los Artículos 177 y 178 del Reglamento de Estudios de Postgrado de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador el siguiente veredicto: **APROBADO**, en fe de lo cual firmamos.

  
**DR. CARLOS GAMEZ**  
C.I.N° V.- 14.605.720

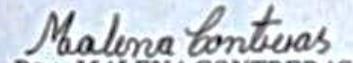
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR  
INSTITUTO PEDAGÓGICO RURAL GERVASIO RUBIO  
TUTOR

  
**DR. YANIRA MORA**  
C.I.N° V.- 9.231.572

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR  
INSTITUTO PEDAGÓGICO RURAL GERVASIO RUBIO

  
**DR. DANIEL DUARTE**  
C.I.N° V.- 10.170.160

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR  
INSTITUTO PEDAGÓGICO RURAL GERVASIO RUBIO

  
**DRA. MALENA CONTRERAS**  
C.I.N° V.- 11.109.009

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR  
INSTITUTO PEDAGÓGICO RURAL GERVASIO RUBIO

  
**DR. ALEXANDER CONTRERAS**  
C.I.N° V.- 10.157.089  
UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DEL TACHIRA



## CONTENIDO

CONTENIDO .....	iii
LISTA DE TABLAS .....	v
LISTA DE FIGURAS .....	vi
APROBACIÓN DEL TUTOR .....	vii
RESUMEN.....	viii
INTRODUCCIÓN.....	1
CAPÍTULO I.....	3
EL PROBLEMA .....	3
Planteamiento del Problema .....	3
Objetivos de la Investigación .....	11
Objetivo General: .....	11
Objetivos Específicos:.....	11
Justificación e Importancia de la Investigación.....	12
CAPÍTULO II.....	16
MARCO TEÓRICO .....	16
Antecedentes de la investigación.....	16
Fundamentación Teórica .....	23
Problemas y desafíos en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones e inecuaciones: El llamado a su revisión permanente .....	24
Fundamentos teóricos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática. ....	32
Bases Legales .....	41
CAPÍTULO III.....	43
MARCO METODOLOGICO .....	43

Enfoque Epistemológico que Orienta la Investigación .....	43
Escenario de la Investigación e informantes claves .....	45
Técnicas e Instrumentos para la Recolección de la Información .....	46
Procedimiento para el Análisis de la Información.....	48
Credibilidad de la Investigación .....	49
CAPÍTULO IV .....	51
HALLAZGOS .....	51
ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS .....	51
Análisis de las Entrevistas a los Informantes Clave .....	57
Análisis de los hallazgos obtenidos con la técnica de la Observación .....	74
Contrastación de los Hallazgos.....	77
Consideraciones finales .....	79
CAPÍTULO V.....	84
Elementos teóricos emergentes sobre los conocimientos didácticos matemáticos de los docentes de la Institución Educativa Colegio San Antonio en torno al manejo de los registros semióticos en la enseñanza de las inecuaciones .....	84
REFERENCIAS .....	99

## LISTA DE TABLAS

<b>Tabla 1.</b> Caracterización y codificación de los Informantes claves .....	46
<b>Tabla 2:</b> Sistema de Categorías de la entrevista .....	55
<b>Tabla 3:</b> Categorías emergentes de la observación .....	75
<b>Tabla 4:</b> Matriz triangular .....	78

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1.</b> Desafíos en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones e inecuaciones.....	25
<b>Figura 2.</b> Errores y Acciones Correctivas.....	28
<b>Figura 3.</b> Problemas y aprendizaje significativo.....	30
<b>Figura 4.</b> Práctica Matemáticas.....	33
<b>Figura 5.</b> Práctica Matemática.....	36
<b>Figura 6:</b> Resolución de Problemas Matemáticos.....	37
<b>Figura 7.</b> Eje Paradigmático de la Investigación.....	45
<b>Figura 8.</b> Configuración general de la Categoría Conflictos epistémicos vinculados a las transformaciones de las representaciones de inecuaciones.....	57
<b>Figura 9.</b> Configuración general de la Subcategoría Enfoque asumido para la conversión entre registros semióticos.....	58
<b>Figura 10.</b> Configuración general de la Subcategoría Manejo de registros semióticos.....	63
<b>Figura 11.</b> Configuración general de la Categoría Central: Práctica matemática asociada al abordaje del tema de inecuaciones.....	67
<b>Figura 12.</b> Configuración general de la Subcategoría Caracterización del modelo de enseñanza asumido por el docente.....	68
<b>Figura 13.</b> Configuración general de la Subcategoría Exteriorización del conocimiento didáctico matemático.....	71



## APROBACIÓN DEL TUTOR

Por medio de la presente hago constar que he leído la tesis doctoral, presentado por el ciudadano: **Darío Rolón**, para optar al grado de Doctor en Educación, cuyo título tentativo es: **CONSTRUCTOS TEORICOS SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO MATEMÁTICO DE LOS DOCENTES EN TORNO AL MANEJO DE LOS REGISTROS SEMIÓTICOS EN LA ENSEÑANZA DE LAS INECUACIONES**; la cual considero reúne los requisitos para la defensa final ante el jurado designada y públicamente para quienes estén interesados al respecto

En la ciudad de Rubio, a los 15 días del mes de febrero de 2025.

---

**Carlos Gámez Sánchez**

**14605720**



REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA  
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR  
INSTITUTO PEDAGÓGICO RURAL “GERVASIO RUBIO”  
SUBDIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO  
PROGRAMA DOCTORADO EN EDUCACIÓN  
Línea de investigación: Educación Matemática



## CONSTRUCTOS TEORICOS SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO MATEMÁTICO DE LOS DOCENTES EN TORNO AL MANEJO DE LOS REGISTROS SEMIÓTICOS EN LA ENSEÑANZA DE LAS INECUACIONES

**Autor:** Darío Rolón

**Tutor:** Dr. Carlos Gámez

**Fecha:** febrero de 2025

### RESUMEN

Reconociendo que la actuación del docente de matemáticas exige una sólida formación disciplinar, la cual se acompaña de conocimientos del ámbito didáctico, es preciso que se conozcan los aspectos asociados al manejo simbólico y las causas de las disparidades del significado de los objetos matemáticos que determinan la presencia de conflictos semióticos. Por ello, es oportuno indicar que el presente estudio tiene como objetivo general: generar constructos teóricos sobre los conocimientos didácticos matemáticos de los docentes de la Institución Educativa Colegio San Antonio en torno al manejo de los registros semióticos en la enseñanza de las inecuaciones, para ello, se desarrolló una investigación atendiendo a los criterios del paradigma interpretativo, sustentada en el enfoque de investigación cualitativo, de acuerdo a los principios del modelo de conocimiento didáctico matemático y el enfoque ontosemiótico, mediante el método fenomenológico. Los informantes claves corresponden a cuatro docentes y tres estudiantes, estos informantes fueron seleccionados de manera intencional. Las técnicas seleccionadas fueron la entrevista en profundidad. El análisis e interpretación de los resultados se desarrolló considerando las siguientes etapas: previa, descriptiva, estructuración y la etapa de discusión de los resultados. El estudio trajo como resultados que los conocimientos didácticos matemáticos son esenciales para formar y capacitar a los estudiantes; desde esa mirada se llegó a la reflexión que es necesario redimensionar algunos procesos a partir de lo que es el manejo de los registros semióticos en la enseñanza de las inecuaciones; aspectos de marcada importancia en el desarrollo de la asignatura de matemáticas.

**Descriptor:** Conocimiento didáctico matemático, registro semiótico, enseñanza de las inecuaciones.

## INTRODUCCIÓN

En el transitar de las últimas décadas diferentes aristas del quehacer educativo vinculado a la enseñanza de la matemática ha captado la atención de los investigadores en torno a aspectos centrales como lo son el manejo adecuado de las herramientas didácticas que permitan realizar la aprehensión efectiva de las nociones asociadas a los diferentes objetos matemáticos y la identificación de las discordancias entre los significados asignados por los estudiantes a los objetos matemáticos o las interpretaciones de las expresiones algebraicas y los significados e interpretaciones pretendidas por el docente. En otros términos, se ha focalizado la atención en el Conocimiento Didáctico Matemático del docente y su capacidad para reconocer conflictos semióticos.

De manera paralela, la práctica matemática asociada al desarrollo del tema de inecuaciones se ha situado en el prisma de observación de numerosos investigadores, dadas las dificultades semióticas que subyacen en el abordaje de tal tema, las cuales se derivan del denso manejo simbólico y las diferentes formas operacionales y algebraicas involucradas en el estudio del objeto matemático inecuación. Considerando lo expuesto, se desarrollará el presente estudio el cual tiene como propósito caracterizar los conocimientos didácticos matemáticos de los docentes de la Institución Educativa Colegio San Antonio en torno al manejo de los registros semióticos en la enseñanza de las inecuaciones.

Es pertinente referir que la presente intención investigativa está estructurada de la siguiente manera: el Capítulo I: situación problemática, en el que se presenta el planteamiento del problema y se desarrolla la sistematización de la problemática para exponer las interrogantes orientadoras del estudio, los objetivos del estudio, así como la correspondiente relevancia y la justificación de la investigación. Posteriormente en el Capítulo II: denominado marco teórico referencial, se plasma la evolución teórica relativa al objeto de estudio, definiendo además los fundamentos teóricos del mismo. Por último, el Capítulo III: marco metodológico en el que se describe la ruta metodológica a seguir. Para ello se indica el paradigma interpretativo de la investigación, con un enfoque cualitativo asumiendo la fenomenología como método, además se describe el escenario de la misma, se caracterizan los informantes clave y se señalan los procedimientos para la recolección y el correspondiente análisis de los insumos provenientes de la aplicación de los instrumentos.

Seguidamente se presenta el Capítulo IV que hace mención a los resultados encontrados y se muestra una estructura centrada en el análisis de la información, teniendo presente que desde allí se genera una postura teórica encaminada a fundamentar lo correspondiente a los constructos teóricos que son parte del capítulo V que se denomina los constructos teóricos y se presenta una estructura encaminada a lo que es las bases de cada uno de los componentes que van en función a lo que es la enseñanza de las matemáticas.

Finalmente, se presenta lo que es el Capítulo VI en este caso denominado algunas reflexiones finales que vienen a convertirse en el marco teórico conceptual que emanan de la formación académica que se le pueda dar a los estudiantes; razón que conlleva a repensar la forma de aplicar y generar nuevos modos de enseñar ajustándose a la realidad encontrada; de hecho los aportes que se presentan se convierten en elementos de marcada importancia para el desarrollo investigativo; así mismo, se presenta lo concerniente a los aportes dados para el sistema educativo colombiano de donde llegan a nacer nuevas ideas para continuar el desarrollo de la investigación en otros temas que vengan a complementar el tema que se ha desarrollado a lo largo de la investigación.

# CAPÍTULO I

## EL PROBLEMA

### Planteamiento del Problema

Dado el carácter no ostensivo de los objetos matemáticos, que los hace no accesibles mediante la percepción, la actividad matemática recurre al empleo de diversos registros de representación semiótica los cuales crean un entramado que permite delinear el significado de dichos objetos. Sin embargo, la actividad cognitiva involucrada en las estrategias matemáticas que implementan diversos tipos de representación puede llevar al estudiante a enfrentarse a disparidades en las interpretaciones de las expresiones matemáticas, estas discrepancias han sido denominadas por Godino et al. (2007) conflictos semióticos.

Vale acotar que, de manera concreta, se concibe según Godino (2002) el conflicto semiótico como: “una disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos -personas o instituciones- en interacción comunicativa”. (P.258). Es importante señalar que en esa disparidad se deja ver que es necesario profundizar sobre dicha situación, razón que deja ver la necesidad de afianzar los conocimientos necesarios para que se constituyan las bases del tema que se viene analizando. Atendiendo a tal definición, Burgos y Godino (2019) puntualizan que esa noción:

Pretende aportar una explicación de índole semiótica a las dificultades y limitaciones de los aprendizajes de los estudiantes y a los conflictos de significados en el proceso de selección y adaptación de los contenidos de enseñanza. Cuando la disparidad o desajuste se produce entre significados de tipo institucional (por ejemplo, entre el significado de referencia y el implementado en un libro de texto o por un profesor) se dice que se trata de un conflicto (semiótico) epistémico, mientras que si la disparidad tiene lugar entre el significado manifestado por un sujeto y el de referencia se dice que se trata de un conflicto (semiótico) cognitivo (p. 224).

En función del propósito esencial asignado a esta noción, la misma ha permitido abrir amplios caminos para el estudio y valoración de las prácticas en el área de matemática y se ha convertido, según Rojas (2010), en un “instrumento conceptual poderoso para analizar procesos de aprendizaje de los objetos matemáticos” (p.1), permitiendo situar la problemática del aprendizaje en el área de la matemática en “una actividad de carácter fuertemente

semiótico atravesada por diversos tipos de tensiones” (p.1). En efecto, mencionados aspectos convergen en definir acciones que a la final requieren de la atención didáctica para que los procesos de enseñanza sean efectivos; por lo tanto se requiere de atención y desde esa postura se consolida el hecho pedagógico.

Dada la naturaleza de la matemática, se requiere de un sólido manejo de elementos conceptuales y operacionales por parte del estudiante que le permita avanzar hacia etapas más abstractas del pensamiento matemático, lo que incluye el manejo de la simbología, la diversidad de las representaciones y las consecuentes transformaciones de estas últimas. Justamente entre los tópicos que han captado la atención de los investigadores por su riqueza representacional y los procesos semióticos y cognitivos que subyacen en su estudio se encuentran las ecuaciones e inecuaciones.

En efecto, abordar estos temas conduce a abrir el camino hacia la reflexión sustentándose en la riqueza operacional y algebraica implícita en su correspondiente estudio, las múltiples posibilidades de representación y las conversiones entre ellas. Al respecto, Kieran (2003) plantea que “la resolución de ecuaciones y la simplificación de expresiones requieren la habilidad de razonar acerca de las operaciones” (p.130), No obstante, ese nivel de reflexión no necesariamente se alcanza de manera satisfactoria hecho que conduce al alumno a recurrir al empleo de procesos memorísticos tanto de reglas como de procedimientos, y, consecuentemente, a convencerse de que las matemáticas se sustentan en “recetas” o patrones procedimentales (NMAP, 2008).

Se requiere entonces, de acuerdo a lo expuesto por Larios et al (2021) que los docentes de los diferentes niveles educativos” proporcionen a sus alumnos situaciones, en las que se utilicen diferentes representaciones y procedimientos que sean representativos” (p.287). Esto, particularmente en la práctica matemática asociada a la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones e inecuaciones, posibilita cubrir tres etapas de análisis y abstracción propias de las tareas algebraicas: las generacionales, las transformacionales y las globales, que conducen a establecer procesos de modelación y demostración.

De allí que Godino et al. (2014) establezcan que procesos matemático cognitivos, que a su vez definen los diferentes niveles desde algebrización, como el generalizar, la

formalidad, la unitarización y la intuición matemática como aspectos esenciales a considerar en propuestas didácticas relacionadas con el abordaje de los temas señalados. Cabe acotar que, según lo aclaran los autores mencionados, tales niveles no corresponden a “niveles exclusivamente matemáticos (centrados en las tareas), sino de estadios del funcionamiento de los conocimientos matemáticos en la resolución de problemas” (p.206). Postura teórica que se convierte en fundamento esencial del desarrollo de acciones centradas en saber llevar los conocimientos de una manera efectiva en relación a lo que es los procesos matemáticos.

Naturalmente, para avanzar hacia tales etapas de pensamiento se precisa que el docente valore dentro de la dinámica propia de la práctica matemática la adecuación de conceptos matemáticos que sean vinculantes a la conceptualización de ecuaciones e inecuaciones, y, por supuesto, que denote en su actuación un claro conocimiento didáctico matemático de tales tópicos. Así, la clara explicación de los aspectos conceptuales y los manejos simbólicos involucrados ocupa un lugar esencial en la enseñanza de los referidos temas, pues la ausencia o débil introducción de las concepciones propias de la temática suelen generar conflictos cognitivos, de acuerdo a lo sugerido por Konic (2019), “estalla en importantes problemas de aprendizaje y enseñanza” (p.83). Aspecto que, en definitiva, según lo expresa el precitado autor, “se traduce generalmente en obstáculos cognitivos y/o didácticos que dificultan, en el futuro, su remoción y la entrada de nuevas concepciones” (p.83).

Ante esta descripción, es que en el caso particular del estudio de las ecuaciones e inecuaciones tales conflictos se vinculan, en los términos descritos por Rodríguez (2015), a los errores derivados del inadecuado manejo del simbolismo algebraico y de su incompreensión, errores que a su vez son “causados por la ausencia de sentido” (p.54), así como a las dificultades inherentes a los procesos de cambios de registro. De igual forma esas discrepancias en lo relativo a la interpretación simbólica suelen presentarse al abordar otros tópicos dentro del contexto de educación secundaria, como en el ámbito universitario, determinando este hecho la necesidad de indagar sobre las dificultades que subyacen en dichos procesos de interpretación, así como los errores en que suelen incurrir los estudiantes en sus procedimientos operacionales, propios del álgebra y la matemática en general.

De manera paralela, dada la complejidad que se asocia a la enseñanza del objeto matemático inecuación es de valorar los conocimientos didácticos manejados por los docentes a fin de determinar si se ajusta a los requerimientos de su loable labor. Al respecto, Amaya (2016) recuerda que es imperativo “que los docentes deben saber mucha más matemáticas de la que enseñan y además, tener cierto conocimiento de contenido pedagógico que le facilite enseñar matemáticas para que sus alumnos la comprendan” (p.65). Puntualiza el referido autor que:

Un docente además del contenido matemático, debe tener conocimiento sobre los diversos factores que influyen al desarrollar su práctica enseñando matemáticas, esto es, tener un conocimiento matemático mucho mayor de lo que enseña, y un complemento que facilite su enseñanza. Se asume que ese complemento es de tipo didáctico-pedagógico, es decir, es el conocimiento didáctico necesario para enseñar las matemáticas. (p.66)

En este mismo orden de ideas, Pino-Fan y Godino (2015) sostienen que el conjunto de conocimientos propios de la asignatura “que posibilita al profesor resolver problemas y tareas matemáticas, no es suficiente para la práctica de enseñanza” (p.98). Esto permite inferir que tal conjunto de conocimientos lo habilitan para la actuación didáctica vinculada a la resolución de problemas matemáticos, más resulta insuficiente para el desarrollo eficiente de la práctica matemática, pues se requiere un sólido conocimiento sobre los elementos que inciden en la planificación e implementación de las actividades asociadas a la enseñanza de los contenidos matemáticos.

Por otra parte, la importancia de analizar los aspectos expuestos respecto a las dificultades inherentes al abordaje de las inecuaciones es de sumo interés en investigadores como Palarea (1998) quien establece que “estas dificultades, en general, no se pueden evitar ya que forman parte del proceso normal de construcción del conocimiento matemático, pero los profesores tienen que conocerlas y reflexionar sobre ellas para facilitar su explicitación por parte de los alumnos” (p.74). Agrega la referida autora que mantener implícitas tales dificultades conlleva a obstruir la incorporación de nuevos saberes, determinando esto la preeminencia de su valoración. Ahora bien, las dificultades de interpretación del simbolismo algebraico se atribuyen entre otros factores al carácter ambiguo de este último. Al respecto puede señalarse lo siguiente:

El simbolismo algebraico permite moverse con fluidez a través de capas de abstracción y comprimir complejos pensamientos matemáticos en eficientes cadenas de símbolos. Al mismo tiempo, sin embargo, estas características hacen a la escritura simbólica muy opaca para el estudiante. Hay profundas ambigüedades en el uso de los símbolos que son ventajosas para el experto, pero difíciles para el novato. (Drouhard y Teppo, 2004, p.240)

De allí, que surge ese carácter consubstancial a tales inconvenientes en el manejo de la simbología, situación que deriva en disparidades interpretativas que obstaculizan el efectivo aprendizaje. Ante esto, el rasgo difuso de los objetos matemáticos se incrementa cuando, sin la adecuada consolidación del sentido de los símbolos, se intenta establecer la vinculación entre el manejo del simbolismo algebraico y los diversos medios de hacer representaciones ante un objeto matemático.

En relación a este aspecto, Duval (2006) sostiene que los docentes advierten en su práctica que “la adquisición del conocimiento matemático no introduce a la mayoría de estudiantes en las formas del pensamiento matemático, como por ejemplo en la habilidad para cambiar el registro de representación” (p.144). Acentúa el precitado autor que “lo que primero importa para la enseñanza de las matemáticas no es la elección del mejor sistema de representación sino lograr que los estudiantes sean capaces de relacionar muchas maneras de representar los contenidos matemáticos” (p.159). En otras palabras, se formula el llamado a centrar los esfuerzos en la consecución de un tránsito fluido entre registros, destacando que más allá de la elección del sistema de representación lo relevante es desarrollar la capacidad de vincular las diferentes representaciones asociadas a un mismo objeto matemático. Justamente, esta fluidez determina la claridad del significado de los objetos matemáticos y particularmente haciendo referencia al abordaje de inecuaciones Torres (2016) señala que:

El éxito académico en el estudio del tema objeto de interés para la investigación está ligado a la fluidez alcanzada por el estudiante al efectuar la conversión entre registros; siendo el enfoque multirepresentacional el soporte de la adecuada búsqueda del significado del objeto matemático estudiado (p.23).

Sin duda, la alusión a las bondades del manejo multirepresentacional del objeto matemático inecuación fortalece la clara aprehensión del significado de dicho objeto y coadyuva a la minimización de los conflictos semióticos. Conviene destacar que el análisis de los conflictos semióticos ha ocupado un lugar privilegiado en investigaciones recientes

vinculadas a la Educación Matemática, su carácter trascendental ha sido señalado por Rojas (2010), quien enfatiza que tal noción “se ha mostrado como un instrumento conceptual poderoso para analizar procesos de aprendizaje de los objetos matemáticos” (p. 1); de allí la relevancia de su estudio en los diferentes niveles educativos, pues como lo plantea Godino (2002) tales conflictos “pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas” (p. 258).

De acuerdo a esto, los conflictos semióticos constituye una herramienta valiosa para adentrarse en la revisión de las debilidades en la aprehensión del significado de los objetos matemáticos expresadas a partir de las disparidades entre el significado personal y el significado institucional, valoración que conduce a la formulación de conjeturas sobre puntos críticos en la explicitación de los conceptos, así como en la interacción verbal entre los protagonistas del acto didáctico; aspectos que pueden derivar en vacíos de significación o discrepancia en las interpretaciones que ameriten una revisión detallada que implique procesos de negociación que conduzcan a la depuración del significado del objeto matemático.

En particular en el ámbito de la educación media se ha detectado un fenómeno didáctico que ha cautivado la atención de los investigadores y que ha sido reportado por Badillo *et al.* (2005), referido a “la regularidad con la que se manifiestan conflictos semióticos en las prácticas de los alumnos de Bachillerato” (p. 1), hecho que está relacionado con la implementación del simbolismo algebraico al abordar las diferentes temáticas y la complejidad que envuelve su empleo.

En el caso de las ecuaciones e inecuaciones las discrepancias representadas por los conflictos semióticos tienen un variado origen, entre otros factores pueden ser causadas por lo que Ruiz (2015) ha denominado desalgebrización de la matemática que se enseña en el nivel de Educación Secundaria. Esta manifestación didáctica, de acuerdo a lo sostenido por la referida autora, se expresa en la “relación unilateral y unidireccional del álgebra con el ámbito numérico” (p.76) lo que lleva a interpretar el álgebra como un “mero lenguaje aritmético generalizado, en el que, además de números, utiliza también letras” (p.76). En este mismo orden de ideas, Monje (2017) plantea que el hecho de no contemplar la complejidad del objeto matemático inecuación, dejando de lado algunos de sus componentes, se traduce

en “quiebres en la progresión de la enseñanza” (p.7), los cuales derivan indefectiblemente en la presencia de conflictos de orden semiótico.

Sin duda, a la complejidad propia del abordaje del objeto matemático ecuación se unen los aspectos derivados de los medios didácticos empleados por el docente para su correspondiente enseñanza, pues en muchos casos solo se emplean mecanismos monoregistros dejando de lado la posibilidad de aprovechar el tránsito entre las diferentes representaciones para consolidar la aprehensión del significado de tal objeto matemático.

De esta manera, el dominio de los aspectos didácticos y mediacionales pasa a ocupar un lugar esencial para la concreción de una práctica matemática efectiva y fructífera, para Torres, (2023). “es la amalgama entre el contenido y las herramientas didácticas la que define la propia comprensión por parte del docente de los modos idóneos de acercar al estudiante a cada objeto matemático, permitiéndole vencer su rasgo no ostensible y difuso”

Se aprecia así que las dificultades y obstáculos que subyacen en el abordaje de este tema presentan una génesis diversa, que abarca desde la problemática inherente al dominio y subsecuente comprensión del simbolismo algebraico, hasta la ausencia de correlación entre diversas representaciones, además del empleo de herramientas didácticas que limitan la comprensión de la temática, situaciones que en su conjunto impiden la apropiada aprehensión conceptual de los objetos matemáticos ecuación e inequación.

La consideración de lo antes expuesto lleva a considerar la viabilidad de valorar los conocimientos didáctico matemáticos de los docentes en torno a la enseñanza de inequaciones en el nivel de Educación Secundaria, específicamente en el contexto dado por la Institución Educativa Colegio San Antonio. El interés por desarrollar el estudio obedece al hecho de que durante las practicas docentes que se imparten en dicha institución, se evidencian algunos errores en los estudiantes al abordar los referidos temas, los cuales apuntan a desequilibrios semióticos e inconsistencias en el significado otorgado a los correspondientes objetos matemáticos, de igual manera se logra evidenciar el empleo estricto del registro algebraico en la enseñanza de las inequaciones, hecho que despierta el interés del investigador por profundizar en el estudio del manejo por parte de los docentes de las

herramientas didácticas multiregistro y, en general, del conocimiento especializado del contenido.

Debe destacarse que las disparidades de interpretación previamente mencionadas se evidencian en las evaluaciones aplicadas en la asignatura Matemática correspondientes al grado séptimo de Educación Secundaria, así como en las evaluaciones aplicadas en asignaturas con tópicos correlacionados, como es el caso de Física. De igual manera, se ha determinado que, en las unidades temáticas correspondientes a ecuaciones e inecuaciones, en el transcurso de los diferentes grados de Educación Secundaria dictados en la institución, los resultados de las evaluaciones no han sido favorables. Adicionalmente se ha apreciado que en las Pruebas Saber los ítems vinculados al manejo de inecuaciones han presentado resultados negativos entre los estudiantes de la institución que han participado en ellas, reconociéndose además en los procesos de preparación para dichas pruebas que los estudiantes exhiben dificultades en la interpretación de los símbolos y, muy particularmente, en el traslado de la solución entre diferentes registros; elementos que son causales directos del desacertado procedimiento y las erróneas asignaciones de significado al objeto matemático inecuación.

Tales incongruencias de naturaleza semiótica requieren ser examinadas a fin de subsanar las debilidades a las que dan lugar, en aras de procurar un aprendizaje efectivo y consolidar en el estudiante un andamiaje conceptual sólido que sirva de soporte para su avance académico. Implicando esto la revisión del componente didáctico de los docentes que dictan la asignatura en la institución.

La situación descrita lleva a plantearse la inquietud por indagar sobre los factores de naturaleza didáctica y semiótica que pueden estar influyendo en la persistencia de dificultades en torno a esos temas, las cuales de no ser atendidas de manera adecuada pueden generar debilidades conceptuales que incidan en el posterior desempeño de los estudiantes. Para alcanzar tal propósito, el investigador se propone aplicar los criterios del Enfoque Ontosemiótico y del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM), por constituir este último una herramienta para valorar el conocimiento y competencias del docente para desarrollar prácticas matemáticas eficientes, para indagar sobre la solidez de los conocimientos de los

docentes en torno a la enseñanza de las inecuaciones, por lo que se plantea como pregunta orientadora del estudio la siguiente:

¿Cómo se pueden caracterizar los conocimientos didácticos matemáticos de los docentes de la Institución Educativa Colegio San Antonio en torno al manejo de los registros semióticos en la enseñanza de las inecuaciones?

