

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO “RAFAEL ALBERTO ESCOBAR LARA”
SUBDIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

**CONCEPCIONES TEÓRICAS DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA
DESDE LA PRAXIS UNIVERSITARIA**

**TESIS PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL
GRADO DE DOCTOR EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

Autor: Alexis Eduardo Salcedo Yanez

Tutor: Dr. Estiven Méndez

Maracay, marzo de 2020



ACTA DE APROBACIÓN

Nosotros, Miembros del jurado designado. Para la evaluación de la Tesis Doctoral Titulada: **"CONCEPCIÓN TEÓRICA DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA DESDE LA PRAXIS UNIVERSITARIA"**. Presentada por el Profesor: Alexis Salcedo, Titular de la cédula de identidad N°11.425.067. Para optar al título de Doctor en Educación Matemática, Estimamos que reúne los requisitos para ser considerado como:

Aprobado

Por complementar el conocimiento ya existente, sobre la Modelización en Educación Matemática y optimizar teóricamente la enseñanza de los modelos matemáticos en Educación Universitaria y su posible extrapolación a otros niveles del sistema educativo.

En Maracay a los diecisiete días del mes de Julio del año dos mil veinte.

Dra. Rocío Báez
C.I: 9.656.777

Dr. José Graterol
C.I: 8.800.057



Dr. Rolando García
C.I: 12.855.448

Dr. José Rodríguez
C.I: 8.672.283

Dr. Estiven Méndez
C.I: 12.928.335

APROBACIÓN DEL TUTOR

En mi carácter de Tutor del Trabajo presentado por el ciudadano Alexis Eduardo Salcedo Yanez para optar al grado de Doctor en Educación Matemática, considero que dicho Trabajo reúne los requisitos, y méritos suficientes para ser sometido a la presentación pública y evaluación por parte del jurado examinador que se designe.

En la Ciudad de Maracay, a los 06 días del mes de marzo de 2020.



Dr. Estiven Méndez

C.I.: 12928335

Dedicatoria

A la memoria de Tertuliano (Tertu),

Mi Tío y gran amigo.

AGRADECIMIENTOS

- ✓ Al Creador, siempre presente y apoyándome.
- ✓ A mi Madre Mariela y mi Padre Alexis por todo el amor, cariño y apoyo incondicional, en todas las etapas de mi vida.
- ✓ A mi hija Victoria, por ser el origen de mis motivaciones e inspiraciones hacia nuevos horizontes.
- ✓ A mis amigos del DEM, María, Vanesa, Yari, Yadi, Luís y Sandra por todo el apoyo y ánimo a lo largo del doctorado.
- ✓ A mi esposa Igyoseida, por el cariño, apoyo y solidaridad en el desarrollo de esta investigación.
- ✓ Al Dr. Estiven Méndez, por sus orientaciones en todas las facetas de esta investigación.
- ✓ Al Dr. Rolando García, por su acompañamiento para que el trabajo se concluyera en el tiempo estimado.
- ✓ Al Dr. Fredy González por abrirme las puertas del Doctorado en Educación Matemática.

INDICE GENERAL

LISTA DE CUADROS.....	pp. vii
LISTA DE GRÁFICOS.....	viii
RESUMEN.....	ix
INTRODUCCIÓN.....	1
CAPÍTULO	
I. PROPÓSITO DE LA INVESTIGACIÓN	4
Orígenes de la investigación.....	4
Objetivos de la Investigación.....	8
Objetivo General.....	8
Objetivos Específicos.....	8
Justificación.....	8
II. REFERENTES TEÓRICOS CONCEPTUALES	11
Investigaciones previas.....	11
Fundamentos Teóricos.....	16
Competencias Teóricas.....	17
Desarrollo histórico de la Modelización Matemática en educación matemática.....	17
Objetivos y perspectivas de la Modelización Matemática.....	20
La modelización como campo de investigación y desarrollo en educación matemática: antecedentes breves.....	25
Investigación en formación docente en modelización matemática: antecedentes breves.....	27
Significado de la Modelización Matemática.....	30
Ciclo de Modelización.....	33
Matematización simple.....	35
Matematización compleja.....	38
Ciclo de modelización de diagnóstico.....	39
Competencias de modelización matemática: fomento y obtención.....	43
Competencia Tareas.....	46
Características de los problemas de modelización.....	48

De un problema ordinario de matemática aplicada a un problema de modelización.....	49
Competencia docente.....	50
Gestión eficaz del aula y orientada al alumno.....	50
Planificación y ejecución de clases de modelización matemática.....	52
Intervenciones durante las actividades de modelización.....	53
Competencia Diagnóstico.....	55
III. MARCO METODOLÓGICO.....	57
Metodología de la investigación.....	57
Escenario y Sujetos de Investigación.....	58
Descripción de los Sujetos Claves.....	59
Técnicas e Instrumentos de Recolección de la Información.....	59
Técnicas de Procesamiento y Análisis de la Información.....	59
IV. RESULTADOS OBTENIDOS.....	60
V. REFLEXIONES	92
VI. APORTES DE LA INVESTIGACIÓN.....	96
REFERENCIAS.....	105
ANEXOS.....	114
CURRICULUM VITAE.....	117

LISTA DE CUADROS

CUADRO		pp.
1	Niveles de Intervenciones.....	54
2	Objetivos de las Intervenciones.....	54
3	Activadores de las Intervenciones.....	55
4	Hoja de diagnóstico para actividades de modelización en grupos.....	56
5	Actividades aplicadas por el autor.....	62

LISTA DE FIGURAS

FIGURA		pp.
1	Desde las competencias de enseñanza hasta el aprendizaje de los estudiantes.....	30
2	Modelización Matemática: Transiciones entre la realidad y las matemáticas.....	31
3	Mathematics and the rest of the world.....	31
4	Mathematical Modelling and Applications in Education Modelling process.....	35
5	Modelling cycle.....	36
6	Modelling cycle by Blum.....	37
7	Modelling cycle of Maaß.....	37
8	Modelling cycle of Kaiser and Stender.....	37
9	Modelling cycle of Blum and Leiß.....	38
10	Mathematical modeling cycle from a cognitive perspective.....	39
11	Pedagogical Modeling cycle.....	43
12	Transiciones entre la realidad y las matemáticas.....	65
13	Pacas de Pajas.....	66
14	Mathematical modeling cycle from a cognitive perspective.....	66
15	Suposición de un Montón de Pacas de Paja, realizada con el software GeoGebra.....	70
16	Cálculo de la altura de un Montón de Pacas de Paja mediante segmentos, realizada con el software GeoGebra.....	72
17	Cálculo de la altura de un Montón de Pacas de Paja mediante el teorema de Pitágoras.....	72
18	Manto de la Divina Pastora.....	74
19	Boceto del Manto de la Divina Pastora junto con la tierra.....	78
20	Cálculo del Manto.....	79
21	Problema ordinario de cálculo diferencial.....	81
22	Monumento al sol naciente. Barquisimeto Estado Lara.....	81
23	Monumento al sol naciente. Barquisimeto Estado Lara.....	82
24	Salvavidas en una torre.....	84
25	Torres del Decanato de Humanidades y arte de la Ucla.....	85
26	Torres del Decanato de Humanidades y arte de la Ucla - Pitágoras...	86
27	Modelo teórico propuesto por el autor, para la preparación docente en actividades de Modelización Matemática.....	99

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO DE MARACAY
DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

**CONCEPCIONES TEÓRICAS DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA
DESDE LA PRAXIS UNIVERSITARIA**

Autor: Alexis Salcedo

Tutor: Estiven Méndez

Fecha: marzo 2020

RESUMEN

Uno de los objetivos de los programas de Matemática de los pregrados de la Universidad Centroccidental “Lisandro Alvarado”, tiene que ver con la Modelización Matemática, la cual es una herramienta pedagógica para el logro de destrezas, hábitos y conocimientos matemáticos a la vez de fomentar el pensamiento crítico en los estudiantes. El propósito de esta investigación fue develar un modelo teórico alternativo de enseñanza de la Modelización Matemática en la praxis universitaria, a través del análisis de las vivencias de los profesores de matemática de los diversos pregrados de la UCLA, que participaron en el curso de Modelización Matemática (MM), el cual fue un escenario para investigar y analizar las competencias de Modelización Matemática, puestas en práctica por los profesores, y así develar la concepción teórica. La investigación se ubicó en un estudio de casos, enmarcada dentro del paradigma cualitativo en la modalidad investigación de campo, de tipo descriptiva e interpretativa. Los sujetos de investigación lo conformaron diez (10) profesores de pregrados de la Universidad Centroccidental “Lisandro Alvarado” del Decanato Ciencia y Tecnología y Agronomía. La información fue recabada mediante las producciones orales y escritas de los profesores. Como herramientas de análisis se utilizó las competencias de Modelización Matemática y la teoría fundamentada. El aporte de la investigación fue proponer un modelo teórico alternativo para la enseñanza de la Modelización Matemática

Descriptores: Modelización Matemática, competencias de Modelización Matemática, formación de profesores, paradigma cualitativo.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la Modelización Matemática es una competencia clave en los programas de matemática de los pregrados de Ingeniería, Administración Pública y Economía de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado.

Esta investigación se develó un modelo teórico alternativo de enseñanza de la Modelización Matemática en la praxis universitaria, con base a las vivencias puestas en práctica por los docentes del área de matemática de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, cuando trabajaron con actividades de Modelización Matemática (MM). Para llevar a cabo el estudio se asumió como escenario un curso denominado *Modelización Matemática como herramienta para la actividad docente*, el cual está enmarcado en la línea de investigación: *Pensamiento Numérico y Algebraico* (LIPNA) adscrita al NIEM (Núcleo de Investigación en Educación Matemática “Dr. Emilio Medina”). En el curso se abordan las vivencias de los docentes desde cinco dimensiones: teórica, tarea, docente y diagnóstico (Borromeo, 2018).

En este estudio, se realizó, en primer lugar, las descripciones y análisis de las intervenciones, producciones y opiniones de los docentes cuando realizan actividades de Modelización Matemática y, en segundo lugar, se develó una concepción teórica sobre la enseñanza de la MM.

Por otra parte, la investigación realizada se enmarcó dentro del paradigma cualitativo, en la modalidad de investigación de campo, del tipo estudio de casos y según los propósitos que se perseguían en esta investigación es descriptiva e interpretativa.

De lo anteriormente expuesto, se describe que el trabajo de campo se realizó en uno de los laboratorios de computación de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado del Decanato de Ciencias y Tecnología, ubicada en el Estado Lara al Oeste de la ciudad de Barquisimeto. Los sujetos de investigación fueron diez (10) Profesores de diferentes Programas de Estudios.

Se recabó la información a través de grabaciones audio visuales y un cuestionario de preguntas. Para el análisis de la información se utilizaron las competencias de Modelización Matemática (Borromeo, 2018) y la teoría fundamentada.

El trabajo, producto de la investigación realizada quedó estructurado en seis capítulos.

En el primer capítulo, construcción del problema de investigación, se parte de los objetivos generales de los programas de matemática de los pregrados de la UCLA, que tiene como herramienta de enseñanza la Modelización Matemática, paulatinamente se va limitando el problema a abordar, el cual es analizar las vivencias de los docentes, a través de actividades de MM. Luego, partiendo de un conjunto de interrogantes se establecen los propósitos de la investigación y se destaca la justificación del mismo.

En el segundo capítulo, sobre los referentes teóricos conceptuales, se presentan las investigaciones previas y los fundamentos teóricos. Para este último se tiene lo siguiente:

Competencias Teóricas, desarrollo histórico de la Modelización Matemática en educación matemática, objetivos y perspectivas de la Modelización Matemática, la modelización como campo de investigación y desarrollo en educación matemática: antecedentes breves, investigación en formación docente en modelización matemática: antecedentes breves, Significado de la Modelización Matemática, ciclo de modelización, matematización simple, matematización compleja, ciclo de modelización de diagnóstico, competencias de modelización matemática: fomento y obtención, competencia tareas, características de los problemas de modelización, de un problema ordinario de matemática aplicada a un problema de modelización, competencia docente, gestión eficaz del aula y orientada al alumno, planificación y ejecución de clases de modelización matemática, intervenciones durante las actividades de modelización y competencia diagnóstico.

El tercer capítulo, marco metodológico, se exponen aspectos relacionados con la metodología de la investigación, técnicas de procesamiento y análisis de la información, técnicas e instrumentos de recolección de la información, técnicas de procesamiento y análisis de la información.

En el capítulo cuatro, referente al análisis e interpretación de los resultados, se presentan los resultados de la investigación tomando en cuenta los propósitos que se plantearon en el primer capítulo.

En el quinto capítulo, se muestran las reflexiones finales, donde se reportan los principales planteamientos provenientes del análisis e interpretación de los resultados obtenidos

El sexto y último capítulo, se muestra el aporte teórico de la investigación surgida desde los análisis y reflexiones del estudio.

MOMENTO I

Propósito de la investigación

Orígenes de la investigación

El uso de situaciones de la vida real en la enseñanza y aprendizaje de la matemática es un asunto ampliamente debatido en la matemática escolar (Kacerja, 2012). Particularmente, las aplicaciones y la modelización matemática para el aprendizaje y enseñanza en la escuela y la universidad se han convertido en un tema importante de investigación en las últimas décadas.

En los últimos años, muchos estudios empíricos han abordado de cómo se puede enseñar la modelización en la escuela (Blum & Leiß 2007) o cómo los estudiantes de la Universidad pueden ser sensibilizados hacia la modelización a través de tareas complejas (Lingefjaerd & Holmquist 2007, Blomhoj & Kjeldsen 2007 y Schwarz & Kaiser 2007). Los resultados de estos estudios abrieron nuevas formas de pensar sobre la modelización, y la forma en que puede integrarse en la matemática escolar de una manera beneficiosa. Sin embargo, Borromeo Ferri y Blum (2006) señalan que, la manera de cómo se pueden integrar estos aspectos en la formación docente sigue abierta.

Adicionalmente, Borromeo (2018) destaca, los enlaces con el mundo real pueden ayudar a comprender el contenido matemático y motivar a los estudiantes a participar en el aula. Además, las conexiones entre la realidad y la matemática son un ingrediente indispensable para una imagen adecuada de estas. Por lo tanto, los docentes de matemática de todos los niveles deben estar preparados para enseñar la modelización de una manera efectiva.

En este sentido, la formación de docentes en el área de modelización matemática, es un tema de discusión en diferentes grupos de investigación en educación matemática tales como el ICTMA (International Conferences on the Teaching of Mathematical Modeling and Applications) cuyas discusiones principales tienen que ver con la necesidad de cambiar la educación matemática hacia una que esté dirigida a resolver problemas del mundo real (Kaiser, 2013). El ICME (International Congress on Mathematical Education), indica el estado del arte actual y contiene muchos ejemplos, estudios, aportes conceptuales y recursos que abordan la relación entre el mundo real y las matemáticas. Además, el volumen publicado de un estudio ICMI 2007 (International Commission on Mathematical Instruction) mostró una variedad de temas relacionados con la modelización al reunir autores de diferentes países, entre los temas que trataron, se tienen: epistemología y modelización, autenticidad y metas, competencias de la modelización, aplicaciones y modelización para las matemáticas, pedagogía en la modelización, implementación y práctica de la modelización, valoración y evaluación de la modelización, niveles educativos y casos en aplicaciones y modelización.

En el ICME 13, que se llevó a cabo en la Universidad de Hamburgo Alemania, desde el 24 de julio hasta el 31 de julio de 2016. En ella el grupo de estudio "Aplicaciones de la Matemática y la Modelización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas" toman en cuenta la importancia de las relaciones entre las matemáticas y el mundo real, así como el estado actual del debate educativo en investigación y desarrollo en este campo, el cual incluye: (a) cumplimiento de los objetivos educativos del plan de estudios, (b) el papel y la naturaleza de los modelos matemáticos en la sociedad desde un punto de vista de la educación matemática, (c) evaluación de los recursos didácticos que incluyen el uso de tecnología, (d) investigación experimental, (e) pedagogía de la modelización, (f) evaluación, (g) la formación docente, y (h) aprendizaje profesional.

Según Borromeo (2018), al observar las investigaciones dentro de la modelización matemática, se puede distinguir entre dos grupos de estudios, desde el punto de vista del docente:

- Grupo a) Estudios con un enfoque en responder preguntas sobre la enseñanza efectiva o adecuada de la modelización matemática en el aula o en el laboratorio de computación.
- Grupo b) Estudios centrados en responder preguntas sobre cómo desarrollar, optimizar y evaluar la modelización matemática en la formación docente en la universidad.

En algunos casos, los estudios de investigación se pueden clasificar en ambos grupos. El número de estudios de investigación es mucho mayor en el Grupo a que en el Grupo b. Entre las preguntas de investigación del grupo b, cabe destacar, qué tipo de intervenciones de los docentes hacia los estudiantes son apropiadas en actividades de modelización.

En ese sentido, Borromeo Ferri (2018) señala que, los resultados del proyecto alemán DISUM (“Didaktische Interventionsformen für einen selbstständigkeitsorientierten aufgabengesteuerten Unterricht in Mathematik”) mostraron que en las aulas no se realizan intervenciones estratégicas, y la mayoría de ella no son adaptables. El diagnóstico de las dificultades de un estudiante durante una actividad de modelización es el primer paso del docente antes de dar una intervención o retroalimentación adecuada. Pero el diagnóstico solo es posible si el docente tiene suficiente conocimiento pedagógico del contenido, en relación con la tarea de modelización que les ha dado a los estudiantes, además de poseer un fuerte enfoque en la modelización.

Otro aspecto interesante e importante, resaltado por Borromeo Ferri (2018), es el desarrollo de cursos universitarios o talleres de capacitación docente para la enseñanza y el aprendizaje de la modelización. La evaluación de estos cursos y talleres con cuestionarios, entrevistas o diarios de aprendizaje durante todo el curso es igualmente importante. El docente al reflexionar sobre sus propios procesos de aprendizaje y desarrollar una comprensión de lo que significa la modelización en la enseñanza, lo ayuda a implementarlo en el aula.

Para Borromeo Ferri (2018), se necesita más investigación en todo el campo de la formación docente dentro de la modelización matemática: por ejemplo, los estudios a

largo plazo, que investiguen cómo el conocimiento adquirido por los docentes en servicio sobre la enseñanza de la modelización matemática, que aprendieron en la universidad, afecta la competencia de modelización de sus estudiantes. Esto podría compararse con los docentes que no tuvieron la oportunidad de recibir capacitación en al menos competencias básicas para la enseñanza de modelización.

Ante la situación planteada, el programa de la asignatura matemática, ubicada en el primer semestre del pregrado Administración Comercial y Contaduría Pública de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, tiene como objetivo general integrador: desarrollar en el alumno el pensamiento reflexivo y la capacidad de comunicación, abstracción y generalización a través de la resolución de problemas aplicados a la administración y economía, utilizando la *Modelización Matemática* (de ahora en adelante MM).

Además, la Modelización Matemática es parte del objetivo general del programa de matemática I unificado de Ciencia y Tecnología de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado del año 2018. Por lo tanto, los docentes deben tener una sólida formación sobre diferentes aspectos de la modelización, métodos y herramientas apropiadas para enseñarla.

De lo anteriormente expuesto, emerge la inquietud inicial que da origen a esta investigación, ¿cómo vivencian los docentes de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado las actividades de modelización matemática en el aula?

El escenario para dar respuesta a esta inquietud, será un curso denominado “modelización matemática como herramienta para la actividad docente”, dirigido a docentes del área de matemática de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado.

De manera que, surge la necesidad de indagar qué conocimiento tienen los docentes de matemática en servicio sobre la MM, además, cómo la vivencian en el aula, por tal motivo se considera establecer las siguientes interrogantes:

¿Cuáles son los contenidos y métodos apropiados para un curso de MM dirigido a los docentes?

¿Cuáles son las dificultades que surgen en las diferentes actividades del curso?

¿Qué conocimiento debe tener un docente a la hora de enseñar MM, para poder intervenir adecuadamente en caso de dificultades de los alumnos?

¿Cómo son las intervenciones de los docentes durante una actividad de MM?

¿Cómo evalúan los docentes la MM?

¿Qué tipo de tarea sobre MM proponen los docentes?

¿Cómo planifican los docentes una clase de modelización?

¿Cómo integran los docentes el software GeoGebra en una actividad de modelización?

En el contenido del curso se consideraron las siguientes competencias relacionadas con la modelización matemática:

(1) **Teórica:** Conocer el significado, objetivos y ciclos de la MM.

(2) **Tarea:** Resolver, analizar y crear tareas de MM.

(3) **Docente:** Planificar clases de MM y conocer las intervenciones apropiadas durante los procesos de modelización hacia los estudiantes.

Propósitos de la investigación

Propósito General

Generar una concepción teórica como alternativa en la enseñanza de la modelización matemática.

Propósitos Específicos

1. Diseñar e implementar un curso dirigido a los docentes del área de matemática que integre los aspectos de la modelización matemática.
2. Analizar las competencias de los docentes.
3. Derivar una concepción teórica como alternativa para la enseñanza de la modelización matemática.

Justificación de la investigación

La dirección de formación de personal académico (D.F.P.A) es una unidad Académico-Administrativa adscrita al Vicerrectorado Académico de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, tiene como objetivo, capacitar y actualizar el Personal Académico en concordancia al Plan Institucional de Formación, a través de la participación en Talleres, Cursos, Pasantías, Entrenamientos y la realización de estudios de Postgrado de IV y V Nivel, a fin de fomentar en el profesor universitario una eficiente actividad académica, en concordancia a las necesidades del entorno.

En consecuencia, un curso dirigido a docentes sobre la enseñanza de la MM, es un espacio propicio para reflexionar sobre las vivencias, aportes, impresiones y producciones puestas en práctica por los docentes cuando están bajo una actividad de modelización, y de esta manera proponer bajo la óptica de la MM, planificaciones de clases, problemas, intervenciones apropiadas de los docentes y evaluaciones.

Entre las razones por las que la MM es una competencia importante que los cuales los docentes deben adquirir, Blum y Pollak (2018) destacan su función como método para comprender mejor el mundo que nos rodea, lleno de matemáticas. Además, los enlaces al mundo real pueden ayudar a comprender el contenido matemático y motivar a los estudiantes a participar en el aula. Adicionalmente, las conexiones entre la realidad y las matemáticas son un ingrediente indispensable para una imagen adecuada de las matemáticas. Por lo tanto, los docentes de matemáticas de todos los niveles deben estar preparados para enseñar la modelización de una manera efectiva.

En ese sentido, Borromeo Ferri (2018), señala que, los docentes que llevaron a cabo actividades de MM en la escuela estaban conscientes de la posibilidad de ofrecerles a los estudiantes otra perspectiva más amplia sobre las matemáticas como materia escolar.

Además, destaca el hecho de que tomó mucho tiempo incluir la MM como parte de los estándares educativos en muchos países del mundo, es evidente la necesidad de promover la MM más que otros temas matemáticos “regulares” como el álgebra o las estadísticas.

Kaiser (1995) y Blum (1996) formularon objetivos para la enseñanza de la modelización e incluían múltiples dimensiones. Estos objetivos no se enfocan en una edad o grado específico, sino que pueden usarse desde la escuela primaria hasta la secundaria, y para la formación de docentes, con el fin de mejorar las competencias de modelización de los individuos.

Las siguientes cuatro justificaciones (Blum 2011) muestran la importancia de la MM para aprender u obtener una comprensión más profunda del contenido matemático, así como hacer una contribución a la educación general:

1. La justificación "pragmática" incluye ordenar, entender y dominar situaciones del mundo real, lo que significa trabajar con la MM de manera explícita y continua;
2. La justificación "formativa" significa participar en actividades de MM para mejorar las competencias en las mismas;
3. La justificación "cultural" se centra en las contribuciones que el mundo real puede hacer para proporcionar una imagen más amplia de las matemáticas;
4. La justificación "psicológica" significa que los ejemplos del mundo real deberían contribuir a aumentar el interés de los estudiantes en las matemáticas, para motivarlos o ayudarlos a comprender mejor el contenido matemático.

Sin embargo, Borromeo Ferri (2018) establece que, todas las justificaciones anteriores solo se pueden lograr si la MM es realmente una parte frecuente de la educación matemática. Esto significa en la práctica que, la MM no debe ser una actividad solo una vez al año, sino al menos una vez a la semana.

Por lo antes expuesto, la presente investigación, analiza las actividades realizadas por los docentes del área de matemática de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, a lo largo de un curso denominado Modelización Matemática como Herramienta para la Actividad Docente (MM_HAD).

MOMENTO II

REFERENTES TEÓRICOS CONCEPTUALES

En este capítulo se especifican las investigaciones y aspectos teóricos que actúan como soporte para la presente indagación, así, el capítulo se contempla de la siguiente forma: Investigaciones previas y fundamentos teóricos.

Investigaciones Previas

Winter y Venkat (2013) centraron su investigación, en las competencias sobre modelización matemática evidenciadas por los docentes en un curso de desarrollo profesional. El análisis de las soluciones de los docentes a los problemas contextuales, que, en opinión de los autores, proporcionan un punto de entrada a las complejidades de la modelización relacionadas con el tratamiento de los problemas de la vida real, revelaron dos aspectos críticos.

Primero, la capacidad de los docentes para razonar dentro del espacio realista era un tema crítico. Esto incluye transformar el contexto del mundo real en algunos enunciados que pueden ser sometidos a un tratamiento matemático. También implica una visión relacionada con la interpretación de las soluciones matemáticas en el contexto de la situación. Los docentes en sus etapas iniciales de las soluciones, identificaron cantidades que influyeron en las situaciones. Por lo tanto, las cantidades correctas en las estrategias de solución se pueden vincular a algunos procesos de reconocimiento que tuvieron lugar antes de la configuración del procedimiento. El razonamiento de los docentes dentro del espacio realista se evidenció la forma en que interpretaron las soluciones matemáticas en el contexto de la situación problemática.

Emplearon consideraciones realistas que ayudaron a proporcionar soluciones más sensatas.

En segundo lugar, había evidencia de falta de comprensión profunda, y conectada con las ideas matemáticas básicas. El conocimiento del contenido matemático es central en la resolución de problemas. Esto implica identificar relaciones entre variables y representarlas usando algunas operaciones matemáticas. A medida que el problema se matematiza, se necesita cierta abstracción usando lenguaje matemático para poder aplicar los principios matemáticos. Los resultados del estudio han revelado algunas dificultades relacionadas con el desarrollo de procedimientos, particularmente al elegir una operación que mejor represente la relación entre las cantidades.

Blum y Borromeo Ferri (2010), informaron sobre seminarios universitarios de modelización para estudiantes en su cuarto año de estudio. Entre otras cosas, los estudiantes tuvieron que escribir un "diario de aprendizaje" durante todo el semestre. Los resultados aportaron ideas interesantes sobre los procesos de aprendizaje de los estudiantes, progresos, problemas durante el semestre y sus consideraciones sobre la enseñanza de la modelización.

Los autores resumieron sus resultados con respecto a dos preguntas. Primera pregunta: cómo pueden prepararse los docentes en cursos universitarios para enseñar modelización en la escuela, qué contenidos y métodos son apropiados. Segunda pregunta: cómo desarrollan los procesos de aprendizaje y comprensión los estudiantes durante dichos cursos, cuáles son los principales problemas y cómo se puede observar el progreso.

Con respecto a la primera pregunta, los autores destacan el equilibrio entre la teoría y la práctica. Ambos deben estar conectados por medio de una estrategia de enseñanza adecuada, la cual debe reflejarse en el seminario. El contenido de dicho seminario puede variar, pero de acuerdo con sus experiencias, los siguientes contenidos son adecuados para dicho seminario: (1) Conocimiento sobre ciclos de modelización, objetivos / perspectivas y tipos de tareas; (2) Resolver, crear y analizar tareas de modelización; (3) Planificación y práctica de clases de modelización; (4) Diagnóstico de procesos reales de modelización de los estudiantes.

Para la segunda pregunta señalan que los estudiantes tenían que escribir un diario de aprendizaje para ayudarlos a responderla, en combinación con la evaluación del seminario. Estos fueron los principales problemas de los estudiantes: comprender varias direcciones de la modelización y las distinciones entre los ciclos de modelización en la literatura; distinguir las fases del ciclo de modelización en general, y también analizar las transcripciones de los procesos de modelización de los alumnos; análisis temáticos de problemas de modelización; y finalmente lidiando con la cuestión de autenticidad mientras se crea un problema. El progreso de los estudiantes con respecto a estas dificultades podría reconstruirse principalmente cuando, pragmáticamente hablando, vinculaban la teoría con la práctica. Reflejar estos desarrollos durante el seminario ayudó a los estudiantes, sin duda, en su camino a convertirse en maestros competentes de matemáticas.

Además, los autores enfatizan la necesidad de que los estudiantes universitarios se convertirán en docentes de matemática, deben tener grandes oportunidades para lidiar con la modelización matemática tanto a nivel teórico como práctico, incluidas las experiencias con la modelización en la escuela. Esto no solo contribuirá a prepararlos para ser docentes competentes para la modelización matemática, sino que también contribuirá a desarrollar aún más su comprensión de la materia matemática.

Lingefjaerd (2007) indica que, aunque la MM ofrece excelentes oportunidades para enseñar y aprender matemáticas, muchos departamentos de matemática dudan en desarrollar y enseñar cursos de MM, construyó esta afirmación en una encuesta que realizó, en la que manifestó los obstáculos y posibilidades de la MM, con diferentes departamentos de matemática en Suecia.

El autor antes mencionado encontró que, crear y mantener un curso de MM es una tarea difícil. Incluso si los docentes están interesados en el tema, hay muchos obstáculos diferentes que superar. Existen competencias de otras ramas de las matemáticas, consideradas más "naturales" en un programa de formación docente. Se necesitan profesores universitarios que dominen el uso apropiado de la tecnología moderna. Existe una demanda sustancial de habilidades necesarias para dominar una

variedad de problemas y materias, así como procedimientos para manejar la enseñanza y la evaluación del proceso de MM.

Sin embargo, al superar obstáculos y dificultades, hay recompensas esperando en el camino. Un beneficio importante tiene que ver con una mejor comprensión de la matemática que han estudiado los docentes. Muchos estudiantes en las clases de MM parecen haber olvidado muchos temas, muchos estudiantes presentaron y defendieron ideas contradictorias a pesar de sus registros satisfactorios logrados en matemática. Estos resultados desafían muchos los fundamentos sobre cómo se enseña y evalúa a los futuros profesores de matemáticas.

Los hallazgos que realizó el autor son un apoyo a la postura de que los futuros profesores de matemáticas no necesitan más cursos de matemáticas, ya que necesitan diferentes experiencias de aprendizaje. Dichas experiencias deberían involucrarlos el razonamiento y la construcción de modelos matemáticos, la evaluación de la validez de un argumento matemático y en el desarrollo, comparación y evaluación de procesos alternativos de solución.

A manera de reflexión final en su investigación, Lingefjaerd (2007) señala que, el progreso de la tecnología informática está lejos de terminar. Se espera que la calculadora del mañana sepa tanto y tal vez más de lo que hace el software de hoy. Y los cursos de MM son importantes para los futuros profesores de matemáticas. Es evidente que los docentes de los cursos de MM deben prestar mucha atención a la forma en que configuran y califican sus evaluaciones. Con la tecnología, a veces es muy fácil, que los estudiantes proporcionen respuestas, a veces incluso la respuesta correcta, sin comprender realmente de qué se trata el problema. Sin situaciones de evaluación que hagan uso de la tecnología e involucren a los estudiantes en el pensamiento crítico sobre lo que ofrece la tecnología en términos de posibilidades y soluciones, se formaran estudiantes que dependen de la tecnología y no personas críticas.

Greefrath y Vorhölter (2016) señalan que los estudios recientes de investigación cualitativa y cuantitativa sobre modelización en la escuela se centran en los estudiantes; sin embargo, los docentes también juegan un papel importante en la implementación exitosa de la modelización matemática en las clases de matemática y en el fomento de

las competencias de modelización de los estudiantes. En Alemania hay estudios empíricos sobre las competencias docentes en modelización y otros temas importantes. Además, la configuración del aula juega un papel importante. Por lo tanto, además del comportamiento directo de los docentes, la investigación se ha centrado en el diseño de clases, así como en todo el entorno de aprendizaje de la modelización.

Spandaw y Zwaneveld (2009) en su investigación, describen cómo se trata el tema de modelización matemática en el manual holandés de didáctica de la matemática. Señalan que muchos docentes no están familiarizados o no desean invertir tiempo en sus clases con actividades de MM. En consecuencia, para formar a los docentes en MM, las universidades deben tener en cuenta (aparte de las matemáticas y sus didácticas necesarias), el papel y los objetivos de la MM en la educación matemática, ciclos de modelización, autenticidad, modelización informática, intervención y evaluación. Desafortunadamente, la investigación empírica sobre la educación de la modelización se limita principalmente a experimentos de enseñanza a corto plazo. Para diseñar una educación de modelización efectiva es necesario ganar más experiencia y llevar a cabo una investigación longitudinal sistemática sobre los efectos de la enseñanza de la modelización.

Villa-Ochoa y López (2011) presentaron los resultados de un proyecto de investigación que trata con un estudio de caso cualitativo en el campo de la modelización matemática. El estudio investiga el papel de la modelización en situaciones de la “vida real” del alumno en la construcción del conocimiento matemático en la escuela. El estudio de episodios, entrevistas, cuestionarios y observaciones directas permitieron analizar cómo los docentes describen su desempeño al abordar el contenido de las matemáticas escolares.

Cabe señalar que, el desarrollo del proyecto de investigación mostró que todavía es necesario desarrollar un sentido de la realidad como herramienta para facilitar la interacción entre el contexto sociocultural y las matemáticas escolares, todo a través de la modelización.

Los casos reportados por los autores evidencian de que hay docentes que han aprendido que las matemáticas están en todas partes en la naturaleza, y en todas las

demás ciencias; pero aún no han aprendido a revelarlo. El sentido de la realidad construido a través de la modelización matemática describe la necesidad de revelar las matemáticas dentro del contexto sociocultural. Debe trascender las creencias sobre la realidad como algo artificial, inventado, vestido, para situarse en una especie de realidad más cercana a las necesidades de los contextos de los estudiantes.

Se observa claramente que, el contacto con situaciones de modelización pertenecientes al contexto sociocultural parece propiciar una nueva mirada a la realidad fuera de la escuela. De esta manera, el sentido de la realidad puede impregnar el desarrollo del conocimiento matemático en la escuela, ya que, según D'Ambrósio (2005), el desarrollo del conocimiento matemático en la escuela se basa principalmente en la forma en que el individuo reconoce la realidad y sus diversas manifestaciones (individual, realidad social, planetaria y cósmica).

Finalmente, Villa-Ochoa y López (2011) demandan procesos de investigación serios que deberían enfocarse en varios aspectos, entre ellos:

- La forma en que los docentes, interpretan la realidad.
- La forma en que los docentes, piensan que una situación "está en armonía" con el libro de texto.
- La forma en que los docentes, consideran que una situación "se adapta" o se ajusta a la realidad escolar.
- El nivel de comodidad y apropiación que los docentes tienen sobre el contexto sociocultural.
- La "racionalidad" que los docentes asignan al fenómeno relacionado con el concepto de construir.
- El nivel de "capacitación" que los docentes tienen con respecto al proceso de modelización.

Fundamentos Teóricos

En este apartado se detallan los aspectos teóricos desarrollados en esta investigación relacionadas con la modelización matemática como herramienta para la actividad docente.

Competencia Teórica

A continuación, se presenta un breve recorrido histórico, objetivos, perspectivas y ciclos de la modelización matemática.

Desarrollo histórico de la modelización matemática en educación matemática

En este apartado damos una breve reseña de la historia de la evolución de la modelización en la educación matemática.

Niss, Blum y Galbraith (2007) señalan que, mientras las matemáticas han sido parte de la educación general, las aplicaciones y (en menor medida) la modelización se ha integrado con el aprendizaje de las matemáticas en los niveles de primaria y secundaria se refiere. Por supuesto, esto no significa que cada elemento en el aprendizaje de las matemáticas esté vinculado a objetos, fenómenos o problemas en ámbitos extra matemáticos, sino más bien que de vez en cuando en las matemáticas elementales (por ejemplo, la aritmética y la geometría) se enfrentan con alguna realidad extra matemática.

Destacan también, que las aplicaciones y la modelización relacionados con inventarios e impuestos, medición de tierras, comercio, moneda, calendarios, ciclos lunares, eclipses solares, construcción de templos, división de la herencia, entre otros, fueron tratados por los copistas en Mesopotamia y Egipto, y en los textos hindúes, chinos y árabes. Lo mismo ocurrió con muchos libros matemáticos (de texto) publicados en Europa (incluido el Reino Unido) 1200 - 1800, donde también se podían encontrar aplicaciones y modelización relacionadas con la arquitectura, el arte (dibujos en perspectiva), balística, construcción de fortalezas y bastiones, óptica, horóscopos, elaboración de mapas, navegación, juegos de azar, seguros, propagación de calor, pronósticos de población, etc. También antiguos matemáticos griegos como Arquímedes y Eratóstenes estuvieron involucrados en aplicaciones de guerra, física y geografía.