Para dar respuesta a la misma es preciso atender otras interrogantes particulares que marcarán la ruta de la investigación, las cuales son:

¿Qué conflictos epistémicos evidencian los docentes de matemática al efectuar transformaciones de las representaciones de una inecuación?

¿Cuáles son las dificultades y obstáculos puestos de manifiesto por los estudiantes en la conversión entre registros al resolver inecuaciones?

¿Qué relación se aprecia entre los obstáculos para el estudio de las inecuaciones, derivados de los errores operacionales y las dificultades en la conversión entre registros, y los conflictos semióticos evidenciados por los estudiantes?

¿Cuáles conocimientos didáctico-matemáticos tienen los docentes de matemática para desarrollar eficientemente el proceso de enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones?

### **Objetivos de la Investigación**

#### **Objetivo General:**

Generar constructos teóricos sobre los conocimientos didácticos matemáticos de los docentes de la Institución Educativa Colegio San Antonio en torno al manejo de los registros semióticos en la enseñanza de las inecuaciones.

#### **Objetivos Específicos:**

- Describir los conflictos epistémicos que evidencian los docentes de matemática al efectuar transformaciones de las representaciones de una inecuación.

- Caracterizar desde la didáctica del docente los conocimientos matemáticos empleados entorno al manejo de registros semióticos en la enseñanza de las inecuaciones en educación secundaria.
- Interpretar la relación existente entre los obstáculos para el estudio de las inecuaciones, derivados de los errores operacionales y las dificultades en la conversión entre registros, y los conflictos semióticos evidenciados por los estudiantes de educación secundaria.
- Teorizar desde las categorías emergentes el conocimiento didáctico-matemático que tienen los docentes de matemática para desarrollar eficientemente el proceso de enseñanza de las inecuaciones entorno al manejo de registros semióticos en educación secundaria de la Institución Educativa Colegio San Antonio.

### **Justificación e Importancia de la Investigación**

Tomando como referencia el propósito general establecido en el presente estudio es posible determinar los elementos que justifican la investigación a emprender. Debe señalarse que el estudio genera contribuciones de orden teórico, metodológico y práctico. En lo concerniente al aporte teórico, el insumo dado por las categorías emergentes que emerjan del correspondiente análisis de las entrevistas en profundidad, así como los elementos que se aprecien a partir de la observación participante, serán determinantes para valorar el conocimiento didáctico matemático de los docentes respecto a la enseñanza de las inecuaciones y el correspondiente manejo de los registros semióticos vinculados a dicho tema. Tal aporte determina la posibilidad de constituir un referente para posteriores investigaciones al dejar de manifiesto los elementos constitutivos que pueden emerger de la labor investigativa, al sintetizar los rasgos propios del conocimiento didáctico manejado por los docentes que pueden contribuir a la ejecución de prácticas de calidad y con alto nivel de significación para los estudiantes.

En lo atinente al aporte metodológico, el establecimiento de una clara y rigurosa ruta metodológica para acercarse al objeto de estudio determina un referente esencial para futuras investigaciones. Por otra parte, el aporte práctico se sustenta en la contribución de la investigación, por medio del desarrollo exhaustivo de la temática y de la información recolectada mediante las técnicas asumidas, a obtener insumos para potenciar la enseñanza de la matemática, por lo que puede ser un referente que permita comprender la situación acaecida con otros docentes en otros contextos, relacionada con la imperiosa necesidad de su formación didáctico matemática.

La relevancia social es manifiesta, puede constituir un valioso aporte para el impulso en las instituciones de Educación Básica Secundaria de continuos procesos de valoración del saber didáctico de los docentes, al propiciar su reflexión sobre la necesidad de asumir principios prácticos y teóricos sobre didáctica, que contemplen métodos, técnicas y recursos en el contexto del aula que permitan el desarrollo de una práctica matemática eficiente.

Adicionalmente, los hallazgos e inferencias derivadas del proceso investigativo pueden contribuir a fortalecer las líneas de investigación del Doctorado en Educación, lo que ofrece luces para el abordaje de la temática desde nuevos enfoques y perspectivas. La investigación puede dar cuenta de la complejidad de la práctica matemática y fortalecer la concepción de calidad de la educación, a partir de las reflexiones generadas al valorar los hallazgos y contrastar la realidad con los planteamientos teóricos de otros investigadores.

Por todo ello, puede afirmarse que la investigación es pertinente, en virtud de que los hallazgos pueden brindar la posibilidad de sugerir mejoras en el proceso de enseñanza, aspecto de suma importancia para la enseñanza de la matemática por cuanto la formación didáctica del docente se encuentra inmersa en los procesos educativos y es parte esencial de los componentes que debe nutrir la formación general del docente.

Adicionalmente, al circunscribirse la investigación al Doctorado en Ciencias de la Educación, sus aportes constituirán sustentos para nutrir los necesarios procesos de reflexión por parte de los docentes de la institución seleccionada, los cuales constituyen elementos esenciales para el mejoramiento de la enseñanza. La labor investigativa de manera intrínseca permitirá ubicar en un primer plano las necesidades de formación permanente de los docentes

de la Institución Educativa Colegio San Antonio, particularmente en lo atinente a su componente de conocimientos didáctico matemáticos, al reconocerse que dicha formación constituye un inexcusable proceso de aprendizaje pedagógico para avalorar y nutrir la enseñanza, al partir de las potencialidades de los docentes implicados y encaminarse hacia la consolidación y fortalecimiento de la labor docente.

Por otra parte, la comunicación e interacción social que se establezca entre el investigador y los docentes de la referida institución, a lo largo del proceso sistemático y dialógico que supone la investigación, serán mediadores esenciales en la intención de reflexionar sobre el docente como protagonista activo y transformador en el proceso de aprendizaje; de allí que el esfuerzo investigativo apuntará a posibilitar la reconstrucción y mejora de la actividad docente en el contexto seleccionado. De tal manera, se concretan acciones pedagógicas que van en función de lo que es la formación académica de los estudiantes.

De igual manera, la atención que pudiera fijarse a partir de la investigación en los retos derivados de la dinámica del contexto y de la disciplina particular que enseñan, en este caso la matemática, puede conducir a la valoración de las necesidades de formación inducidas por las actuales exigencias a las que se somete el rol docente; requerimientos cuya consideración hace viable realizar la práctica pedagógica de una manera significativa, con alto nivel de pertinencia y conformidad al contexto social en que se inscribe. Teniendo presente que la relevancia social es fundamental para la garantizar consigo una educación de calidad, centrado en la enseñanza de las matemáticas.

Asimismo, la labor investigativa responde a la necesidad de reconstruir el saber pedagógico, a partir de la experiencia a la que el docente se enfrenta cotidianamente, lo cual le lleva a entender su práctica pedagógica en un sentido heurístico, reconociéndola como actividad compleja, variable e incierta; de esta forma, el proceso reflexivo que desarrolle tanto investigador como los docentes participantes en el estudio les permitirá nutrirse de insumos teóricos para proseguir su desarrollo y realización profesional y así responder en forma acertada y efectiva a las demandas planteadas por los estudiantes en la referida institución. Es significativo mencionar que los aportes teóricos convergen en brindar herramientas a los docentes y facilitar los conocimientos necesarios para que los estudiantes

alcancen una formación acorde a las exigencias de la sociedad y es así que se constituyen las bases de un nuevo modo de enseñar las matemáticas.

Finalmente, es oportuno señalar que la importancia del trabajo investigación es de suma relevancia académica; puesto que, viene a establecer las bases de nuevos conocimientos en función de la enseñanza de las matemáticas; en tal sentido se deja evidenciar un conjunto de acciones que definen el camino de nuevos modos de enseñar las matemáticas. Es oportuno señalar que la investigación se encuentra registrada en el núcleo de investigación didáctica y tecnología, mediante la línea de investigación enseñanza de las matemáticas del Instituto Pedagógico Rural Gervasio Rubio – sede Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

## **CAPÍTULO II**

### **MARCO TEÓRICO**

La información que se desarrolla en este capítulo tiene como propósito fundamentar la tesis doctoral sobre la base de un sistema conceptual riguroso y con densidad conceptual importante, que permita examinar al objeto de estudio y, en consecuencia, explicar los hechos observados como realidad investigada. Ante esto en el presente capítulo se busca exponer un recorrido diacrónico del objeto de estudio, además de los antecedentes de la investigación los cuales son aquellas tesis doctorales que guardan relación directa con el tratamiento de la investigación. De la misma forma, se destaca la referencia explicativa del marco teórico, es decir, de las teorías que guardan relación directa al objeto de estudio.

#### **Antecedentes de la investigación**

Con el propósito de ahondar en las pesquisas previas que se han desarrollado en torno al objeto de estudio se describen seguidamente algunos estudios que guardan relación con la temática central abordada en la presente investigación. Así, en el ámbito internacional puede señalarse la Tesis Doctoral desarrollada por Rodríguez (2015), intitulada “Traducción entre los sistemas de representación simbólico y verbal: Un estudio con alumnado que inicia su formación algebraica en secundaria” presentada ante la Universidad de Granada. El estudio de carácter exploratorio, de tipo descriptivo, fue desarrollado desde el Enfoque Mixto. Su objetivo estuvo orientado a analizar la traducción de enunciados algebraicos, particularmente entre los sistemas de representación simbólico y verbal, desarrollada por estudiantes de secundaria.

La investigadora consideró la aplicación de dos instrumentos: Pruebas Escritas y Entrevistas Semiestructuradas. La población estuvo constituida por los estudiantes del segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria. Por su parte la muestra, de tipo intencional, estuvo conformada por 16 estudiantes de una institución educativa de la localidad de Motril, Granada.

El análisis de las Pruebas Escritas permitió identificar los errores evidenciados por los estudiantes al construir traducciones de enunciados algebraicos y sus correspondientes conversiones entre los sistemas de representación simbólico y verbal, clasificando tales errores en: a) Relacionados con la completitud del enunciado; b) Asociados con los procesos propios de la aritmética; y c) Provenientes de las peculiaridades propias del simbolismo algebraico. En lo concerniente al primer tipo de errores, se encontró que el error debido a la traducción del enunciado de forma incompleta es el que se manifiesta con mayor frecuencia; en lo relativo a los errores derivados de la aritmética, el más frecuente fue el asociado a propiedades de la multiplicación y los vinculados a la potenciación. En lo atinente a los errores procedentes de los rasgos inherentes al simbolismo algebraico se encontró que el más común fue la asignación de un mismo significado a diferentes letras, así como el empleo de una misma letra con diferentes significados.

Ante ello, la investigadora concluye que esta indagación sobre las dificultades que evidencian los estudiantes en la conversión entre los registros verbal y simbólico refleja que la traducción del simbolismo algebraico a la correspondiente representación verbal genera más errores. Además, en ambos sentidos de la conversión el error derivado de la complicación estructural del enunciado es el que presenta mayor frecuencia. De igual manera, tienen alto índice de ocurrencia los errores debido a generalizaciones del enunciado. En la conversión de la representación verbal a la simbólica la mayor concentración de errores se asocia a las características inherentes al simbolismo algebraico. Por su parte, el análisis cualitativo reflejó que la escasa atención conduce al estudiante a efectuar construcciones simbólicas imprecisas, además la escasa relación del enunciado con situaciones reales no les facilita su traducción adecuada a expresiones simbólicas. Los estudiantes denotan dificultad para expresarse oralmente, empleando inadecuadamente el lenguaje matemático; sin embargo, el empleo de la expresión oral les permite descubrir y corregir los errores de expresión simbólica.

El estudio señalado ofrece un importante aporte respecto a los errores presentes en los procesos de conversión entre el registro verbal y simbólico, razón por la cual constituye un referente básico para extrapolar su óptica investigativa para analizar la presencia de

conflictos semióticos en la enseñanza de ecuaciones e inecuaciones, temas donde se pueden presentar enunciados análogos a los analizados por la autora.

Bajo la misma mirada es conveniente plantear el trabajo realizado por Villota, (2022) Concepciones de los profesores universitarios de matemáticas sobre la implementación y uso de las TIC para la enseñanza de contenidos matemáticos. Tesis doctoral, Universidad de Salamanca – España. La intención de la investigación se centro en una revisión de las concepciones de los profesores sobre la enseñanza de las matemáticas; asumiendo lo concerniente a la parte epistemológica y desde esa mirada se logran conjugar conocimientos que van en función de la enseñanza de las matemáticas en las aulas de clase.

Así mismo, se vale mencionar que la metodología utilizada se enfocó en una investigación cualitativa centrada en un reflexión sobre la parte hermenéutica e interpretación de la información, razón que muestra e indica que se asumen las bases de procesos de enseñanza enfocada en lo que es el manejo de las concepciones básicas de la matemática; razón de ser para buscar mecanismos y nuevos métodos de enseñanza que respalden lo que es el manejo de los conceptos básicos matemáticos que se convierten en base de los constructos que se pretenden alcanzar y es así que se constituyen las bases teóricas para llegar a Generar constructos teóricos sobre los conocimientos didácticos matemáticos de los docentes de la Institución Educativa Colegio San Antonio en torno al manejo de los registros semióticos en la enseñanza de las inecuaciones.

De tal manera, se concretan acciones pedagógicas enmarcadas en brindar a los docentes herramientas y principios de enseñanza para que el desarrollo de las actividades académicas sean un éxito. Es así que se presenta el trabajo realizado por Sánchez et al, (2024). Modelo Van Hiele para la enseñanza de la geometría: análisis de la producción científica española. Artículo resultado de tesis doctoral; es oportuno que el modelo Van Hiele se convierte en un modo de enseñar indispensable para que los estudiantes alcancen cada uno de los conocimientos necesarios para su formación académicas; es significativo mencionar que responde al estado del arte de la investigación por brindar aportes teóricos significativos en el desarrollo de la presente investigación.

Como se logra apreciar el estudio anterior es de carácter bibliométrico y ofrece un cumulo de elementos enfocados en las exigencias de la sociedad y se vincula con la presente investigación por ser parte de los elementos didácticos que se deben asumir en la enseñanza de la matemáticas, en tal sentido se presenta lo correspondiente al desarrollo de la investigación que se esta presentando y es por ello que se constituyen las bases de conocimientos enfocados en la enseñanza de las matemáticas, la cual es considerada como una asignatura de marcada importancia en la formación académica.

En lo concerniente al tema de los conocimientos didáctico matemáticos destaca el Trabajo Doctoral de Vergara (2019) intitulado “Análisis del Conocimiento Didáctico del Contenido de profesores chilenos de Educación Básica”, presentado ante la Universitat de Barcelona. El autor caracteriza las declaraciones explícitas del Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) mediante un estudio de casos, aplicando una mirada fenomenológico-hermenéutica. Para alcanzar su propósito aplicó como técnica la observación no participante, complementándola con entrevistas a profundidad. El análisis se sustentó en el método inductivo de comparación constante.

Los hallazgos son expresados en dos metacategorías: a) estrategias para identificar/explicar errores y dificultades de aprendizaje de los estudiantes, y b) estrategias para ayudar a los estudiantes a superar sus dificultades de aprendizaje. El autor concluye que la evaluación formativa es una manifestación esencial del CDC, de igual manera, en el razonamiento pedagógico que supone el CDC el factor afectivo/emocional es substancial pues permite profundizar en las aspiraciones, concepciones y sentimientos de los estudiantes, aspectos que pueden reorientar la selección de estrategias y recursos didácticos a emplear con el fin de hacer comprensible la asignatura.

Destaca igualmente el Trabajo Doctoral de Amaya (2016), el cual lleva por nombre “Evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de matemáticas al hacer transformaciones de las representaciones de una función”, presentada ante la Universidad Nacional de Educación a Distancia, en España.

El estudio evaluó los conocimientos didáctico-matemáticos de los futuros docentes de matemáticas, de la Universidad de Sucre, centrando de manera particular la atención en la

faceta epistémica que se configuró al realizar transformaciones de las representaciones de una función. En cuanto al marco teórico, este tuvo sus cimientos en los criterios propios del modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM). El estudio se enmarcó en el enfoque mixto. Consideró, para efectos de la valoración del conocimiento didáctico-matemático, una muestra conformada por 56 docentes en formación, siendo su selección de carácter intencional. Tales sujetos ofrecieron información para el estudio durante cuatro lapsos académicos consecutivos.

Los hallazgos evidenciaron atributos característicos de conocimiento común del contenido, encontrándose heterogeneidad entre las configuraciones cognitivas. Se encontraron leves evidencias del conocimiento ampliado, así como del conocimiento especializado. Se identificaron limitaciones para generar las diferentes representaciones de una función y establecer la congruencia entre ellas, por lo que el autor recomienda emprender acciones tendentes a fortalecer los referidos conocimientos.

Igualmente resalta el trabajo desarrollado por Escudero (2015), intitulado “Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria”, Trabajo Doctoral presentado ante la Universidad de Huelva. La autora se planteó como propósito caracterizar y comprender el conocimiento didáctico del contenido, posicionándose para ello en el paradigma interpretativo además de apoyarse en un enfoque ontológico relativista. Durante su labor investigativa la autora empleó una fusión de la metodología Top- down y Bottom-up, permitiéndole generar aportes teóricos sobre el objeto de estudio.

Entre las conclusiones destaca la distinción que la autora determina entre el conocimiento vinculado de manera directa con las teorías formales y la consolidación de teorías personales concernientes a la aprehensión de los diversos tópicos matemáticos. Tal bifurcación obedece a la no correspondencia entre la manera como el docente concibe y emplea los constructos teóricos formales y las definiciones establecidas por la correspondiente teoría, esta situación deriva de los inconvenientes para convertir los constructos en planteamientos prácticos por lo que el docente recurre a adaptaciones que determinan el surgimiento de sus teorías personales. Este conjunto de estudios vinculados con la valoración de los conocimientos didácticos del docente muestra relación directa con

el propósito de la investigación a emprender, ofreciendo perspectivas metodológicas que orientan la labor investigativa y amplía el abanico de posibilidades de análisis del objeto de estudio seleccionado.

En el ámbito nacional es notable la investigación realizada por Arrieche y Meléndez (2016), quienes llevaron a cabo un estudio denominado “Errores, Dificultades y Conflictos Semióticos presentes en la Enseñanza de las Derivadas” para caracterizar los significados personales de la derivada revelados por estudiantes de Ingeniería, partiendo del análisis de los errores en los cuales incurren, las dificultades y conflictos semióticos que evidencian los estudiantes en la práctica matemática vinculada a esa noción. La referida investigación se sustentó en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática, siguiendo una orientación metodológica de naturaleza mixta.

La población sobre la que se formuló el estudio la constituyó el conjunto de los estudiantes del Segundo Semestre de Ingeniería Agronómica de la Universidad Nacional Experimental Rómulo Gallegos, por su parte la muestra estuvo conformada por 60 estudiantes a los que se les aplicó la prueba de conocimientos. La consideración del Enfoque Cuantitativo condujo al investigador a determinar la cantidad de respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas y los tipos de errores puestos de manifiesto por los estudiantes. En lo que concierne a los errores, estos fueron caracterizados como de tipo conceptual, de operaciones básicas, de aplicación de fórmulas, de procedimiento, así como de simbología y nomenclatura.

Por su parte, el empleo del Enfoque Cualitativo determinó la implementación de la técnica del análisis semiótico a las pruebas desarrolladas por dos estudiantes. Adicionalmente, a partir de la aplicación del análisis semiótico se determinaron los conflictos semióticos potenciales en la interpretación de los enunciados y expresiones algebraicas, así como los que efectivamente ocurrieron durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, caracterizando la tipología de los errores y su influencia en la calidad de las respuestas.

Los potenciales conflictos de significado están referidos a la no identificación de la operación requerida para efectuar la derivada o la interpretación desacertada de la fórmula, la errada identificación de las funciones, la inapropiada identificación del argumento, la

interpretación incorrecta de la regla de la cadena, la errónea relación del argumento con la función compuesta y su derivada, así como la incompreensión de la notación. En efecto, los resultados confirman la presencia de tales conflictos semióticos, apreciándose además la ausencia de prácticas validativas, las cuales se asumen como implícitas en los procedimientos.

Los autores concluyen que la identificación de los errores de tipo conceptual y de manejo de simbología permite establecer la sistematización de los conflictos semióticos y los obstáculos epistemológicos presentes en el estudio de la derivada, posibilitando la búsqueda de soluciones y brindando la posibilidad de desarrollar e implementar estrategias orientadas a la mejora de la práctica matemática asociada a temática mencionada. El abordaje metodológico del estudio descrito sirve de modelo para la presente investigación, puesto que se sustentan en la aplicación de los criterios del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática. De esta forma, la fase cualitativa brinda referentes importantes para realizar el correspondiente análisis semiótico que se pretende en el presente estudio.

Así mismo, vale presentar el trabajo realizado por Villamizar, (2023) Fundamentos Teóricos Para Un Aprendizaje Significativo De Las Matemáticas Desde La Resolución De Problemas En La Educación Básica Colombiana. Tesis Doctoral. Instituto Pedagógico Rural Gervasio Rubio – Universidad Pedagógica Experimental Libertador. La intención de la investigación se enmarco en establecer fundamentos teóricos para promover el aprendizaje significativo en lo que es la enseñanza de las matemáticas, lo cual permite crear las bases de los modelos de enseñanza centrados en lo que es la parte de las matemáticas; así mismo es conveniente señalar que se conjugan acciones y buenas practicas envueltas en aprendizaje significativos.

La metodología se enfocó en la investigación cualitativa a través del paradigma interpretativo con un enfoque cualitativo y el método de la teoría fundamenta; es oportuno señalar que se llego a resultados satisfactorios y se logró concluir que las matemáticas pueden mejorar su accionar pedagógico y rendimiento siempre que se utilicen estrategias y recursos que faciliten los aprendizajes; es significativo señalar que desde esa mirada se concibe un modelo de enseñanza enfocado en las tendencias de actualidad. La investigación se relaciona

con la presente; puesto que se establecen los componentes teóricos y prácticos para la enseñanza de las matemáticas.

Bajo la misma mirada es conveniente señalar que se presenta el trabajo realizado por Rico, (2023) *Didáctica De La Matemática En La Formación Del Pensamiento Creativo De Los Estudiantes De Educación Básica Secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad Pedagógica Experimental Libertador Instituto Pedagógico Rural Gervasio Rubio. La investigación se centró en develar los principios didácticos sobre la enseñanza de las matemáticas y a ello se une lo correspondiente al pensamiento creativo que va en función de lo que es una didáctica que ayuda a promover los hechos pedagógicos. La investigación empleó una metodología enmarcada en el paradigma interpretativo enfocado en lo cualitativo a través del método fenomenológico.

Desde ese apartado es preciso señalar que la investigación se concibe como un soporte teórico que ayuda a la presente investigación teniendo en cuenta un cumulo de elementos teóricos que ayudan a Generar constructos teóricos sobre los conocimientos didácticos matemáticos de los docentes de la Institución Educativa Colegio San Antonio en torno al manejo de los registros semióticos en la enseñanza de las inecuaciones. De tal manera, se logra conjugar acciones y prácticas que van en relación a lo que son las bases de la investigación que se viene presentando, es evidente que los trabajos descritos convergen en acciones y actividades que definen el camino metodológico que envuelve lo concerniente a lo que son los fundamentos teóricos que reflejan el camino ideal de cada uno de los componentes centrados en la realidad existente.

### **Fundamentación Teórica**

Conviene destacar lo planteado por Martínez (2009), respecto a que las bases teóricas representan “el conjunto de definiciones y aportes documentales que permite darle consistencia a cada uno de los enfoques para explicar la situación referida dentro del marco conceptual del estudio” (p. 45), por tanto, estas definiciones y aportes permiten el desarrollo sustentado del estudio. Teniendo en cuenta lo concerniente a lo que es las bases de la presente investigación teniendo presente que desde esa mirada se logran concretar acciones en función

a los elementos teóricos que se deben ser complementados con lo que es las bases de la presente investigación.

En este sentido, puede recordarse lo expuesto por Bavaresco (2013), respecto al marco referencial, la referida autora plantea que dicho marco “brinda a la investigación un sistema coordinado y coherente de conceptos y proposiciones que permiten abordar el problema dentro de un ámbito donde este cobre sentido” (p. 42), por ello su configuración debe partir de la cuidadosa elección de los elementos conceptuales que se asocian de manera directa con la temática y que constituye el cimiento teórico sobre el cual se emprendió el estudio. Considerando los intereses específicos de la investigación, se consideran los aspectos teóricos concernientes a las dificultades vinculadas con la práctica matemática vinculada al tema de inecuaciones, los fundamentos del Enfoque Ontosemiótico y los postulados teóricos del Modelo de Conocimiento Didáctico Matemático.

### **Problemas y desafíos en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones e inecuaciones: El llamado a su revisión permanente**

Aun cuando las ecuaciones e inecuaciones pueden ser considerados tópicos sencillos para abordar, su aprendizaje denota la presencia de obstáculos que merecen la atención de los investigadores, pues como lo señalan Campos y Rodríguez (2020), en general, se ha determinado “la falta de comprensión de algunos objetos matemáticos que se consideran básicos y base para la construcción de otros de mayor complejidad” (p.542), entre tales objetos destacan las ecuaciones e inecuaciones.

Cabe destacar que las apreciaciones sobre las dificultades que se suscitan al abordar estos temas se han mantenido presentes durante las últimas décadas. Puede señalarse a manera de ejemplo el planteamiento de Garrote et al. (2004) quienes resaltan el carácter substancial del problema dado por la ausencia de significado al momento de emprender el trabajo con inecuaciones, enfatizando además que entre los aspectos preocupantes se encuentra la reducción de su enseñanza a las técnicas algebraicas inherentes a la resolución. Sostienen los referidos autores que tal ausencia se evidencia en “las dificultades de interpretación puesto que aun cuando resuelven la inecuación no son capaces de sacar conclusiones” (p.6).

*Figura 1. Desafíos en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones e inecuaciones*



Nota: Elaboración Propia.

En concordancia con lo anterior se muestra la postura de Gatica y Maz (2012), quienes determinaron en sus estudios que los alumnos a partir de la aplicación de procedimientos y reglas establecidas de manera previa alcanzan a resolver inecuaciones, sin embargo, no logran vincular aspectos conceptuales, razón por la cual concluyen que el conocimiento asociado a tal objeto matemático es “principalmente de carácter procedimental” (p.2).

En un esfuerzo por establecer las razones que han relegado a un segundo plano los procesos interpretativos al abordar el tema de las inecuaciones Borello y Lezama (2011) sostienen que “la fuerza que el discurso escolar ha conferido a la ecuación, le ha permitido alcanzar una grande relevancia, lo que ha propiciado que la inecuación viviera a su sombra” (p.924). A partir de ese hecho el estudio de las inecuaciones ha empezado a acumular dificultades que tienen su máximo punto de expresión en la ausencia de significado que tal

noción presenta entre los sujetos que inician su abordaje; sobre este último punto Vrancken *et al.* (2010) señalan que la raíz de la referida carencia de significado se encuentra en el hecho de que su enseñanza es generalmente reducida al desarrollo de determinados métodos de resolución, sin abordar aspectos relativos a la interpretación o al cambio de registros.