Hasta mediados del siglo XIX era extremadamente difícil obtener una enseñanza de matemática pura, a excepción de los "Elementos de Euclides", que formaban parte de muchos currículos de nivel secundario o terciario. Solo a partir de mediados del siglo

XIX, la idea de que la educación matemática debería (también) proporcionarse por razones formativas generales comenzó a ganar impulso, con el propósito de entrenar el "músculo pensante" lógico (Niss, 1996, p 23).

Desde finales del siglo XIX, la mayoría de los planes de estudios post elementales comenzaron a contener componentes puros y aplicados (pero sin ejemplos explícitos de modelización). A lo largo del siglo XX, el equilibrio curricular entre estos componentes ha sido un tema de debate continuo entre los educadores de matemáticas, como se refleja en muchos documentos curriculares. La elección realizada en diferentes épocas con respecto a este equilibrio fue un reflejo de las tendencias sociales, así como de las características intrínsecas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas Niss, Blum y Galbraith (2007).

Autores como Galbraith (1989) y Niss (1996) han identificado "oscilaciones pendulares" en el énfasis en los aspectos puros versus los aplicados de las matemáticas en la educación. Las oscilaciones del péndulo pueden verse, al menos en parte, como una instancia de la dualidad discutida previamente entre "aplicaciones y modelización para el aprendizaje de las matemáticas" y "aprendizaje de las matemáticas para desarrollar competencia en la aplicación de las matemáticas y la construcción de modelos matemáticos". Además, en la medida en que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas muestran un equilibrio entre las matemáticas teóricas y su aplicación con fines extra matemáticos, es muy probable que ocurran oscilaciones intrínsecas del péndulo, causadas por el simple hecho de que cuando un lado del equilibrio recibe demasiado énfasis en la desventaja del otro, hay una tendencia inherente a comenzar a pedir más énfasis en el otro lado.

A intervalos y a lo largo del siglo 20 movimientos de rasgos pragmáticos, y orientados a la utilidad ganaron impulso, al insistir en que las aplicaciones de las matemáticas debían tener un rol serio en los programas, dirigidos a los estudiantes que no se iban a convertir en profesionales de las matemáticas, sino más bien usuarios de las matemáticas en los distintos niveles de educación. Sin embargo, los movimientos utilitarios con frecuencia trataban sólo con la matemática de bajo nivel, y en general

no se prestó atención al análisis de aplicaciones como los modelos, y mucho menos a la modelización como un proceso (Niss, Blum y Galbraith, 2007).

En la década de 1920, el péndulo se balanceó, en muchos países, de nuevo a un énfasis más fuerte en las matemáticas teóricas, lo que se consideró adecuado para ejercer una formación general y el desarrollo del individuo, no solo con respecto al pensamiento lógico, sino también con respecto a disposiciones mentales y actitudes personales. La postdepresión de los 30 y la década de los 40 generó otra oscilación del péndulo de nuevo a un énfasis en la utilidad y la aplicación de las matemáticas, que luego fue sucedido por un renovado énfasis en las matemáticas puramente teórica en la década de 1940 y la primera mitad de los 50.

Posteriormente, a finales de los 50 se vieron dos nuevos desarrollos con orientaciones muy diferentes, que eran, sin embargo, entrelazadas en algún grado. En el Reino Unido, por ejemplo, se elevaron voces, en particular, entre los industriales (Cooper, 1985), que los graduados de las escuelas y universidades no fueran capaces de usar las matemáticas que les habían enseñado para resolver los problemas del mundo real. En el mejor de los casos aprendieron matemáticas de memoria y fueron capaces de resolver problemas habituales con los que estaban familiarizados desde la enseñanza que habían recibido. Sin embargo, cuando se enfrentaban a situaciones desconocidas, no poseían ninguna herramienta para tratar con esas situaciones.

Esto estimuló a exigirle a la enseñanza de la matemática, a que tomara más en serio la aplicación de las matemáticas, hasta el punto de que los estudiantes pudieran hacer frente a situaciones problemáticas abiertas, desconocidas por ellos mismos. El desarrollo resultante hacia la modelización matemática como una empresa educativa (Pollak, 1968), se inició en la configuración de la ingeniería y las ciencias, y se extendió a otros campos durante las próximas décadas.

Además, Niss, Blum y Galbraith (2007), mencionan que desde finales de los 60 muchos estudiantes recibieron algún tipo de educación matemática, y durante la mayor parte el objetivo no era prepararlos para convertirse en profesionales de matemáticas, sino para enseñarles matemáticas que podrían ser utilizados fuera de las matemáticas mismas.

A su vez, esto implicó que la aplicación de las matemáticas gradualmente se convirtiese en un tema prioritario en la educación matemática. Los movimientos de reforma a finales de los años 1950 y 1960, sugirieron e influyeron fuertemente, que no se podía esperar a que los graduados de las escuelas y universidades fueran capaces de poner en práctica el uso de las matemáticas, sólo porque se les había enseñado matemáticas teóricas, sino que las aplicaciones y la modelización tenían que ser enseñadas, y no únicamente elogiadas o alabadas.

Esta influencia fue reconocida en el desarrollo curricular, mediante la producción de materiales de instrucción, y en la práctica docente en varios países (por ejemplo, el Reino Unido y Australia, Austria, Dinamarca, Alemania y los Países Bajos) a partir de la década de 1970. Desde entonces, cada vez más países han adoptado un punto de vista similar, de modo que la aplicación activa de las matemáticas en situaciones abiertas por medio de modelos matemáticos y la modelización, ha hecho su camino en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Niss, Blum y Galbraith, 2007).

Objetivos y perspectivas de la Modelización Matemática

Las aplicaciones y la modelización desempeñan un papel importante en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Kaiser, 2014); Ya en el siglo XIX, famosos educadores de matemáticas hicieron un fuerte llamado a la inclusión de problemas contextuales en la educación matemática, principalmente para la gran mayoría de las escuelas primarias. A comienzos del siglo XX, Félix Klein, el primer presidente de ICMI, expuso la necesidad de incluir aplicaciones en educación matemática para niños con logros más altos en escuelas de gramática; sin embargo, solicitó un fuerte equilibrio entre las aplicaciones y las matemáticas puras. Durante y después de la Segunda Guerra Mundial, las aplicaciones perdieron una importancia significativa en muchas partes del mundo. La pretensión de enseñar matemáticas en una forma orientada a la aplicación se ha presentado en otra ocasión con el famoso simposio "Por qué enseñar matemáticas para ser útil" (Freudenthal 1968; Pollak 1968) que se llevó a cabo en 1968.

Desde entonces, el por qué y cómo incluir aplicaciones y la modelización en la educación matemática ha sido el foco de muchos estudios de investigación. Esta gran cantidad de estudios no ha conducido a una imagen única sobre la relevancia de las aplicaciones y la modelización en la educación matemática; En contraste, los argumentos desarrollados desde entonces se mantuvieron bastante diversos. Además, la discusión, sobre cómo enseñar matemáticas para ser útil, no condujo a una argumentación consistente. Ha habido varios intentos de analizar los diversos enfoques teóricos para enseñar la modelización matemática y aplicaciones para aclarar posibles puntos en común y diferencias; algunos se describen a continuación.

Kaiser y Meßmer (1986, p.83) discriminaron en su análisis de las aplicaciones y de la modelización que hay dos perspectivas principales:

Una perspectiva pragmática: centrada en objetivos utilitarios o pragmáticos, es decir, la capacidad de los estudiantes para aplicar las matemáticas en la solución de problemas prácticos. Pollak (1968) puede considerarse como un investigador prototipo de esta perspectiva.

Una perspectiva científico-humanista: que se orienta más hacia las matemáticas como una ciencia, y los ideales humanísticos de la educación, se centra en la capacidad de los estudiantes para crear relaciones entre las matemáticas y la realidad. Freudenthal (1973) podría verse como un investigador prototipo de este enfoque.

Las perspectivas varían debido a los objetivos relacionados con la aplicación y la modelización; por ejemplo, los siguientes objetivos pueden ser identificados (Blum, 1996; Kaiser y Messmer, 1986):

Objetivos pedagógicos: impartir habilidades que les permitan a los estudiantes comprender mejor los aspectos centrales de nuestro mundo.

Objetivos psicológicos: fomentar y mejorar la motivación y la actitud de los alumnos hacia la matemática y su enseñanza.

Objetivos relacionados con la asignatura: estructurar los procesos de aprendizaje, introducción de nuevos conceptos y métodos matemáticos, incluida su ilustración.

Objetivos relacionados con la ciencia: comunicar una imagen realista de las matemáticas como ciencia, dando una idea de la superposición de las consideraciones matemática y extra matemática.

Luego Blum y Niss (1991) se enfocan en tres objetivos para la inclusión de las aplicaciones y la modelización en la educación matemática, a saber, que los estudiantes deben ser capaces de realizar procesos de modelización, adquirir conocimiento de los modelos existentes y analizar de forma crítica determinados ejemplos de procesos de modelización. Con base a esa postura, analizan los distintos enfoques sobre cómo considerar las aplicaciones y la modelización en la enseñanza de la matemática y distinguen seis diferentes formas de incluirlas:

1. **Enfoque de separación:** la separación de las matemáticas y la modelización en diferentes cursos.
2. **Enfoque de dos secciones:** con una parte pura y una parte aplicada.
3. **Enfoque isla:** donde se pueden encontrar pequeñas islas aplicadas dentro del curso puro.
4. **Enfoque mezcla:** los conceptos y métodos matemáticos recién desarrollados se activan hacia la modelización; siempre que sea posible.
5. **Enfoque integración al currículo de matemática:** los problemas son lo primero y las matemáticas para tratarlos se buscan y se desarrollan posteriormente.
6. **Enfoque integración – interdisciplinaria (más avanzado):** opera con una integración completa entre las matemáticas y las actividades extra matemáticas donde las matemáticas no están organizadas como un tema separado.

A principios del siglo XXI, Kaiser y Sriraman (2006) señalaron que se han desarrollado varias perspectivas sobre MM dentro de la discusión internacional sobre educación matemática. Con el fin de mejorar la comprensión de estas diferentes perspectivas sobre la MM, propusieron un marco para la descripción de los distintos enfoques, y clasifican estas concepciones según los objetivos perseguidos con la MM, sus antecedentes epistemológicos y su relación con las perspectivas iniciales.

A continuación, se especifican las perspectivas indicadas por Kaiser y Sriraman (2006):

Modelización realista o aplicada: fomenta objetivos utilitarios y continuando con las tradiciones de los primeros enfoques orientados pragmáticamente. Tiene un fuerte énfasis con el uso de problemas complejos y auténticos del mundo real, se puede usar para el trabajo de proyectos (Borromeo Ferri, 2018).

Ejemplos de problemas complejos de modelización que presentan esta característica son:

- ¿Cómo se puede optimizar la mezcla de productos químicos en piscinas?
- Un cinturón equipado con dispositivos técnicos para enviar y detectar impulsos se fija a un árbol. Por medio de este equipo se desea predecir el estado de salud del árbol.

Modelización educativa: que enfatiza objetivos pedagógicos y relacionados con la asignatura, que son aspectos de los enfoques realista/aplicado y epistemológico/teórico, esta perspectiva es llamada por Kaiser y Sriraman (2006), *integrada*, que se desarrolló a principios de los años noventa del siglo pasado, principalmente dentro del debate alemán.

Modelización epistemológica o teórica: colocan los objetivos orientados a la teoría en el primer plano y está en la tradición del enfoque científico-humanista. Para Borromeo Ferri (2018) esta perspectiva no radica específicamente en las transiciones de la realidad a las matemáticas y viceversa, sino en las estructuras matemáticas internas del problema. La diferencia con la perspectiva de modelización educativa es que la modelización se utiliza como una herramienta para trabajar matemáticamente, en lugar de aprender y promover las competencias de MM.

Modelización socio-crítica y sociocultural: fomenta, según Kaiser y Sriraman (2006), el objetivo de la comprensión crítica del mundo circundante conectado con el reconocimiento de la dependencia socio-cultural de las actividades de modelización. Además, tiene objetivos pedagógicos, pero está particularmente centrada por ver y entender críticamente el mundo circundante (Barbosa, 2006). Los pensamientos subyacentes a esta perspectiva se originaron principalmente de investigadores de América del Sur, en particular de Brasil.

Por su parte, Borromeo Ferri (2018) con base a su experiencia en cursos y seminarios sobre la enseñanza de la MM, dirigido estudiantes y profesores, manifiesta que, Por lo general, ocurre un fenómeno interesante, en la perspectiva socio crítica, especialmente con los estudiantes en la escuela:

“La participación en preguntas socio-críticas es tan alta que están haciendo matemáticas sin darse cuenta. Esto es, por supuesto, un resultado del contexto real y a veces tiene que ver con sus propias experiencias en la vida. El significado de las matemáticas se hace evidente para ellos (p. 20)”.

Un enfoque teórico interesante, surge al combinar las perspectivas epistemológica y socio crítica, es el enfoque socio-epistemológico (Cordero, 2008; Buendía y Cordero, 2005). Por un lado, este enfoque se centra en la reconstrucción del conocimiento matemático y, por otro lado, el papel de las personas y el contexto social en el que se desempeñaron son de gran interés.

Enfoques contextualizados y que incitan a la modelización: enfatizan la resolución de problemas y los objetivos psicológicos. El trabajo de investigación llevado a cabo por Lesh y Doerr (2003) y su grupo MEA (Model Eliciting Activities), donde se realizan actividades que estimulan a los estudiantes a inventar modelos o probar modelos existentes. Es un claro ejemplo de esta perspectiva.

Según Kaiser (2014) se distingue la siguiente perspectiva, que se ha desarrollado en la última década y refleja las demandas de un análisis más detallado del proceso de modelización de los estudiantes, sus barreras cognitivas y afectivas:

Modelización cognitiva-afectiva (Meta-perspectiva): pone en primer plano el análisis del proceso de modelización de los estudiantes, y la promoción de los procesos de pensamiento matemático.

Está etiquetada como "meta-perspectiva" porque en la mayoría de los estudios de investigación, este enfoque es una parte integral de la investigación. Por lo tanto, el objetivo de la investigación desde la perspectiva cognitiva es el análisis de los procesos cognitivos de los educandos y docentes mientras se llevan a cabo actividades de MM (Borromeo Ferri, 2010). Mirar los procesos de MM desde una perspectiva cognitiva es importante para la enseñanza y el aprendizaje. La visión cognitiva le ayuda a los

docentes analizar las barreras cognitivas en los problemas de modelización y, por lo tanto, es una base para el diagnóstico.

Esta clasificación apunta según Kaiser (2014), por un lado, a una continuidad de la tradición en la enseñanza y el aprendizaje de la MM; todavía existen muchos puntos en común entre el enfoque histórico ya desarrollado entre otros por Felix Klein, y los nuevos enfoques. Por otro lado, queda claro que en las últimas décadas se han desarrollado nuevas perspectivas sobre la MM, enfatizando nuevos aspectos como la metacognición, la inclusión de temas sociocríticos o socioculturales, una visión más orientada a los procesos de MM y los ciclos de modelización.

La modelización como campo de investigación y desarrollo en educación matemática: antecedentes breves

Niss, Blum y Galbraith (2007) establecen que es fácil observar, a lo largo de la historia de la educación matemática, que la aplicación de las matemáticas como un esfuerzo educativo siempre ha tenido sus defensores influyentes y singulares en los debates sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Para ilustrar esto, Hans Freudenthal organizó una conferencia en 1968 sobre el tema "¿Cómo enseñar matemáticas para ser útil?" los artículos se publicaron posteriormente en *Educational Studies in Mathematics* 1968. Al discurso de apertura de Freudenthal (Freudenthal, 1968) se le asignó el título revelador "¿Por qué enseñar matemáticas para ser útil?"

Desde entonces, Niss, Blum y Galbraith (2007) distinguen tres fases de investigación y desarrollo relacionadas con las aplicaciones y la modelización en educación matemática. Primera fase, conocida como la *fase de defensa* (aproximadamente en la década de 1965 - 1975), iniciada simbólicamente por la conferencia de Freudenthal, los defensores de las aplicaciones, y la modelización proporcionaron argumentos a favor de la inclusión seria de tales componentes en la enseñanza de las matemáticas.

Esto continuó en la segunda fase de desarrollo, (1975 - 1990), que se caracterizó según Niss, Blum y Galbraith (2007), principalmente por el desarrollo del currículo y materiales reales en varios niveles para abarcar aplicaciones y componentes de la modelización, por ejemplo, COMAP (Consortium for Mathematics and Its Applications), el cual es una organización sin fines de lucro cuya misión es mejorar la educación matemática para estudiantes de todas las edades. Desde 1980, COMAP ha trabajado con maestros, estudiantes y empresarios para crear entornos de aprendizaje donde las matemáticas se utilizan para investigar y modelar problemas reales del mundo (<https://www.comap.com/>). El énfasis aquí incluyó el diseño y la realización de unidades de enseñanza y cursos particulares de modelización, algunas veces experimentales, la obtención e implementación de materiales de instrucción, y la generación y el cultivo de casos específicos de aplicaciones y modelización para un uso potencial en las aulas de matemáticas.

Durante esta fase se hicieron intentos de sistematizar y analizar, a nivel teórico, el argumento a favor de las aplicaciones y la modelización en la educación matemática, y de investigar teóricamente (Blum y Niss, 1991) e históricamente (Kaiser-Messmer, 1986) la relación entre las aplicaciones y la modelización de la educación matemática. En otras palabras, estaba surgiendo una perspectiva de investigación. Los programas ICMEs (The programmes of the International Congresses on Mathematical Education) reflejaron estas tendencias, en particular desde el ICME-3 en Karlsruhe, Alemania, 1976. La fase de desarrollo vio el inicio de lo que luego se convirtió en una comunidad internacional de educadores en matemáticas que desarrolla e investiga las aplicaciones y la modelización en varios niveles educativos.

En relación con esto último, el aspecto más visible de esta iniciación fue la serie de conferencias ICTMAs (International Conferences on the Teaching of Mathematical Modelling and Application) y las Actas de la conferencia resultante. La primera conferencia se celebró en Exeter (Reino Unido) en 1983 (Berry, Burghes, Huntley y James, 1984), y desde entonces se lleva a cabo una ICTMA cada dos años. No es casualidad que la palabra "modelización" figura de manera prominente en el título, y antes de la palabra "aplicaciones". Esto es para subrayar la prioridad dada al proceso

de modelización, una prioridad que fue un punto focal para el entorno politécnico británico en el que se concibieron por primera vez los ICTMA, y que sigue siéndolo en la comunidad.