Esa perspectiva sobre la génesis de las dificultades en el estudio de las inecuaciones coincide con la posición de Arévalo y Rojas (2015), estos autores indican que el privilegio que se le otorga al tratamiento algebraico “genera que las inecuaciones carezcan de sentido” (p.254). Esta ausencia de sentido es atribuida por Borello y Lezama (2011) a la inobservancia del papel de los objetos matemáticos igualdad y desigualdad, situación en la que subyace un deficiente manejo de los aspectos simbólicos. Al respecto, destaca el siguiente aporte de los referidos autores:

Muy frecuentemente, la inecuación se maneja como una técnica operacional que se manipula como aquel objeto formalmente parecido que es la ecuación. A este propósito resulta interesante observar cómo todo esto demuestre la falta de una reflexión seria acerca del papel que juegan los objetos matemáticos igualdad y desigualdad, lo que se deriva de la ausencia de prácticas que puedan otorgarles un sentido a dichos objetos. (p.926)

Aludiendo al carácter álgido de la ausencia de significado del objeto matemático inecuación, Vrancken *et al.* (2010) exponen lo siguiente:

Consideramos la ausencia de significado como el gran problema que se plantea en el trabajo con inecuaciones. Al reducir su enseñanza al desarrollo de determinados métodos de resolución se dejan de lado elementos que pueden ayudar a otorgar un sentido más amplio al objeto. (p.65)

En esta misma línea Borello (2010) expresa que la desvinculación de los tópicos de inecuaciones y desigualdades contribuye a la ausencia de significado, así como a la operación inapropiada de las inecuaciones como una ecuación. En adición a estas dificultades descritas, los procesos argumentativos pueden ser obviados durante el proceso de enseñanza o, en aquellas situaciones en que son considerados, pueden presentar debilidades originadas por contradicciones en el manejo simbólico, semántico o conceptual. En referencia a este aspecto Arévalo y Rojas (2015) sostienen que “para la resolución de inecuaciones lineales los estudiantes solo realizan procedimientos algebraicos, presentando deficiencias para

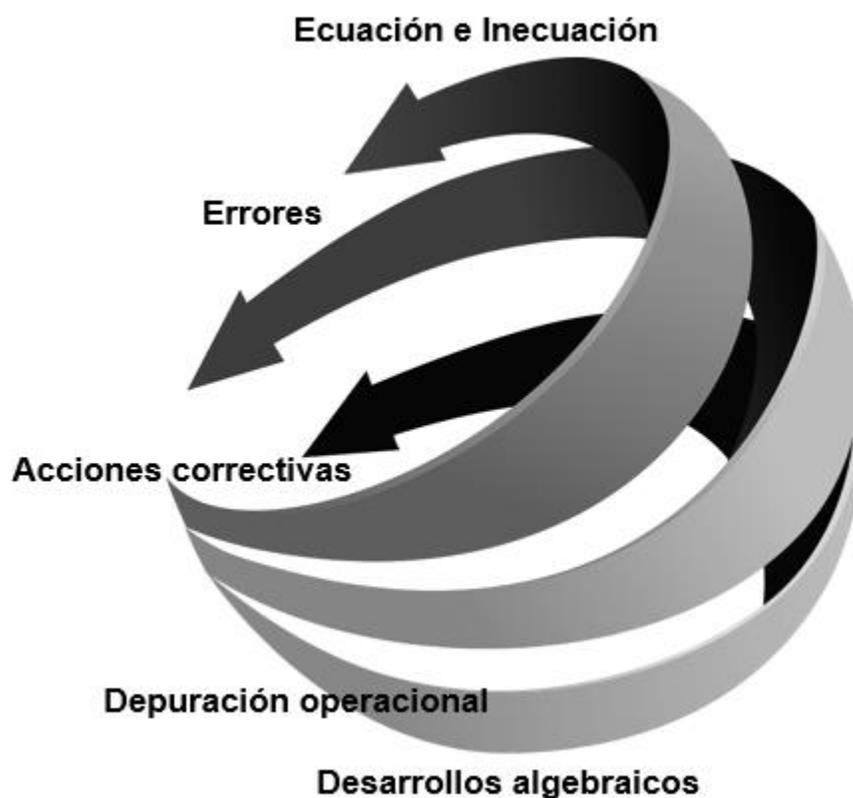
interpretar las soluciones obtenidas, lo cual permite inferir obstáculos referentes a la argumentación teórica” (p.257).

Al considerar el conjunto de aspectos que comprenden el estudio de los temas de ecuaciones e inecuaciones, que abarcan desde el manejo simbólico hasta el apropiado manejo de las relaciones conceptuales, Narváez *et al.* (2012) consideran que se debería examinar la metodología de enseñanza de dichos temas, fomentando el empleo de diversos registros de representación, resaltando las propiedades, determinando las equivalencias entre registros y promoviendo la reflexión.

Cabe destacar que desde la perspectiva de los precitados autores este proceso reflexivo conduce a la confirmación de resultados, el cual es un aspecto esencial que conviene fomentar en las prácticas matemáticas. Al respecto señalan que “la discusión y verificación de resultados adquiere relevancia utilizando la formalización en el lenguaje de expresión del conjunto solución de las inecuaciones” (p.125); de esta manera se ubica en un plano preeminente el adecuado manejo lingüístico por parte del estudiante y su correspondiente análisis para determinar el grado de aprehensión conceptual de los objetos matemáticos ecuación e inecuación.

Por otra parte, Narváez *et al.* (2014) plantean que es fundamental aprovechar el hecho de que “el estudio de inecuaciones implica varias nociones que deben encadenarse coherentemente” (p.815), pues se puede afianzar el sustento teórico y la aplicación de propiedades, rebasando el manejo estrictamente operacional. Además, la posibilidad que brindan las inecuaciones de efectuar cambios entre registros de representación semiótica puede ser una oportunidad para el docente para prever la aparición de obstáculos y establecer los mecanismos más expeditos para su superación. En estrecha relación con los obstáculos señalados en torno al estudio de los objetos matemáticos ecuación e inecuación se encuentran los errores que se aprecian en los desarrollos algebraicos por parte de los estudiantes, cuya detección es primordial para determinar las acciones correctivas que posibiliten la depuración operacional respectiva.

*Figura 2. Errores y Acciones Correctivas*



Nota: Elaboración Propia.

Elementos referenciales de interés para comprender este concepto son los aportes de Matz (1980) y Socas (1997); el primero de ellos plantea que los errores son esquemas cognitivos improcedentes que afectan una situación en la que se procura alcanzar el aprendizaje; puntualiza que son intentos infructuosos de adecuar un conocimiento previamente obtenido a una situación novedosa. Por su parte, Socas (1997) señala que un error es un “esquema cognitivo inadecuado y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento o un despiste” (p. 125).

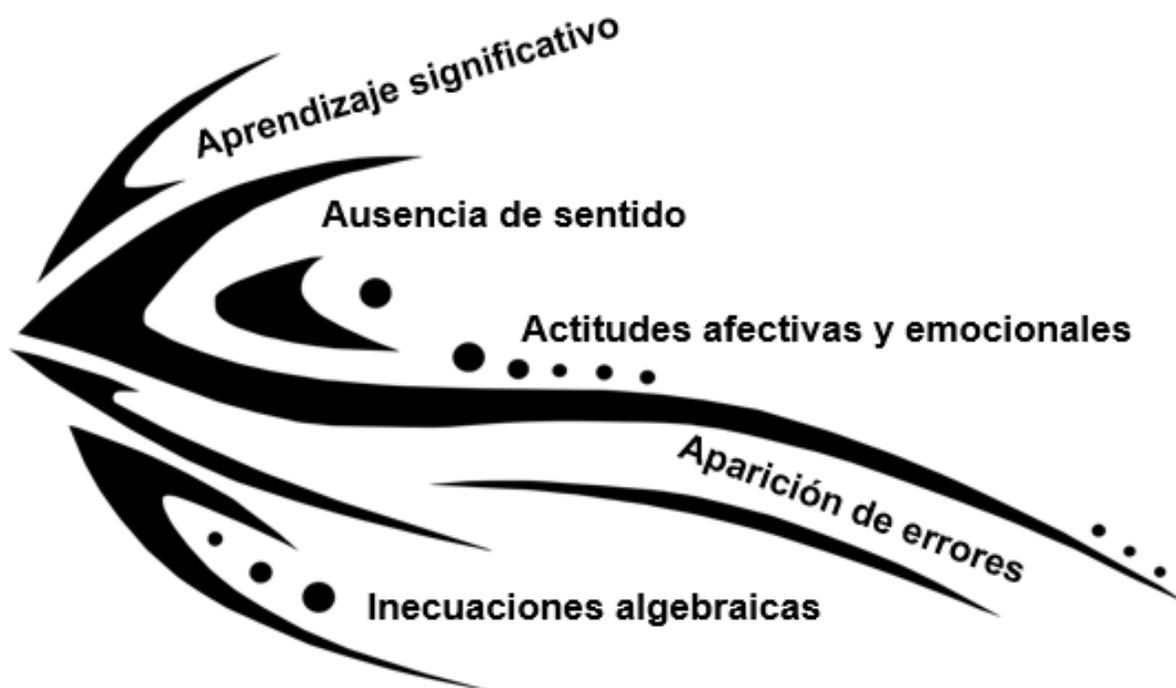
La presencia de errores, de acuerdo a lo señalado por Rico (1995), es una contingencia constante en la búsqueda de aprehensión del conocimiento, pueden presentarse inclusive en la fase de consolidación del conocimiento; la superación de los errores supone entonces una reestructuración del conocimiento para alcanzar la acomodación de las estructuras cognitivas correctas y el equilibrio cognitivo.

Cabe acotar que las fuentes que originan los errores son diversas, Rodríguez (2011) señala que “uno de los focos de los errores son las dificultades” (p.14), estas últimas tienen un carácter connatural dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje, pues constituyen parte intrínseca del proceso de construcción del conocimiento matemático y por tal razón no pueden evitarse (Palarea, 1998); siendo la reflexión sobre ellas un aspecto inexcusable si se desea conducir de manera óptima los procesos didácticos en el área de la matemática.

Por otra parte, Socas (1997) brinda una clasificación que establece un marco de referencia para comprender el origen del error. El referido autor señala tres ejes, no disjuntos, en relación con el origen de los mismos: a) Obstáculo, b) Ausencia de sentido; y c) Actitudes afectivas y emocionales. Se ubican en la primera dirección, como ejemplo, la yuxtaposición de símbolos en el lenguaje algebraico, así como los obstáculos de naturaleza epistemológica, didáctica y cognitiva. Mientras que en el segundo se ubica la generalización de las propiedades, el empleo incorrecto de reglas de procedimiento y los errores derivados del incoherente empleo del lenguaje algebraico y simbólico. En lo concerniente a los errores derivados de factores emocionales, estos se vinculan con la escasa disposición emocional y actitudinal hacia el área de las matemáticas, estos son denominados casuales o de descuido y “van desde una excesiva confianza en la tarea matemática hasta un bloqueo que le incapacita para la citada tarea” (Socas, 1997, p.152).

Al centrar nuevamente la mirada en el estudio de las ecuaciones e inecuaciones vale destacar el reconocimiento de la presencia de errores al abordar dichos tópicos. Sobre este particular, Vrancken et al. (2010) sostienen que “los alumnos presentan muchos problemas en la interpretación y resolución de inecuaciones algebraicas, los que provocan la aparición de errores. Una de las razones de los problemas para lograr un aprendizaje significativo es la dificultad intrínseca de estos temas” (p.57).

*Figura 3. Problemas y aprendizaje significativo*



Nota: Elaboración Propia.

Haciendo alusión a otra fuente de errores al estudiar los temas referidos Barbosa (2006) indica como posible causa la “falta de flexibilidad de los alumnos en la aplicación de las reglas algebraicas y lógicas” (p.152). Sin embargo, no puede negarse que el carácter abstracto del concepto y el manejo simbólico que involucra agrega dificultad al tema, muy particularmente cuando se tratan de establecer conversiones entre registros. Al respecto, Narváez et al. (2011) destacan los conflictos detectados “en el pasaje del lenguaje semántico al sintáctico” (p.590), así como las dificultades para establecer las relaciones y equivalencias entre los diferentes registros semióticos y “las dificultades presentes para trascender los modos de pensamiento numérico y algebraico” (p.592).

En estrecha vinculación con estas últimas dificultades se encuentran los tropiezos por parte del estudiante para expresar argumentaciones sólidas sobre los procedimientos realizados o la certeza de los resultados alcanzados. Sobre este punto, son interesantes las evidencias expuestas por Barbosa (2006) en su estudio, las cuales se indican seguidamente:

Las entrevistas generaron sorpresas: los estudiantes se sorprendieron al pedírseles que explicasen sus resoluciones. Esto los dejó ansiosos. Yo también me sorprendí con sus dificultades en describirlas. Algunos, después del inicio, cambiaban de opinión sobre sus resoluciones. Otros se sentían inmovilizados frente a la necesidad de tener que explicar. (p.154)

En adición a los traspies que suelen apreciarse al momento de formular las correspondientes argumentaciones también diversos investigadores han manifestado su preocupación por la ausencia de herramientas que viabilicen la verificación de resultados y la imposibilidad de confirmar los resultados contrastando los registros gráfico y simbólico. En relación directa con este aspecto se encuentra la posición de Campos y Rodríguez, quienes señalan lo siguiente:

También resaltamos como importante la falta de reconocimiento del conjunto solución de las inecuaciones. El hecho de operar simbólicamente y no responder, no advertir contradicciones o recuadrar un resultado parcial son muestras de que los estudiantes no responden en relación con la pregunta que la actividad plantea, dejando de manifiesto que no se ha alcanzado la comprensión pretendida. Esta ausencia de coordinación entre los diferentes registros genera un obstáculo para el aprendizaje, en este caso particular, de las inecuaciones. (p.567)

En atención a lo antes expuesto es conveniente establecer la necesidad de analizar los diversos aspectos que subyacen en el abordaje de estos tópicos básicos en la formación matemática, entre tales aspectos se encuentran la comprensión por parte del estudiante del simbolismo algebraico, la detección de las disparidades en el significado de los correspondientes objetos matemáticos, así como el reconocimiento de las dificultades y errores que afectan la transparente aprehensión conceptual, Elementos a los cuales se adiciona la necesidad de valorar las habilidades pedagógicas y el componente didáctico en el cual el docente sustenta su labor y la exigencia de “crear estrategias fundamentadas en la pluralidad de sistemas semióticos y la consecuente coordinación de estos por parte del sujeto, para consolidar una aprehensión conceptual transparente y efectiva” (Torres, 2016, p. 22). Este escenario deja abierto un abanico de posibilidades de análisis y reflexiones, entre los cuales cobra fuerza para los propósitos de este estudio la revisión del conocimiento didáctico matemático asociado a los registros semióticos al abordar el tema de inecuaciones.

## **Fundamentos teóricos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática.**

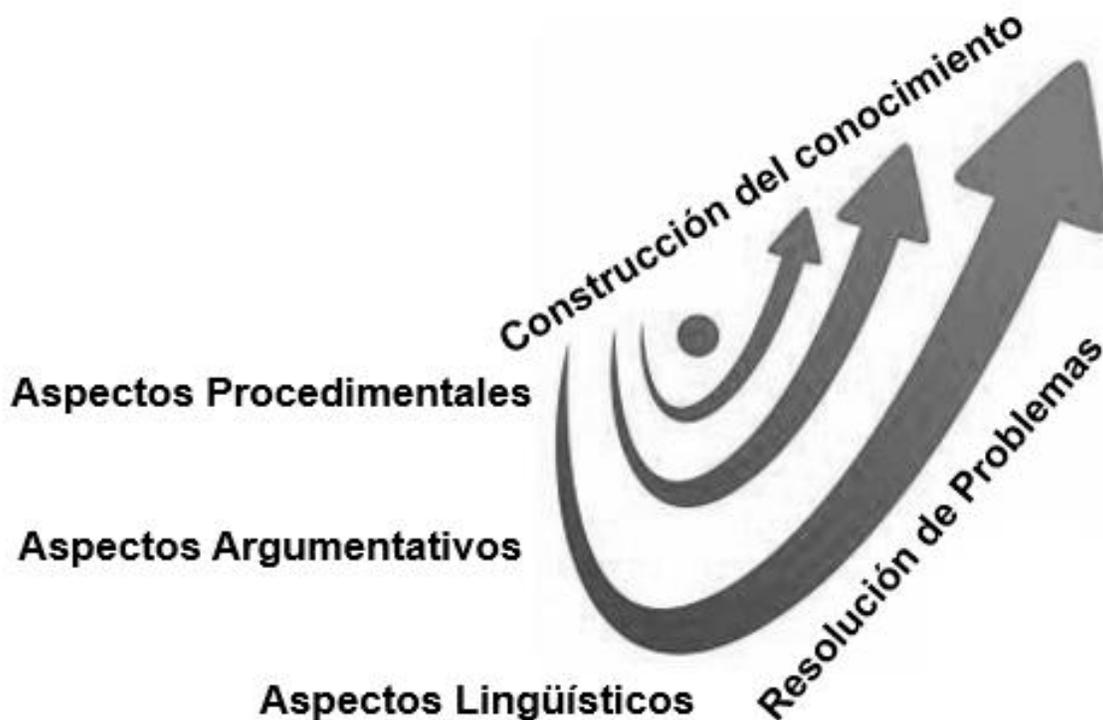
Dado que el referente teórico fundamental del estudio a desarrollar es el Enfoque Ontosemiótico (EOS), es conveniente explicar los elementos esenciales que definen esa postura sobre la cognición matemática; postura que integra fundamentos y métodos de diversas teorías, los cuales fueron clarificados y comparados hasta llegar a su correspondiente articulación. Justamente, Godino (2022) su creador resalta la necesidad de “comparar, coordinar e integrar dichas teorías en un marco que incluyera de manera coherente las herramientas necesarias y suficientes para abordar el estudio de los problemas de investigación que plantea la educación matemática” (p.3).

El proceso de revisión exhaustiva de las teorías previas y su correspondiente articulación contempló diversas etapas, cuyo desarrollo permitió avanzar en la constitución del EOS como una potente herramienta de análisis didáctico. Así, por ejemplo, Godino (2022) establece que:

Un problema importante fue la clarificación de la noción de significado de un objeto matemático, su relación con otras nociones, como concepto y concepción, así como su relación con la noción de comprensión. La distinción entre los aspectos personales y los institucionales para la noción de significado se consideró esencial para articular las aproximaciones epistemológicas y cognitivas en educación matemática. (p.4)

Cabe acotar que de manera concreta el EOS enmarca su consolidación teórica en torno al eje central establecido por dos constructos: objetos matemáticos y sistemas de prácticas. En primera instancia propuso “como noción básica para el análisis epistémico y cognitivo (dimensiones institucional y personal del conocimiento matemático) los sistemas de prácticas manifestadas por un sujeto (o compartidas en el seno de una institución) ante una clase de situaciones-problemas” (Godino, 2022, p.4), determinando esto el valor preeminente asignado a la actividad personal en la construcción del conocimiento. A lo que se adiciona el llamado a considerar en el proceso de análisis didáctico los aspectos lingüísticos, procedimentales y argumentativos, por constituir aristas esenciales y definitorias de las manifestaciones del sujeto en la práctica matemática.

*Figura 4. Práctica Matemáticas*



Nota: Elaboración Propia.

Procurando ofrecer una visión general sobre el camino seguido en su génesis teórica Torres (2017) sintetiza el recorrido de este modelo para la valoración de la cognición matemática:

La configuración de los supuestos teóricos del EOS partió de la preocupación por el significado de los términos y conceptos matemáticos, para dirigirse luego a la indagación sobre la naturaleza de los objetos matemáticos y avanzar posteriormente hacia la reflexión ontológica y epistemológica sobre la génesis del conocimiento humano, desde la dimensión personal y cultural en la que este último se da. (p. 48)

Atendiendo al amplio espectro de aspectos que integró a su configuración teórica, el EOS se muestra como una óptica que brinda un panorama holístico de la realidad vivenciada en el espacio del aula. Corroborando lo anterior, Godino (2022) concibe el EOS “como un sistema teórico modular, abierto e inclusivo que trata de proporcionar principios y herramientas metodológicas para abordar los problemas epistemológicos, ontológicos,

cognitivos, instruccionales y ecológicos inherentes a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas” (p.2).

De allí la potencia del mismo como herramienta de análisis didáctico, pues en el estudio de la práctica matemática permite la confluencia de diversos factores considerando el carácter multidimensional del acto didáctico, al tiempo que se nutre de las perspectivas de diversas teorías. Este lazo que vincula diferentes posiciones teóricas responde al llamado de Ruthven (2014), quien sugiere:

Adoptar un punto de vista modular, tanto con respecto a la descomposición de las teorías en componentes de herramientas analíticas y con respecto a la composición de herramientas provenientes de diferentes teorías; mediante la posibilidad de que una teoría tome prestadas herramientas de otra o de la improvisación de nuevos marcos que combinen herramientas de varias teorías fuente para abordar un nuevo tipo de cuestión o un tipo antiguo de cuestiones de una nueva manera. (p. 278)

Esto ha hecho que en la evolución teórica del EOS se contemplen nuevos aspectos como el análisis de la dimensión normativa, la sistematización de los criterios de idoneidad didáctica y la construcción de un modelo de conocimientos y competencias del docente de matemáticas sustentado en las herramientas del EOS.

Para alcanzar ese nivel de profundidad en el análisis didáctico el EOS se apoya esencialmente en dos constructos, en primer término, los sistemas de prácticas y, en segundo lugar, la configuración de objetos y procesos, los cuales constituyen “herramientas que ayudan a comprender la naturaleza compleja de los conceptos matemáticos y a explicar las dificultades de aprendizaje de los mismos” (Godino *et al.*, 2010, p.6). Adicionalmente, ocupa un lugar privilegiado en tales procesos de análisis el significado del objeto; al respecto Godino (2022) acentúa que se hace imperioso “reconstruir un *significado global* u holístico del objeto matemático mediante la exploración sistemática de los contextos de uso del objeto y los sistemas de prácticas que se ponen en juego para su solución (p.9). Agrega el referido autor que dicho significado holístico sustenta el análisis ontosemiótico de la cognición, siendo este último:

Un método para delimitar los diversos significados de los objetos matemáticos, y, por tanto, para la reconstrucción de los modelos de referencia epistemológica y cognitiva

es el análisis de los sistemas de prácticas (personales e institucionales) y de las configuraciones ontosemióticas implicadas en los mismos. (p.9)

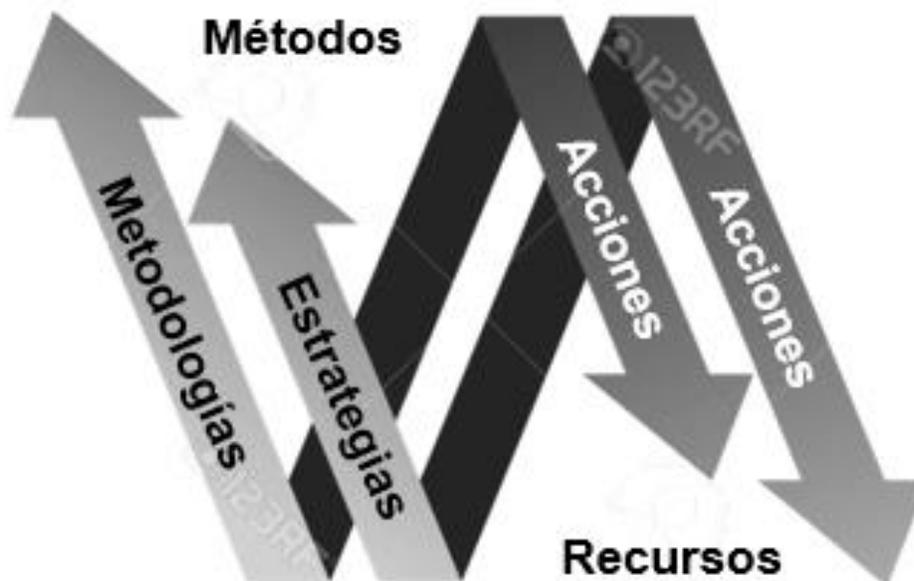
Conviene entonces retomar la atención sobre los constructos cuyos lazos determinan el tejido conceptual que da soporte al EOS. Así, en primer término, se considera la conceptualización ofrecida a la práctica matemática por Godino y Batanero (1994), los precitados autores señalan que la práctica matemática “es entendida como toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por una persona (o compartidas en el seno de una institución) para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas” (p. 334). Brindando una perspectiva más amplia Godino, Font, Wilhelmi, y Lurduy (2010b) plantean que:

La práctica es, por tanto, interpretada en términos de acción reflexiva, situada, intencional y mediada por recursos lingüísticos y materiales. Los sistemas de prácticas se proponen como respuesta a la cuestión semiótica, ¿qué significa el objeto O?, o la cuestión ontológica, ¿qué es el objeto matemático O? (p. 2)

Se infiere entonces que la práctica matemática constituye un proceso de edificación y consolidación de significados de los objetos matemáticos a partir de la implementación de dos ejes esenciales, de orden operativo y discursivo. De esta forma, la mediación simbólica y los elementos lingüísticos soportan la construcción del significado, constituyendo esta triada un compendio de elementos determinantes en el proceso de aprendizaje que se suscita en la práctica matemática.

Desde la perspectiva pragmática que caracteriza al EOS, en la práctica matemática converge un compendio de elementos que se entrelazan y determinan el carácter emergente de los objetos matemáticos. En correspondencia con lo indicado, Torres (2017) sostiene que “la dinámica que surge en estos sistemas de prácticas deja de lado las categorías opuestas de sujeto y objeto, dándole un lugar privilegiado a la categoría de la acción” (p. 50). Cabe acotar que el EOS le asigna al objeto matemático un estatus derivado, mientras que a la práctica le otorga un lugar preeminente, característica en la que diverge de otras teorías.

*Figura 5. Práctica Matemática*



Nota: Elaboración propia.

Aun cuando para realizar un primer acercamiento conceptual al objeto matemático puede considerarse la definición aportada por Godino et al. (2005), quienes establecen que “un objeto matemático es cualquier entidad o cosa a la que nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo, que interviene de algún modo en la actividad matemática” (p. 14); desde la perspectiva del EOS se plantea una clasificación adicional, diferenciándose entre objeto personal y objeto institucional. Para comprender esta distinción sirve de apoyo el planteamiento de Ramos (2006), quien expone que los objetos matemáticos pueden ser concebidos como “entes que emergen progresivamente de sistemas de prácticas socialmente compartidas en una institución, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos” (p.25), de allí nace su carácter institucional.

*Figura 6: Resolución de Problemas Matemáticos*



Nota: Elaboración Propia

Por otro lado, en lo concerniente a los objetos matemáticos personales Godino y Batanero (1994) sostienen que los mismos son “emergentes del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas” (p. 335). Acentúan los precitados que estos objetos personales van aflorando de las propias prácticas matemáticas y se van moldeando a partir de las connotaciones singulares que le otorga el individuo que aprende.

Afinando un poco más las posibles manifestaciones que se develan en los objetos personales Godino (2003) formula una clasificación de estos significados en los siguientes términos:

- Global: comprende la totalidad del sistema de prácticas personales que potencialmente puede expresar el sujeto referente a un objeto matemático.
- Declarado: alude a las prácticas evidenciadas en el desarrollo de las evaluaciones planteadas.
- Logrado: referido a las prácticas exteriorizadas que se encuentran contestes con el modelo institucional instituido. Aprender los cambios que se suscitan en los significados

personales, contrastando los que se evidencian en el estado inicial y los que finalmente alcanzan en el desarrollo de la práctica matemática, es un elemento esencial del análisis de su progresión.

Como es de esperar, para el establecimiento de un aprendizaje diáfano respecto a un objeto personal se precisa de un equilibrio y acercamiento máximo entre el significado del objeto personal y el objeto institucional, entendiendo que cualquier desajuste desembocará en un conflicto que perturbará la correspondiente aprehensión conceptual. Para alcanzar el nivel deseable de ajuste entre los significados personales e institucionales el docente se encuentra ante la exigencia de detectar las disparidades y dirigir sus esfuerzos hacia el acoplamiento de dichos significados. Esto hace que, en los términos de Torres (2017), “como protagonistas de los sistemas de prácticas, operativas y discursivas, que se desarrollan con el propósito de alcanzar la apropiación del significado del objeto matemático, los docentes y estudiantes pasan por un estado de negociación consensuada” (p. 50).

En esta búsqueda de consenso es primordial considerar las manifestaciones explícitas de las prácticas discursivas de los estudiantes, profundizar en el análisis de sus elementos argumentativos y examinar los comportamientos del estudiante en medio de los influjos dados por la intersubjetividad que surge en el aula. En medio de este pragmatismo el análisis didáctico propuesto desde el EOS implica focalizar la atención en las diferentes representaciones expresadas por el estudiante, las cuales pueden encontrarse matizadas por sus dudas, convicciones y concepciones, así como por los aportes que nacen de las interacciones en el aula.

Hay que agregar además que ese conjunto de elementos que se conjugan en la práctica matemática, según lo establecen Godino et al. (2006), determinan la presencia de diversas dimensiones interrelacionadas: “epistémica (significados institucionales), docente (funciones del profesor), discente (funciones de los alumnos), mediacional (recursos materiales), cognitiva (significados personales), emocional (sentimientos y afectos)” (p.5). La valoración de la primera dimensión mencionada comprende el examen de seis tipos de entidades primarias u objetos intervinientes, las cuales Godino (2002) etiqueta como fundamentales para describir la actividad matemática. Tales entidades se indican seguidamente:

1. Lenguaje: Comprende las expresiones de carácter verbal, simbólico, gráfico, algebraico o notacional que forman parte de los procesos de comunicación.
2. Situaciones-problema: Corresponden a las actividades de cuyo tratamiento emergen los objetos matemáticos.
3. Concepto: Alude a la definición del objeto matemático.
4. Proposición: Hace referencia a una propiedad o atributo de un objeto.
5. Procedimiento: Concreciones procedimentales que se describen explícitamente y sin ambigüedad en el abordaje de una situación-problema.
6. Argumento: Expresiones que justifican y explican procedimientos y proposiciones empleadas.

El reconocimiento de esas entidades u objetos primarios determina un nuevo constructo, la trayectoria epistémica, la cual corresponde a lo citado por Godino et al, (2006) quien establece que:

En unidades de análisis con el fin de caracterizar el tipo de actividad matemática que se implementa efectivamente. Esto requiere identificar los objetos matemáticos puestos en juego, las relaciones entre ellos, los modos de organización en que se agrupan y las relaciones ecológicas que se establecen entre los mismos. (p.5)

Ante ello, la validez de la revisión de esas entidades primarias es resaltada por Godino (2022) al señalar que “en los procesos comunicativos que tienen lugar en la educación matemática, no solo hay que interpretar las entidades conceptuales, sino también las situaciones problemáticas y los propios medios expresivos y argumentativos, los cuales desencadenan procesos interpretativos” (p.4). Las relaciones que se establecen entre las entidades primarias se asocian en un marco dinámico a la edificación y consolidación del significado del objeto matemático.

No obstante, consolidar apropiadamente el significado del objeto matemático puede resultar una tarea complicada y con presencia de distorsiones, hecho que da cabida a la

aparición de conflictos semióticos. Brindando claridad sobre este concepto, Godino et al. (2010) exponen que:

La noción de conflicto semiótico ha sido introducida en el EOS como una explicación de errores, dificultades y obstáculos de los estudiantes en el aprendizaje de determinados contenidos y, en general, de las dificultades que surgen en la comunicación en el aula. (p.9)

Precisa Godino (2002) que los conflictos semióticos deben ser entendidos como “la disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa” (p. 258). De allí que Godino *et al.* (2007) tipifiquen los conflictos semióticos en conflicto semiótico de tipo cognitivo, los cuales se presentan cuando la disparidad se evidencia en las prácticas desarrolladas por un mismo sujeto; conflicto semiótico de tipo interaccional, si la divergencia se origina entre las prácticas educativas y discursivas expuestas por sujetos diferentes que permanecen en interacción social; y conflicto semiótico de tipo epistémico si la discrepancia se presenta entre significados institucionales.

Cabe acotar que para los propósitos del presente estudio la atención se focalizará en los conflictos semióticos de tipo cognitivo e interaccional, los cuales se detectarán a partir del análisis epistémico de la práctica matemática vinculada con el tema de inecuaciones, proceso a partir del cual se alcanzará una aproximación explicativa de los errores y dificultades evidenciados por los estudiantes durante el estudio del referido tema, así como la manera como el docente aborda desde su componente didáctico esos tópicos. Desde esa mirada es conveniente tener presente un conjunto de acciones y prácticas envueltas en lo que es las bases de los constructos teóricos.

### **Precisiones respecto a la generación de constructos teóricos en la investigación.**

Como ya se ha indicado el presente estudio tiene como objetivo generar constructos teóricos sobre los conocimientos didácticos matemáticos de los docentes de la Institución Educativa Colegio San Antonio en torno al manejo de los registros semióticos en la enseñanza de las inecuaciones. De manera que es conveniente establecer las precisiones conceptuales respecto a la generación de constructos teóricos como fruto de la investigación.

Si bien un primer acercamiento al término constructo permite concebirlo como “un concepto, idea o representación mental de un hecho o de un objeto” (Arias, 2017, p. 42), una perspectiva más amplia permite entenderlo desde dos vertientes: como concepto o elemento integrante de una teoría (Hyman, 1994) o como una teoría o proposición teórica (Bunge, 2001). Cabe destacar que el constructo implica la fusión de conceptos más simples, por lo que presenta un mayor nivel de complejidad (Ary, Jacobs y Razavieh, 1989).

En el marco de la presente investigación los constructos generados se presentan como el fruto original que ofrece el investigador a partir del compendio de conceptos relacionados en torno al conocimiento didáctico matemático de los docentes vinculado a la enseñanza de inecuaciones sustentada en el manejo de registros semióticos. Esto permite establecer en principio que el investigador procura ofrecer aportes teóricos; sin embargo, no aspira generar una Teoría, entendida desde la óptica postpositivista como “un sistema de conceptos que se integran para propiciar la comprensión de los fenómenos sociales y su significado, mediante la interpretación de los hechos y de la información suministrada por los actores sociales” (Arias, 2018, p.8), pues esta implica una visión más abarcante y compleja. De igual manera, no se aspira brindar como producto una aproximación teórica, pues esta última se concibe como la versión preliminar de una teoría no acabada, envolviendo este proceso un nivel de análisis profundo y una visión más densa del fenómeno estudiado.

### **Bases Legales**

La fundamentación legal de la Educación Básica con énfasis en la enseñanza de la matemática conduce a un acercamiento a las normas y principios que se te contempla en los documentos que se detallan seguidamente:

Ley General de Educación de la República de Colombia, en cuyo Artículo 5 se establecen los fines de la educación, entre los cuales destaca “la apropiación de hábitos intelectuales adecuados para el desarrollo del saber”. De igual manera en el Artículo 80 se establece la necesidad de velar por la calidad de la educación, por lo que se debe asumir la evaluación de esta última. De hecho, las normas y procesamiento de la información vinculante con las normas conducen a tener presente que las normas son esenciales en el

proceso de enseñanza y más cuando se trata de la enseñanza de las matemáticas que buscan sintetizar acciones en busca de una pedagogía activa para la sociedad en general

Adicionalmente, la Ley 115 establece la libertad de investigación, razón por la cual soporta la intencionalidad del presente estudio que responde a un cumulo de elementos teóricos que indican lo que es que es preciso asumir lo que corresponde a los Derechos Básicos de Aprendizaje; donde se explica y se demuestra lo que es la forma de enseñar y constituir las bases de los constructos teóricos; lo cual conduce a dar una mirada a los estándares básicos de competencias que junto con el decreto 1075 de 2015 que hace énfasis en la promoción de las campañas que van en relación a la parte de las matemáticas.

Por su parte es conveniente tener presente que dentro de las bases teóricas se hace presente un cumulo de elementos jurídicos que envuelve lo que es el Decreto 1680 se orienta a favorecer la calidad de los procesos formativos de los educandos, propósito que subyace en el desarrollo de esta investigación. De tal manera; los fundamentos teóricos convergen en definir lo que es la base de los constructos teóricos considerando que se asume un conjunto de acciones centradas en lo que es los elementos enfocados en un cumulo de acciones relacionadas con lo que es la diversidad de aspectos enmarcados en la parte de la enseñanza de la matemática que se toman de manera genérica hasta alcanzar las especificaciones.

## CAPÍTULO III

### MARCO METODOLOGICO

#### Enfoque Epistemológico que Orienta la Investigación

La intención de caracterizar el conocimiento didáctico matemático manejado por los docentes de la Institución Educativa Colegio San Antonio requiere, como lo describe Damiani (1997), soportarse en una epistemología que sustente la explicación del fenómeno. La intención es lograr una densa comprensión de las experiencias generadas al interior del aula al abordar el tema de inecuaciones, a partir de la valoración de la experiencia del docente en función de sus conocimientos didácticos y la manera como hacen aprehensible el conocimiento impartido.

Dado el propósito del Trabajo Doctoral es preciso distinguir los dos momentos que se considerarán en el mismo. El primero de ellos correspondiente a la investigación propiamente dicha, cuyo alcance abarca hasta la obtención de hallazgos a partir de la metodología seleccionada. El segundo momento se manifiesta por medio del proceso de teorización generando conocimientos, esto es a lo que Damiani (1997), denomina hacer ciencia, esto último fundamentado en los lineamientos establecidos en el Modelo CDM y los sustentos teóricos del EOS, de manera que se pueda establecer, en los términos de Morales (2011), “un rendir cuentas acerca de la realidad observada” (p. 11).

De esta forma, el conocimiento a alcanzar tuvo su sustento epistemológico en la Fenomenología, concebida por Husserl (1949), como “ciencia alejada del pensar natural” (p. 7) y que, como tal, supone una contemplación profunda de los fenómenos para percibir la esencia de los mismos.

Cabe destacar que, el corpus de conocimiento que se generó en el estudio sobre el conocimiento didáctico- matemático puesto de manifiesto por los docentes tuvo su asiento epistemológico en la Fenomenología, siendo preciso recurrir al método fenomenológico

interpretativo para resignificar las experiencias de los informantes y develar los hallazgos pertinentes.

La implementación del método fenomenológico interpretativo ameritó de la aplicación acuciosa de una serie de pasos, que en conjunto permitieron concretar el propósito del estudio; todo ello sustentado en la interpretación del sentido asignado a la experiencia vivida por parte de los docentes participantes en el estudio. Los referidos pasos, descritos por Duque y Aristizábal (2019), se señalan a continuación: (a) Formulación de las preguntas de investigación, las cuales sugieren la exploración a profundidad sobre las vivencias de los docentes; (b) Establecer el diseño de la investigación, sustentado en la aplicación de las entrevistas y la realización posterior de la observación; (c) Recolección de los datos; (d) Establecer los criterios para garantizar la credibilidad del estudio; e) Efectuar el análisis de los datos; y (f) Construcción de la narración para expresar los hallazgos. La investigación se fundamentó en el enfoque cualitativo por la posibilidad que brinda de rescatar, según Rodríguez, Gil y García (1999):

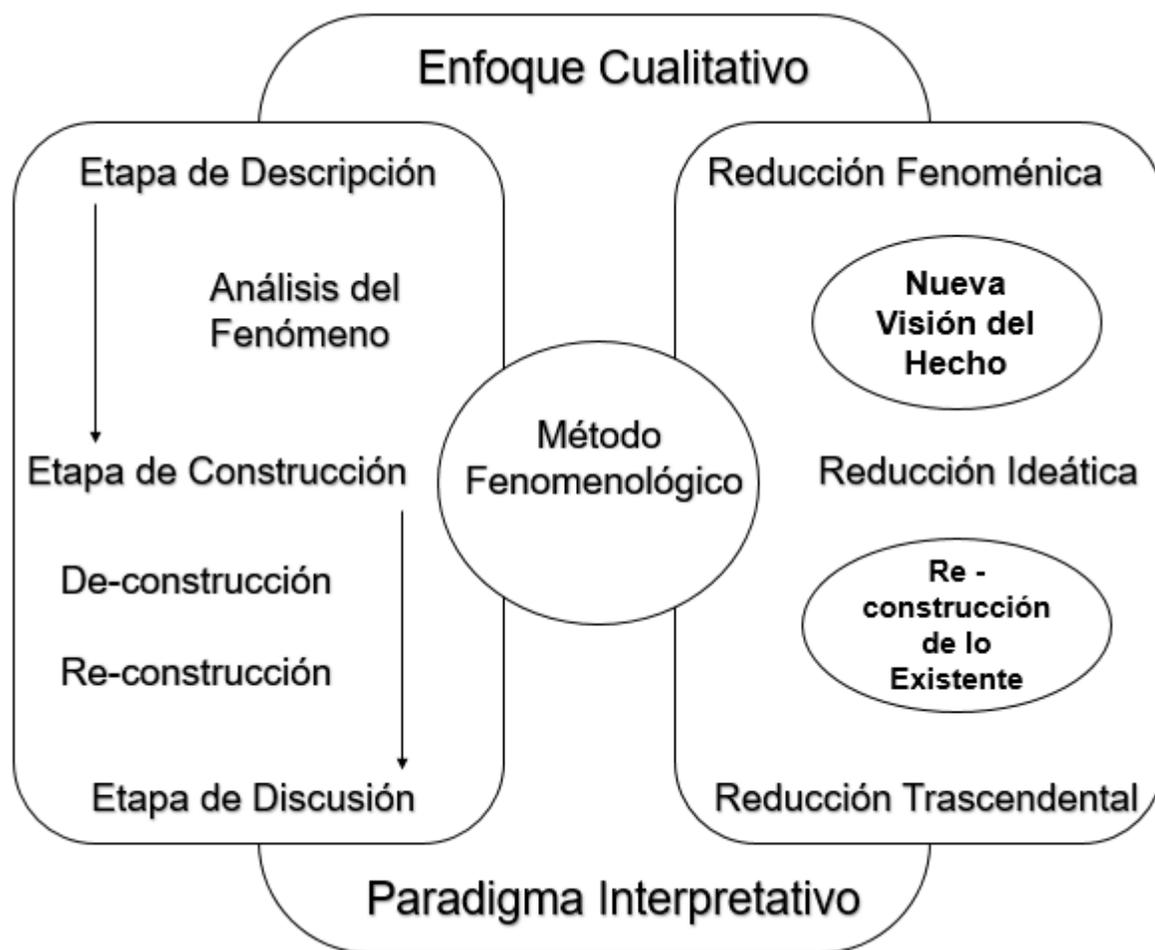
La importancia de los constructos de los participantes, o los significados que los sujetos de la investigación asignan a sus acciones, al contexto del estudio, a la relación entre el investigador y los que están siendo estudiados, los procedimientos y técnicas para la recogida de los datos (p.31).

En particular, para lograr describir las rutinas que se suscitan en la práctica matemática asociada a la enseñanza de las inecuaciones e interpretar los significados relacionados con los conocimientos didáctico matemáticos manejados se consideró pertinente seleccionar el enfoque cualitativo, pues “favorece las formas de relación entre sujetos y objeto de estudio, privilegiando la complejidad del comportamiento humano en los contextos de interacción cotidiana, con la intencionalidad de comprenderlo y estudiarlo en su riqueza y amplitud” (Morales y Bojacá, 2002, p. 120). Lo expresado rescata el carácter inductivo de la investigación cualitativa, donde a partir de los datos se construye teoría, examinando las vivencias de los sujetos en sus escenarios naturales a partir de una mirada holística, respetando los rasgos del contexto sociocultural en el que se ubican.

De acuerdo a mencionados aspectos es conveniente tener presente que el eje paradigmático de la investigación se enmarca en un conjunto de elementos enfocados en lo

que es la forma y manera de afianzar los conocimientos necesarios en función a lo que es la parte paradigmática; tal cual se evidencia en la Figura 7.

**Figura 7.** Eje Paradigmático de la Investigación



Nota: Elaboración propia.

### **Escenario de la Investigación e informantes claves**

El escenario viene dado por el espacio donde el investigador centra su atención para estudiar la problemática identificada y ubica personas que pueden aportar insumos para revelar las “estructuras significativas que dan razón de la conducta de los sujetos en estudio” (p.50). Goetz y LeCompte (1984). Atendiendo a lo anterior, el estudio se realizó en el Colegio San Antonio, el cual está ubicado en el Departamento Norte de Santander, siendo su Resolución de Aprobación la Nro. 006546 del 8 de noviembre de 2022. Identificado además

con el DANE 154874000024 y el NIT 807002632-1. Institución que atiende una matrícula general de 500 estudiantes.

En concordancia con lo expuesto por Goetz y LeCompte (1984), la selección de los informantes se correspondió con el cumplimiento de ciertos criterios establecidos por el investigador, los cuales se indican seguidamente: (a) dicten la asignatura matemáticas en el Colegio San Antonio, (b) cubran entre los contenidos a dictar el tópico de inecuaciones, (c) muestren disposición para participar en el estudio, d) denoten destrezas comunicativas y habilidad para socializar, (e) indiquen que presentan disponibilidad de tiempo y (f) expresen su intención de participar en el estudio.

Particularmente, en la institución educativa Colegio San Antonio se tienen cinco (5) docentes que dictan la asignatura matemática, todos ellos cumplen con los atributos indicados, razón por la serán considerados como los informantes claves.

Establecidos estos criterios se muestra seguidamente la caracterización y codificación de los informantes claves.

**Tabla 1.** Caracterización y codificación de los Informantes claves

<b>Informante</b>	<b>Códigos</b>	<b>CRITERIOS</b>
Docentes	DOC1	– Licenciada en matemáticas y estadística.
	DOC2	– Profesora en el área de Matemáticas secundaria
	DOC3	– Estudios de cuarto nivel.
	DOC4	– Experiencia en el área.

Nota: Elaboración propia

### **Técnicas e Instrumentos para la Recolección de la Información**

Para alcanzar los propósitos planteados en el estudio se seleccionaron como técnicas de recolección de información la entrevista en profundidad y la observación. La escogencia

de la entrevista se sustenta en las bondades asignadas a esta técnica por Vallés (1999), quien enfatiza su viabilidad para captar los significados de las experiencias, así como las concepciones y percepciones sobre el fenómeno que centra la atención del investigador. Para alcanzar los propósitos del estudio se precisa establecer unas categorías apriorísticas vinculadas con el conocimiento didáctico-matemático que orienten a la construcción y estructuración del instrumento de investigación de dicha técnica como lo es el guion de entrevista.

Para garantizar la validez instrumental, pues esta depende de factores subjetivos, emociones, concepciones e intereses de los informantes, Pourtois y Desmont (1992) plantean la validación del instrumento por expertos en el área, antes de ser aplicado. En efecto, en el estudio se recurrió a tres expertos (3) para que realizaran observaciones para la mejora del instrumento, luego, una vez obtenidas las valoraciones, se ajustó el instrumento en este caso el guion de entrevista a fin de garantizar la obtención del insumo para el desarrollo del estudio.

Por otra parte, se empleó la técnica de observación, en virtud de que esta permite al investigador la recolección de datos directamente del campo, sin generar interferencias en el desarrollo del fenómeno a estudiar, favoreciendo el acercamiento a lo que se está investigando. De acuerdo con lo expuesto por Bisquerra (2009), por medio de la observación no participante, el investigador tiene la oportunidad de acercarse al escenario de investigación en un rol pasivo, lo que le permite percibir la realidad del estudio con un prisma refinado, aunque sin afectar la realidad estudiada.

Evidentemente, tal y como lo expresa Barrantes (2001), “por eso, antes de iniciar el proceso, debe tenerse alguna idea, aunque sea imprecisa, de lo que va a observarse” (p.203). Al revisar lo sostenido por el autor, el investigador pretendió agudizar la observación sobre los aspectos que definen y distinguen el conocimiento didáctico matemático de los docentes, el empleo de los registros semióticos asociados al desarrollo del tema de inecuaciones y el manejo de los conflictos semióticos que afloran en el transcurso de la práctica matemática asociada al referido tema.

Con el propósito de registrar la información proveniente de la observación se empleó como instrumento un diario de campo, allí se reflejó la perspectiva del observador sobre la realidad estudiada, pues debe recordarse lo que ha señalado Bisquerra (2009), en relación con la intencionalidad de la observación al expresar que esta permite explicar una descripción de la experiencia apreciada “a partir de los significados que el mismo observador atribuye” (p. 335)

### **Procedimiento para el Análisis de la Información**

El análisis de la información implica un acercamiento reflexivo que parte, como lo plantea Trujillo (2013), de una percepción “indirecta, subjetiva y parcial, pues no es posible comprobar o comprender la experiencia del otro tal y como la ha vivido” (p.45). De esta forma, el proceso de reflexión implicado en el análisis procuró captar la esencia del fenómeno que se analiza para alcanzar su aguda interpretación.

De manera puntual, Strauss y Corbin (2002) subrayan que “el análisis es la interacción entre los investigadores y los datos” (p.22), relación que se da en un espacio de sistematización y rigor. Atendiendo a lo sugerido por los referidos autores, el estudio se sustentó en el proceso de codificación y categorización relacionado con la inducción analítica que se establece al implementar la Teoría Fundamentada presentada por los referidos autores, fusionando en dicho análisis los elementos teóricos propios del Modelo de Conocimiento Didáctico Matemático y los lineamientos conceptuales del Enfoque Ontosemiótico.

Apegándose a lo establecido en la Teoría Fundamentada se aplicó el Método de la Comparación Constante y el Muestro Teórico lo cual le permitió al investigador focalizar su atención en generar teoría cimentada en los datos provenientes de los textos provenientes de las entrevistas y observaciones realizadas a los informantes clave, de esta manera se supera la intención de describir los datos, lo que permitió un apropiado desarrollo de la labor interpretativa y construir el conocimiento sobre la base de la experiencia de los propios sujetos.

Debe destacarse que este proceso de análisis se apoyó en el empleo del Atlas Ti como software de análisis cualitativo, permitiéndole al investigador la concreción de relaciones

entre los aportes de los informantes y la elaboración de gráficos que compendian los vínculos entre los diferentes elementos teóricos que emergieron en el proceso de análisis inductivo.

### **Credibilidad de la Investigación**

Cuando se habla de la calidad de un estudio en la investigación cualitativa, se hace referencia a su rigor científico, fiabilidad, confiabilidad, credibilidad o validez, que, como sinónimo de verdad construida e interpretada, es un requisito fundamental para valorar cualquier estudio. Definida por Paz (2003), como el grado en que los resultados de la investigación representan fielmente la realidad estudiada, que respondan las interrogantes y objetivos planteados.

El autor de la investigación, realizó un trabajo minucioso y detallado, que consistió una vez recogida la información sobre el fenómeno de estudio, en generar relatos que luego de la codificación respectiva, permitieron crear un grupo de ideas lógicas y profundas de las vivencias de los informantes sobre la temática en estudio, estos relatos, conservados en registro digital, fueron devueltos a los informantes, para que corroboraran sus concepciones, las ampliaran o reorientaran.

Conviene señalar que, dada la naturaleza cualitativa del estudio, el investigador tiene bajo su cargo la tarea percibir e interpretar la realidad de los sujetos que participarán en el estudio. Intentando, de acuerdo con lo expuesto por Cortés (2011), aprehender la realidad, tal como es percibida por los sujetos que participan en el estudio, lo que ameritó realizar la reconstrucción de esa realidad, que al mismo tiempo es una construcción de realidades múltiples, por lo que, debió decantar las representaciones ofrecidas por los informantes clave.

De igual manera, el investigador consideró, de acuerdo con lo establecido por Lincoln y Guba (1985), una serie de criterios que garantizaron la autenticidad, el rigor y validez del estudio, tales como veracidad, aplicabilidad y neutralidad. Cabe destacar que, a los fines de sustentar la credibilidad de la investigación y de los resultados a obtener, se hizo necesario que los participantes dieran su aval a las interpretaciones realizadas por el investigador, debiendo tales interpretaciones ser reconocidas por los participantes como una verdad muy

próxima a la manifestada en las entrevistas, para así garantizar la congruencia entre lo declarado y lo interpretado.

Por otra parte, es preciso puntualizar que en el ámbito propio de la investigación cualitativa la validez, según lo indicado por Hansen, en Pérez (1998), está referida a “la precisión con que los hallazgos obtenidos reproducen efectivamente la realidad empírica y los constructos concebidos caracterizan realmente la experiencia humana” (p. 80). Para asignarle robustez al estudio y garantizar su validez interna se recurrió a la triangulación, herramienta que desde la perspectiva de Amezcua y Gálvez (2002), implica emplear diversas estrategias para analizar el mismo problema: “diferentes técnicas para obtener los mismos datos, diferentes sujetos para responder la misma pregunta, diferentes investigadores para un mismo análisis, o diferentes teorías para explicar un mismo fenómeno” (p.433).

Bajo el entendido de que la triangulación permite descartar ampliamente las posibilidades de sesgo derivadas de las posturas teóricas y filosóficas del investigador se recurrió a ella para asegurar el carácter diáfano de las interpretaciones formuladas.

En todo caso, el propósito de aplicar la triangulación, tal y como lo subraya Torres (2021), se vincula al hecho de que:

Para eludir los sesgos y las distorsiones de las interpretaciones, producto de las posturas filosóficas del investigador y las subjetividades que lo definen, la triangulación emerge como una herramienta substancial que procura asegurar el carácter acendrado de las reconstrucciones interpretativas de la realidad. (p.275)

En el caso concreto del presente estudio, se aplicó la triangulación metodológica, para contrastar los insumos dados por los testimonios de los informantes clave en las correspondientes entrevistas y las valoraciones obtenidas a partir de las notas de campo, con los fundamentos teóricos del estudio. Todo ello en el marco de un proceso analítico reflexivo del investigador, que procuró garantizar la adecuada interpretación de los elementos asociados al conocimiento didáctico matemático de los docentes.

## **CAPÍTULO IV**

### **HALLAZGOS**

#### **ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS**

En este apartado se muestran los resultados del proceso de análisis realizado en correspondencia con los propósitos de la investigación y la naturaleza de los instrumentos aplicados. El desarrollo del referido análisis implicó efectuar la revisión exhaustiva de la información recabada tras la aplicación de los instrumentos, la cual fue organizada en función de los códigos detectados, permitiendo esto la construcción de dimensiones, subcategorías y categorías, en consonancia con el procedimiento de análisis sugerido por Strauss y Corbin (2002). Considerando lo expuesto por los autores precitados, este proceso ameritó del empleo de la técnica de análisis de la comparación constante, involucrando esto la interacción continua entre la información obtenida, el investigador y la teoría, ajustándose a la naturaleza del objeto de estudio y los objetivos establecidos, los cuales apuntan a ampliar el horizonte comprensivo sobre el conocimiento didáctico matemático de los docentes en torno al manejo de los registros semióticos al abordar el tema de inequaciones.

Cabe acotar que el procedimiento de recolección de información se sustentó en la realización de una entrevista a los informantes clave a partir de un guion preestablecido. Con el propósito de garantizar la congruencia con los objetivos planteados y las categorías apriorísticas establecidas los referidos instrumentos se sometieron a la correspondiente validación, atendiendo lo propuesto por Sandín (2003), permitiendo este proceso confirmar la pertinencia de las interrogantes con el objeto de estudio, así como su coherencia y pertinencia con los propósitos de la investigación.

Considerando la ruta metodológica establecida para el desarrollo del estudio, el insumo dado por las narrativas obtenidas a partir de la aplicación de las entrevistas se transcribió fielmente, siendo sometido a la consideración de los informantes con la intención de que corroboraran la equivalencia entre lo transcrito y las ideas exteriorizadas en las

entrevistas, proceso que permitió depurar la información, evitando posibles sesgos por error u omisión.

Una vez efectuada tal decantación, se dio inicio al proceso analítico, el cual partió de la ejecución de la codificación abierta, proceso que involucró un acercamiento microscópico, sumergiéndose entre líneas, para identificar conceptos o atributos emergentes que dieran lugar a la configuración de códigos y dimensiones, en función de características comunes detectadas, atendiendo a lo sugerido por Strauss y Corbin (2002), así como lo planteado por Schettini y Cortazzo (2015). Justamente, la rigurosidad de tal revisión permitió extraer significados intangibles en un inicio y establecer el genuino sentido de los datos atendiendo siempre a los objetivos que orientaron el estudio, para alcanzar una interpretación inicial del conocimiento didáctico matemático de los informantes clave.

Tal minuciosidad obedeció a la intención de retratar de la manera más auténtica la realidad apreciada, razón por la cual el análisis de los testimonios de los informantes se realizó, como lo sugiere Álvarez Gayou (2009), a partir de la “comparación de las palabras: ¿son idénticas, similares, relacionadas o no? Éste es como el trabajo de un detective que busca pistas: aquí las pistas son tendencias y patrones que reaparecen en varios participantes” (p.187), ya que las ideas que subyacen en las narrativas de los informantes “pueden resultar clarificadoras” (p.187). En concreto, la codificación abierta ya descrita permitió descubrir los atributos esenciales de los datos para alcanzar su clasificación mediante códigos o expresiones significativas, lo detallado coincide con lo manifestado por Schettini y Cortazzo (2015) quienes sostienen que en la codificación abierta “los datos se fracturan y se abren para sacar a la luz los pensamientos, las ideas y significados que contienen con el fin de descubrir, etiquetar y desarrollar conceptos” (p.37).