Con cierta precaución, Niss, Blum y Galbraith (2007) llaman a la tercera fase maduración (desde 1990), en el sentido de que es durante las últimas décadas que los estudios empíricos de enseñanza y aprendizaje de las aplicaciones y modelización se han agregado a la teoría, énfasis de las fases anteriores. Sin embargo, esto no implica que exista una gran cantidad de investigación de este tipo hoy en día, sino que el volumen está creciendo, con estudios cada vez más realizados por investigadores jóvenes que ingresan al campo. Durante el mismo período, el trabajo en América del Norte (por ejemplo, Lesh & Doerr, 2002) ha involucrado la investigación y el desarrollo sistemático en el campo de la modelización, principalmente en los niveles de primaria y secundaria.

Investigación en formación docente en modelización matemática: antecedentes breves

Borromeo Ferri (2018), indica que, en los últimos 15 años, se realizó una gran cantidad de investigación empírica con el objetivo de investigar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la MM. Al observar la investigación dentro de la modelización matemática, se puede distinguir pragmáticamente entre dos grupos de estudios, desde el punto de vista del profesor:

Grupo a) Estudios con un enfoque en responder preguntas sobre la enseñanza efectiva o adecuada de la modelización matemática en el aula o en el laboratorio de computación.

Grupo b) Estudios centrados en responder preguntas sobre cómo desarrollar, optimizar y evaluar la modelización matemática en la formación docente en la universidad y la capacitación docente.

El extenso trabajo de investigación realizado por Lesh y Doerr 2003 y su grupo MEA (Model Eliciting Activities), es decir, actividades que alientan a los estudiantes

a inventar y probar modelos. Propone que las actividades de obtención de modelos deben comenzar en el jardín de infancia, para que los alumnos puedan experimentar problemas típicos de diversas profesiones, como la ingeniería o la economía. Esto les ayuda a entender cómo se necesitan las matemáticas en la vida real. Además de la perspectiva del alumno, los autores siempre tienen en cuenta el importante papel que desempeñan los profesores durante las actividades de modelización.

Además, su enfoque de investigación se centra en las actividades que provocan la modelización de los docentes o en la comprensión e interpretación de los profesores de los contextos de la vida real, y finalmente su reflexión sobre esto, que también tiene efectos para los alumnos (Schorr y Lesh 2003).

Para Borromeo Ferri (2018) una pregunta de investigación importante fue, y sigue siendo, qué tipo de intervenciones de los docentes son apropiadas mientras los estudiantes trabajan en actividades de MM. Los resultados del proyecto alemán DISUM (“Didaktische Interventionsformen für einen selbständigkeitsorientierten aufgabengesteuerten Unterricht am Beispiel Mathematik”, en español “Modos de intervención didáctica para la enseñanza de las matemáticas orientada hacia la autorregulación y dirigida por tareas”) mostraron que en las aulas no se realizan intervenciones estratégicas, y la mayoría de las intervenciones no son adaptables. El diagnóstico de los problemas de un alumno durante la modelización es el primer paso del docente antes de dar una intervención o retroalimentación. Pero el diagnóstico solo es posible si el profesor tiene suficiente conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido, en relación con la tarea de modelización que les ha dado a los estudiantes, junto con un fuerte enfoque hacia la modelización.

En varias investigaciones se estudió el hecho de que, con el entrenamiento, los profesores de matemáticas universitarias llegaron a acostumbrarse a trabajar con tareas de modelización complejas. La mayoría de las investigaciones son informes sobre un curso de modelización junto con sus reflexiones (Blomhøj y Kjeldsen 2007; Schwarz y Kaiser 2007; Maaß y Gurlitt 2011). Los resultados de estos estudios mostraron un cambio en la visión de las matemáticas de los docentes en formación y en servicio,

simplemente al tratar con problemas de modelización. Además, los autores anteriores observaron una mejora en las competencias de modelización.

Las tres barreras esenciales para los docentes de enseñanza primaria y secundaria son el material, el tiempo y la evaluación. Para los docentes con experiencia en MM, el tiempo no era una barrera tan fuerte como lo fue para los docentes sin experiencia (Schmidt 2010; Borromeo Ferri 2014). Otro aspecto interesante e importante fue, y sigue siendo, el desarrollo de cursos universitarios o talleres de capacitación docente para la enseñanza y el aprendizaje de la modelización en diferentes grados.

Con relación a esto último, la evaluación de estos cursos y talleres con cuestionarios, entrevistas o diarios de aprendizaje durante todo el semestre es importante. Reflexionar sobre sus propios procesos de aprendizaje y desarrollar una comprensión de lo que significa la modelización en la enseñanza, ayuda al docente a implementarlo en sus clases. En ese sentido, Borromeo Ferri y Blum (2010, p. 2047) enfatizan

“La necesidad de que los docentes de matemáticas en formación y en servicio tengan vastas oportunidades para lidiar con la MM, tanto a nivel teórico como práctico, incluidas las experiencias con la modelización en sus aulas de clase”.

Cabe agregar que, Borromeo Ferri (2018) alerta sobre la necesidad de más investigación en todo el campo de la formación docente dentro de la MM: por ejemplo, cómo el conocimiento de los profesores en servicio sobre la enseñanza de la MM, que aprendieron en la universidad, afecta la competencia de modelización de sus estudiantes. Esto podría compararse con los docentes que no tuvieron la oportunidad de recibir capacitación en al menos las competencias básicas para la enseñanza de la MM.

El proyecto COACTIV (Cognitive Activation in the Mathematics Classroom and Professional Competence of Teachers; en español: Activación cognitiva en el aula de matemáticas y la competencia profesional de los docentes) comprendió una muestra representativa de docentes de secundaria y sus alumnos del estudio PISA (Programme for International Student Assessment) en Alemania en 2003 y 2004. El resultado central fue que el conocimiento del contenido pedagógico de los docentes es un factor significativo para el aumento de los logros de sus alumnos (Kunter y Baumert 2011).

En relación con esto último, Borromeo Ferri (2018), señala que, cuanto más pueda un profesor usar tareas matemáticas de activación cognitiva en sus clases, lo que permite múltiples soluciones, mejor será el rendimiento matemático de los estudiantes. Por lo tanto, el conocimiento sobre las tareas matemáticas es una parte importante del conocimiento del contenido pedagógico.

El estudio internacional TEDS (Teacher Education Development Study; en español: Estudio de desarrollo de la formación docente; por ejemplo, Blömeke, Busse, Kaiser, König, & Suhl, 2016) obtuvo resultados similares, lo que significa, sin duda, que los profesores son lo más importante. Además, Borromeo Ferri (2018) señala que los efectos de las competencias de los docentes en general se representan en el siguiente modelo (ver figura 1). La enseñanza de calidad es también un factor de impacto principal en el aprendizaje de los estudiantes.



Figura 1. Desde las competencias de enseñanza hasta el aprendizaje de los estudiantes. Tomado de <<Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education>> por R. Borromeo Ferri, 2018, New York: Springer.

Significado de la Modelización Matemática

Borromeo Ferri (2018) establece que la modelización matemática se convirtió en un campo de investigación bien establecido dentro de la educación matemática en los últimos 50 años. Particularmente en los últimos 10 años, la investigación sobre modelización matemática ha mostrado un fuerte aumento en el número de estudios empíricos realizados: tanto estudios cualitativos como cuantitativos.

Los resultados de estos estudios empíricos en todo el mundo han brindado sólidos conocimientos y responden parcialmente a cómo se puede enseñar y aprender con eficacia la MM. Al observar el debate internacional, se pueden encontrar diferentes nociones de la MM debido a los diversos enfoques educativos en varios países (Borromeo Ferri 2014).

Sin embargo, existe un fuerte consenso de que la MM se puede describir como una actividad que implica una transición entre la realidad y las matemáticas, porque esta es una característica esencial de la MM. (Ver figura 2).

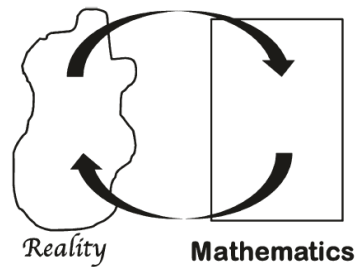


Figura 2. Modelización Matemática: Transiciones entre la realidad y las matemáticas. Tomado de <<Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education>> por R. Borromeo Ferri, 2018, New York: Springer.

La MM no significa tener un "problema pseudo realista", en el que se dan todos los datos, o solo tiene que ejecutar algoritmos. La MM es un desafío para los estudiantes en varios niveles, porque los estudiantes trabajan en preguntas fuera de la realidad, a las que tienen que aplicar las matemáticas.

De manera semejante, Niss, Blum y Galbraith (2007), señalan que, la MM consiste en un dominio extra matemático D, de interés, de algún dominio matemático M y un mapeo del dominio extra matemático al dominio matemático (Ver figura 3)

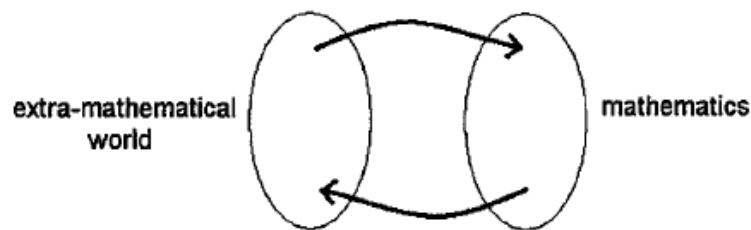


Figura 3. Mathematics and the rest of the world. Tomado de Niss M., Blum W., Galbraith P. (2007).

En D se identifican objetos, relaciones, fenómenos, suposiciones, preguntas, entre otros, como relevantes para el propósito de la situación; luego se mapean o traducen en objetos, relaciones, fenómenos, suposiciones, preguntas, entre otros, pertenecientes a M, allí, se realizan las manipulaciones matemáticas correspondientes, cuyos resultados se traducen de nuevo a D, y se interpretan como conclusiones sobre ese dominio. Este llamado ciclo de modelización puede repetirse varias veces, sobre la base de la validación y evaluación del modelo en relación con el dominio, hasta que las conclusiones resultantes sobre D sean satisfactorias en relación con el propósito de la construcción del modelo. El término modelización se refiere a todo el proceso, y todo lo que implica: desde la estructuración de D hasta la decisión de un dominio matemático adecuado M y un mapeo adecuado de D a M, el trabajo matemático dentro de M, la interpretación y evaluación de conclusiones con respecto a D, y repetir el ciclo varias veces si es necesario o deseable.

Para Niss, Blum y Galbraith (2007), el mundo extra matemático puede ser otra materia o disciplina, un área de práctica, una esfera de la vida privada o social. El término "mundo real" se utiliza a menudo para describir el mundo exterior a las matemáticas. El mundo extra matemático es entonces una forma útil de indicar que parte de lo amplio del "mundo real" sería relevante tratar como problema particular.

La noción de modelización matemática se describe o se define de diferentes maneras en la educación matemática en función de la perspectiva teórica adoptada (Kaiser y Sriraman, 2006):

No existe una comprensión homogénea de la modelización y sus antecedentes epistemológicos dentro de la discusión internacional sobre la aplicación y modelización (p. 45)

Por su parte Balakrishnan, Yen y Goh (2010) señalan que, en la MM, los estudiantes resuelven matemáticamente problemas del mundo real. La MM es un proceso cíclico (inglés, 2007) de traducir un problema del mundo real en un problema matemático formulando y resolviendo un modelo matemático, interpretando y evaluando la

solución en el contexto del mundo real, y refinando o mejorando el modelo si la solución es inaceptable. El énfasis en la MM a nivel escolar está en el proceso más que en el producto.

La MM permite a los estudiantes conectar las matemáticas del aula con el mundo real, mostrando la aplicabilidad de las ideas matemáticas (Zbiek y Conner, 2006; Stillman, 2009). Dado un problema del mundo real, los estudiantes necesitan comprender la situación del mundo real y hacer suposiciones para idear un método matemático y de esta manera aproximarse al problema. Por lo tanto, la MM profundiza la comprensión y enriquece el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes. Cuando los estudiantes trabajan en grupos para abordar el problema, también desarrollan importantes habilidades del siglo XXI, como las habilidades de aprendizaje colaborativo y las habilidades metacognitivas (Tanner y Jones, 2002).

Además, Balakrishnan, Yen y Goh(2010), sostienen que, las aplicaciones y la modelización juegan un papel vital en el desarrollo de la comprensión y las competencias matemáticas. En ese sentido, es importante que los estudiantes apliquen habilidades de resolución de problemas matemáticos y habilidades de razonamiento para abordar una variedad de problemas, incluidos los problemas del mundo real.

Finalmente, para los autores anteriores, la MM es el proceso de formular y mejorar un modelo matemático para representar y resolver problemas del mundo real. A través de la MM, los estudiantes aprenden a usar una variedad de representaciones de datos y a seleccionar y aplicar métodos y herramientas matemáticas apropiadas para resolver problemas del mundo real. La oportunidad de tratar con datos reales y usar herramientas matemáticas para el análisis de datos debería ser parte del aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles.

Ciclos de Modelización

Una característica clave para Kaiser (2014) de las diversas perspectivas de modelización es la forma en que se entiende el proceso de MM, es decir, cómo se describe la relación entre las matemáticas y el "resto del mundo" (Pollak 1968). Los

análisis muestran que los procesos de modelización son utilizados de manera diferente por las diversas perspectivas y corrientes dentro del debate de la modelización. Las perspectivas descritas anteriormente desarrollaron diferentes nociones del proceso de modelización, ya sea enfatizando la solución de un problema real, como lo hace la perspectiva de modelización realista o aplicada, o el desarrollo de la teoría matemática como lo hace el enfoque epistemológico o teórico. Por lo tanto, en función de las diferentes perspectivas sobre la MM, existen varios ciclos de modelización con énfasis específico, por ejemplo, para propósitos matemáticos, actividades de investigación o uso en las aulas (Borromeo Ferri, 2006).

En casi todos los enfoques, la MM se describe como un proceso cíclico para resolver problemas reales mediante el uso de las matemáticas, ilustrado como un ciclo que comprende diferentes pasos o fases. El ciclo de modelización desarrollado por Blum (1996) y Kaiser-Meißner (1986) se basa, entre otros, en el trabajo de Pollak (1968) y sirve como visualización ejemplar de muchos enfoques similares

Esta descripción, según Kaiser (2014), contiene las características, que en la actualidad se pueden encontrar en varios ciclos de modelado: el problema del mundo real dado se simplifica para construir un modelo real de la situación, entre otras muchas suposiciones que deben hacerse. Luego, para crear un modelo matemático, el modelo del mundo real debe traducirse a las matemáticas. Sin embargo, la distinción entre un modelo del mundo real y un modelo matemático no siempre está bien definida, porque el proceso de desarrollo de un modelo del mundo real y un modelo matemático está entrelazado, entre otros porque el modelo desarrollado en el mundo real está relacionado con el conocimiento matemático del modelador.

Dentro del modelo matemático, los resultados matemáticos se resuelven usando métodos matemáticos. Después de interpretar los resultados matemáticos, se deben validar los resultados reales, así como el proceso de modelización completo. Puede ser necesario pasar nuevamente por partes individuales o por todo del proceso de la MM (ver figura 4).

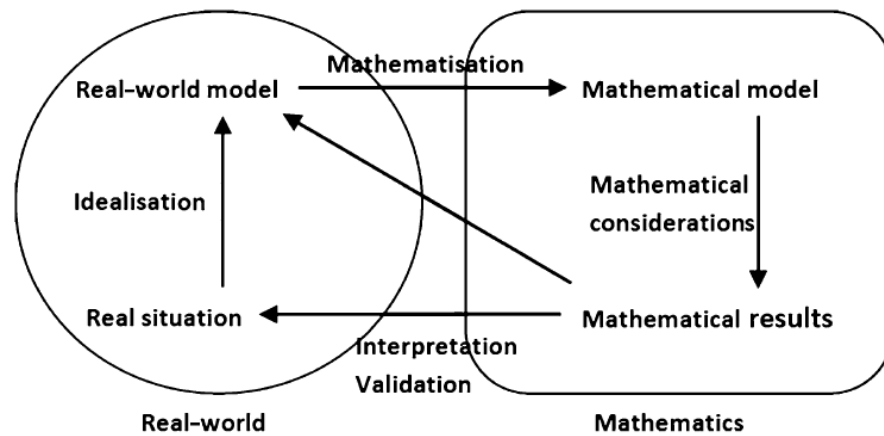


Figura 4. Mathematical Modelling and Applications in Education Modelling process from Kaiser-Meißner (1986) and Blum (1996). Tomado de Kaiser (2014).

Greefrath y Vorhölter (2016), presentaron dos descripciones (matematización simple y compleja) para los procesos de modelización, ordenados por la complejidad de los pasos para desarrollar un modelo matemático.

Matematización simple

Si solo se usa un paso para transferir un problema de la vida real a un modelo matemático, este ciclo de modelización se denomina matematización simple. En particular, la representación del modelo generalmente aceptado por Schupp (1988) es concreta. En una dimensión, divide las matemáticas y la realidad, que es característica esencial de la MM, mientras que, en la otra dimensión, el problema y la solución se distinguen por igual (ver figura 5).

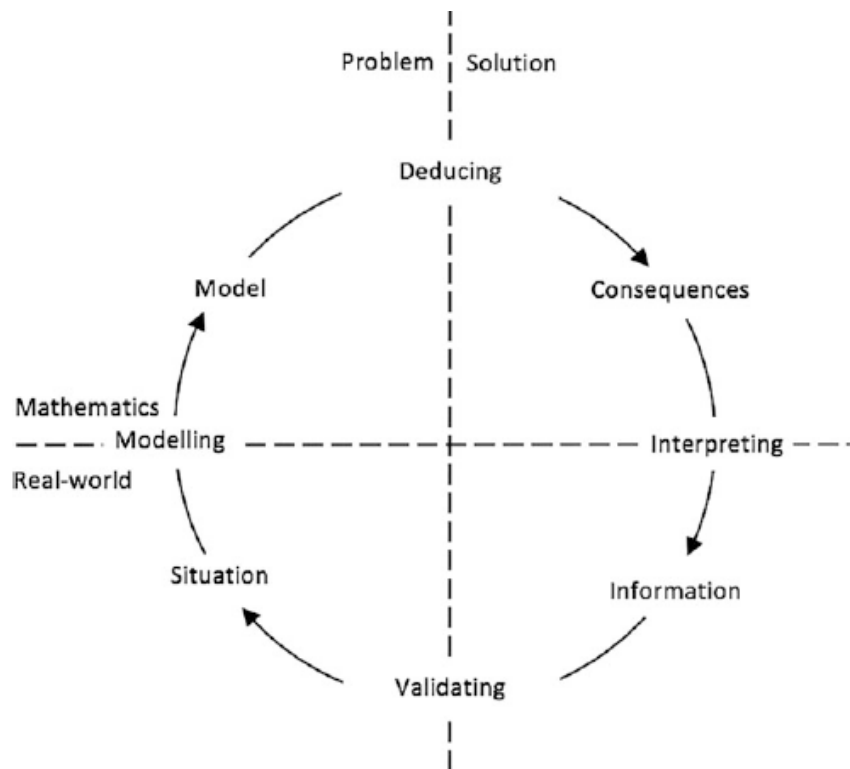


Figura 5. Modelling cycle by Schupp (1989, p. 43). Tomado de Greefrath y Vorhölter (2016).