Posteriormente, se realizó la codificación axial, la cual como lo indican las precitadas autoras “se produce al establecer relaciones jerárquicas con las subcategorías –propiedades y dimensiones– en torno a una categoría tomada como eje”. Así, la codificación axial permitió configurar subcategorías cuya asociación y entrelazamiento generaron categorías de análisis, punto de anclaje para la estructuración gráfica de las relaciones apreciadas entre los diferentes elementos conceptuales que fueron emergiendo. Cabe destacar que la relación jerárquica tuvo como sustento el insumo teórico que se obtuvo en la revisión de referentes

previamente realizada, constituyendo tal insumo el hilo conductor del proceso analítico que condujo a la revelación de los constructos teóricos que emergieron al entrelazar los significados sustanciales manifiestos en los aportes de los informantes.

Es preciso indicar que para efectuar el procesamiento y análisis de los aportes de los informantes clave fue necesario identificar a cada uno de ellos con un descriptor alfanumérico, cuyo formato general fue ICX, siendo X un número del 1 al 5. Esto permite integrar a lo largo de este apartado los aportes de los informantes respetando el carácter anónimo de las fuentes.

Por otra parte, debe señalarse que, como parte de la ruta metodológica adoptada en el estudio, se atendieron las sugerencias de Rodríguez, Gil y García (1999), quienes sugieren considerar en el análisis de datos cualitativos el desarrollo de un conjunto de sistematizaciones para alcanzar la interpretación más amplia del fenómeno que se está valorando. De manera que, considerando lo planteado por los autores precitados se procedió a efectuar las siguientes tareas:

- a) Reducción de la información, desarrollada a partir de la segmentación en unidades que facilitaran la apreciación de la relación entre los aspectos conceptuales manejados.
- b) Disposición y transformación de la información, proceso que implicó la organización de las unidades conceptuales de manera jerárquica, respondiendo a los objetivos específicos de la investigación y ofreciendo una descripción del fenómeno estudiado al integrar la información en torno a categorías que develan aristas esenciales del objeto de estudio.
- c) Análisis y contraste de la información, así como la realización del proceso de triangulación. Entendiendo esta última, desde la óptica de los autores precitados, como el procedimiento que conduce a “conocer y contrastar los múltiples puntos de vista que se conjugan en una misma circunstancia” (p.209). Cabe acotar que, aludiendo a la relevancia de la triangulación, Torres (2021) enfatiza que ella constituye un procedimiento esencial “para eludir los sesgos y las distorsiones de

las interpretaciones, producto de las posturas filosóficas del investigador y las subjetividades que lo definen” (p.275), razón por la cual “emerge como una herramienta substancial que procura asegurar el carácter acendrado de las reconstrucciones interpretativas de la realidad” (Torres, 2021, p.275). Precisamente, a partir del contraste de conceptos estrechamente relacionados y que describen el sentir de los informantes respecto a las diferentes aristas que conforman el objeto estudiado se alcanzó una visión densa de las concepciones de dichos informantes sobre la solidez de su conocimiento didáctico matemático y los significados contruidos sobre la relevancia del empleo de la diversidad de registros semióticos.

- d) Emisión de conclusiones, este paso supone explicar las inferencias que resultan de la comprensión del fenómeno estudiado; estas derivaciones se sustentan de manera inicial en la comparación constante, procedimiento que viabiliza la interpretación profunda de los testimonios de los diversos informantes.

Seguidamente, se presentan en la Tabla 2 los códigos, las dimensiones, las subcategorías y las categorías emanadas del análisis inductivo de los aportes de los informantes clave, compendio en torno al cual se detalla la revisión de la postura de estos últimos respecto a la manera como implementan los registros semióticos al momento de desarrollar la temática de inecuaciones, hecho que da cuenta del nivel de consolidación del conocimiento didáctico matemático por ellos expresado.

**Tabla 2: Sistema de Categorías de la entrevista**

<b>Código</b>	<b>Dimensión</b>	<b>Subcategoría</b>	<b>Categoría Central</b>
<b>Dominio de propiedades</b>			
Carácter diáfano de las operaciones algebraicas	Relevancia de los aspectos procedimentales sobre el estudio de las inecuaciones	Enfoque asumido para la conversión entre registros semióticos	
Apropiado planteamiento de las inecuaciones asociadas a los problemas propuestos			
Detección propia de errores procedimentales	Apoyo en procesos argumentativos		
Explicación apropiada de procedimientos			
Justificación de procedimientos y proposiciones empleadas	Expresión del objeto matemático inecuación en sus diferentes representaciones	Manejo de registros semióticos	Conflictos epistémicos vinculados a las transformaciones de las representaciones de inecuaciones
Manejo de simbología			
Empleo de diferentes registros para comprobar los resultados alcanzados	Conversión entre registros semióticos		
Identificación de errores a partir del contraste de registros			
Conversión entre registro gráfico y simbólico	Estrategias implementadas para la enseñanza de inecuaciones		
Conversión entre registro algebraico y simbólico			
Argumentación de las conversiones entre registros	Herramientas empleadas para la integración de los diferentes	Caracterización del modelo de enseñanza asumido por el docente	
Uso adecuado del lenguaje matemático al explicar los cambios entre registros			
Empleo de mecanismos de verificación de resultados	Herramientas empleadas para la integración de los diferentes		
Sustento en procesos argumentativos para la confirmación de procedimientos			
Transformación de las concepciones vinculadas con las inecuaciones			

Contraste de resultados alcanzados a partir de diferentes representaciones	registros semióticos y sus transformaciones		
Dominio de los conceptos matemáticos enseñados en el aula.	Conocimiento común del contenido y conocimiento ampliado del contenido	Exteriorización del conocimiento didáctico matemático	
Dominio de propiedades y aspectos conceptuales vinculados con el objeto matemático inecuación			Práctica matemática asociada al abordaje del tema de inecuaciones
Vinculación y correlación con la realidad	Conocimiento especializado		
Selección de problemas matemáticos vinculados con las inecuaciones			
Discusión entre pares	Conocimiento sobre el tipo de interacciones que favorecen el aprendizaje		
Fomento de la argumentación para esclarecer los conflictos semióticos			
Diálogos encaminados a la decantación del lenguaje matemático			

**Fuente:** Elaboración propia considerando formato propuesto por Schettini y Cortazzo (2015).

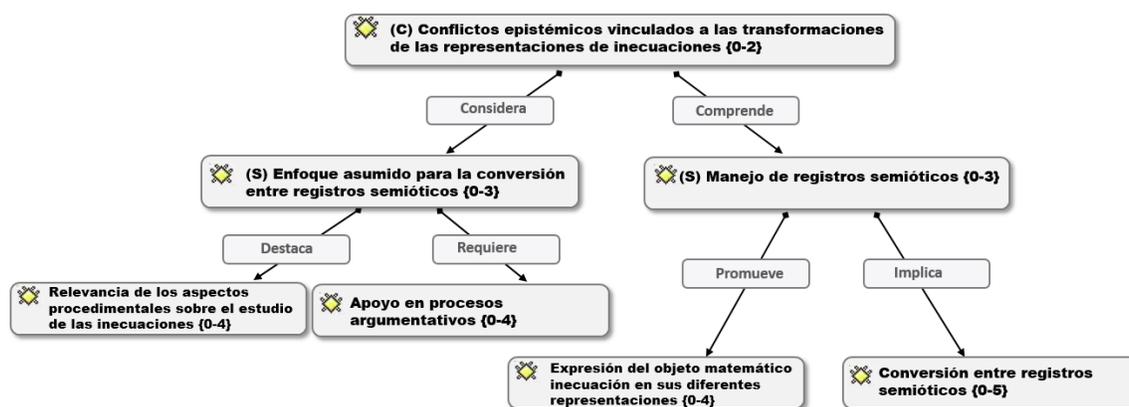
## Análisis de las Entrevistas a los Informantes Clave

Tomando como referencia el compendio de elementos que se muestran en la Tabla 1 como fruto del análisis inductivo realizado, a continuación, se desglosa el análisis correspondiente a las categorías centrales allí expuestas: *Conflictos epistémicos vinculados a las transformaciones de las representaciones de inequaciones* y *Práctica matemática asociada al abordaje del tema de inequaciones*.

### **Categoría Central: Conflictos epistémicos vinculados a las transformaciones de las representaciones de inequaciones**

Esta categoría central compendia los aportes de los informantes en relación con los elementos que consideran para dilucidar sus dilemas respecto a la forma idónea de asumir el desarrollo de la práctica matemática al abordar el tema de inequaciones sustentando la correspondiente mediación en el empleo de los diferentes registros semióticos. Como se aprecia en la Figura 8 la referida categoría central se configuró a partir de la fusión de las *Subcategorías Enfoque asumido para la conversión entre registros semióticos* y *Manejo de registros semióticos*, las cuales se describen seguidamente.

**Figura 8. Configuración general de la Categoría Conflictos epistémicos vinculados a las transformaciones de las representaciones de inequaciones**

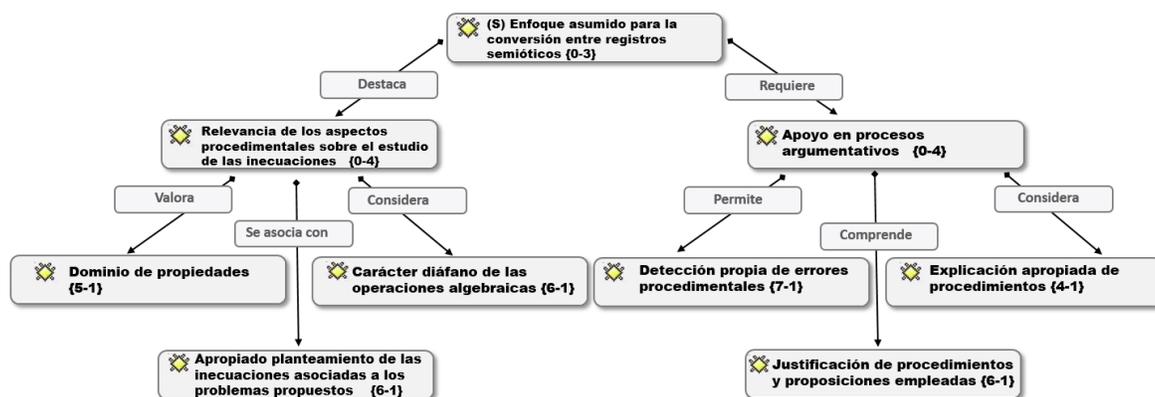


Fuente: Elaboración propia

### ***Subcategoría Enfoque asumido para la conversión entre registros semióticos***

En la *Subcategoría Enfoque asumido para la conversión entre registros semióticos* se compendia la postura de los informantes respecto a los elementos didácticos y conceptuales que, a su juicio, deben considerarse para abordar de manera eficiente la conversión entre registros semióticos al desarrollar el tema de inecuaciones. Justamente, el análisis de los testimonios de los informantes devela que esa postura se expresa en dos vertientes esenciales, las cuales corresponden a las *Dimensiones Relevancia de los aspectos procedimentales sobre el estudio de las inecuaciones* y *Apoyo en procesos argumentativos*, como se muestra en la Figura 9.

***Figura 9. Configuración general de la Subcategoría Enfoque asumido para la conversión entre registros semióticos***



Fuente: Elaboración propia

En lo que respecta a la *Dimensión Relevancia de los aspectos procedimentales sobre el estudio de las inecuaciones*, esta engloba los *Códigos Dominio de propiedades*, *Carácter diáfano de las operaciones algebraicas* y *Apropiado planteamiento de las inecuaciones asociadas a los problemas propuestos*. En efecto, los informantes sostienen que el *Dominio de propiedades* propias del Álgebra es un elemento primordial para abordar con éxito el estudio de inecuaciones, esto se convierte en un factor esencial para desarrollar los procesos

algebraicos de manera correcta y hace más expedito el camino del aprendizaje. Esto concuerda con el planteamiento de Larios (2021) quien sostiene que los aspectos procedimentales deben ser decantados, pues junto a la claridad conceptual determinan pilares substanciales para un abordaje apropiado de las diversas temáticas en el área de matemática. Entre los testimonios que hacen referencia a este aspecto se encuentran los siguientes:

ICD1: “Focalizo mi atención previamente en el dominio de las propiedades algebraicas, pues ese es un elemento determinante para encontrar el camino correcto al solucionar una inecuación”

ICD3: “Es necesario que el estudiante posea un dominio claro de las propiedades algebraicas para proceder a adentrarse en el estudio de las inecuaciones, de lo contrario no comprenderá la presencia de errores o la obtención de respuestas incongruentes”

Por su parte, en lo concerniente al *Carácter diáfano de las operaciones algebraicas* los informantes plantean que sus esfuerzos se centran en alcanzar la decantación de las operaciones algebraicas, pues acentúan que:

ICD1: “Es esencial que el estudiante desarrolle las operaciones algebraicas de forma impecable”

Señalan además que:

ICD1: “Es necesario trabajar desde lo simple a lo complejo, pero siempre con la intención de depurar las operaciones algebraicas”.

Este aspecto es de notable relevancia, pues constituye un requerimiento esencial de la buena práctica matemática, para garantizar un progreso exitoso en el estudio de la temática de inecuaciones. Cabe señalar que no se trata de buscar el camino de la algebrización y operacionalización exclusiva como medio de enseñanza, sino de buscar que la entidad primaria propuesta por el Enfoque Ontosemiótico denominada elementos procedimentales sea aplicada de manera diáfana, bajo la certeza de que el carácter excelso de las operaciones se acompaña de un sustento lógico conceptual sólido.

De igual manera, se desprende del análisis de los testimonios de los informantes que el *Apropiado planteamiento de las inecuaciones asociadas a los problemas propuestos* constituye un elemento de importancia substancial al momento de abordar la temática, todo ello como parte de los requerimientos del desarrollo y potenciación del pensamiento matemático. Justamente, Ruiz (2015) recuerda que la claridad de los planteamientos constituye una evidencia de comprensión que supera la concepción de los procesos algebraicos como un “mero lenguaje aritmético generalizado, en el que, además de números, utiliza también letras” (p.76).

Entre los aportes que hacen alusión a este aspecto se encuentra el siguiente:

ICD2: “Es fundamental que el estudiante consolide el traslado de la información dada en un problema al planteamiento en forma de inecuación. Esto forma parte de lo requerido en los estándares básicos, los cuales enfatizan el desarrollo de las capacidades de razonamiento lógico, el continuo ejercicio de la abstracción, así como el rigor y la precisión de los procesos algebraicos”

Por su parte, en la *Dimensión Apoyo en procesos argumentativos* se agrupan los *Códigos Detección propia de errores procedimentales, Explicación apropiada de procedimientos y Justificación de procedimientos y proposiciones empleadas*, los cuales representan elementos que, a juicio de los informantes, conducen al estudiante a decantar sus propios avances en el estudio de cualquier temática del área de matemática.

Cabe señalar que los informantes destacan la relevancia de la *Detección propia de errores procedimentales* por parte de los estudiantes como una muestra de la propia validación de los conocimientos, pues de esta forma asumen una perspectiva crítica sobre sus avances y la necesidad de profundizar en aquellos aspectos que aun presentan debilidades. El siguiente aporte, confirma lo descrito:

ICD4: “Considero relevante que el estudiante tome conciencia de sus propios errores algebraicos, la detección y corrección de los mismos se hacen necesarios para el correcto progreso del aprendizaje, es una forma de autoevaluación y los encamina a ser críticos con su propio proceso de aprendizaje”

Precisamente, el reconocimiento de los errores procedimentales determina la apertura del camino hacia la revisión profunda de otros elementos involucrados en las producciones del estudiante, estableciendo la posibilidad de que este último examine de manera crítica el uso de los elementos lingüísticos y simbólicos para reencauzar sus esfuerzos hacia proceso de aprendizaje diáfano y fructífero. Sobre este particular, Torres (2017) indica que la detección consciente de los errores y el apoyo en mecanismos de verificación constituyen pilares esenciales para tamizar los procesos algebraicos y depurar los conceptos implicados.

De igual manera consideran que la *Explicación apropiada de procedimientos* constituye un aspecto esencial al momento de desarrollar la práctica matemática, pues tales explicaciones permiten confirmar la correspondencia entre las expresiones lingüísticas y los aspectos procedimentales, dando muestra del avance en la construcción de representaciones mentales adecuadas del objeto matemático inecuación.

Cabe señalar que esta correspondencia entre los elementos lingüísticos y procedimentales permite abarcar otra arista de la complejidad inherente al objeto matemático inecuación facilitando la clara aprehensión del significado del mismo, al respecto Monje (2017) resalta la relevancia de contemplar tal complejidad para evitar “quebres en la progresión de la enseñanza” (p.7), los cuales derivan en la aparición de conflictos de orden semiótico.

Entre los testimonios que aluden a este aspecto se encuentra el que se presenta seguidamente:

ICD5: “A lo largo del desarrollo de la clase procuro que los estudiantes ofrezcan explicaciones de los procedimientos desarrollados, para confirmar la congruencia entre el lenguaje verbal y el simbólico, así como la coherencia entre lo que expresan verbalmente y lo que desarrollan procedimentalmente. Una adecuada relación entre esos aspectos pueden indicarme si su representación mental sobre la inecuación estudiada es clara”

Alegan además los informantes que tales explicaciones permiten confirmar la solidez de los elementos conceptuales empleados durante el desarrollo del tema de inecuaciones, esto se confirma en el siguiente testimonio:

ICD1: “Partiendo del manejo de sus presaberes les invito a explicar los procedimientos desarrollados, pues eso me permite determinar si poseen un sólido sustento conceptual”

Los informantes señalan además que la *Justificación de procedimientos y proposiciones empleadas* representa un camino para la verificación de la robustez operacional y conceptual, al tiempo que evidencia el avance en cuanto al manejo del lenguaje matemático. Entre los aportes que hacen referencia a lo previamente detallado se encuentra el siguiente:

ICD2: “Me interesa a lo largo de las sesiones de clase que el estudiante justifique sus procedimientos y argumente el empleo de conceptos, propiedades o proposiciones, pues además de demostrar la fortaleza del basamento operacional y teórico me permite visualizar el avance en cuanto al empleo adecuado del lenguaje matemático”

Vale acotar que la decantación del lenguaje matemático permite establecer un sendero más expedito hacia la aprehensión del significado ya que denota la correspondencia entre el significado personal logrado y el significado institucional pretendido, siendo parte importante de los procesos argumentativos que se requieren para constatar el progreso hacia un conocimiento sólido y bien sustentado conceptualmente. De allí que se valoren las producciones operacionales como un conjunto de “realizaciones conceptuales y lingüísticas” (MEN, 2006, p.47).

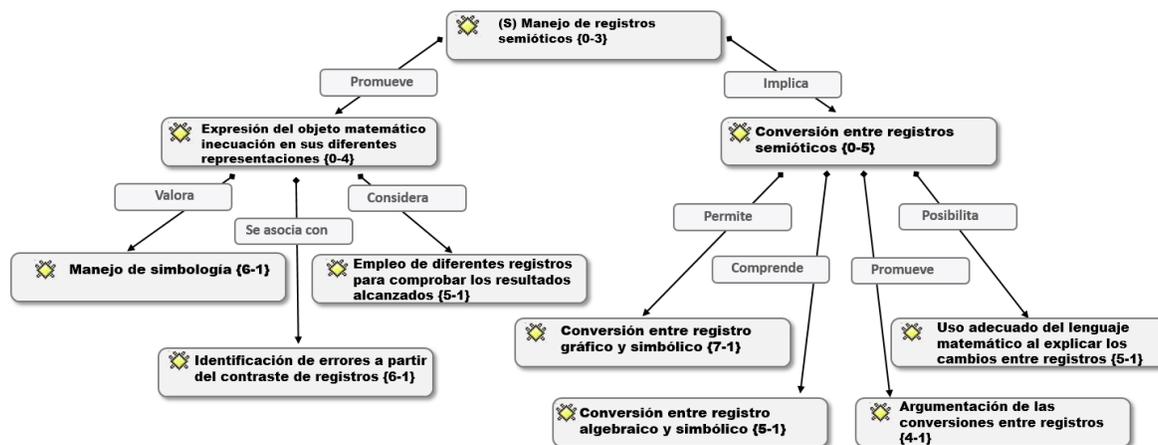
Lo detallado hasta este punto devela los principales aspectos que centran la atención del docente al momento de desarrollar la práctica matemática relativa al tema de inecuaciones y que representan el nodo central de sus inquietudes para alcanzar el propósito de efectuar una práctica asertiva. La atención a cada una de las aristas involucradas en el proceso de aprehensión de significados resulta esencial para garantizar la superación de las dificultades

propias del proceso de aprendizaje, pues se reconoce que “la construcción, negociación y conciliación de los significados de los objetos matemáticos es un proceso no lineal, caracterizado por fluctuaciones constantes que involucran avances y retrocesos, continuidades y rupturas, en función de los obstáculos encontrados y la manera de proceder para subsanar esas interferencias” (Torres, 2017, p.251)

### ***Subcategoría Manejo de registros semióticos***

Esta Subcategoría se configuró a partir de la fusión de *las Dimensiones Expresión del objeto matemático inecuación en sus diferentes representaciones* y *Conversión entre registros semióticos*, como se muestra en la Figura 10.

***Figura 10. Configuración general de la Subcategoría Manejo de registros semióticos***



Fuente: Elaboración propia

Tal y como se aprecia en la Figura 10, la *Dimensión Expresión del objeto matemático inecuación en sus diferentes representaciones* reúne los *Códigos Manejo de simbología*, *Empleo de diferentes registros para comprobar los resultados alcanzados* e *Identificación de errores a partir del contraste de registros*. De manera concreta, los informantes señalan que el *Manejo de simbología* es un aspecto cuya decantación es esencial y tal depuración

puede ser alcanzada de manera más expedita si el estudiante es capaz de hacer uso de diferentes representaciones semióticas, pues, por ejemplo, el contraste entre el registro simbólico y el registro gráfico le permite confirmar si la representación de la solución de una inecuación expresada en forma de intervalo es correcta. Lo señalado resulta relevante pues como lo indica Rodríguez (2015) los errores derivados del inadecuado manejo del simbolismo algebraico y de su incomprensión establecen la posibilidad de presencia de conflictos semióticos.

El siguiente testimonio corrobora lo descrito:

ICD4: “Es común que el estudiante tenga dudas respecto al manejo de los paréntesis o corchetes al momento de expresar en forma de intervalo la solución de una inecuación, esto me ha llevado a apoyarme en el registro gráfico para ofrecerle la posibilidad de analizar si está haciendo uso apropiado de la simbología”

De igual manera acentúan que el *Empleo de diferentes registros para comprobar los resultados alcanzados* resulta un camino provechoso para consolidar el aprendizaje de los estudiantes. Esto muestra correspondencia con lo planteado por Duval (2006) respecto a la necesidad de recurrir a diferentes registros para garantizar la noesis, pues las diferentes perspectivas del objeto matemático le permiten al estudiante profundizar en la comprensión de su significado.

Destacan, sin embargo, que:

ICD1: “En primer lugar, es necesario que el estudiante se familiarice y adquiera competencia en el uso de estas representaciones, luego se puede aprovechar el dominio alcanzado en cada tipo de representación para ejecutar el contraste y comprobar los resultados alcanzados”

Otro aspecto que consideran substancial en el desarrollo de la temática de inecuaciones es el relacionado con la *Identificación de errores a partir del contraste de registros*, pues generalmente los mecanismos de verificación se centran en la sustitución de los valores alcanzados en la expresión inicialmente dada para su estudio. Consideran que el referido contraste puede facilitar la identificación de errores en cuanto al conjunto de valores

que satisfacen la inecuación y en lo referente al empleo inapropiado de simbología. Sobre este particular Torres (2017) acentúa que el contraste de los registros semióticos permite al estudiante efectuar la verificación de resultados y detectar posibles errores en el empleo de la simbología, razón por la cual es un rasgo destacable de la práctica de los informantes clave.

El siguiente testimonio describe el aspecto señalado:

ICD3: “Procuró a partir del contraste de registros semióticos que el estudiante detecte errores en cuanto a la respuesta ofrecida o en lo vinculado al manejo de los símbolos mayor, menor, paréntesis y corchete. La comparación de registros me ha resultado particularmente útil para alcanzar el propósito de que el estudiante identifique errores en sus respuestas”

En lo atinente a la *Dimensión Conversión entre registros semióticos*, ésta se configuró a partir de los *Códigos Conversión entre registro gráfico y simbólico*, *Conversión entre registro algebraico y simbólico*, *Argumentación de las conversiones entre registros* y *Uso adecuado del lenguaje matemático al explicar los cambios entre registros*.

Los informantes revelan que la *Conversión entre registro gráfico y simbólico* ha constituido una vía asertiva para expresar la solución de las inecuaciones, resultando más eficaz que recurrir estrictamente a la *Conversión entre registro algebraico y simbólico*, pues en este último caso los estudiantes suelen cometer errores al expresar las respuestas en forma de intervalo. Describen sus experiencias en lo concerniente a lo expuesto en aportes como el siguiente:

ICD4: “Cuando centraba el desarrollo de las clases sobre inecuaciones de manera exclusiva en la conversión entre el registro algebraico y simbólico a los estudiantes se les dificultaba detectar los errores procedimentales y la consecuencia de estos en la representación de la respuesta. También era frecuente observar que una respuesta apropiada obtenida a partir del desarrollo algebraico se representara de manera incorrecta en forma de intervalo, en especial por el manejo erróneo de los paréntesis y corchetes. Todo ello cambió al recurrir al registro gráfico, pues el traslado

desde el registro gráfico hacia el simbólico, en forma de intervalo, les resulta a los estudiantes más fácil de entender”

Estos hallazgos coinciden con los encontrados por Torres (2016) quien concluye que el empleo del enfoque gráfico para abordar el estudio de inecuaciones permite a partir del registro gráfico realizar de manera más fluida el traslado hacia la representación simbólica de la solución, minimizando los errores de carácter simbólico y ofreciendo a la vez herramientas para la comprobación de resultados, esto último al contrastar la evidencia gráfico con la respuesta alcanzada en el desarrollo algebraico.

Aun cuando los informantes reconocen la utilidad del empleo de los diferentes registros semióticos para alcanzar una mejor aprehensión del objeto matemático inecuación señalan que se precisa de recurrir a la *Argumentación de las conversiones entre registros*, para confirmar si tales procesos se ejecutan con claridad. El siguiente aporte hace referencia a lo indicado:

ICD5: “Desde mi perspectiva, no basta con solicitar al estudiante que emplee diferentes registros, es necesario que argumente y justifique la manera como realiza esas transformaciones, esto puede ser útil al momento de confirmar, por ejemplo, si el empleo adecuado de los símbolos en un intervalo deriva de una correcta interpretación y traslado desde el registro gráfico”

Otro aspecto que es resaltado por los informantes es el *Uso adecuado del lenguaje matemático al explicar los cambios entre registros*, pues consideran que los elementos lingüísticos sirven como referente para captar el nivel de claridad conceptual que presentan los estudiantes. Entre los aportes que develan la postura de los informantes respecto a este punto se encuentra el siguiente:

ICD2: “Es importante que el estudiante use el lenguaje matemático de manera correcta, eso evidencia la claridad conceptual y da cuenta de su dominio del tema”

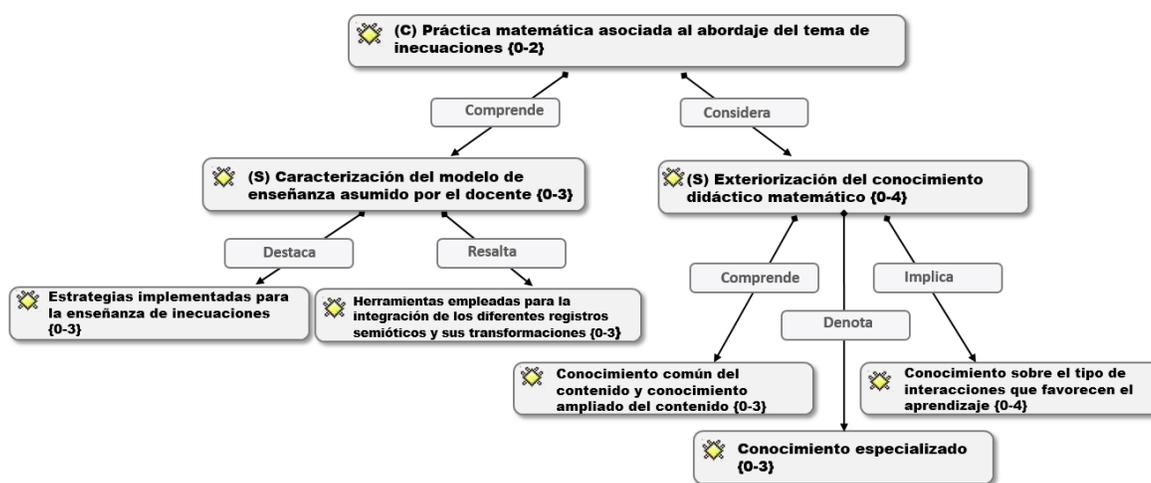
El conjunto de elementos descritos previamente engloba los aspectos más resaltantes que, desde la perspectiva de los informantes, deben ser considerados para abordar de manera idónea el tema de inecuaciones permitiendo afrontar satisfactoriamente los dilemas

epistémicos y didácticos a los cuales se enfrentan en su rol docente. Cabe señalar la relevancia de los aspectos indicados por los informantes, pues determinan un compendio de elementos substanciales de la práctica matemática que deben ser adecuadamente valorados en la planificación y estructuración de las secuencias didácticas.

### ***Categoría Práctica matemática asociada al abordaje del tema de inecuaciones***

En esta Categoría se caracteriza la práctica matemática desarrollada por los informantes al abordar el tema de inecuaciones, englobando además los atributos de la misma que permiten distinguir el conocimiento didáctico matemático exteriorizado por los informantes. Como se muestra en la Figura 11 esta Categoría comprende las Subcategorías *Caracterización del modelo de enseñanza asumido por el docente* y *Exteriorización del conocimiento didáctico matemático*, cuya descripción se presenta a continuación.

***Figura 11. Configuración general de la Categoría Central: Práctica matemática asociada al abordaje del tema de inecuaciones***



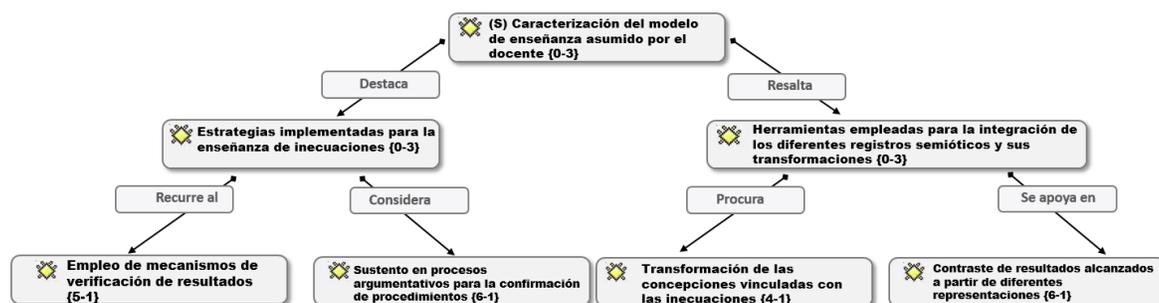
Fuente: Elaboración propia

### ***Subcategoría Caracterización del modelo de enseñanza asumido por el docente***

Esta Subcategoría reúne los rasgos y atributos esenciales que definen la práctica matemática de los docentes en función del modelo asumido para desarrollar el tema de

inecuaciones, configurándose a partir de las Dimensiones *Estrategias implementadas para la enseñanza de inequaciones* y *Herramientas empleadas para la integración de los diferentes registros semióticos y sus transformaciones* como se muestra en la Figura 12.

**Figura 12. Configuración general de la Subcategoría Caracterización del modelo de enseñanza asumido por el docente**



Fuente: Elaboración propia

Como parte de esa caracterización, la *Dimensión Estrategias implementadas para la enseñanza de inequaciones* engloba los *Códigos Empleo de mecanismos de verificación de resultados* y *Sustento en procesos argumentativos para la confirmación de procedimientos*. En efecto, los informantes señalan que es primordial recurrir al *Empleo de mecanismos de verificación de resultados*, pues tal verificación no solamente confirma la exactitud de los procedimientos, sino que fomenta el pensamiento crítico al contrastar en representaciones diferentes cada situación-problema abordada. Insisten, sin embargo, que no se debe recurrir exclusivamente al habitual proceso de sustitución de valores para confirmar las respuestas, pues el apoyo en los diferentes registros semióticos facilita un mejor contraste y facilita la verificación de los resultados. Entre los testimonios que aluden a este aspecto se encuentra el siguiente:

ICD5: “Siempre invito a los estudiantes a que verifiquen los resultados. Recordando que aun cuando en el caso de las inequaciones bastaba con sustituir los

valores hallados en la ecuación original, en el caso de las inecuaciones es propicio aprovechar la información ofrecida por los diferentes registros para confirmar los resultados hallados”

También resaltan la importancia de considerar el *Sustento en procesos argumentativos para la confirmación de procedimientos*, pues el empleo de la argumentación es un camino ideal para fomentar el razonamiento matemático al debatir con sustentos sólidos sobre los procedimientos desarrollados y los resultados alcanzados. Acentúan los informantes que es imprescindible que el estudiante:

ICD4: “brinde argumentos sólidos sobre la razón de los procedimientos desarrollados, ya que esto le abre las puertas a la posible corrección de errores o al afianzamiento de los elementos conceptuales que apoyan sus operaciones”

Es preciso señalar que el empleo de la argumentación como expresión lógica de los elementos lingüísticos manejados por el estudiante es resaltado por diversos autores como un mecanismo que permite develar el avance en el desarrollo de las competencias matemáticas. Ahora bien, cuando tal argumentación se emplea para confirmar resultados y analizar divergencias entre los resultados alcanzados por diferentes estudiantes pasa a constituir un elemento de mediación en la solución de los conflictos semióticos, de allí la relevancia de su implementación por parte de los informantes en su práctica matemática.

En lo concerniente a la ***Dimensión Herramientas empleadas para la integración de los diferentes registros semióticos y sus transformaciones***, esta se configura a partir de la agrupación de los *Códigos Transformación de las concepciones vinculadas con las inecuaciones* y *Contraste de resultados alcanzados a partir de diferentes representaciones*. El análisis de los aportes de los informantes reveló que consideran esencial la *Transformación de las concepciones vinculadas con las inecuaciones* para que los estudiantes le asignen un nuevo significado a este objeto matemático, apreciando su utilidad y aplicabilidad en situaciones reales. El siguiente testimonio corrobora lo descrito:

ICD3: “Cada concepto estudiado debe ser contextualizado y reconocido en la medida de lo posible en la realidad, las inecuaciones no son la excepción. Es

necesario que el estudiante reconozca en situaciones reales su aplicabilidad y valide en su propio contexto la utilidad de las mismas”

Resaltan además que es fundamental realizar el *Contraste de resultados alcanzados a partir de diferentes representaciones* pues las divergencias que puedan detectarse pueden constituir una señal de advertencia sobre la posibilidad de haber cometido errores algebraicos o de expresión simbólica de los resultados. Al respecto señalan lo siguiente:

ICD1: “Podemos apoyarnos en las diferentes representaciones del resultado de una inecuación para, a partir de su contraste, identificar posibles errores procedimentales que nos hayan conducido a un resultado falso o aun habiendo realizado un procedimiento correcto hayamos representado simbólicamente de forma incorrecta el resultado”

ICD4: “La comparación de los resultados expresados en los diferentes registros permite a los estudiantes afinar las respuestas, corrigiendo errores de expresión simbólica o inclusive descartar resultados incongruentes”

ICD5: “Al tener la posibilidad de contrastar los resultados alcanzados en el registro algebraico con la correspondiente representación gráfica de la inecuación estudiada el estudiante detecta inconsistencias en las respuestas y procede a buscar los orígenes de los errores apreciados”

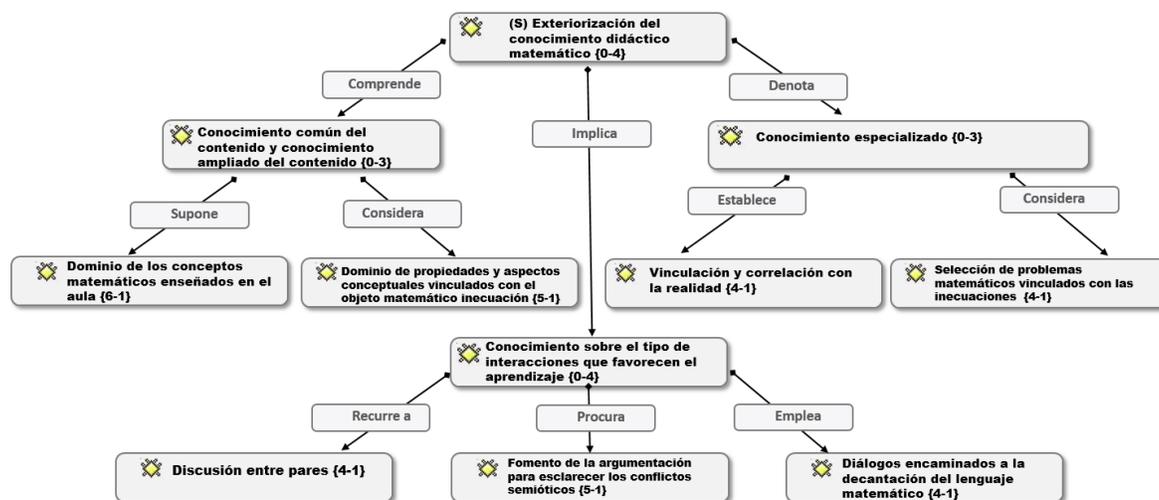
Lo detallado previamente ofrece la caracterización del modelo de enseñanza que es asumido por los informantes para desarrollar el tema de inecuaciones, a partir de la descripción de las estrategias implementadas para el abordaje del tema, así como las herramientas puestas en práctica para alcanzar la coordinación efectiva de las transformaciones entre los registros y aprovechar al máximo las ventajas de esa multirepresentacionalidad.

### ***Subcategoría Exteriorización del conocimiento didáctico matemático***

Los rasgos del conocimiento didáctico matemático exteriorizados por los docentes se agrupan en las *Dimensiones Conocimiento común del contenido y conocimiento ampliado*

del contenido, Conocimiento especializado y Conocimiento sobre el tipo de interacciones que favorecen el aprendizaje, como se muestra en la Figura 13.

**Figura 13. Configuración general de la Subcategoría Exteriorización del conocimiento didáctico matemático**



Fuente: Elaboración propia

En la *Dimensión Conocimiento común del contenido y conocimiento ampliado del contenido* se agrupan los *Códigos Dominio de los conceptos matemáticos enseñados en el aula* y *Dominio de propiedades y aspectos conceptuales vinculados con el objeto matemático inecuación*. Cabe señalar que la Dimensión señalada compendia el conocimiento que el docente moviliza para resolver los problemas que asigna a sus estudiantes y para verificar que las soluciones dadas a estos sean apropiadas bajo la denominación de *Conocimiento común del contenido* y el conocimiento que le permite al docente establecer las conexiones entre los conceptos y proyectar lo trabajado hacia lo que se necesita posteriormente bajo el término *Conocimiento ampliado del contenido*.

En lo concerniente al *Dominio de los conceptos matemáticos enseñados en el aula* los informantes resaltan que es una exigencia intrínseca para el desempeño de su labor,

considerando que su propia experiencia les ha permitido consolidarlo. Sobre el aspecto señalado resalta el siguiente testimonio:

ICD2: “Aunque tengo treinta años como docente todos los días aprendo. Gracias a la experiencia acumulada siento totalmente fortalecido mi conocimiento sobre los conceptos matemáticos que me corresponde enseñar”

Por su parte, en cuanto al *Dominio de propiedades y aspectos conceptuales vinculados con el objeto matemático inecuación* los informantes acentúan que han experimentado un cambio favorable en su práctica, incorporando en la misma la multirepresentacionalidad del objeto matemático inecuación. Entre los aportes que aluden a este punto se encuentra el siguiente:

ICD3: “Empleo los diversos registros para representar la inecuación y me sustento en ello para confirmar resultados. Puedo afirmar que el apropiarme de esta forma de estudiar las inecuaciones me permite decidir en cada situación cuál registro utilizar como principal y cuál o cuáles como auxiliares”

En lo atinente a la *Dimensión Conocimiento especializado*, la cual comprende el conocimiento que atiende las adecuaciones y adaptaciones ejecutadas para transformar un contenido disciplinar en un contenido enseñable, en ella se reúnen los *Códigos Vinculación y correlación con la realidad* y *Selección de problemas matemáticos vinculados con las inecuaciones*. Respecto a la *Vinculación y correlación con la realidad* los informantes consideran que:

ICD5: “se hace necesario transformar la manera de enseñar el tema de inecuaciones, adecuarlo a la realidad y vivencias de los estudiantes a fin de que aprecien su aplicabilidad”

Destacan de igual manera que una apropiada *Selección de problemas matemáticos vinculados con las inecuaciones* le permite al docente allanar el camino de acercamiento de los estudiantes al tema. Un aporte que describe lo expuesto se muestra seguidamente:

ICD2: “Al desarrollar el tema de inequaciones es fundamental transformar la definición inicial dada en el contexto disciplinar, a un lenguaje entendible por los estudiantes. De allí la importancia de encontrar ejemplos o situaciones que se ajusten a la enseñanza del referido contenido”

Por otro lado, la *Dimensión Conocimiento sobre el tipo de interacciones que favorecen el aprendizaje* se configuró a partir de la agrupación de los *Códigos Discusión entre pares, Fomento de la argumentación para esclarecer los conflictos semióticos y Diálogos encaminados a la decantación del lenguaje matemático*, los cuales reflejan los elementos interaccionales que, a juicio de los informantes, propician un aprendizaje efectivo. De manera concreta, señalan que la *Discusión entre pares* es una vía para que el proceso interaccional se de en un clima de igualdad y confianza, siendo necesario, sin embargo, que el docente se encuentre atento a las decantaciones conceptuales y lingüísticas a que diera lugar el análisis de las interacciones que se suscitan en el aula. Sostienen los informantes que:

ICD3: “es posible aprovechar los lazos interaccionales entre los estudiantes para descubrir errores en sus expresiones lingüísticas y así proceder a realizar los correctivos pertinentes”

Por otra parte, los informantes señalan que se puede recurrir al *Fomento de la argumentación para esclarecer los conflictos semióticos*. Sobre este particular resaltan que es frecuente apreciar en la práctica matemática discordancia entre el significado o interpretación asignada a una misma expresión o representación por parte de dos sujetos, estas discrepancias entendidas como conflictos semióticos las suelen afrontar recurriendo a la argumentación, herramienta que les ha resultado poderosa para resolver las divergencias conceptuales. Entre los aportes que hacen referencia a lo descrito se encuentra el que se indica seguidamente:

ICD5: “De forma habitual se aprecian divergencias entre el significado asignado a una misma expresión o representación por parte de diversos estudiantes, tales conflictos resultan clarificados acudiendo a la argumentación. Conviene señalar que en muchos casos los estudiantes prefieren utilizar exclusivamente estrategias aritméticas para plantear y resolver problemas, recurriendo inclusive a aceptar

generalizaciones a partir de algunos casos particulares, lo cual les conduce a la adopción de posturas conceptuales erróneas, por ello la exigencia de argumentos resulta una herramienta eficaz para disolver esos conflictos”

Por otra parte, los informantes señalan que es esencial apoyar la práctica matemática en *Diálogos encaminados a la decantación del lenguaje matemático*. Así, apoyados en las interacciones emergen en el aula los estudiantes exteriorizan verbalmente su nivel de aprehensión respecto al objeto matemático inecuación y pueden depurar aquellos aspectos lingüísticos propios del área de la matemática que ameriten un reencauzamiento. Entre los aportes que hacen mención a este aspecto se encuentra el que se muestra seguidamente:

ICD5: “Las interacciones que se dan en el aula deben ser aprovechadas para decantar el léxico matemático, pues el empleo de un correcto lenguaje matemático se asocia a una aprehensión conceptual clara”

Las descripciones aportadas sobre las tres últimas dimensiones señaladas permiten alcanzar una apreciación amplia de los elementos que definen el conocimiento didáctico matemático de los informantes, aspectos esenciales para garantizar una práctica claramente orientada a la aprehensión del significado del objeto matemático inecuación.

### **Análisis de los hallazgos obtenidos con la técnica de la Observación**

Atendiendo a los propósitos de la investigación se requirió adicionalmente de la aplicación de la Técnica de la Observación, este apartado muestra el análisis de los resultados alcanzados al categorizar la técnica mencionada a través de las correspondientes notas de campo. Así, es posible afirmar que durante las sesiones de clase observadas se apreció que los docentes dejan en evidencia aspectos procedimentales sobre el estudio de las inecuaciones que permiten valorar su conocimiento didáctico matemático. A continuación, se evidencian estos hallazgos mediante la Tabla 3 de categorías emergentes de la técnica observación.

**Tabla 3: Categorías emergentes de la observación**

<b>Códigos</b>	<b>Subcategorías</b>	<b>Categoría central</b>
Dominio de modelos		
Dominio de contenidos	Modelo de enseñanza asumido	
Modelos para la enseñanza desde la resolución de problemas	por el docente	
Sólido Conocimiento común del contenido	Estrategias implementadas	Práctica matemática
Herramientas empleadas para la integración de los diferentes registros semióticos.	para la enseñanza de inecuaciones	asociada al abordaje del tema de inecuaciones
Conocimiento matemático	Conocimiento didáctico	
Conocimiento ampliado del contenido.	matemático y la integración de	
Conocimiento Especializado.	los diferentes registros semióticos y sus transformaciones.	
Las secuencias didácticas planificadas	Enfoque asumido para la	
Procedimientos con diverso nivel de dificultad en el estudio de las inecuaciones	conversión entre registros semióticos	Conflictos epistémicos
La Conversión entre registro algebraico y simbólico.	Empleo de mecanismos de	vinculados a las transformaciones de las
La Conversión entre registro gráfico y simbólico para comprobar los resultados alcanzados simbólico.	verificación de resultados	representaciones de inecuaciones
Aplicación de las inecuaciones en situaciones de la vida real.	Sustento en procesos	
Detección de errores a partir del contraste de registros	argumentativos para la confirmación de procedimientos	

Fuente: Elaboración propia

En primera instancia y en función a los hallazgos de la observación se debe destacar el claro dominio de propiedades y de conceptos que el docente moviliza para resolver los problemas, solidez que le permite verificar que las soluciones dadas a estos sean apropiadas, inspirando confianza a los estudiantes al ofrecer respuestas concisas a sus interrogantes. Sin embargo, es preciso señalar que la técnica de la pregunta, con el consecuente incentivo de participación de otros estudiantes para que realicen sus aportes no es empleada por los

docentes. Otro atributo de los aspectos procedimentales es el carácter diáfano de las operaciones algebraicas, pues en ningún momento se observaron operaciones incorrectas u omisiones en los procesos desarrollados, develando esto un sólido *Conocimiento común del contenido*.

Es conveniente destacar que a lo largo de la práctica los docentes establecen las conexiones entre los conceptos y proyectan lo trabajado hacia lo que se necesita posteriormente, mencionando la necesidad de realizar procedimientos exentos de errores dada la posibilidad de aplicar las inecuaciones en situaciones de la vida real que ameriten decisiones informadas sobre bases matemáticas. Lo anterior revela que el *Conocimiento ampliado del contenido* presenta signos de consolidación en los docentes.

En lo que concierne al *Conocimiento Especializado*, que alude a las adecuaciones y adaptaciones realizadas por el docente para hacer enseñable el contenido matemático, puede destacarse que durante la práctica los docentes ejecutan un apropiado planteamiento de las inecuaciones asociadas a los problemas propuestos. No obstante, no se aprecia la transformación desde el contexto disciplinar a ejemplos o situaciones que se ajusten a la enseñanza del objeto matemático inecuación, constituyendo esto un aspecto mejorable en relación con el referido *Conocimiento Especializado*.

Por otra parte, se aprecian rasgos en la actuación docente que propician el desarrollo adecuado de las secuencias didácticas planificadas, realizando los ajustes necesarios para que sea fluido el camino transitado por los estudiantes para establecer congruencias e incongruencias entre los elementos de varias representaciones semióticas del objeto matemático inecuación.

A lo largo de la práctica matemática se distinguen los esfuerzos de los docentes por lograr que los estudiantes alcancen la detección de sus propios errores procedimentales, para ello recurren a solicitarles la explicación de los procedimientos seguidos, así como la justificación de los mismos atendiendo a las propiedades y conceptos implícitos en dichos procedimientos. De igual manera, al proponer problemas de orden teórico se esmeran por asegurarse de que los estudiantes muestren claridad en el planteamiento de las inecuaciones asociadas.

En cuanto a los aspectos referentes al manejo de registros semióticos, los docentes sustentan sus explicaciones en dos tipos de conversión: la Conversión entre registro algebraico y simbólico, y la Conversión entre registro gráfico y simbólico. Esta última, les sirve de apoyo para afianzar el manejo de simbología al trasladar las correspondientes respuestas a la representación en forma de intervalo. Justamente, el empleo de tales conversiones les permite a los docentes orientar a los estudiantes para que logren identificar errores a partir del contraste de registros.

Debe destacarse, sin embargo, que inicialmente se evidencia una tendencia en los estudiantes a emplear el registro algebraico, por lo que el docente encamina sus esfuerzos hacia el empleo de diferentes registros para comprobar los resultados alcanzados. De igual manera, al establecer ese giro en la representación los docentes incentivan la formulación de argumentos por parte de los estudiantes para que detallen las razones de las conversiones plasmadas, momento que los docentes aprovechan para decantar el lenguaje matemático empleado, pues se aprecia con frecuencia el empleo por parte de los estudiantes de términos o frases inadecuadas al explicar los cambios entre registros.

### **Contrastación de los Hallazgos**

Durante el desarrollo de un estudio de tipo cualitativo es imprescindible que se lleve a cabo la contrastación de los hallazgos con la finalidad de darle al proceso investigativo el valor y la fiabilidad que el recorrido metodológico requiere para su buena aplicación, este procedimiento se origina en el grupo de categorías que se desplegaron de las entrevistas provenientes de los informantes durante la aplicación de los instrumentos, para Martínez (2012) “la contrastación consiste en un proceso que le otorga carácter científico y efectivo a los enfoques cualitativos, estableciendo una relación entre los hallazgos y los referentes teóricos” (p. 23). De lo que se puede deducir que, mediante la contrastación donde se ejecuta una interpretación de los datos recabados que se derivaron de las entrevistas con los procedentes de la teoría.

En este orden de ideas, se presenta luego la matriz de triangulación que es un procedimiento que se origina de las categorías expuestas anteriormente en el estudio y es

propia de las investigaciones de corte cualitativo, por lo que Rodríguez, Gil y García (2003) manifiestan que: “Es una técnica de los estudios cualitativos que tiene como objetivo explorar y analizar la información desde varias perspectivas para luego realizar la contrastación” (p. 54). En referencia a lo señalado por los eruditos, esta matriz de triangulación busca que el autor establezca una interpretación exhaustiva de las evidencias y seguidamente realizar la comparación.

### Contrastación

En cuanto a la contrastación de las categorías centrales y las subcategorías, es importante resaltar el proceso de contrastación de los hallazgos encontrados en la recolección de la información según la entrevista y la observación, además de valerse de la matriz de triangulación de para desarrollar un proceso descriptivo, en cual surgieron dos categorías centrales, las cuales se van detallar a continuación:

**Tabla 4:** *Matriz triangular*

Categoría central	Subcategoría	Entrevistas	Observación	Fundamento Teórico
Conflictos epistémicos vinculados a las transformaciones de las representaciones de inequaciones	Enfoque asumido para la conversión entre registros semióticos	√	√	√
	Manejo de registros semióticos	√	√	√
Práctica matemática asociada al abordaje del tema de inequaciones	Caracterización del modelo de enseñanza asumido por el docente	√	√	√
	Exteriorización del conocimiento didáctico matemático	√	√	√

**Fuente:** elaboración propia (2025)

**Leyenda:** √: Presente- X: Ausente

Con referencia a lo expuesto en el cuadro precedente correspondiente a la matriz triangular, allí se pueden observar los datos específicos necesarios para que el autor logre llevar a cabo la interpretación de las categorías centrales y sus respectivas subcategorías con el fin de hacer la contrastación de la información recolectada con el basamento teórico

abordado; de manera puntual, la matriz hace referencia a los conflictos epistémicos que vinculan la representación de las inecuaciones con la práctica pedagógica del docente y el manejo de registro semiótico. Ante lo cual, es preciso que los docentes desde los registros semióticos aborden las representaciones y expresiones numéricas, así como el lenguaje natural y las notaciones algebraicas. Por lo que se evidencia una presencia en las categorías centrales desde los hallazgos de los informantes claves tanto en la entrevista como en la observación y en basamento teórico de estos aspectos fundamentales como lo son: Conflictos epistémicos vinculados a las transformaciones de las representaciones de inecuaciones y la Práctica matemática asociada al abordaje del tema de inecuaciones dejándolos en evidencia. Lo que va permitir autenticar e integrar en un todo coherente los resultados y los hallazgos de la investigación.

### **Consideraciones finales**

Atendiendo a los hallazgos obtenidos y al propósito de la investigación desarrollada orientada a generar constructos teóricos sobre los conocimientos didácticos matemáticos de los docentes de la Institución Educativa Colegio San Antonio en torno al manejo de los registros semióticos en la enseñanza de las inecuaciones, fue realizado un análisis inductivo de los insumos aportados por la aplicación de las técnicas seleccionadas: la Entrevista y la Observación. Dicho análisis permitió el establecimiento de dos categorías centrales: Conflictos epistémicos vinculados a las transformaciones de las representaciones de inecuaciones y Práctica matemática asociada al abordaje del tema de inecuaciones, las cuales permitieron profundizar en la interpretación de los conocimientos didácticos matemáticos de los docentes.

Así, en correspondencia a los hallazgos obtenidos en función al Objetivo Específico Nro. 1, puede señalarse la descripción de los conflictos epistémicos que evidencian los docentes de matemática en las transformaciones de las representaciones de una inecuación en los grados de la media técnica vocacional. Tales conflictos epistémicos, que envuelven las inquietudes respecto a la manera de afrontar desajustes en los elementos discursivos o expresiones lingüísticas, así como en los elementos procedimentales que conducen a la solución de un problema relativo al tema de inecuaciones, conducen a los docentes a centrar su atención en aspectos tales como la consolidación del dominio de propiedades y la

búsqueda del carácter diáfano de las operaciones algebraicas como elementos centrales de orden procedimental que deben ser considerados en el desarrollo de la práctica matemática.

Ese interés manifestado por los informantes se confirma en el esfuerzo que demuestran en su labor por lograr que los estudiantes decanten los elementos procedimentales y exhiban en las operaciones algebraicas desarrolladas un claro dominio de las propiedades involucradas. De allí que los docentes muestren su permanente atención a la detección de errores algebraicos y la observancia de estos por parte de los estudiantes, esto último procuran alcanzarlo recurriendo a la solicitud de explicaciones sobre los procedimientos seguidos, así como a la justificación de los mismos atendiendo a las propiedades y conceptos implícitos en dichos procedimientos.

Otro de los conflictos epistémicos que dejan de manifiesto los docentes tiene vinculación con el adecuado manejo de simbología, por esta razón durante el desarrollo de su práctica matemática hacen hincapié en el correcto empleo de los símbolos, procurando atender las dificultades de interpretación de los mismos. Esto constituye un elemento esencial para un logro efectivo de la aprehensión del significado del objeto matemático inecuación, pues conduce a superar las barreras dadas por el carácter ambiguo del simbolismo algebraico como fuente esencial de las dificultades de interpretación.

Destaca igualmente, el reconocimiento por parte de los docentes de la relevancia de expresar el objeto matemático inecuación en sus diferentes representaciones, así como del apoyo en la conversión entre registros semióticos para conducir al estudiante a apreciar facetas diferentes del mismo objeto matemático. En función de lo anterior, los docentes sustentan sus explicaciones en dos tipos de conversión: la Conversión entre registro algebraico y simbólico, y la Conversión entre registro gráfico y simbólico. Este atributo de la práctica de los docentes presenta relevancia por su aporte al logro de una aprehensión conceptual exitosa del objeto matemático inecuación, ya que permite diferenciar sus diversos modos de representación.