El ciclo de modelización (ver figura 6) más conocido en Alemania fue creado por Blum (1985). Especificó un paso adicional en la construcción del modelo matemático. Simplificar la realidad o, en otras palabras, crear un modelo real fue visto como un paso individual. Este tipo de ciclo fue desarrollado junto con Kaiser-Meißner (1986) y ha sido mejorado por autores tales como, Henn (1995), Humenberger y Reichel (1995), Maaß (2002) y Borromeo Ferri (2004). Además, Maaß (2005), así como Kaiser y Stender (2013) agregaron la solución interpretada como un paso entre la solución matemática y la realidad (ver figuras 7 y 8). Esto destaca la interpretación y validación como diferentes procesos en la segunda mitad del ciclo de modelización (Greefrath 2010).

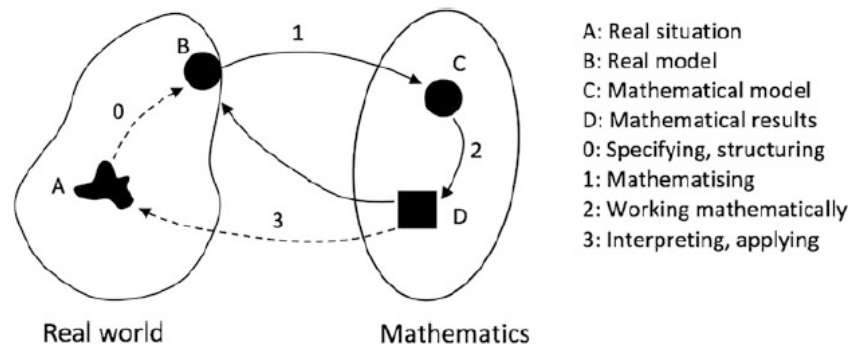


Figura 6. Modelling cycle by Blum (Blum and Kirsch 1989, p. 134). Tomado de Greefrath y Vorhölter (2016).

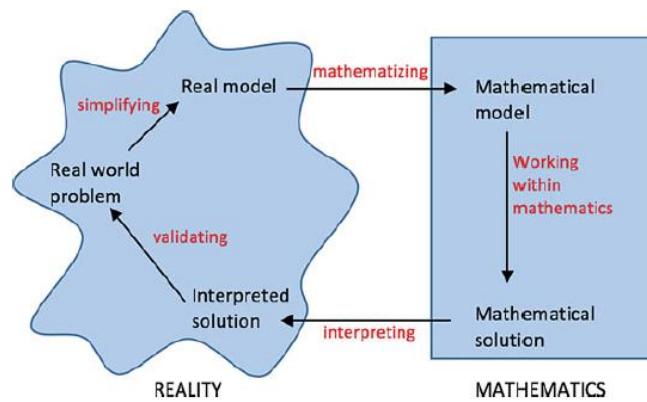


Figura 7. Modelling cycle of Maaß (2006, p. 115). Tomado de Greefrath y Vorhölter (2016).

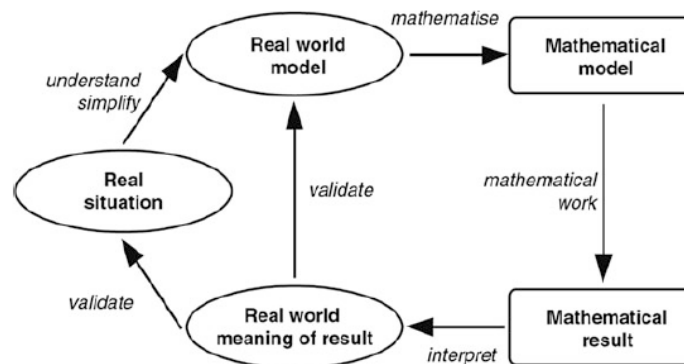


Figura 8. Modelling cycle of Kaiser and Stender (2013, p. 279). Tomado de Greefrath y Vorhölter (2016).

Matematización compleja

Un modelo más nuevo de Blum y Leiß (2005) y adaptado por Borromeo Ferri (2006), se desarrolló a partir de un aspecto cognitivo (ver figura 9). El modelo original de Blum de 1985 se amplió mediante la adición de un modelo de situación, que mostró más detalles al considerar cómo se genera un modelo matemático. El papel del individuo que crea el modelo también se describió de manera más detallada. El modelo de situación describía la representación mental del individuo de la situación.

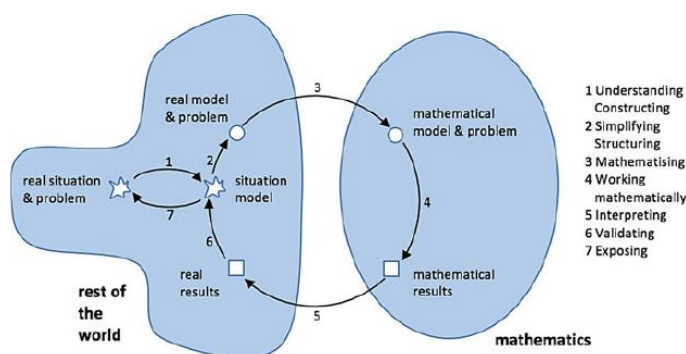


Figura 9. Modelling cycle of Blum and Leiß (2005). Tomado de Greefrath y Vorhölter (2016).

Es evidente entonces, al observar la literatura sobre modelización y aplicaciones, se pueden encontrar muchos ciclos de modelización diferentes. Son así, ya que dependen de varias perspectivas de la modelización y, en algunos casos, si se usan tareas complejas o no (Borromeo Ferri, 2006).

Cabe agregar, según Borromeo Ferri (2018), que, en los últimos años, se ha investigado teórica y empíricamente la relevancia del ciclo de modelización para la enseñanza y el aprendizaje de la modelización. Con base a estos resultados, el ciclo de modelización debe ser una parte central de la formación y capacitación de los docentes, y debe integrarse explícitamente al comenzar a utilizar las actividades de MM en la escuela.

En relación con esto último, Borromeo Ferri (2018) señala que el ciclo de modelización no es solo un modelo teórico que caracteriza los procesos de modelización, sino que es un instrumento de aprendizaje multipropósito para estudiantes y un instrumento de diagnóstico para docentes. De manera similar a las perspectivas, Borromeo Ferri (2006) establece una clasificación para los ciclos:

- Ciclo de modelización a partir de la matemática aplicada.
- Ciclo de modelización didáctica o pedagógica.
- Ciclo de modelización psicológica.
- Ciclo de modelización desde una perspectiva cognitiva.

La presente investigación se limita a los ciclos de modelización desde una perspectiva cognitiva y pedagógica, la cual se define con detalle a continuación.

Ciclo de modelización de diagnóstico/Ciclo de modelado desde una perspectiva cognitiva

En la figura 10 se ilustra el "Ciclo de modelado de diagnóstico" (Borromeo Ferri, 2007) utilizado en la formación docente.

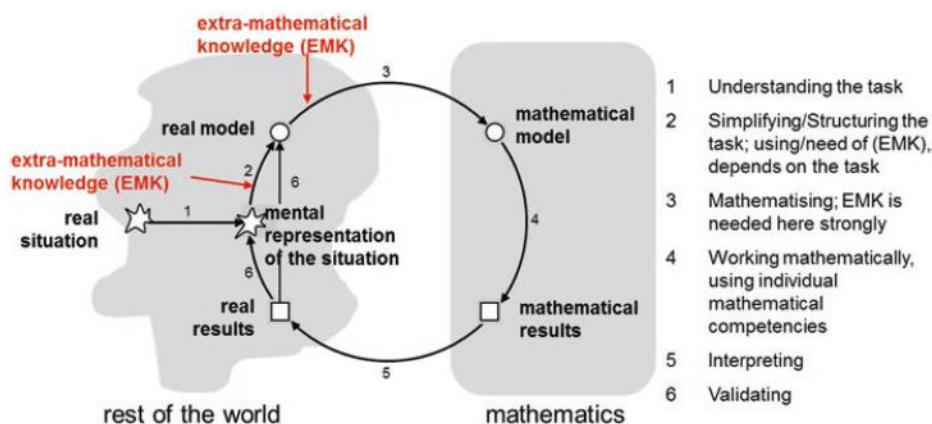


Figura 10. Mathematical modeling cycle from a cognitive perspective (Borromeo Ferri 2007). Tomado de Borromeo Ferri (2018).

Las siguientes fases pertenecen al ciclo de modelización bajo una perspectiva cognitiva.

La Situación Real (SR)

Presenta la situación que se da en el problema. Puede ser una imagen o solo un texto o ambos. La transición de la situación real a la representación mental de la situación (RMS), el individuo debe comprender el problema (Borromeo Ferri y Lesh, 2013).

Representación Mental de la Situación (RMS)

Una "representación mental" es una forma de pensar sobre una situación dada, y se ve afectada por una variedad de atributos y experiencias (Borromeo Ferri y Lesh, 2013). En esta fase se lleva a cabo una reconstrucción mental de la situación dada en el problema, que está más bien en un nivel implícito y en su mayoría es desprevenida para el individuo. Aunque el estudiante no comprenda el problema, puede seguir trabajando en la tarea.

Adicionalmente, la RMS puede ser muy diferente en cada estudiante, por ejemplo, dependiendo del estilo de pensamiento matemático del individuo: imaginaciones visuales en relación con fuertes asociaciones con las propias experiencias; o el foco está más centrado en los números y hechos dados en el problema, que el individuo quiere combinar o relacionar.

La transición de RMS a MR se lleva a cabo una idealización y simplificación del problema, que es más clara para el individuo. Esto se debe a que durante la RMS el individuo toma decisiones, lo que influye en la forma de "filtrar" la información del problema. Dependiendo de qué tipo de problema se presente, surgen preguntas o la necesidad de conocimiento extra matemático (Borromeo Ferri, 2006).

Modelo Real (MR)

Esta fase tiene una fuerte conexión con la RMS. Es por eso que el modelo real se basa principalmente en un nivel interno del individuo. Esto también significa que el nivel de representaciones externas (bocetos o fórmulas) también puede representar un modelo real. Pero esto realmente depende de las declaraciones verbales de los individuos al hacer una representación externa.

La transición del modelo real al modelo matemático se caracteriza de la siguiente manera: el progreso individual en la matematización; Además, el conocimiento extra

matemático (depende de la tarea) es muy demandado por los individuos y se utiliza para construir un modelo matemático (Borromeo Ferri, 2006).

Usar, aplicar y generar conocimiento extra matemático hace que los problemas de modelización sean muy interesantes para los alumnos. La conexión entre la realidad y las matemáticas y su utilidad se hacen evidentes (Borromeo Ferri, 2018).

Modelo Matemático (mm)

El término modelización, Griesel (2005) lo describe como el proceso para desarrollar un modelo matemático basado en un problema de aplicación y usarlo para resolver el problema. Greefrath y Vorhölter (2016) se refieren a los modelos matemáticos como una representación especial del mundo real que permite la aplicación de métodos matemáticos. Si se utilizan métodos matemáticos, los modelos matemáticos que representan el mundo real pueden ofrecer un resultado matemático (Zais y Grund 1991). Por lo tanto, un modelo matemático es una representación del mundo real que, aunque simplificado, permite la aplicación de las matemáticas. Sin embargo, el procesamiento de un problema real con métodos matemáticos es limitado, ya que la complejidad de la realidad no se puede transferir completamente a un modelo matemático. Esto generalmente ni siquiera se desea. Otra razón para generar modelos es la posibilidad de procesar datos reales de una manera manejable. Por lo tanto, solo una parte seleccionada de la realidad se transferirá a las matemáticas a través de la modelización (Henn 2002).

En esta fase, los individuos principalmente hacen representaciones externas en el sentido de bocetos o fórmulas. Ahora, las afirmaciones verbales de los individuos están más en un nivel matemático, y se refiere a la realidad en menor nivel (Borromeo Ferri, 2006). Debido a la complejidad del problema, puede ser necesario tener más de un modelo matemático para llegar a la solución de un problema real (Borromeo Ferri, 2018).

La transición hacia las matemáticas se completa aquí. Para la transición del modelo matemático a los resultados matemáticos, los individuos usan sus competencias matemáticas.

Resultados Matemáticos (RM)

Los estudiantes escriben sus resultados, que obtienen según el modelo matemático. La interpretación de los resultados tiene lugar en la transición de los resultados matemáticos a resultados reales, que es importante y por lo general los estudiantes no la realizan. Los resultados deben interpretarse en relación con la situación real dada para obtener resultados reales. (Borromeo Ferri, 2006).

Resultados Reales (RR)

Los resultados matemáticos son discutidos por los individuos con la finalidad validar si son sensatos o coherentes en correspondencia con la situación real. En ese sentido, Borromeo Ferri (2006) señala que, se podrían generar dos formas diferentes de validación de los alumnos:

Validación intuitiva (más inconsciente)

El individuo descubre por sí mismo que los resultados pueden ser incorrectos por razones que realmente no puede explicar, o "siente" que no encajan en su propio marco de experiencias y asociaciones.

Validación basada en el conocimiento (más consciente)

Significa que las personas están de acuerdo con sus resultados en función de su conocimiento extra matemático o no.

Tanto la validación "intuitiva" como la "basada en el conocimiento" están conectadas con las reflexiones previas del individuo. La razón por la cual los individuos en su mayoría no validan es el hecho de que hacen principalmente una "validación matemática interna". Validar significa para ellos "calcular" el modelo matemático. No conectan los resultados a la situación real (Borromeo Ferri, 2006).

Los investigadores que trabajan con este tipo de ciclo se centran especialmente en los procesos cognitivos de los individuos durante los procesos de modelización. Esta es una de las razones por las que la RMS se incluyó en este ciclo, porque los investigadores suponen que esta fase está más o menos desarrollada por todos los individuos durante la modelización (Borromeo Ferri, 2018).

Si los maestros son capaces de nombrar y distinguir los pasos dentro del ciclo de modelado, entonces pueden diagnosticar las posibles barreras cognitivas que los alumnos tienen mientras modelan.

Ciclo de Modelización Pedagógico

En este modelo, la realidad y las matemáticas están separadas como dos mundos. Comenzando con la situación real, que es la dada a través del problema / tarea real, tiene que idealizar esta situación real para construir un modelo real.

La investigación del modelo simplemente significa trabajo matemático interno, y obtener resultados matemáticos. El paso final importante es la interpretación del (los) resultado(s) matemático(s) (Borromeo Ferri, 2018).

¿Por qué este ciclo se llama didáctico o pedagógico?

A través del ciclo pedagógico los estudiantes tienen una idea de cómo los problemas de modelización son diferentes a los problemas convencionales, debido a las transiciones entre la realidad y las matemáticas. Bajo un punto de vista didáctico y pedagógico, este ciclo es una herramienta significativa para modelar lecciones: en particular debido a los cuatro pasos claramente dispuestos (ver figura 11). El ciclo de modelización cognitivo tiene siete pasos y sería demasiado difícil de entender para los estudiantes más jóvenes.

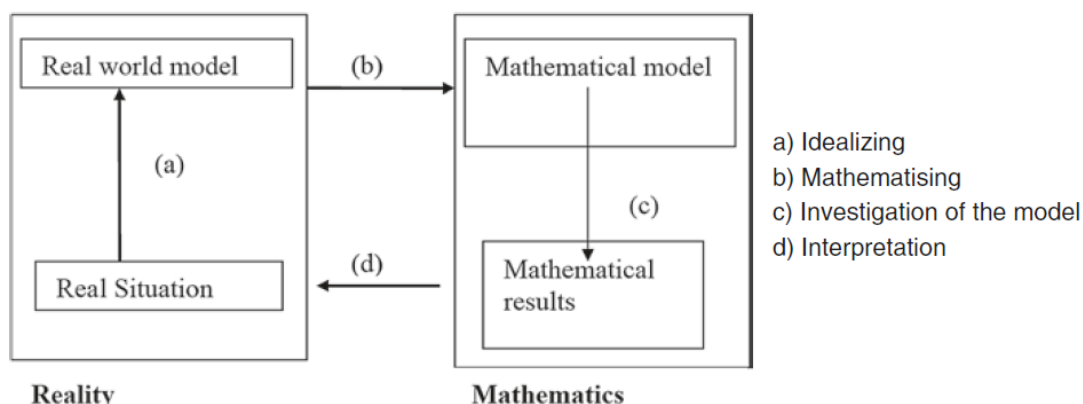


Figura 11. Pedagogical Modeling cycle. Tomado de Borromeo Ferri (2018).

Competencias de modelización matemática: fomento y obtención

Los docentes deben poder distinguir entre los pasos de modelización para ayudar a los estudiantes. Estos pasos son, por lo tanto, la base para evaluar las competencias de modelización (Borromeo Ferri, 2018). Hay varias caracterizaciones de la competencia de modelización. La definición de Maaß (2006) es ampliamente aceptada:

“Las competencias de modelización incluyen las habilidades y destrezas necesarias para realizar el proceso de modelización de manera adecuada y orientada a objetivos, así como la voluntad de ponerlos en práctica” (p. 117).

El debate sobre la modelización distingue entre las competencias globales y las sub competencias de modelización. Las competencias de modelización global se relacionan con las habilidades necesarias para realizar todo el proceso de modelización y reflexionar sobre él (Kaiser y brand 2015). Las sub competencias se relacionan con los pasos individuales del ciclo de modelización, que Blum y Kaiser (1997, p. 9) especificaron en detalle.