Un aspecto epistémico esencial destacado por los docentes es su interés por emplear diferentes registros para comprobar los resultados alcanzados y lograr la identificación de errores a partir del contraste de registros. De manera concreta, la conversión desde el registro

gráfico hacia el registro simbólico permite a los docentes afinar el manejo de simbología al trasladar las correspondientes respuestas apreciadas en el registro gráfico a la representación en forma de intervalo. De manera que, el empleo de tales conversiones le permite a los docentes orientar a los estudiantes para que logren identificar errores a partir del contraste de registros.

Precisamente, el apoyo en la multirepresentacionalidad permite a los docentes afrontar la tendencia en los estudiantes a emplear el registro algebraico, brindándoles herramientas que le ofrecen el beneficio de comprobar los resultados alcanzados. Cabe señalar que, el sustento en la diversidad de representaciones le brinda al docente la posibilidad de implementar la argumentación por parte de los estudiantes para exponer las razones de las conversiones plasmadas, hecho que se vincula con la intención adicional de efectuar las depuraciones del lenguaje matemático empleado.

Por otra parte, los hallazgos encontrados en función al objetivo Especifico Nro. 2 que buscaba caracterizar el conocimiento didáctico matemático asociado al manejo de registros semióticos en la enseñanza de las inecuaciones, es posible establecer que en los docentes que participaron en el estudio dicho conocimiento se presenta consolidado. De manera puntual, debe destacarse el excelso dominio de propiedades y de conceptos que el docente moviliza para resolver los problemas, firmeza teórico conceptual que le permite confirmar que las soluciones alcanzadas son correctas, inspirando confianza a los estudiantes al ofrecer respuestas precisas a sus interrogantes.

Es preciso resaltar el carácter diáfano de las operaciones algebraicas, aspecto que evidencia un sólido *Conocimiento común del contenido* y que resulta relevante para avalar el desarrollo de una práctica matemática efectiva. Este carácter consolidado del referido conocimiento les permite a los docentes seleccionar un conjunto representativo y articulado de problemas cuya secuencia didáctica refuerce la aprehensión del objeto matemático inecuación. De igual manera, se determinó que los docentes exhiben un *Conocimiento ampliado del contenido* consolidado, conduciéndoles a establecer la coherencia vertical y horizontal entre el contenido asociado a inecuaciones y otros contenidos curriculares. Este conocimiento le facilitó al docente la toma de decisiones sobre los tratamientos requeridos en cada registro para posibilitar una mejor comprensión conceptual.

En lo concerniente al *Conocimiento especializado*, que hace referencia a las adecuaciones realizadas por el docente para hacer enseñable el contenido matemático, puede señalarse que los docentes adaptan su accionar a la dinámica que se suscita en el aula imponiendo demandas particulares en función de las particularidades de los estudiantes. No obstante, no se evidenció la transformación desde el contexto disciplinar a ejemplos o situaciones de la realidad que se ajusten a la enseñanza del objeto matemático inecuación, constituyendo esto un aspecto que requiere atención para garantizar la robusta consolidación del referido *Conocimiento Especializado*.

Conviene acotar que, la valoración de la práctica matemática no arrojó evidencias del fomento de interacciones que favorecieran el aprendizaje, pues no se propició la discusión entre pares para esclarecer los conflictos semióticos, por lo que se desaprovechó la posibilidad de establecer diálogos reflexivos sustentados en la argumentación para dilucidar tales conflictos.

Por su parte, los elementos emergentes que se abordan en el Objetivo Específico Nro. 3 pudo determinar la relación existente entre los obstáculos para el estudio de las inecuaciones, derivados de los errores operacionales y las dificultades en la conversión entre registros, y los conflictos semióticos evidenciados por los estudiantes, es posible afirmar que el estudio confirma que tales conflictos se generan por los errores ocasionados por el inadecuado manejo del simbolismo algebraico, así como por la incomprensión de la simbología pues esta última determina una ausencia de sentido que distorsiona el camino que toma el estudiante para alcanzar la aprehensión del significado del objeto matemático inecuación.

A la luz de los resultados alcanzados es pertinente recomendar la implementación de los cambios entre registros a fin de afinar la comprensión de la simbología, ampliar las perspectivas comprensivas del objeto matemático inecuación y apoyar la detección de errores para proceder a realizar los respectivos ajustes. De igual manera, puede sugerirse que la práctica matemática asociada al tema de inecuaciones se presenta con una mayor vinculación entre el plano disciplinar y el plano contextual, a fin de que los estudiantes establezcan la aplicabilidad y utilidad de los conceptos involucrados en la temática.

Dada la relevancia que presenta el conocimiento didáctico matemático como evidencia de la disposición del docente para brindar experiencias de aprendizaje efectivas y fructíferas, se sugiere desarrollar estudios análogos en otros contextos y que aborden temáticas básicas en la formación matemática a fin de determinar variantes o particularidades que destaquen en esos contextos, así como aspectos mejorables cuya atención redundará en beneficio de los estudiantes.

Todos estos hallazgos llevan a formular los constructos teóricos que darán firmeza al objeto de estudio desde la construcción teórica sobre los conocimientos didácticos matemáticos de los docentes de la Institución Educativa Colegio San Antonio en torno al manejo de los registros semióticos en la enseñanza de las inecuaciones.

## CAPÍTULO V

### **Elementos teóricos emergentes sobre los conocimientos didácticos matemáticos de los docentes de la Institución Educativa Colegio San Antonio en torno al manejo de los registros semióticos en la enseñanza de las inecuaciones**

#### **Presentación**

A la luz de los resultados alcanzados una vez aplicados los correspondientes instrumentos, se indican seguidamente los aspectos más resaltantes que emergen del proceso de análisis inductivo desarrollado. Los elementos teóricos que emergen del referido análisis ofrecen una visión densa sobre la caracterización de la práctica matemática, así como el Conocimiento Didáctico Matemático puesto en evidencia por los docentes durante la misma.

Debe destacarse que la intención de retomar los hallazgos supera la caracterización para sumergirse en la posibilidad de captar debilidades o fisuras, así como reconocer bondades o fortalezas de la práctica analizada.

Partiendo de lo anterior, se exponen elementos teóricos sobre los conocimientos didácticos matemáticos de los docentes de la Institución Educativa Colegio San Antonio en torno al manejo de los registros semióticos en la enseñanza de las inecuaciones, constructos que surgieron del análisis de los hallazgos, como se desglosa a continuación.

***Constructos sobre los Conflictos epistémicos vinculados a las transformaciones de las representaciones de inecuaciones y su proceso de enseñanza.***

En primer lugar, en lo concerniente los *Conflictos epistémicos vinculados a las transformaciones de las representaciones de inecuaciones* puede destacarse que el estudio develó la preocupación de los docentes por atender con la mayor claridad los aspectos procedimentales asociados al estudio de las inecuaciones, considerando que el dominio de propiedades y el carácter diáfano de las operaciones algebraicas son altamente relevantes para garantizar un abordaje fluido por esta temática.

Esta preocupación acentuada en las narrativas expuestas por los informantes muestra congruencia con la apreciación de la práctica matemática, ya que en la observación efectuada se apreció el esfuerzo de los docentes por lograr que los estudiantes decanten los elementos procedimentales y manifiesten en las operaciones algebraicas desarrolladas un claro dominio de las propiedades involucradas. Tal concordancia permite inferir que los docentes centran sus esfuerzos inicialmente en el desarrollo diáfano de los elementos procedimentales, lo que contribuye a evitar la presencia de desajustes entre el significado institucional pretendido y el significado personal logrado. No cabe la menor duda que este es un apropiado punto de partida para minimizar la presencia de errores y garantizar la aprehensión conceptual del objeto matemático inecuación.

Además, los testimonios de los informantes que hacen referencia a su permanente atención a la detección de errores algebraicos y la observancia de estos por parte de los estudiantes coinciden con lo apreciado en las observaciones realizadas. En efecto, se evidenció que los docentes inducen a los estudiantes a que detecten sus propios errores procedimentales, recurriendo a la solicitud de explicaciones sobre los procedimientos seguidos, así como a la justificación de los mismos atendiendo a las propiedades y conceptos implícitos en dichos procedimientos.

Este hallazgo conduce a colegir que el accionar docente debe orientarse a la atención de tales errores como un paso inicial para la determinación de debilidades en los procesos operacionales y algebraicos, el fomento de la revisión permanente de los procedimientos algebraicos constituye un elemento substancial para evitar la algebrización mecánica que puede conducir al desarrollo de procesos operacionales con vacíos de significado. De igual manera, el relevante la consideración de la justificación de los procedimientos, pues de manera intrínseca se promueve la reflexión sobre el desarrollo de las operaciones y la congruencia de los posibles resultados alcanzados.

Del mismo modo, tal y como lo habían expresado en las entrevistas, los informantes enfatizan el apropiado planteamiento de las inecuaciones asociadas a los problemas propuestos. Efectivamente, la observación permitió corroborar que los docentes al proponer problemas de orden teórico se esmeran por asegurarse de que los estudiantes muestren claridad en el planteamiento de las inecuaciones asociadas.

Por otro lado, las inquietudes expresadas por los informantes vinculadas con el adecuado manejo de simbología se confirman a partir de lo evidenciado en las observaciones realizadas. Particularmente, los docentes hacen hincapié en el correcto empleo de los símbolos, procurando atender las dificultades de interpretación de los mismos. Este aspecto es relevante, pues constituye un paso esencial para emprender avanzar exitosamente en el estudio de las inecuaciones, partiendo del reconocimiento de que las dificultades de interpretación del simbolismo algebraico se derivan, entre otras razones, del carácter ambiguo que presenta el referido simbolismo. Tal y como lo señalan Drouhard y Teppo (2004) “el simbolismo algebraico permite moverse con fluidez a través de capas de abstracción y comprimir complejos pensamientos matemáticos en eficientes cadenas de símbolos. Al mismo tiempo, sin embargo, estas características hacen a la escritura simbólica muy opaca para el estudiante” (p.240), de allí la relevancia de la atención que pueda prestarse a las interpretaciones o usos erróneos de la correspondiente simbología.

Lo descrito afianza, como rasgo propio del trabajo del estudiante al desarrollar inecuaciones, la incertidumbre que acompaña su accionar mediado por el empleo de símbolos que aluden a objetos intangibles y sujetos a normas propias de la sintaxis matemática que se alejan de su comprensión sencilla. Esta es, sin duda, una de las tareas más arduas para el docente quien encuentra en el simbolismo algebraico la primera vía de acercamiento al objeto matemático inecuación, por tal razón la consideración de representaciones semióticas alternas abre las puertas a una comprensión más diáfana de los procesos implicados en el estudio de las inecuaciones.

Otro de los aspectos que los informantes resaltaron en sus testimonios fue el relacionado con la necesidad de expresión del objeto matemático inecuación en sus diferentes representaciones, así como el requerimiento de apoyarse en la conversión entre registros semióticos. Efectivamente, en las observaciones se evidenció que en cuanto a los aspectos referentes al manejo de registros semióticos, los docentes sustentan sus explicaciones en dos tipos de conversión: la Conversión entre registro algebraico y simbólico, y la Conversión entre registro gráfico y simbólico. Este atributo de la práctica de los docentes presenta relevancia por su aporte al logro de una aprehensión conceptual exitosa del objeto matemático inecuación, pues como lo expone Duval (2006) es fundamental la utilización de

varios sistemas de representación y expresión, ya que permiten realizar diversas enunciaciones de un objeto, diferenciándolo sus diferentes modos de representación.

En este punto, no obstante, es preciso destacar que el accionar del docente debe mantenerse atento a la necesidad de aclarar que aun cuando se empleen diversas representaciones el objeto es esencialmente único, a fin de evitar distorsiones en la aprehensión del significado, pues, como lo plantea D'Amore (2006), “dada la pluralidad de modos de representación y expresión el objeto matemático se presenta, en cierto sentido, como único, pero en otro sentido como múltiple” (p. 47).

Por otra parte, los informantes manifestaron en las entrevistas su interés permanente por emplear diferentes registros para comprobar los resultados alcanzados y lograr la identificación de errores a partir del contraste de registros, esto se confirmó en las observaciones. Precisamente, la conversión desde el registro gráfico hacia el registro simbólico sirve de apoyo a los docentes para afianzar el manejo de simbología al trasladar las correspondientes respuestas a la representación en forma de intervalo. De esta forma, el empleo de tales conversiones le permite a los docentes orientar a los estudiantes para que logren identificar errores a partir del contraste de registros.

Cabe acotar que la atención que los docentes brindan al adecuado manejo de simbología y las correcciones pertinentes a partir del empleo de diferentes registros semióticos es resaltada por Torres (2017) al plantear que los inconvenientes en el manejo de la simbología generan disparidades interpretativas que obstaculizan el efectivo aprendizaje, por lo que se hace imprescindible su permanente vigilancia. Adiciona la referida autora que el carácter difuso de los objetos matemáticos se incrementa cuando, sin la apropiada consolidación del sentido de los símbolos, se intenta establecer la vinculación entre el manejo del simbolismo algebraico y los diferentes medios de representación de un objeto matemático (Torres, 2017).

Considerando la descripción del interés que expresan los informantes en esos dos aspectos centrales al abordar el tema de inequaciones: el manejo de la simbología y el empleo de las diferentes representaciones, se determina una estrecha relación con los planteamientos de Duval (2006), quien manifiesta el llamado a procurar un tránsito fluido entre registros,

recalcando que más allá de la elección del sistema de representación lo relevante es desarrollar la capacidad de relacionar las diferentes representaciones de un mismo objeto matemático (Duval, 2006, p.159).

Justamente, esta fluidez determina la claridad del significado de los objetos matemáticos (Torres, 2017, p.23), conduciendo a la minimización de los conflictos semióticos, razón de peso para destacar la importancia del enfoque multirepresentacional del objeto matemático inecuación. Al respecto, Torres (2016) enfatiza que el éxito en el estudio de las inecuaciones “está ligado a la fluidez alcanzada por el estudiante al efectuar la conversión entre registros; siendo el enfoque multirepresentacional el soporte de la adecuada búsqueda del significado del objeto matemático estudiado” (p.23).

Debe acotarse que, a lo largo de las observaciones realizadas, inicialmente se evidencia una tendencia en los estudiantes a emplear el registro algebraico, por lo que el docente debió encauzar sus esfuerzos hacia el empleo de diferentes registros para proceder luego a comprobar los resultados alcanzados. Así, al establecer ese giro en la representación los docentes incentivan la formulación de argumentos por parte de los estudiantes para que expongan las razones de las conversiones plasmadas, momento que los docentes aprovechan para efectuar las depuraciones del lenguaje matemático empleado, pues se aprecia con frecuencia el empleo por parte de los estudiantes de términos inadecuados o incorrectos al explicar los cambios entre registros.

Esta tendencia hacia el empleo exclusivo del registro algebraico ha sido resaltada por Larios *et al.* (2021), quienes señalan que “los alumnos de bachillerato prefieren utilizar estrategias aritméticas para plantear y resolver problemas” (p.265). Del mismo modo ha sido considerada en los estudios desarrollados por Contreras, Luque y Ordoñez (2003), quienes sostienen que ese fenómeno didáctico denominado algebrización se manifiesta como consecuencia de la aplicación de un enfoque algebraico y reduccionista en la enseñanza de ciertos temas, lo que impacta en el proceder del estudiante al asumir “de una forma simplista las ideas y técnicas de análisis” (p. 399).

Por su parte, Prada, Hernández y Ramírez (2016) subrayan la potencial debilidad de la algebrización y sus consecuencias, al señalar que: “el hecho de que el estudiante realice

los procesos mecánicos de forma más o menos correcta no implica que haya alcanzado una comprensión satisfactoria de dichos conceptos” (p.190). Adicionalmente, Larios *et al.* (2021) acentúan que “es necesario que los alumnos manejen conceptos y algoritmos algebraicos de manera apropiada que les permita ocuparse del aprendizaje de conceptos nuevos (...) y no se detengan en resolver situaciones algebraicas” (p.265), razón por la cual es relevante el hecho de que los docentes cuya práctica fue observada hayan evidenciado sus esfuerzos por eludir la réplica de ciertos protocolos de solución por parte de los estudiantes.

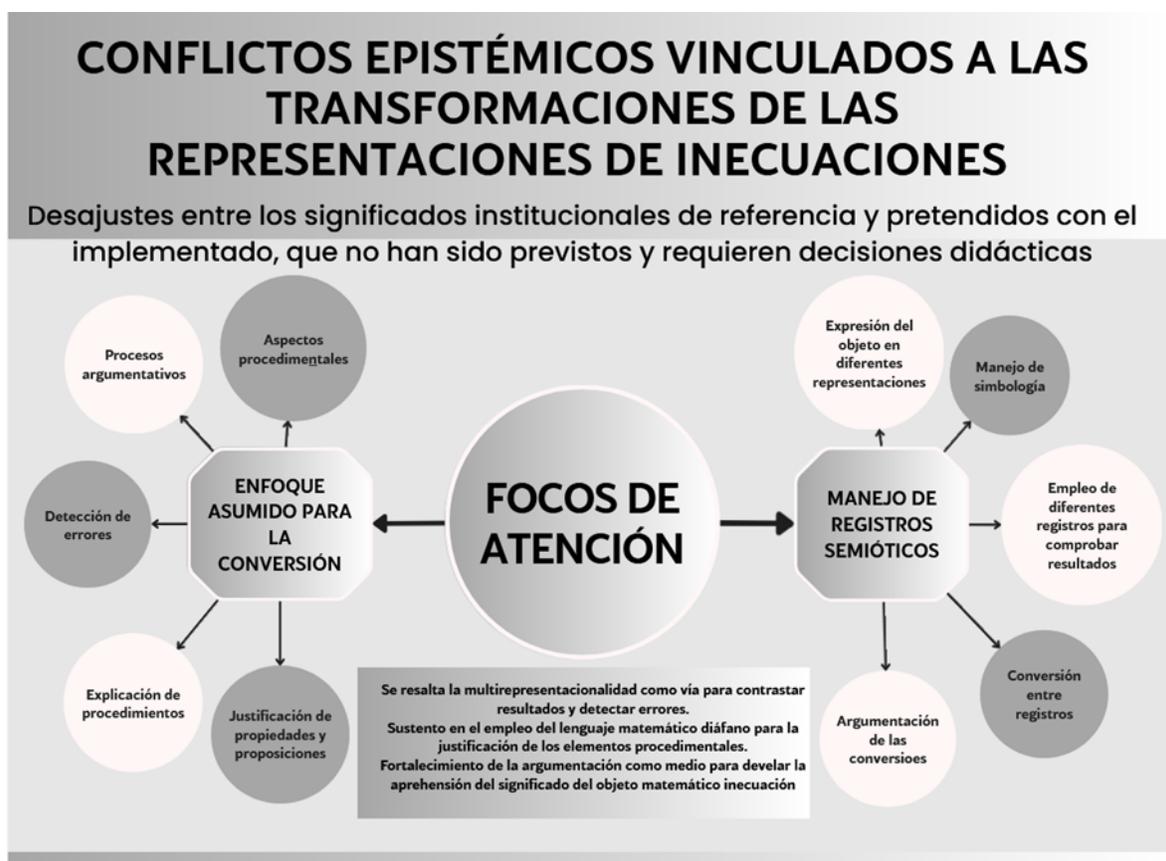
Es preciso resaltar además la convergencia entre el interés expresado por los informantes por atender las expresiones lingüísticas y lo apreciado en las observaciones donde, en efecto, la decantación de las expresiones lingüísticas ocupó un lugar central en el desarrollo de la práctica. Esta intencionalidad de los docentes se encuentra alineada con la perspectiva que ofrece el MEN (2006) sobre los diferentes aspectos que conforman la enseñanza de la matemática al plantear que se requiere adoptar una “visión del carácter histórico y contingente de las matemáticas” (p.47), considerándolas “como un cuerpo de prácticas y de realizaciones conceptuales y lingüísticas” (p.47). De esta manera, se resalta la intersección de tres aristas en la práctica matemática: acciones, componentes teóricos y lenguaje, los cuales deben ser atendidos en igualdad de condiciones y determinan la posibilidad de desarrollar fecundos análisis de las interacciones discursivas al interior de la clase.

En estrecha relación con lo anterior se encuentra la convergencia apreciada entre lo expuesto por los informantes y lo evidenciado en las observaciones respecto a la solicitud de argumentaciones sobre los pasos seguidos para efectuar las conversiones entre registros, así como el énfasis en el uso adecuado del lenguaje matemático al explicar los cambios entre registros. Conviene subrayar que el individuo como protagonista del proceso de aprendizaje tiene conciencia subjetiva sobre el significado que asigna a los objetos matemáticos, permitiéndole esto formalizar prácticas discursivas sobre los mismos. Por tal razón, la evaluación de los elementos lingüísticos, discursivos y argumentativos presenta preeminencia al efectuar el análisis didáctico. (Torres, 2017).

Atendiendo a lo expuesto, es posible colegir que la relevancia que le otorgue el docente al cuidado y transparencia de las expresiones lingüísticas es de elevada significación

en la intención de consolidar la aprehensión conceptual sólida del significado del objeto matemático inecuación, constituyendo una fortaleza del quehacer didáctico y un rasgo invaluable en una práctica matemática con elevada idoneidad didáctica.

*Figura 14. Constructos sobre los Conflictos epistémicos vinculados a las transformaciones de las representaciones de inecuaciones y su proceso de enseñanza.*



Fuente: Elaboración propia

*Constructos sobre las Práctica docente en el área de matemática asociada al abordaje del tema de inecuaciones.*

En lo concerniente a la Práctica matemática asociada al abordaje del tema de inecuaciones, debe señalarse que el estudio permitió establecer la configuración de la misma a partir de la caracterización del modelo de enseñanza asumido por el docente y el compendio de los rasgos que permitieron delinear la exteriorización del conocimiento didáctico

matemático. Como parte de tal caracterización se encontró que la práctica matemática implementada sobre la base del empleo de los diversos registros de representación y la conversión entre registros semióticos posibilita la verificación de resultados y determina la generación de un espacio de discusión fértil que coadyuva al esclarecimiento de dudas y a la atención de errores conceptuales y procedimentales. Justamente, al recurrirse al empleo de mecanismos de verificación de resultados y exigirse a los estudiantes el sustento en procesos argumentativos para la confirmación de procedimientos se establece un camino expedito para la consolidación del pensamiento matemático de carácter crítico, justipreciando el estudiante sus propios desarrollos operacionales como parte de la decantación de sus propios aprendizajes.

En lo atinente a las herramientas empleadas para la integración de los diferentes registros semióticos y sus transformaciones, si bien en los testimonios expuestos en las entrevistas aludían a la búsqueda de caminos para lograr la transformación de las concepciones vinculadas con las inecuaciones para hacer más expedito el logro de la aprehensión conceptual requerida, acentuando que dicho concepto debe ser contextualizado y reconocido en la medida de lo posible en la realidad, en las observaciones no fue posible apreciar evidencias didácticas que permitieran concluir que el estudiante estuviese en condiciones de reconocer en situaciones reales la aplicabilidad, validando en su propio contexto la utilidad de las inecuaciones como objeto matemático.

Sobre este punto, puede acotarse que la contextualización le otorga al significado del objeto matemático un carácter singular, esta particularización es reafirmada por Torres (2017), quien haciendo referencia a su caracterización afirma que el significado institucional como “saber que se considera aceptable dentro de una institución, se impregna del conjunto de valores que caracterizan la misma y de las intencionalidades didácticas” (p.48). Esto conduce al necesario replanteamiento de la posibilidad de transformar las concepciones vinculadas con las inecuaciones mediante la contextualización, a fin de resaltar su utilidad y aplicación en la cotidianidad de los estudiantes.

En correspondencia con lo expuesto, puede destacarse el planteamiento de Vrancken et al. (2010) quienes al referirse a la falta de significado del objeto matemático inecuación, señalan que tal ausencia de significado es “el gran problema que se plantea en el trabajo con

inecuaciones. Al reducir su enseñanza al desarrollo de determinados métodos de resolución se dejan de lado elementos que pueden ayudar a otorgar un sentido más amplio al objeto” (p.65), entre ellos los elementos que aluden a su aplicación en la realidad.

Por otro lado, en lo referente al contraste de resultados alcanzados a partir de diferentes representaciones, aspecto resaltado en los testimonios de los informantes como premisa de su accionar didáctico, las observaciones permitieron apreciar rasgos en la actuación docente que propician el desarrollo adecuado de las secuencias didácticas planificadas, realizando los ajustes necesarios para garantizar la fluidez en el aprendizaje a partir del establecimiento de congruencias e incongruencias entre los elementos de varias representaciones semióticas del objeto matemático inecuación.

En lo que respecta a la exteriorización del conocimiento didáctico matemático debe destacarse el claro dominio de propiedades y de conceptos que el docente moviliza para resolver los problemas, solidez que le permite confirmar que las soluciones alcanzadas sean correctas, inspirando confianza a los estudiantes al ofrecer respuestas precisas a sus interrogantes. Sin embargo, es conveniente señalar que la técnica de la pregunta, con el consecuente incentivo de participación de otros estudiantes para que realicen sus aportes, o la reformulación y redireccionamiento de las interrogantes iniciales, no es empleada por los docentes.

Otro rasgo notable de los aspectos procedimentales es el carácter diáfano de las operaciones algebraicas, pues en ningún momento se observaron operaciones incorrectas u omisiones en los procesos desarrollados, develando esto un sólido *Conocimiento común del contenido*. Aspecto de gran relevancia para garantizar el desarrollo de una práctica matemática fructífera, pues no solo le concede al docente la habilidad para obtener una respuesta correcta al momento de resolver problemas matemáticos, sino decidir si una respuesta dada a una actividad matemática propuesta es acertada y coherente; además de permitirle seleccionar una muestra representativa y articulada de problemas de diversos tipos cuya secuencia didáctica afiance la aprehensión del objeto matemático inecuación.

Es conveniente resaltar además que, a lo largo de la práctica los docentes establecen las conexiones entre los conceptos y proyectan lo trabajado hacia lo que se necesita

posteriormente, mencionando la necesidad de realizar procedimientos exentos de errores dada la posibilidad de aplicar las inecuaciones en situaciones de la vida real que ameriten decisiones informadas sobre bases matemáticas. Lo anterior revela que el *Conocimiento ampliado del contenido* presenta signos de consolidación en los docentes, siendo este rasgo de gran importancia pues “este dominio es el que permite establecer la coherencia vertical y horizontal entre los contenidos curriculares de matemáticas” (Amaya, 2016, p.104), además de apoyar las decisiones del docente respecto al orden de presentación de los registros y sobre “los tratamientos necesarios en cada registro para facilitar la comprensión conceptual” (Amaya, 2016, p.104).

En lo concerniente al *Conocimiento especializado*, que alude a las adecuaciones y adaptaciones realizadas por el docente para hacer enseñable el contenido matemático, puede destacarse que durante la práctica los docentes realizan un apropiado planteamiento de las inecuaciones asociadas a los problemas propuestos. No obstante, no se aprecia la transformación desde el contexto disciplinar a ejemplos o situaciones que se ajusten a la enseñanza del objeto matemático inecuación, constituyendo esto un aspecto mejorable en relación con el referido *Conocimiento Especializado*.

Esto hace que no se alcance a distinguir durante el desarrollo de la temática el “carácter utilitario ampliado del conocimiento matemático” (MEN, 2006, p.48), aspecto substancial en el desarrollo de la práctica matemática pues en la dinámica propia de la sociedad actual se amerita “cada vez más de herramientas proporcionadas por las matemáticas –sin olvidar ni menospreciar los aportes de otras disciplinas como las ciencias naturales y sociales– y por las nuevas tecnologías, para lograr con ellas desempeños eficientes y creativos en muchas labores” (MEN, 2006, p.47). Sin duda, es un aspecto que requiere atención especial en el desempeño de los docentes pues la temática relacionada con inecuaciones forma parte del “conocimiento matemático imprescindible y necesario en todo ciudadano para desempeñarse en forma activa y crítica en su vida social y política y para interpretar la información necesaria en la toma de decisiones” (MEN, 2006, p.47).

Debe acotarse que, aunque en las entrevistas los informantes expresaron su preocupación sobre el fomento de las interacciones que favorecen el aprendizaje, especialmente haciendo alusión a la discusión entre pares y el empleo de la argumentación

para esclarecer los conflictos semióticos, no se evidenció en las observaciones realizadas el estímulo esperado de tales interacciones, desaprovechando la posibilidad de recurrir al entramado comunicacional que se activa el aula como generador de aprendizajes y mediador en la atención de los conflictos semióticos.

En efecto, como lo sugiere Vanegas (2010), al presentarse un conflicto semiótico, se debe entender que este “surge cuando alguien sintiendo que tiene la razón se enfrenta con resistencias. En ese momento se tiene que tener la disposición a la negociación, al arreglo a la mitad del camino” (p. 71), esto requiere una intervención asertiva del docente para efectuar los ajustes oportunos, además de una óptica sensible para detectarlos. Vale recordar que, en el caso de inecuaciones tales conflictos se relacionan, de acuerdo a lo planteado por Rodríguez (2015), a los errores ocasionados por el inadecuado manejo del simbolismo algebraico y de su incomprensión, los cuales son “causados por la ausencia de sentido” (Rodríguez, 2015, p.54), así como a las dificultades propias de las conversiones entre registros.

Esa mirada acuciosa que se exige del docente obedece a “la regularidad con la que se manifiestan conflictos semióticos en las prácticas de los alumnos de Bachillerato” (Badillo et al., 2005, p. 1), por lo que se espera además una atención cuidadosa a la implementación del simbolismo algebraico para afrontar de manera pertinente la complejidad que rodea su empleo.

Del mismo modo, un aspecto que debe ser considerado en la práctica matemática, y que no alcanza a visualizarse en las observaciones realizadas, es la implementación de diálogos encaminados a la decantación del lenguaje matemático, como parte de los lazos interaccionales que pueden ser propiciados en el aula. Este llamado también lo formula el MEN (2006) al señalar que “es necesario que en los procesos de enseñanza de las matemáticas se asuma la clase como una comunidad de aprendizaje” (p.48), procurando la interacción de los actores “para construir y validar conocimiento, para ejercer la iniciativa y la crítica y para aplicar ese conocimiento en diversas situaciones y contextos” (p.48).

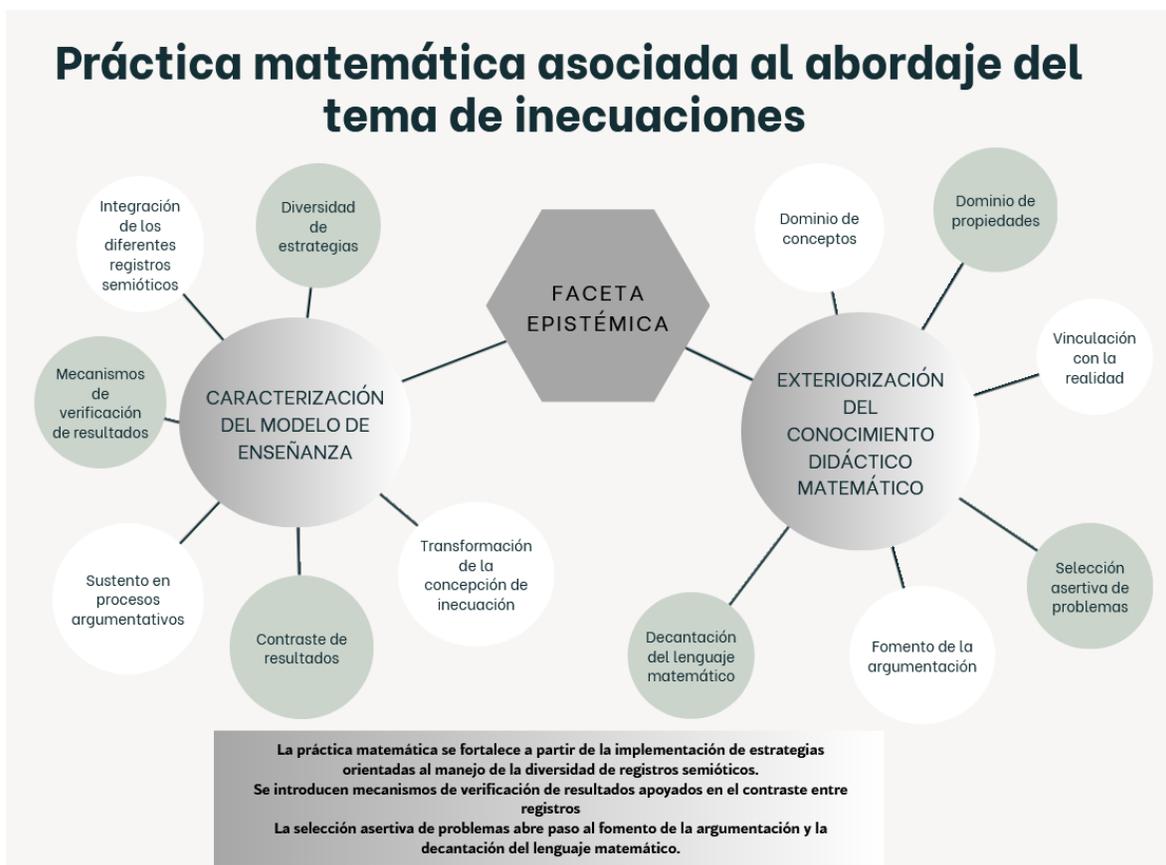
La preeminencia del acto comunicativo y su aporte al aprendizaje debe ser rescatada, pues tras la simbología subyace un acto comunicativo cuyo análisis puede enriquecer la

comprensión de las situaciones didácticas, situaciones donde las dimensiones individuales y sociales de la actividad matemática se entremezclan de manera armónica. Al respecto, Torres (2017) sostiene que “el análisis de las situaciones didácticas y los procesos de cognición matemática amerita de la consideración de las interacciones de los actores” (p.43), al igual que de la consideración “de los rasgos característicos del contexto en el cual el quehacer didáctico se desarrolla, elementos que se conjugan para impregnar de matices particulares los objetos emergentes” (p.43).

La adopción de esta óptica sobre la práctica matemática y las dinámicas interaccionales que en ellas se suscitan permite visualizar tal práctica como “un proceso de construcción y comunicación de objetos o significados matemáticos, en un contexto educativo particular” (Torres, 2017, p.44), por lo que de una manera amplia puede ser “reconocida como una acción inherente a los juegos de lenguaje, verbal y simbólico, inmersos en formas de vida con rasgos socioculturales específicos y embebida por la intencionalidad de los actores” (Torres, 2017, p.44). En efecto, es necesario resaltar que el avance que el estudiante puede alcanzar en su proceso de aprendizaje se ve influenciado notoriamente por la conjunción armónica de los elementos conceptuales, lingüísticos y operacionales, triada que sustenta la construcción del significado del objeto matemático inecuación.

Esto conduce a establecer tal triada como un elemento de anclaje esencial para abordar el estudio de los diferentes objetos matemáticos, permitiendo al docente visualizar el avance de los estudiantes y realizar los ajustes necesarios ante la presencia de conflictos semióticos, apoyando esto último en las bondades que ofrecen las relaciones interaccionales como medio para tamizar los posibles sesgos conceptuales y los inapropiados usos del lenguaje matemático. Así a la decantación de los procesos operacionales se une la refinación del lenguaje para consolidar una aprehensión conceptual transparente del objeto matemático inecuación, superando las barreras propias de su carácter ostensible.

**Figura 15. Constructos sobre las Práctica docente en el área de matemática asociada al abordaje del tema de inecuaciones**



Fuente: Elaboración propia

**Constructos sobre el manejo de los registros semióticos en la enseñanza de las inecuaciones en el área de matemática**

La valoración de la práctica matemática a partir de la conjunción de dos herramientas poderosas como lo son la Teoría Fundamentada y el Modelo de Conocimiento Didáctico Matemático develan una serie de aspectos substanciales respecto al manejo de los registros semióticos en la enseñanza de las inecuaciones. En primer término, debe destacarse que el apoyo en la diversidad de registros semióticos brinda al docente la oportunidad de enriquecer sus estrategias didácticas, al tiempo que permite ampliar el horizonte comprensivo del estudiante respecto al objeto matemático inecuación.

Precisamente, la multirepresentacionalidad y el adecuado manejo de la conversión entre registros pasan a ser elementos esenciales de apoyo para adentrarse en procesos que ameritan niveles de reflexión superiores como la confirmación de resultados o la detección de errores a partir del contraste entre registros. Así, en el traslado fluido de la representación de la solución entre los diferentes registros puede encontrarse un camino para la apreciación de los avances del estudiante, por lo cual es imperativo que el docente denote amplio y sólido conocimiento didáctico para el desarrollo de actividades didácticas que promuevan tales conversiones.

De esta manera, la conversión entre registros determina en el caso del estudio de las inecuaciones una vía esencial para alcanzar la consolidación del significado del objeto matemático inecuación, refinando las debilidades conceptuales y posibilitando la detección de errores, lo que ubica a la referida conversión como una herramienta esencial en el desarrollo de una práctica matemática fructífera y efectiva. En este sentido y atendiendo a lo planteado por Torres (2017), es preciso destacar que “la construcción, negociación y conciliación de los significados de los objetos matemáticos es un proceso no lineal, caracterizado por fluctuaciones constantes que involucran avances y retrocesos, continuidades y rupturas, en función de los obstáculos encontrados” (p.251), razón por la cual se requiere del docente sustentarse en la solidez de su conocimiento didáctico matemático para subsanar tales interferencias y allanar el camino de la aprehensión de tales significados, venciendo las barreras establecidas por el carácter intangible de los objetos matemáticos, como es el caso de las inecuaciones.

Dado que la construcción de los significados personales se establece, como lo señala Vanegas (2010), “de forma progresiva, dinámica y no lineal en el decurso de la instrucción” (p. 10), es importante valorar los significados iniciales, para ajustarlos para alcanzar los significados finales pretendidos. Estos ajustes, pasan por el tamiz de la apreciación de las expresiones lingüísticas como reflejo primario de la aprehensión conceptual del significado de los objetos matemáticos.

Ahora bien, dado que el proceso de aprehensión del significado del objeto matemático inecuación presenta un carácter no lineal y sus ajustes se alcanzan mediante el empleo adecuado de los registros semióticos y sus correspondientes conversiones, se debe procurar

que el proceso reflexivo y argumentativo ocupe un lugar especial a lo largo de la práctica matemática. Esto se encuentra estrechamente ligado a lo expuesto por Torres (2017) respecto al empleo del Enfoque Gráfico para abordar el tema de inecuaciones, al respecto señala lo siguiente:

La práctica matemática asociada al estudio de inecuaciones bajo un Enfoque Gráfico puede ser visualizada como una *espiral didáctica* que contiene entrelazados tres elementos fundamentales: el significado del objeto matemático inecuación, los conflictos semióticos asociados y los procesos de negociación que llevan a un acoplamiento entre el significado institucional pretendido y el significado personal logrado, de manera que el ascenso hacia un nuevo nivel de conocimientos está supeditado a la reestructuración y reorganización de los elementos conceptuales, lingüísticos y procedimentales implícitos, a partir de un proceso de autorreflexión continua (Torres, 2017, p.250).

Precisamente, las negociaciones y ajustes requeridos pueden ser alcanzados mediante el empleo de apropiado de los diferentes registros semióticos los cuales determinaran amplias posibilidades al estudiante de apreciar el objeto matemático en diferentes facetas representacionales, enriqueciendo la conceptualización y refinando su significado hasta acercarlo al significado institucional pretendido. Esto permite resaltar que la noesis propia que debe desarrollarse en la práctica matemática asociada al objeto matemático inecuación se verá consolidada en la medida en que se apoye el accionar didáctico en el empleo de los diferentes registros semióticos.

De manera indefectible, la implementación de la conversión de los registros semióticos en el abordaje de las inecuaciones ofrece sus frutos tangibles en la posibilidad de contar con mecanismos de verificación de resultados y de emplear su correspondiente contraste para la detección de errores, razón por la cual emerge como un recurso poderoso para el desarrollo de una práctica matemática alineada con los requerimientos de idoneidad didáctica.

## REFERENCIAS

- Álvarez Gayou, J. (2009). *Cómo hacer investigación cualitativa. Fundamentos y Metodología*. México: Paidós Educador.
- Amaya, T. (2016). *Evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de matemáticas al hacer transformaciones de las representaciones de una función*. Tesis Doctoral. Universidad Nacional de Educación a distancia, España.
- Arévalo, B. y Rojas, T. (2015). Un estudio de las inecuaciones lineales desde el espacio de trabajo matemático. En C. Vásquez, H. Rivas, N. Pincheira, F. Rojas, H. Solar, E. Chandia, M. Parraguez (Eds.), *Jornadas Nacionales de Educación Matemática XIX* (pp. 254-261). Villarrica, Chile: SOCHIEM.
- Arias, F. (2017). Nuevos Errores en la Elaboración de Tesis Doctorales y Trabajos de Grado. *Sinopsis Educativa*, 17 (1-2). [Revista en línea]. Disponible en: [http://revistas.upel.edu.ve/index.php/sinopsis\\_educativa/article/view/6720](http://revistas.upel.edu.ve/index.php/sinopsis_educativa/article/view/6720)
- Arias, F. (2018). Diferencia entre teoría, aproximación teórica, constructo y modelo teórico. *Revista Actividad Física y Ciencia*, 10(2), 7-12.
- Arrieche, M. y Meléndez, A. (2016). Errores, Dificultades y Conflictos Semióticos presentes en la Enseñanza de las Derivadas. *Divulgaciones Matemáticas*, 17(1), 76-87. [https://drive.google.com/file/d/1wtY6QNu3omzY6\\_IHE8uShvN97-1oYrox/view](https://drive.google.com/file/d/1wtY6QNu3omzY6_IHE8uShvN97-1oYrox/view)
- Ary, D., Jacobs, L. y Razavieh, A. (1989). *Introducción a la investigación pedagógica*. México: McGraw-Hill.
- Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas ACM (2022). Estadísticas de las Olimpiadas Nacionales de Matemática. <https://www.acmven.org/acm/>
- Badillo, E., Font, V. y Azcárate, C. (2005). Conflictos semióticos relacionados con el uso de la notación incremental y diferencial en libros de física y de matemática del bachillerato. *Enseñanza de las ciencias*, 1-6 (Extra). <https://core.ac.uk/download/pdf/13303037.pdf>
- Beiza, E. (2015). *Semiótica en la comprensión del lenguaje matemático (Un estudio etnográfico realizado en estudiantes del primer año de Educación Media General de la Unidad Educativa Eleazar Agudo)*. [Tesis de Maestría, Universidad de Carabobo] <http://mriuc.bc.uc.edu.ve/bitstream/handle/123456789/912/ebeiza.pdf?sequence=1>
- Bisquerra, R. (2009). *Metodología de la investigación educativa*. Barcelona: La Muralla.
- Borello M. (2010). *Un planteamiento de resignificación de las desigualdades a partir de las prácticas didácticas del profesor. Un enfoque socioepistemológico*. [Tesis de Doctorado en

- Borello, M. y Lezama, J. (2011). Hacia una resignificación de las desigualdades e inequaciones a partir de las prácticas del profesor. Estudio de casos. *Actas CLAME 24*, 921-929.
- Bunge, M. (2001). *Diccionario de filosofía*. México: Siglo Veintiuno Editores.
- Burgos, M. y Godino, J. D. (2019). Conflictos semióticos de alumnos de primaria en la resolución de una tarea de porcentajes. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 223-232). Valladolid: SEIEM.
- Campos, M. y Rodríguez, N. (2020). Un estudio sobre la aprehensión conceptual de las inequaciones. *Revista Paradigma* (Edición Cuadragésimo Aniversario: 1980-2020), *41*, 540 – 570.
- Corbetta, P. (2007). *Metodología y Técnicas de Investigación Social*. España: Ed. McGraw-HILL/Interamericana de España.
- Contreras, A., Luque, L. y Ordoñez, L. (2003). Una perspectiva de la enseñanza-aprendizaje de la continuidad y la derivada de una función en bachillerato y universidad. *Revista de Educación*, núm. 331 (2003), pp. 399-419
- De Los Ríos, N. y Dhocó, D. (2019). Construcción de significado de las inequaciones lineales en estudiantes de noveno grado a partir de un análisis discursivo. Tesis de Pregrado. Universidad del Valle, Colombia.
- Drouhard, J. y Tepp, A. (2004). Symbols and language. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds). *The future of the teaching and learning of algebra. The 12<sup>th</sup> ICMI Study*. (pp. 227-264). New York, NY: Kluwer.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168. <https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=546>
- D'Amore, B. (2006). Objetos, Significados, Representaciones Semióticas y Sentido. *Relime*, Número Especial, 177-195. <https://www.redalyc.org/pdf/335/33509909.pdf>
- Flores, M. (2004). Implicaciones de los paradigmas de investigación en la práctica educativa. *Revista Digital Universitaria*, *5*(1), 2-9. [https://www.revista.unam.mx/vol.5/num1/art1/ene\\_art1.pdf](https://www.revista.unam.mx/vol.5/num1/art1/ene_art1.pdf)
- Garrote, M., Hidalgo, M. y Blanco, L. (2004). Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inequaciones. *Suma*, *46*, 37-44. <http://funes.uniandes.edu.co/7228/>
- Gatica, N. y Maz, A. (2012). Estudio de las inequaciones de dos variables. XIV Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. *Diversidad y Matemáticas*. Málaga, España. <http://funes.uniandes.edu.co/21650/1/Gatica2012Estudio.pdf>

- Godino, J, Font, V. y D'Ámore, B. (2005) *Enfoque ontosemiótico de las representaciones en Educación Matemática*. IX Simposio SEIEM. Universidad de Córdoba, España. <https://www.seiem.es/docs/comunicaciones/GruposIX/dmdc/fontgodinodamore.pdf>
- Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355. [https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03\\_SignificadosIP\\_RDM94.pdf](https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf)
- Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2/3), 237-284. [https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/04\\_enfoque\\_ontosemiotico.pdf](https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/04_enfoque_ontosemiotico.pdf)
- Godino, J. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. Contreras, P. Arteaga, G. Cañadas, M. Gea, B. Giacomone y M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp. 1-20). Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/godino.pdf>
- Godino, J. (2022). Emergencia, estado actual y perspectivas del enfoque ontosemiótico en educación matemática. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática (REVIEM)*, 2(2), 1-24.
- Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico- semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26(1), 39-88. [https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/analisis\\_procesos\\_instruccion.pdf](https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/analisis_procesos_instruccion.pdf)
- Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135. [https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/ontosemiotic\\_approach.pdf](https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/ontosemiotic_approach.pdf)
- Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M. y Lurduy, O. (2010). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, 77(2), 247-265. [https://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino-semiotic-tools\\_ESM\\_2011.pdf](https://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino-semiotic-tools_ESM_2011.pdf)
- Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M. y Lurduy, O. (2010b). *Sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos como herramientas para el análisis semiótico en Educación Matemática*. [www.ugr.es/~jgodino/eos/sistemas\\_semioticos.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/eos/sistemas_semioticos.pdf)
- González, T. y Cano, A. (2010). Introducción al análisis de datos en investigación cualitativa: concepto y características (I). *Nure Investigación*, 44, 1-5. [https://biblioteca.udgvirtual.udg.mx/jspui/bitstream/123456789/3832/1/Introducci%c3%b3n\\_an%c3%a1lisis\\_datos\\_investigaci%c3%b3n\\_cualitativa.pdf](https://biblioteca.udgvirtual.udg.mx/jspui/bitstream/123456789/3832/1/Introducci%c3%b3n_an%c3%a1lisis_datos_investigaci%c3%b3n_cualitativa.pdf)
- Hyman, J. (1994). *Investigación y educación*. Barcelona-España: Paidós.

- Hernández, R., Fernández, y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.
- Joya, L. (2021). *Conflictos semióticos asociados al manejo de símbolos matemáticos en el proceso de aprendizaje de la Física. Caso: Estudiantes de Quinto Año de Educación Media del Liceo Nacional 5 de Julio, San Juan de Colón, Estado Táchira*. [Tesis de Maestría, Universidad Nacional Experimental del Táchira]. <https://repositorio.unet.edu.ve:8443/jspui/bitstream/123456789/1060/2/MAM%202102%20M.pdf>
- Kieran, C. (2003). The transition from arithmetic to algebra: A model for conceptualizing school algebra and the role of computer technology in supporting the development of algebraic thinking. En E. Filloy Y. (edit.), *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual* (pp. 121-142). Cinvestav y F.C.E.
- Konic, P. (2019). El conflicto semiótico como recurso para la formación del profesor. *Contextos de Educación* 26 (19), 83-96.
- Larios, V., Spíndola, P., Cuevas, O. y Castro, J. (2021). Conflictos semióticos y niveles de algebrización en aspirantes a Ingeniería. *Educación matemática*, 33(3), 263-289. Epub 30 de mayo de 2022. <https://doi.org/10.24844/em3303.10>
- Manotupa, E. (2016). *Identificación de conflictos semióticos en un texto universitario en relación a la función cuadrática. Un estudio desde la teoría de registros de representación semiótica*. [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. <https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/9119>
- Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Children's Mathematical Behavior*, 3(1), 93-166.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.
- Monje, Y. (2017). *Tratamiento de la inecuación en el contexto escolar de Chile y Rusia*. [Tesis de Maestría, Universidad Católica de la Santísima Concepción]. <http://repositoriodigital.ucsc.cl/bitstream/handle/25022009/1223/yerka%20Monje%20Fern%C3%A1ndez.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Narváez, A., Berman, C. y Rodríguez, M. (2014). Prerrequisito para el tratamiento del límite funcional: Inecuaciones. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 27, 815-824. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.
- Narváez, A., Berman, C. y Rodríguez, M. (2011) ¿Problemas con el límite o el límite de los problemas enseñados? En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 24, 585- 595. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

- Narváez, A., Rodríguez, M. y Berman, C. (2012). La Didáctica de la Matemática como disciplina experimental: el caso de las inequaciones. Grupo IEMI. Universidad Tecnológica Nacional-Facultad Regional Mendoza.
- National Mathematics Advisory Panel [NMAP]. (2008). The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel. U.S. Department of Education.
- Palarea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por los alumnos de 12 a 14 años*. [Tesis Doctoral. Universidad de la Laguna]. <https://riull.ull.es/xmlui/handle/915/21205>
- Pérez Serrano, G., (2004). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes*. Madrid, España: La Muralla.
- Prada, R., Hernández, C. y Ramírez, P. (2016). Comprensión de la noción de función y la articulación de los registros semióticos que la representan entre estudiantes que ingresan a un programa de ingeniería. *Revista Científica*, 25, 188-205. Doi: 10.14483/udistrital.jour.RC.2016.25.a3
- Ruiz, A. (2015). La formación matemático-didáctica del profesorado de Secundaria. De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza. [Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Madrid]. <https://repositorio.uam.es/handle/10486/665889>
- Ramos, A. (2006). *Objetos Personales, Matemáticos y Didácticos, del Profesorado y Cambios Institucionales El Caso de la Contextualización de las Funciones en una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales*. [Tesis Doctoral, Universidad de Barcelona]. <https://www.tdx.cat/handle/10803/1313#page=1>
- Rico, (2023) Didáctica De La Matemática En La Formación Del Pensamiento Creativo De Los Estudiantes De Educación Básica Secundaria. Tesis Doctoral. Universidad Pedagógica Experimental Libertador Instituto Pedagógico Rural Gervasio Rubio.
- Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: Una empresa docente.
- Ricoy, C. (2006). Contribución sobre los paradigmas de investigación. *Revista do Centro de Educação*, 31(1), 11-22. <https://www.redalyc.org/pdf/1171/117117257002.pdf>
- Rodríguez, G., Gil, J. y García, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga: Aljibe.
- Rodríguez, J. (2003). Paradigmas, enfoques y métodos en la investigación educativa. *Investigación Educativa*, 7(12), 23-40. <https://revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe/index.php/educa/article/view/8177/7130>
- Rodríguez, S. (2011). Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólico por estudiantes de secundaria. [Trabajo de Maestría. Universidad de Granada]. [http://funes.uniandes.edu.co/1751/1/RodriguezDomingoS\\_TFM\\_julio2011.pdf](http://funes.uniandes.edu.co/1751/1/RodriguezDomingoS_TFM_julio2011.pdf)

- Rodríguez, S. (2015). *Traducción entre los sistemas de representación simbólico y verbal: Un estudio con alumnado que inicia su formación algebraica en Secundaria*. [Tesis Doctoral, Universidad de Granada]. <https://digibug.ugr.es/handle/10481/41014>
- Rojas, P. (2010). Conflictos Semióticos en un contexto algebraico: Un análisis de las producciones de los estudiantes. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, 11(1), 1-16. <http://funes.uniandes.edu.co/8067/1/Rojas2010Conflictos.pdf>
- Ruiz, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de Secundaria. De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza*. [Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Madrid]. <https://repositorio.uam.es/handle/10486/665889>
- Ruthven, K. (2014). From networked theories to modular tools? En A. BiknerAhsbahs, & S. Prediger (Eds.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 267-279). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-05389-9\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-319-05389-9_16)
- Sabino, C. (1992). *El proceso de investigación*. Caracas: Editorial Panapo.
- Sánchez González, E., Sánchez Sánchez, A., & Roa González, J. (2024). Modelo Van Hiele para la enseñanza de la geometría: análisis de la producción científica española. *European Public & Social Innovation Review*, 9, 1–16. <https://doi.org/10.31637/epsir-2024-1365>
- Sandín, M. (2003). *Investigación cualitativa en educación. Fundamentos y tradiciones*. Madrid: McGraw-Hill/Interamericana de España.
- Schettini, P. y Cortazzo, I. (2015). Análisis de datos cualitativos en la investigación social. Procedimientos y herramientas para la interpretación de información cualitativa. Buenos Aires: Edulp.
- Strauss, A. y Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa*. Antioquia, Colombia: Contus.
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En Rico, L. (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.
- Torres, A. (2016). El Enfoque Gráfico como estrategia didáctica para la enseñanza de Inecuaciones. *Revista de Investigación en Ciencias Sociales. Scitus*. I – 2016, 11-23. <http://revencyt.ula.ve/storage/repo/ArchivoDocumento/scitus/n1/art03.pdf>
- Torres, A. (2017). *Aproximación teórica del proceso de enseñanza y aprendizaje de inecuaciones bajo un enfoque gráfico desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. Caso: Estudiantes de Matemática I de la Universidad Nacional Experimental del Táchira (UNET)*. [Tesis Doctoral. Universidad Nacional Experimental de las Fuerzas Armadas].
- Torres, A. (2021). El transitar en la investigación cualitativa: un acercamiento a la triangulación. *Revista Científica*, 6(20), 275–295. Disponible: <https://doi.org/10.29394/Scientific.issn.2542-2987.2021.6.20.15.275-295>

- Vanegas, C. (2010). El Conflicto Semiótico: Elemento crucial en el sistema de prácticas discursivas y operativas en las que interviene el infinito matemático. Tesis Doctoral. Universidad de Carabobo. Venezuela. *inecuaciones. Revista Scitus*, 6(1), 23-41.
- Vain, P. (2012). El enfoque interpretativo en investigación educativa: algunas consideraciones teórico-metodológicas. *Revista de Educación*, 3(4), 37-46. [https://fh.mdp.edu.ar/revistas/index.php/r\\_educ/article/view/83/146](https://fh.mdp.edu.ar/revistas/index.php/r_educ/article/view/83/146)
- Vallés, M. (1999). *Técnicas cualitativas de investigación social. Reflexión metodológica y práctica profesional*. Madrid: Síntesis.
- Villamizar, (2023) Fundamentos Teóricos Para Un Aprendizaje Significativo De Las Matemáticas Desde La Resolución De Problemas En La Educación Básica Colombiana. Tesis Doctoral. Instituto Pedagógico Rural Gervasio Rubio – Universidad Pedagógica Experimental Libertador
- Villota, (2022) Concepciones de los profesores universitarios de matemáticas sobre la implementación y uso de las TIC para la enseñanza de contenidos matemáticos. Tesis doctoral, Universidad de Salamanca – España.
- Vrancken, S., Müller, D., y Engler, A. (2010). Inecuaciones Algebraicas. Una Experiencia Didáctica Articulando Diversos Sistemas de Representación. *Yupana*, 1(5), 55-66. <https://doi.org/10.14409/yu.v1i5.261>