Competencias para comprender el problema real y establecer un modelo basado en la realidad, significa:

- Hacer suposiciones sobre el problema y simplificar la situación.
- Reconocer las cantidades que influyen en la situación, nombrarlas e identificar variables clave.
- Construir relaciones entre las variables.
- Buscar la información disponible y diferenciar entre información relevante e irrelevante;

Competencias para construir un modelo matemático a partir del modelo real, significa:

- Matematizar cantidades relevantes y sus relaciones.
- Simplificar cantidades relevantes y sus relaciones si es necesario.
- Elegir las notaciones matemáticas apropiadas y representar gráficamente las situaciones.

Competencias necesarias para resolver preguntas matemáticas dentro de este modelo matemático, significa:

- Utilizar estrategias heurísticas como la división del problema en partes, establecer relaciones con problemas similares o análogos, reformular el problema, ver el problema en una forma diferente, variar las cantidades o los datos disponibles, entre otros.
- Utilizar el conocimiento matemático para resolver el problema.

Competencias para interpretar resultados matemáticos en una situación real, significa:

- Interpretar resultados matemáticos en contextos extra matemáticos.
- Generalizar soluciones que fueron desarrolladas para una situación en particular.
- Demostrar soluciones a un problema, utilizando un lenguaje matemático apropiado o comunicar las soluciones.

Competencias para validar la solución, significa:

- Revisar críticamente y reflexionar sobre las soluciones encontradas;
- Examinar algunas partes del modelo o pasar por el proceso de modelización nuevamente si las soluciones no se ajustan a la situación.
- Reflexionar sobre otras formas de resolver el problema o si las soluciones pueden desarrollarse de manera diferente.
- Discutir en general las limitaciones del modelo.

Blomhøj (2011), distingue diferentes sub competencias a nivel general, por lo que la lista anterior está lejos de ser completa:

- Resolver un problema del mundo real al menos parcialmente, a través de una descripción matemática (es decir, un modelo) desarrollada por el estudiante.
- Reflexionar sobre el proceso de modelización activando el metaconocimiento sobre los procesos de modelado.
- Conocer de las conexiones entre las matemáticas y la realidad.

- Conocer la percepción de las matemáticas como proceso y no simplemente como producto.
- Conocer la subjetividad del modelado matemático: es decir, la dependencia de los procesos de modelado de los objetivos y las herramientas matemáticas disponibles y las competencias de los estudiantes.
- Aplicar las competencias sociales, tales como, la capacidad para trabajar en grupo y comunicarse sobre y a través de las matemáticas. (Kaiser y Brand 2015, p. 111)

Fomentar y obtener la competencia de modelado de un individuo debe ser uno de los objetivos al enseñar el modelado, ya que cada paso del ciclo de modelado puede ser una barrera cognitiva o un bloqueo para los estudiantes.

En relación con esto último (Borromeo Ferri, 2018) señala que, la pregunta: ¿cómo medir las competencias de modelización, y en particular medir el progreso a lo largo del tiempo? es un campo de investigación amplio.

Teóricamente, Blomhøj y Jensen (2007) proponen un enfoque holístico y un enfoque atomista, para medir las competencias. Por lo tanto, los proyectos concretos para fomentar las competencias de modelado se pueden realizar a través de estos dos enfoques. Al abordar problemas de modelización completos, el enfoque holístico será más efectivo, pero la complejidad del problema debe corresponder a las competencias de los estudiantes. Por otro lado, el enfoque atomista, se basa en el supuesto de que, especialmente cuando el estudiante comienza a utilizar actividades de modelización, resolver el problema de modelización completo llevaría demasiado tiempo. Por lo tanto, el objetivo es fomentar las sub competencias de manera separadas al abordar solo las fases individuales de todo el proceso de modelización.

Si bien, el enfoque atomista es importante para enfatizar las sub competencias en detalle, el enfoque holístico parece ser más adecuado para aquellos docentes que tienen poca o ninguna experiencia en la enseñanza de la modelización. Además, para los estudiantes, el significado y la comprensión de la MM se hace más evidente cuando se trabaja al principio en un problema de modelización en su conjunto y no en elementos individuales que representan una sub competencia. Comenzar con el enfoque holístico ofrece a los docentes la posibilidad de diagnosticar qué sub competencias deben

fomentarse en los estudiantes. Luego, se pueden organizar tareas específicas para varias sub competencias para que los estudiantes las ejerciten (Borromeo Ferri, 2018).

Competencia Tareas

Las tareas son el núcleo de las clases de matemáticas. La selección y la calidad de las tareas son esenciales para la comprensión matemática, además de promover las prácticas y las competencias matemáticas de los estudiantes (Borromeo Ferri, 2018).

Desarrollar tareas matemáticas para cubrir ciertos temas matemáticos no es en absoluto trivial y se necesita tiempo para hacerlo. Debido a las muchas demandas que los docentes tienen que tratar todos los días en la escuela, casi no hay espacio para crear problemas de modelización para los estudiantes. Por lo tanto, existe una gran necesidad de materiales de enseñanza buenos y de alta calidad que incluyan tareas matemáticas y, especialmente, problemas de modelización (Borromeo Ferri, 2018).

Es importante que los docentes en servicio al menos puedan tener tiempo durante un taller de modelización o en un seminario universitario, para crear un problema de modelización en un grupo. Además, aprenden a clasificar los diferentes pasos de la solución según las fases del ciclo de modelización, y a reflexionar sobre las posibles dificultades que sus alumnos podrían tener al modelar (Borromeo Ferri, 2018).

Como una alternativa al desarrollo de un nuevo problema de modelización, Borromeo Ferri (2018), señala que la transformación de una tarea matemática determinada (por ejemplo, de un libro de cálculo) en un problema de modelización es una forma de entender **qué caracteriza a un problema de modelización** o lo distingue de los problemas matemáticos normales.

Por último, al hacer esta actividad, la diferencia entre la resolución de problemas matemáticos ordinarios y problemas de MM se hacen evidentes. Lesh y Zawojewski (2007) destacaron la diferencia entre la resolución de problemas y la MM. Lesh y Doerr (2003) también dejaron en claro que cada problema de MM es también un "problema" en el sentido de que no se puede resolver directamente con algoritmos conocidos (Schoenfeld 1994) sino que se necesitan estrategias para hacerlo. Los problemas

matemáticos se pueden enfocar fuertemente en aspectos matemáticos internos, pero también pueden tener un contexto. Los problemas de modelización se definen como preguntas de la vida real que provienen del mundo extra matemático. Así que no se puede hablar de problemas de MM sin un contexto real (Borromeo Ferri, 2018).

Es por esto, que la competencia de tareas es necesaria para enseñar modelización en todos los niveles de escolaridad. La MM encaja muy bien con los métodos de aprendizaje cooperativo (Johnson y Johnson, 1999). Debido al contexto real de los problemas de modelización, la enseñanza interdisciplinaria (Williams, Roth, Swanson, Doig, Groves, Omuvwie, Borromeo Ferri, & Mousoulides Williams, 2016) y la enseñanza en equipo también son posibles.

En ese sentido, Anderson (2010) señala que, En el mundo del trabajo más allá de la escuela, los tipos de problemas encontrados suelen ser complejos y multidimensionales, por lo que la resolución de problemas requiere equipos de personas que trabajen juntos para modelar situaciones y desarrollar estrategias y soluciones. Cada miembro del equipo aporta diferentes conocimientos y experiencias al grupo, por lo que necesitan encontrar formas para desarrollar un plan y resolver el problema. Estas habilidades son críticas para la resolución y la modelización exitosa de problemas y deben desarrollarse a lo largo de la educación primaria y secundaria (Anderson y White, 2004).

En matemáticas, hay evidencia que indica que la resolución de problemas se puede mejorar cuando los alumnos trabajan en grupos cooperativos (Sahlberg y Berry, 2002; Terwel, 2003). Sin embargo, como señalan Sahlberg y Berry (2002), esto debe ser planificado y bien estructurado con alumnos "entrenados y guiados" en conductas cooperativas apropiadas. Los autores también señalan que algunas tareas son más apropiadas para el trabajo cooperativo que otras, incluidas las investigaciones abiertas y las tareas de modelización que promueven el intercambio equitativo entre los miembros del grupo. Para Sahlberg y Berry (2002, p. 89), las tareas de modelización se definen como "problemas reales que requieren principios y fórmulas matemáticas para ser resueltos. Las tareas están abiertas en términos de procedimientos y resultados.

Características de los problemas de modelización

Maaß (2007, 2010) desarrolló un esquema de clasificación multidimensional para problemas de modelización y las actividades correspondientes para el aula. Además, Maaß (2007) señaló algunas características que pueden considerarse típicas para las tareas de modelización. Según Maaß, las tareas de modelización son:

1. Abiertas: soluciones múltiples.
2. Complejas: los estudiantes deben entender el contexto, y tienen que buscar datos relevantes para la modelización.
3. Realistas: existe en el mundo real.
4. Auténticas: a los estudiantes no se les presenta una pseudo realidad. Palm (2002, 2007) describe la autenticidad como la medida en que una tarea simula un desempeño de la vida real.
5. Problemas: Un problema de modelización siempre debe ser un problema en el sentido de que los estudiantes no puede encontrar la solución de inmediato mediante actividades de rutina, sino que deben pensar en estrategias para alcanzar la solución.
6. Soluble a través del proceso de modelado: un problema de modelización debe resolverse a través del proceso de modelización, lo que implica que se deben usar todas las fases del ciclo de modelado.

Las siguientes características para problemas de modelización de Borromeo Ferri y Lesh (2013) son un complemento de las anteriores:

1. Significado de la tarea de modelado: los alumnos deben ser capaces de manejar la tarea y debe tener sentido para ellos.
2. Contexto realista y basado en la edad: Cada estudiante tiene su propio punto de vista sobre la realidad y sus propias experiencias, por lo que una clase es muy heterogénea. La vida cotidiana de un estudiante de la escuela primaria es muy diferente de la de un estudiante de secundaria. Por lo tanto, estas consideraciones deben tenerse en cuenta al elegir tareas de modelización que sean interesantes para un grupo de edad en particular.
3. Provocación de nuevas preguntas: La tarea de modelización debe abrir la oportunidad para que los alumnos formulen nuevas preguntas. Estas preguntas pueden

ser a un nivel matemático y, por supuesto, sobre el contexto y la situación real de la tarea.

4. Estimular formas holísticas de aprendizaje: el "aprendizaje con todos los sentidos" también es posible con tareas de modelización, en particular para aquellos problemas complejos que se pueden resolver principalmente fuera del aula.

5. Nivel apropiado de lenguaje: La tarea de modelización debe formularse de manera que los alumnos puedan entenderla, dependiendo de su nivel de educación. Las frases poco claras también impiden que los alumnos construyan una representación mental del contexto en la tarea.

De un problema ordinario de matemática aplicada a un problema de modelización

La transformación de problemas ordinarios de matemática aplicada en problemas de modelización podría ser más manejable para los docentes que enfrentan restricciones de tiempo en la vida escolar. Para esto, los problemas matemáticos en los libros escolares se deben considerar con esta pregunta en mente: cómo hacer que las tareas sean más interesantes, motivadoras y con una mayor demanda cognitiva al convertirlas en problemas de la vida real. Los siguientes aspectos dados por Borromeo Ferri (2018) son importantes, tanto para la transformación exitosa de un problema ordinario en un problema de modelización como para usarlo de manera efectiva en el aula.

- reducir los datos proporcionados o dejar de lado todos los datos y ejercicios específicos
- modificar la situación real si es necesario para hacerla más auténtica
- formular una pregunta abierta
- definir las herramientas que los estudiantes pueden usar (internet, libros, software, materiales especiales, etc.)

Competencia Docente

La enseñanza de la MM y las aplicaciones es exigente y sigue sus propias reglas, en el sentido de que los problemas de modelización son un formato de tarea nuevo y avanzado tanto para estudiantes como para docentes (Borromeo Ferri, 2018). A continuación, se presentan 5 aspectos importantes de una metodología de enseñanza para la MM (Blum 2015), basado en hallazgos empíricos.

Gestión eficaz del aula y orientada al alumno

La gestión del aula es un término ampliamente utilizado dentro de la investigación educativa actual (Borromeo Ferri, 2018). Por su parte, Hattie (2009) y Timperley (2011), describen la capacidad de un docente para organizar y estructurar lecciones, como aquella, donde los estudiantes obtengan el mejor resultado cognitivo a través del trabajo grupal y el tiempo suficiente para que los estudiantes piensen por sí mismos. Por lo tanto, implica una gran cantidad de "activación cognitiva", en lugar de absorber el conocimiento solo a través de las acciones del docente.

Lo anterior significa, tiempo tanto para trabajar en un problema de modelización como discutir y reflexionar sobre los resultados. Mientras los estudiantes trabajan en problemas de modelización, será trabajo del docente ir a cada grupo, observar su progreso en la resolución y usar los errores de los estudiantes de manera constructiva (Borromeo Ferri, 2018).

Es importante que los docentes reconozcan que, el trabajo en grupo es una parte esencial de las actividades de modelización. Lograr la solución del problema de modelización en conjunto fomenta no solo un entorno social, sino también cognitivo (Reusser, 2001).

Activación cognitiva de los alumnos

Estimular la activación cognitiva de los alumnos debería ser el objetivo de cada tipo de lección. Para Borromeo Ferri (2018), en matemáticas, diferentes tareas pueden fomentar diferentes niveles de activación cognitiva. Estar involucrado cognitivamente

significa que los estudiantes participan activamente, en primer lugar, con sus propias ideas y luego al participar activamente en el trabajo grupal o en la clase.

Activación metacognitiva de los alumnos

Las actividades metacognitivas tienen que ser una parte crucial de la enseñanza y el aprendizaje de la modelización matemática. Borromeo Ferri (2018), señala que, se deben promover reflexiones de acompañamiento y retrospectivas, comenzando desde la primera clase de modelización. Los ciclos de modelización son un instrumento para la activación metacognitiva de los estudiantes. *El conocimiento sobre los pasos del ciclo y todo el proceso les da a los estudiantes una mejor orientación mientras resuelven el problema.* Por ejemplo, son mucho más conscientes de la necesidad de validar los resultados matemáticos. Del mismo modo, preguntas como "¿qué ideas te llevan al modelo matemático?" O "¿has construido una representación mental adecuada de la situación real dada?" También estimulan a los estudiantes meta cognitivamente.

Fomentar múltiples soluciones

Hay una gama de posibles resultados correctos para un problema de modelización y no "el único resultado correcto". Borromeo Ferri (2018), señala que, a la mayoría de los docentes tienden a favorecer fuertemente su propia solución, especialmente cuando comienzan a enseñar modelización. La variedad de procesos de solución para un problema de MM lo hace incontrolable, y muy a menudo difícil para los docentes, porque a veces no todas las soluciones posibles son obvias.

Sin embargo, el docente debe alentar a sus alumnos a producir múltiples soluciones de acuerdo con sus preferencias. Los caminos a seguir en el ciclo de modelización están influenciados por los estilos de pensamiento matemático de los alumnos. Los resultados del proyecto MultiMa (Multiple Solutions for Mathematics Teaching Oriented Toward Students' Self Regulation), Schukajlow y Krug (2014), muestran que aquellos estudiantes que desarrollaron varias soluciones tuvieron mayores ganancias de aprendizaje. Entonces, teniendo en cuenta el aspecto de la activación meta cognitiva,

otra pregunta podría ser ¿de qué otras maneras es posible llegar a una solución del problema?

Planificación y ejecución de clases de modelización matemática

Borromeo Ferri (2018) presentan nueve (9) principios para planificar y ejecutar clases de MM:

Preparación y planificación:

1. El docente debe elegir un problema de modelización adecuado para sus alumnos, que tenga un contexto interesante, esté orientado a los problemas, sea auténtico, realista y pueda resolverse con todos los pasos del ciclo de modelización.

2. El docente debe resolver este problema por su cuenta, siguiendo todos los pasos del ciclo de modelización. Anotar varias soluciones y al menos tres posibles modelos/formulaciones del problema. Además, pensar en las posibles barreras cognitivas que los estudiantes podrían tener cuando trabajan en este problema y tenga preparadas las intervenciones adecuadas para sus estudiantes.

3. El docente debe pensar en el objetivo central de su clase. ¿Desea profundizar la comprensión de los estudiantes de cierto contenido matemático a través de la tarea? ¿Desea centrarse en mejorar las sub competencias de modelización de sus alumnos, como la interpretación o la validación? ¿Tiene "objetivos sociales" adicionales, por ejemplo, observar el trabajo en equipo de los estudiantes y darles retroalimentación y apoyo para que puedan ser más efectivos y llegar a un resultado?

4. ¿Qué herramientas son necesarias para el problema de modelado que el docente ha elegido? ¿Deberían los estudiantes usar la tecnología y, en caso afirmativo, cómo combinarla con el proceso de modelización?

5. Con respecto al tiempo que necesita el estudiante para resolver el problema de modelización. ¿Hay suficiente tiempo para que los estudiantes trabajen en el problema y también para discutir los resultados?

Ejecutando y reflexionando:

1. En primer lugar, los estudiantes necesitan tiempo para comprender de qué se trata el problema. En segundo lugar, deben saber cómo trabajarán en este problema (en grupos de cuántos estudiantes). Antes de comenzar el trabajo grupal, el docente debe

indicarles a sus alumnos cómo se debe presentar la solución. Si desea que todos los grupos trabajen de manera efectiva, se elegirá uno o dos grupos para la presentación.

2. Durante el trabajo grupal, el docente debe acercarse a cada grupo y tomar notas sobre el proceso de modelización de los estudiantes. Observar los grupos que usaron diferentes modelos para su solución. Se puede comenzar las presentaciones con estos grupos para tener una buena base para la discusión posterior.

3. ¿Qué pasa con su objetivo central de la lección? ¿Se está logrando el objetivo? ¿Está satisfecho con su plan de lecciones? ¿Hay suficiente tiempo para todo?

4. Reflexión: En particular para los docentes novatos, desarrollar un plan de lección es útil al principio. Los docentes expertos no necesitan un plan tan detallado, porque han internalizado todas estas cosas. Sin embargo, debe reflexionar sobre lo que tuvo éxito en la lección y lo que no fue así, y qué aspectos se pueden optimizar en lecciones adicionales.

Intervenciones durante las actividades de modelización

Apoyar a los estudiantes mientras realizan actividades de modelización es una parte crucial de la enseñanza de la MM, por lo tanto, es necesario tener algunos antecedentes teóricos. Para Borromeo Ferri (2018), este conocimiento hace que sea mucho más fácil responder las preguntas planteadas anteriormente, y también construye la base para el diagnóstico, la evaluación y la calificación.

Una habilidad clave en todo docente, es el "darse cuenta, observar o percibir" (Sherin, Jacobs y Philipp, 2011). En ese sentido, Borromeo Ferri (2018) señala que, El docente tiene que reconocer si un estudiante está progresando mientras resuelve un problema de la vida real, y tiene que decidir si la intervención es necesaria o no.

Leiß (2007) define las intervenciones del docente como todas las interrupciones verbales, paraverbales y no verbales de un docente en el proceso de solución de los estudiantes. Borromeo Ferri (2018), define las intervenciones adaptativas de los docentes como el apoyo a los estudiantes de una manera mínima, para que puedan trabajar por su cuenta tanto como sea posible, logrando un equilibrio entre la independencia de los estudiantes y la orientación del docente. Leiß diferencia entre niveles, objetivos y activadores de intervenciones, ver cuadros 1, 2 y 3 respectivamente.

Cuadro 1

Niveles de Intervenciones

TIPO	SIGNIFICADO
Con respecto al contenido	Intervenciones del docente referidas al contenido: el proceso de modelización y las matemáticas correspondientes
Estratégico	Intervenciones relacionadas con el meta-nivel, es decir, aspectos generales del proceso de modelización y resolución de problemas
Afectivo	Intervenciones que intentan influir en el estado mental de los estudiantes
Organizativo	Intervenciones sobre las condiciones básicas del trabajo de los alumnos, incluidas las interacciones grupales o las presentaciones

Fuente: Borromeo Ferri (2018)

Cuadro 2

Objetivos de las Intervenciones

TIPO	SIGNIFICADO
Diagnóstico	El docente pregunta a sus estudiantes sobre el estado actual de su proceso de solución
Retroalimentación	El docente brinda retroalimentación sobre el proceso de solución de los estudiantes sin más información o corrección
Consejo Indirecto	Consejos sutiles del docente para apoyar a los estudiantes a encontrar la “mejor manera de resolver” el problema
Asesoramiento	El docente brinda explícitamente explicaciones e información relevantes a los estudiantes
Directo	
Sin Intervención	El docente no interviene, aunque los estudiantes puedan tener problemas
Consciente	

Fuente: Borromeo Ferri (2018)

Cuadro 3

Activadores de las Intervenciones

TIPO	SIGNIFICADO
Invasivo	Iniciativa propia del docente para intervenir en el proceso de solución de los alumnos
Sensible	Los estudiantes le piden consejo explícitamente al docente

Fuente: Borromeo Ferri (2018)

Competencia Diagnóstico

En la literatura se pueden encontrar varias caracterizaciones del término "diagnosticar", para Borromeo Ferri (2018), el diagnóstico es y debe ser un componente central en la educación matemática. El diagnóstico le permite al docente comprender mejor la solución de los estudiantes o cualquier otra cosa que produzcan, para intervenir y dar retroalimentación adecuadamente.

Jordan y vomHofe (2008), distinguen entre dos formas de diagnóstico, *Orientado al producto y al proceso*.

El diagnóstico orientado al producto, se centra en los resultados individuales de los alumnos. La solución o el proceso de trabajo del individuo en sí no está en primer plano, sino más bien el resultado. Un ejemplo, es una prueba de matemáticas al final de un tema. La ventaja del diagnóstico orientado al producto es que no consume mucho tiempo, a diferencia del diagnóstico orientado al proceso. *El diagnóstico orientado al proceso*, se enfoca a comprender mejor los procesos de pensamiento o los orígenes de los resultados de los estudiantes, para proporcionar intervenciones adecuadas.

Hoja de diagnóstico como herramienta para diagnosticar la competencia de modelización durante el proceso de resolución

Reconocer el progreso o los errores de los estudiantes durante el trabajo grupal, es una tarea muy compleja para los docentes en general. El cuadro 4, muestra una herramienta para documentar el comportamiento de un estudiante en actividades de modelización.

Esta herramienta es fácil de usar e incluye las sub competencias centrales de la MM. El uso sistemático ofrece un diagnóstico orientado al proceso de modelización y a la documentación del aumento (y disminución) de la competencia de modelización de los estudiantes mediante la observación. Por un lado, le provee al docente una idea de cómo actúa un solo individuo dentro del trabajo grupal y, por otro lado, es otra forma de calificar al estudiante en lugar de utilizar una prueba tradicional (Borromeo Ferri, 2018).

Cuadro 4

Hoja de diagnóstico para actividades de modelización en grupos (+ excelente; • dudoso; - conceptos erróneos / incorrectos)

Tarea 1						
	Entendiendo el problema	Hacer suposiciones	Matematizar	Trabajando matemáticamente	Validación, reflexión crítica.	Procedimiento orientado a objetivos
Estudiante 1	+	*	-	*	*	*
Estudiante 2	*	*	-	*	*	*
Estudiante 3	+	+	+	+	+	+
Estudiante 4	*	+	*	*	+	+
...						

Fuente: Borromeo Ferri (2018)

MOMENTO III

MARCO METODOLÓGICO

Metodología de la investigación

El propósito de este estudio estaba centrado en indagar las vivencias puestas en práctica por los docentes del área de matemática de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, cuando trabajan con actividades de modelización matemática, y develar la teoría sobre modelización matemática que subyace durante el curso sobre Modelización Matemática como herramienta para *la actividad docente*, la investigación realizada se ubicó en un estudio de casos, enmarcada dentro del paradigma cualitativo de tipo descriptivo e interpretativo.

La investigación realizada se encuentra dentro del paradigma cualitativo definido por Hernández, Fernández y Baptista (2014, p. 358) como aquella que “se enfoca en comprender los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con su contexto”.

El estudio está diseñado bajo la modalidad de investigación de campo, debido a que la información se recoge directamente de los actores del proceso, y de acuerdo a los propósitos planteados en esta investigación como descriptiva e interpretativa, porque en el estudio se describió e interpretó con detalle lo ocurrido en el curso de Modelización Matemática como herramienta para la actividad docente, en diversas áreas acorde a cada carrera o programa de estudio, específicamente: discusión socializada sobre la bases teóricas de la modelización matemática, breve desarrollo

histórico de la modelización matemática en la educación matemática, objetivos y perspectivas de la modelización matemática, la modelización como campo de investigación y desarrollo en educación matemática, investigación en formación docente en modelización, significado de la modelización matemática, ciclos de modelización, competencias de modelización matemática, competencia tarea, competencia docente, competencia diagnóstico.

La decisión de centrar la investigación en el diseño estudio de casos, radica en el hecho de que este diseño es el más adecuado porque la finalidad del estudio era indagar las vivencias de los Docentes cuando realizan actividades de Modelización Matemática (MM).

Escenario y Sujetos de Investigación

En el proceso cualitativo, los sujetos de investigación según Hernández, Fernández y Baptista (2014 p. 391) representan al “grupo de personas, eventos, sucesos, comunidades, etc., sobre el cual se habrán de recolectar los datos, sin que necesariamente sea estadísticamente representativo del universo o población que se estudia”.

La presente investigación se desarrolló en la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado del Decanato de Ciencias y Tecnología, ubicada en el Estado Lara al Oeste de la ciudad de Barquisimeto. Los sujetos de investigación fueron diez (10) Profesores de diferentes Programas de Estudios.

Para la selección de estos Docentes se envió vía E-mail una propaganda de promoción del curso de Modelización Matemática, donde los participantes realizaron el proceso de inscripción a través de un cuestionario con datos personales de los Docentes (ver anexo A).

Descripción de los Sujetos Claves

Se seleccionaron Docentes del área de Matemática de diversos Programas de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, los cuales proporcionaron información relevante para los propósitos de esta investigación.

Técnicas e Instrumentos de Recolección de la Información

La técnica de recolección de la información indica la manera de cómo se va a obtener la misma. Hernández, Fernández, y Baptista, (2007, p. 583) expresa que “las técnicas de recolección, son los medios empleados para recolectar la información y las fuentes son hechos o documentos a los que acude el investigador y que les permite obtener información”.

En este sentido, la técnica de recopilación que se utilizó en este estudio fue la observación participante. Como instrumentos de apoyo para la recolección de datos, se utilizaron: grabaciones audio visuales y cuestionario. Este último, definido por Hernández, Fernández, y Baptista, (2007, p.614) “como un conjunto de preguntas respecto a una o más variables a medir”.

En función de lo expresado, se diseñaron dos cuestionarios: el primero de ellos se refiere a indicadores sobre las actividades de Modelización Matemática; y el propósito del segundo era la de conocer la opinión del sujeto, con respecto al contenido, método y obstáculos sobre el curso de Modelización Matemática,

Técnicas de Procesamiento y Análisis de la Información

En esta investigación se utilizaron las bases teóricas sobre Modelización Matemática en Educación Matemática, haciendo énfasis en el Ciclo de Modelización

de Diagnóstico, tipos de tareas de Modelización, conversión de problemas ordinarios de cálculos a problemas de Modelización Matemática.

El análisis de la información, se orientó en utilizar las competencias de Modelización Matemática para analizar las vivencias puestas en práctica por los docentes, cuando trabajaron con actividades de MM, y se utilizó la teoría fundamentada para develar una concepción teórica como alternativa para la enseñanza de la MM en la praxis universitaria.

La primera parte del análisis de la información se enfocó en desarrollar los dos primeros objetivos específicos planteados en el Capítulo I, para lo cual se apoyó en las competencias de MM como herramienta de análisis, por tener una riqueza aprovechable para la presente investigación.

La segunda parte del análisis de la información se centró en develar la teoría alternativa que subyace en la puesta en práctica por los docentes en actividades de MM, para ello se utilizó la teoría fundamentada definida por Strauss y Corbin (2002, p. 21) como una “teoría derivada de datos recopilados de manera sistemática y analizados por medio de un proceso de investigación. En este método, la recolección de datos, el análisis y la teoría que surgirá de ellos guardan estrecha relación entre sí” y en complemento Hernández, Fernández, y Baptista, (2014, p. 422) expresan que “se trata de un proceso no lineal (aunque había que representarlo de alguna manera para su comprensión). Resulta sumamente interactivo (vamos y regresamos) y en ocasiones es necesario retornar al campo por más datos enfocados (entrevistas, documentos, sesiones, entre otros)”.

MOMENTO IV

RESULTADOS OBTENIDOS

Estructura del curso modelización matemática como herramienta para la actividad docente

El curso se llevó a cabo durante cuatro (4) semanas consecutivas, una lección por semana de 4 horas cada una, lo que significa un total de 16 horas. Los participantes del curso, son docentes del área de matemática la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado (UCLA).

Contenido del curso:

1. Objetivos y perspectivas de la modelización matemática en educación matemática
2. Ciclos de modelización
3. Competencias de modelización
4. Tareas de modelización Vs. actividades ordinarias de clase
5. Tipos de intervenciones del Profesor durante las actividades de modelización
6. Evaluación de las tareas de modelización

Se consideraron las siguientes dimensiones basadas en competencias:

- **Dimensión teórica:** conocimiento sobre los ciclos de modelización, objetivos y perspectivas para la modelización y sobre los tipos de tareas de modelización.
- **Dimensión tarea:** capacidad para resolver, analizar y crear tareas de modelado.
- **Dimensión enseñanza:** capacidad para planificar y ejecutar lecciones de modelización y el conocimiento de las intervenciones apropiadas durante los procesos de modelización de los alumnos.
- **Dimensión diagnóstica:** capacidad para identificar fases en los procesos de modelización de los alumnos y diagnosticar las dificultades de los alumnos durante

dichos procesos. En el cuadro 5, se tienen las actividades desarrolladas a lo largo del curso.

Cuadro 5

Actividades aplicadas por el autor

Clase	Actividades
1	• Discusión socializada sobre los antecedentes teóricos de la modelización. • Resolución en grupo de problemas de modelización.
2	• Presentación de las tareas asignadas en la clase 1. • Reflexiones y aportes de los estudiantes sobre los contenidos del curso.
3 y 4	• Estudio independiente (de forma virtual)

Fuente: Autor.

El curso se subdivide en las cuatro partes siguientes, a fin de tener un equilibrio adecuado entre las fases teóricas y prácticas. Las dimensiones anteriores están incluidas en las diferentes partes:

Parte 1: Bases teóricas sobre la modelización (primera clase)

Los participantes crearon 4 grupos cada uno de 2 personas, para trabajar juntos durante todas las sesiones. El curso comenzó con la pregunta, ¿qué significa la modelización matemática? Los miembros de cada grupo discutieron y compartieron sus impresiones y llegaron a un consenso, luego un docente por grupo fue el encargado de compartir la idea principal sobre qué es la MM, al resto de los docentes. El tiempo para esta actividad fue de 30 minutos en total. A continuación, se muestran las respuestas dadas por los docentes.

Actividad 1

¿Qué significa la modelización matemática?

Maylin:

Es una representación de un evento a través del empleo de herramientas matemáticas. Por ejemplo, en la vida cotidiana del Barquisimetano, se desea medir

cuántas personas logran comprar en un día con el petro en los establecimientos que cuenta con el sistema Bio pago. Para modelar el evento se recopilan datos como la cantidad de gente que hacen cola en varios establecimientos para comprar con el medio petro, cuántas de ellas logran comprar y el tiempo que el sistema de Bio pago permanece activo durante la jornada, con esa información, se desarrolla un modelo matemático para predecir cuantas personas comprarán de acuerdo a la cantidad de personas en la cola y con respecto tiempo que permanece activo el sistema de Bio pago.

Otro ejemplo, en el fútbol, se puede recoger información sobre los enfrentamientos de dos equipos en una base de datos, tales como partidos jugados, ganados, perdidos, empates, goles a favor, goles en contra, como local y visitante. Luego crear un modelo matemático para predecir resultados entre los dos equipos.

Francisco:

Es utilizar la matemática en situaciones reales. Si los estudiantes sienten apatía por las matemáticas, es porque sólo se le transmite un determinado tema matemático sin un significado real, entonces, una manera de revertir esa situación es que el docente vincule ese conocimiento con alguna realidad del estudiante.

Igyoseida:

Los programas de matemática en algunos casos son conductistas. Por otra parte, hay docentes que se reusan a los cambios. La matemática debe ser llevada a la vida real, porque el estudiante siempre se pregunta, ¿este conocimiento matemático que el profesor transmite, para qué me sirve?

María:

Implica en primer lugar, tener un conocimiento matemático, para luego intentar descubrir el comportamiento de cierto fenómeno, analizando elementos conocidos de dicho fenómeno para predecir eventos futuros.

Eudy:

Tratar con un problema de la vida real, con un conocimiento matemático previo, ya que sin él no se puede trabajar con modelización.

Oscar:

Tenemos la idea de que es un proceso, y a través de la descripción del problema y las herramientas computacionales determinar la solución del mismo.

Luego de las intervenciones de los docentes, el autor, expone el significado de la MM que aparece en la literatura especializada en MM en educación matemática, en la figura 11 se muestra la lámina utilizada.

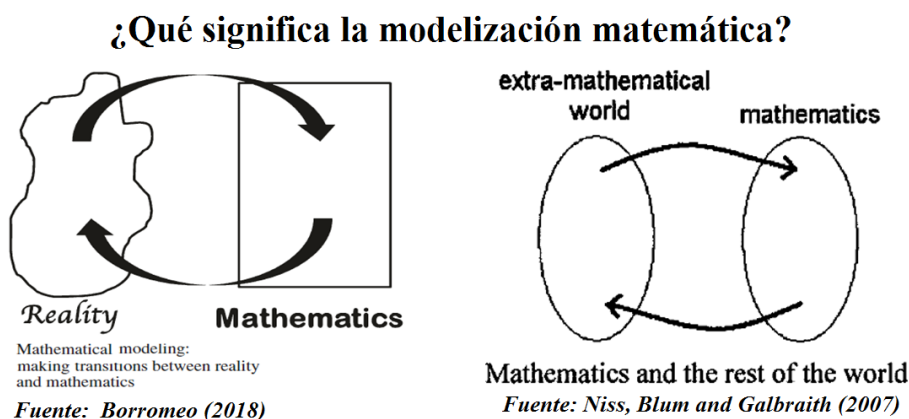


Figura 12. Transiciones entre la realidad y las matemáticas. Lámina presentada por el autor en el curso.

Análisis: Después de esta actividad, se obtiene una visión general de cómo los participantes comprenden lo que se entiende por modelización matemática. Los resultados indican que los docentes tienen sólidos conocimientos sobre la comprensión de la modelización matemática.

Actividad 2 Resolución del problema “Fardos de Paja”

Entre los docentes y el autor resuelven el problema de modelización Fardos de Paja. El objetivo de la actividad 2, es comprender que los problemas de modelización son un desafío, además dejar claro el proceso de transición entre la realidad y las matemáticas y viceversa.

Enunciado del problema: *Al final del verano, se pueden admirar pacas de paja en los campos. Las pacas de paja en la imagen (ver figura 12) están dispuestas de tal manera que cinco se colocan en la fila inferior, cuatro en la siguiente, luego tres, luego dos y una en la parte superior. Intente calcular la altura de todo el montón de pacas de paja lo más exacta posible.*



Figura 13. Pacas de Pajas. Tomado de <<Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education>> por R. Borromeo Ferri, 2018, New York: Springer.

A continuación, se muestran las dificultades, preguntas y opiniones de los docentes cuando trabajaron en el problema.

Para comprender mejor lo que significa la MM, se necesita una visión profunda de las diferentes fases del ciclo de modelización. En el problema de modelización "Pacas de Pajas", el proceso se ilustra de acuerdo con las fases del "Ciclo de modelización de diagnóstico" (Borromeo Ferri 2007) el cual es utilizado en la formación docente (ver figura 13).

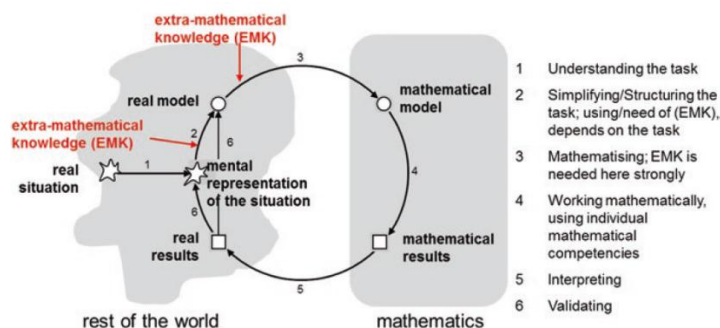


Figura 14. Mathematical modeling cycle from a cognitive perspective (Borromeo Ferri 2007). Tomado de Borromeo Ferri (2018).

Situación Real

Autor:

La situación real del problema de la "paca de paja" es clara a través de la imagen. Por lo tanto, el problema, tomado de la realidad (representado a través de imágenes o texto), se llama la situación real.

Igyoseida:

Podemos decir entonces, que la situación real en la MM es semejante, al planteamiento de cualquier problema verbal, como estamos acostumbrados a trabajar en los cursos de Cálculo 1, 2 y 3. Por ejemplo, los problemas de optimización, los cuales todos tiene un enunciado verbal, debemos determinar los datos que te dan, las condiciones y lo que te piden calcular.

Francisco:

También agregaría que, en el planteamiento del problema de las pacas de pajas, no hay datos numéricos de ningún tipo. Parece que es una diferencia entre los problemas de optimización tratados en nuestros cursos de cálculo y los problemas de MM. Esto quiere decir que, se debe buscar información extra relevante para resolver problemas de MM.

Representación mental de la situación

Autor:

Según Borromeo Ferri (2018), la representación mental de la situación es individual y consta de dos partes:

1. Asociaciones del individuo: se refiere a las propias experiencias con la situación real de los estudiantes (pacas de paja).
2. Comprensión del problema: los estudiantes deben comprender la tarea (que deben determinar la altura de la montaña de pacas de paja).

Francisco:

Es importante que el estudiante lea de manera adecuada el texto del problema, muchos estudiantes leen sin respetar los signos de puntuación, y eso causa confusión en el desarrollo de la actividad.

Igyoseida:

Nuestros estudiantes tienen dificultades de lectura, y esto hace que la actividad de modelización se haga cuesta arriba, entonces es nuestro deber como docentes guiarlos en la lectura del problema. Dirigirlos de tal manera que evidencien los datos, las restricciones y tener claro lo que se pide. El problema no muestra datos.

Maylin:

Es importante comprender el problema. Si el estudiante no tiene clara la(s) pregunta(s), difícilmente tenga éxito en la resolución del problema. Puede ser que un estudiante conozca las pacas de paja y de esta manera su grado de vinculación con el problema crece. Debemos leer con ellos el problema y orientarlos para comprender todo el problema, cuál es la pregunta y cuáles son los datos.

Daicy:

Debemos Tener claro en primer lugar como están distribuida las pacas de pajas, para intentar calcular la altura del montón de pacas.

Oscar:

Es un problema muy abierto, y conduce a preguntarnos los siguientes aspectos, ¿los fardos se parecen? ¿cuál es el porcentaje de error que se puede cometer? ¿la masa de los fardos superiores incide sobre los inferiores? En resumen, hay muchas consideraciones que son libres para el que está haciendo el cálculo. Podemos tomar en cuenta a la mujer para intentar calcular la altura del montón, pero, ¿los fardos serán iguales?

María:

Los más importante que se puede ver, es que, no hay ningún dato. ¿Cómo podemos calcular algo si el enunciado no te da datos numéricos?

Eudy:

Ya que el enunciado es muy abierto, surgen muchas preguntas. Supongo que es una característica de los problemas de MM.

Pedro:

Este tipo de enunciados abiertos, y sin datos explícitos, no se tratan en nuestras clases de cálculo tradicionales. Para resolver el problema se debe buscar o estimar los datos que no da el enunciado.

Conocimiento Extra Matemático

Autor:

No se proporcionan muchos datos relevantes en la tarea (por ejemplo, la altura de la mujer o el diámetro de una paca de paja), por lo que se necesita conocimiento extra matemático. El nivel de conocimiento extra matemático siempre depende de la experiencia que la persona tenga con el contexto real dado (Borromeo Ferri, 2018).

Igyoseida:

En este problema el conocimiento extra matemático, se reduce a la matemática, como lo es estimar tanto la altura de la mujer como la del diámetro de un círculo. Pero puede presentarse problemas de modelización donde ese conocimiento extra matemático tenga que ver con otra carrera diferente a las matemáticas, por ejemplo, química, biología, manufactura, medicina, entre otras disciplinas. Por lo que, es muy importante que, nosotros los docentes tengamos al menos unas ideas básicas con esas áreas.

En cuanto al conocimiento extra matemático debe estar acorde a la realidad de nuestros estudiantes. En mi caso, trabajé con estudiantes administración y tuve que estudiar la terminología adecuada (costos fijos, variable, ingreso, utilidad, pérdida, marginalidad, entre otros) para aplicar la matemática a temas económicos. Los profesores o licenciados en matemática no reciben una preparación en contenidos extra matemáticos durante su formación, así que es conveniente estos espacios (cursos o seminarios) para complementar esos conocimientos relacionados con otras esferas no relacionadas directamente con las matemáticas.

Pedro:

Muy cierto, el conocimiento extra matemático, es necesario para atacar el problema de las pacas de paja, queda en las matemáticas, pero qué sucede si es con otra realidad, que no sea directamente matemática. Pienso que, como docentes debemos involucrarnos y prepararnos para tales eventos.

Modelo Real

Autor:

Para obtener un modelo real, se tiene que simplificar y estructurar la imagen mental, y así especificar la situación real aún más. Puedes pensar en círculos en lugar de pacas de paja, y dibujarlos. Si piensa en la mujer sentada sobre las pacas de paja y tiene en cuenta que la necesita para resolver el problema, entonces ella puede simplificarse como una línea recta.

Es importante simplificar la situación real, y hacer suposiciones; de lo contrario, es difícil usar o encontrar las matemáticas que se necesitan para resolver el problema. Se puede suponer una la altura de la mujer de aproximadamente 1,7 m. para estimar el diámetro de una paca de paja. Pueden dibujar el montón de pacas de paja en el GeoGebra (ver figura 14).

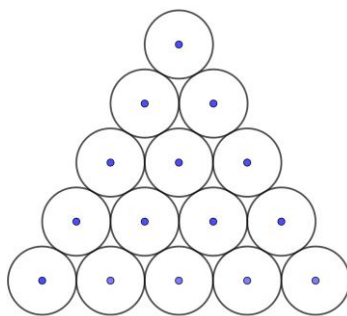


Figura 15. Suposición de un Montón de Pacas de Paja, realizada con el software GeoGebra. Autor (2019).

Francisco:

Se supone la altura de la mujer aproximadamente de 1,6 metros, por lo general aquí en Venezuela, esta altura la hacemos coincidir con el diámetro de una de las pacas.

Igyoseida:

Podemos estimar la altura promedio de la mujer venezolana como 1,65 metros. Pero, esa foto corresponde a una mujer en Alemania, así que supongo que la altura promedio de una mujer alemana debe ser de 1,7 metros. Para dibujar las pacas de pajas podemos utilizar GeoGebra, aunque no estamos en la fase matemática podemos utilizar un software matemático que nos apoye en la comprensión del problema.

Maylin:

El planteamiento del problema puede causar varias respuestas, debido a la suposición de la altura de la mujer, la cual debe caer en un intervalo de medida en metros razonable. La altura de la mujer debe ser positiva, como 1,67 o 1,69 metros. Podemos dibujar las pacas de paja como círculos a lápiz, porque no tengo conocimiento sobre como emplear el GeoGebra para dibujarlas.

Pedro:

No se proporcionan muchos datos relevantes en la tarea (por ejemplo, la altura de la mujer o el diámetro de una paca de paja). Se puede suponer que muchos alumnos han visto estas pacas de paja en las gandolas que transitan por la avenida libertador de Barquisimeto, pero es probable que no sea común para ellos sentarse o tocarlas. Quizás es más fácil estimar la altura de una mujer que la altura de una paca de paja. Ambos aspectos pueden usarse para establecer un modelo real y luego un modelo matemático.

Eudy:

Es evidente que los problemas de modelización requieren de un conocimiento sobre la vida real. Como el problema no les da a los estudiantes la altura de la mujer, y el diámetro de una paca de paja, entonces tienen que obtener esa información. En mi caso, observando, las alturas de las mujeres que hay en este curso, puedo suponer que la altura de la mujer que aparece en la figura es de 1,60 metros. Haciendo esta suposición, se pone en práctica las competencias de estimación y medición.

María:

La manera de usar el conocimiento extra matemático hace que los problemas de modelización sean muy interesantes para los alumnos. Hay una fuerte conexión entre

la realidad y las matemáticas, y con eso, nuestros estudiantes pueden apreciar la utilidad de las matemáticas.

Modelo Matemático:

Francisco:

La geometría se puede utilizar para calcular la altura del montón de pacas de paja. Simplemente se coloca 4 líneas rectas una encima de otra, cada una del tamaño que hemos supuesto para la mujer y luego sumamos y se obtiene la altura pedida.

Igyoseida:

La altura de la mujer de aproximadamente 1,7 m se puede apilar, y luego sumar para obtener la altura de la montaña de pacas de paja. La mujer encaja cuatro veces "una sobre otra", por lo tanto, el montón de pacas de pajas tiene 6,8 m o aproximadamente 7 m de altura.

En la figura 15, los segmentos rojos y azules corresponden a la altura de la mujer (1.7 m).

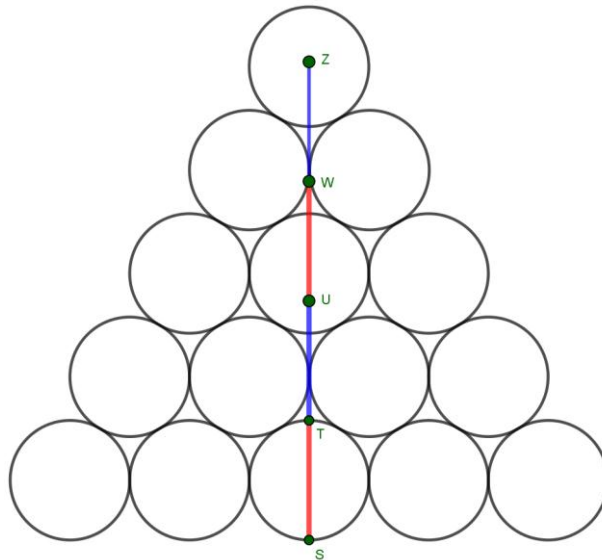


Figura 16. Cálculo de la altura de un Montón de Pacas de Paja mediante segmentos, realizada con el software GeoGebra. Autor (2019).

Eudy:

Si dibujamos el montón de pacas de pajas como en la figura 16, podemos usar el Teorema de Pitágoras. Con Diámetro (d) = 1,7 m.

El lado del triángulo rectángulo y es tan largo como dos diámetros de una paca de paja: $y = 2d = 3.4 \text{ m}$.

La hipotenusa z es tan larga como cuatro diámetros de una paca de paja:

$$z = 4d = 6.8 \text{ m}.$$

Con estos dos resultados es posible calcular el lado x del triángulo rectángulo:

$$x = \sqrt{(6.8\text{m})^2 - (3.4\text{m})^2}$$

Es decir:

$$x \approx 5.89 \text{ m}.$$

Con base a estos resultados, es posible calcular la altura total de la pirámide de pacas de paja de la siguiente manera:

$$H = x + d = 7.59 \text{ m}.$$

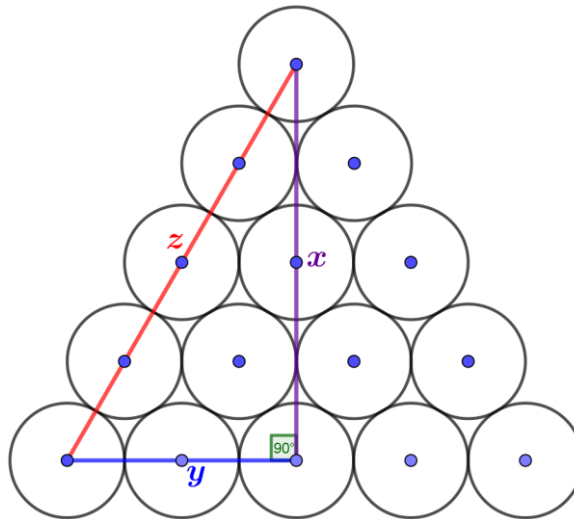


Figura 17. Cálculo de la altura de un Montón de Pacas de Paja mediante el teorema de Pitágoras, realizada con el software GeoGebra. Autor (2019).

María:

Para obtener resultados matemáticos se necesitan competencias matemáticas, como el teorema de Pitágoras, la aritmética fraccional y la estimación. Que surgen a medida que nos vamos adentrando en la solución del problema. El software GeoGebra es una herramienta valiosa para determinar la altura del montón de pacas de pajas.

Resultados Matemáticos**Francisco:**

Observando a la mujer ubicada en el montón podemos deducir que la altura aproximada del motón es aproximadamente 7 metros. En mi estudio de Pregrado (Ingeniería Química) se resolvían problemas o se demostraban proposiciones sin tener claro la teoría que sustentaban esas actividades, y algunas veces ni sabíamos el nombre del procedimiento a seguir (definición rigurosa de límites, inducción matemática, reducción al absurdo, el apretón, entre otros). No es, sino, luego de estar graduados, que, al leer con mayor calma, y reflexión logramos comprender los conceptos matemáticos.

Pedro:

Según los modelos matemáticos, los resultados matemáticos son para ambos muy cercanos 7 m aproximadamente. Los estudiantes están acostumbrados a dar la respuesta sin reflexionar, muchas veces sin colocar las unidades respectivas. Vemos que la interpretación, y validación es una fase explícita en los ciclos de modelización, esto es muy importante porque obliga al estudiante a pensar críticamente sobre su respuesta, en el sentido de que si es coherente el resultado con respecto al problema planteado. En este caso parece sensato la respuesta de 7 metros como la altura del montón de pacas de pajas.

Resultados Reales:**María:**

Estos resultados deben interpretarse en relación con el problema dado para obtener resultados reales. En el contexto de este problema, la interpretación significa que no estamos hablando de unos 7 kg, sino de unos 7 m. Desde mi punto de vista parecen

razonables esos resultados. Por lo tanto, es muy importante tener presente el contexto del problema real. Se observa entonces, que en este punto del ciclo hacemos la transición de las matemáticas a la realidad.

Igyoseida:

A veces olvidamos colocar las unidades a las respuestas en los problemas aplicados de cálculo, esto se debe porque no hacemos la transición hacia la realidad para verificar si esos resultados son coherentes.

Maylin:

Siempre observo en mis clases de cálculo, que, por lo general, los estudiantes detienen la solución del problema con sus resultados matemáticos, porque esto es lo que saben al resolver tareas matemáticas, y es forma como nosotros los docentes resolvemos los problemas en clase. Pero con la MM la situación es diferente. Si los estudiantes no cuestionan la realidad con el resultado matemático, entonces no están trabajando con MM.

Parte 2: Diseño y Resolución de problemas de modelización (segunda clase)

Los docentes en grupo presentan un problema de modelización y entre todos lo resuelven.

Problema del Manto de la Divina Pastora, propuesto por Igyoseida y Maylin.

Planteamiento:

Al día de hoy El Manto de la Divina Pastora (ver figura 17) es considerado el monumento Mariano más alto del mundo.

¿Qué tan lejos puedes ver cuando estás en el mirador del manto de la Divina Pastora? (Redondea tu respuesta al kilómetro entero más cercano).

Considerar los siguientes pasos:

1. Representación mental de la situación.
2. Modelo real.

3. Modelo matemático.
4. Interpretación y validación.



Figura 18. *Manto de la Divina Pastora.* **Fuente:**

<https://www.elimpulso.com/2017/01/16/fotos-turistas-impresionados-con-el-monumento-manto-de-maria/>

Comentarios de los docentes

Representación mental de la situación:

Maylin:

No he ido al manto, pero mi compañera Igyoseida si fue y tiene una referencia sobre el alcance de la visión en el pórtico, es decir el puente que une las torres verticales. Necesito estar en el manto para estimar el alcance de la visión.

Igyoseida:

Me identifico con el problema, con solo mirar la foto del manto, además, porque estuve allí, y observé mucho más allá del Obelisco de Barquisimeto. Desde mi casa que está ubicada a unos 10 kilómetros del manto se ve casi completa.

El título del problema, es importante, porque te hace enfocar más en el problema.

Francisco:

El problema se ve autóctono. Es clave comprender la pregunta. ¿Qué tan lejos puedes ver cuando estás en el mirador del manto de la Divina Pastora?

Para calcular qué tan lejos se puede ver desde el pórtico se debe tener un clima soleado.

María:

Al leer el planteamiento del problema me siento motivada para resolverlo, ya que, todos los días en mi trayecto hacia la universidad paso muy cerca del manto de la virgen. No se me ha ocurrido nunca averiguar qué tan lejos se puede ver desde el manto. Vivo cerca de Yaritagua y se puede apreciar el manto.

Modelo Real:

Francisco:

Para resolver el problema debemos suponer que se tiene buen clima, para que la visual sea completa. Si voy al manto y detecto una referencia puedo estimar el alcance de la visión.

Maylin:

Debemos buscar

¿Cuál es la altura del manto?

¿A qué altura sobre el nivel del mar está Barquisimeto?

Debemos estimar

¿La altura promedio de una persona?

Igyosieda:

Además de buscar y estimar la información que establece Maylin, debemos tener presente la curvatura de la tierra, así que necesitamos su diámetro. Un esbozo del manto, la tierra y el alcance de la visión se puede apreciar en la figura 18.

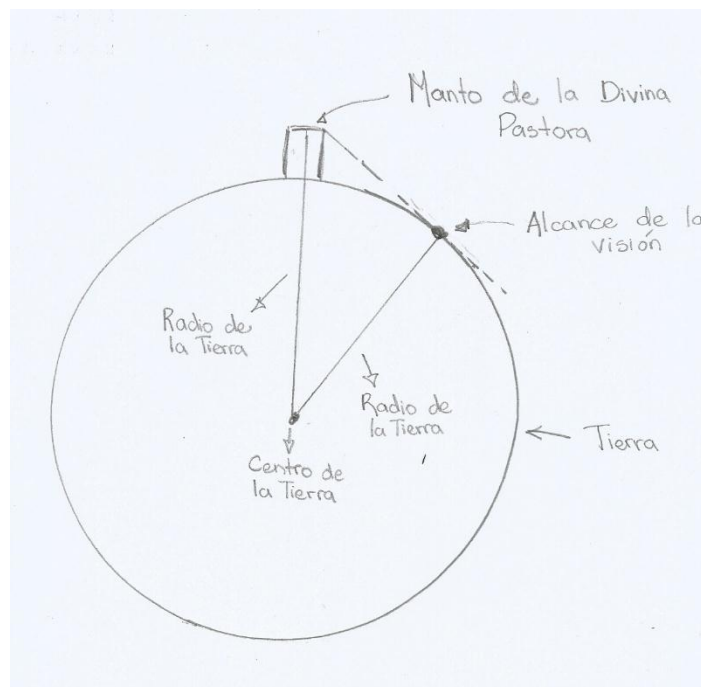


Figura 19: Boceto del Manto de la Divina Pastora junto con la tierra. **Fuente:** Igyoseida.

Eudy:

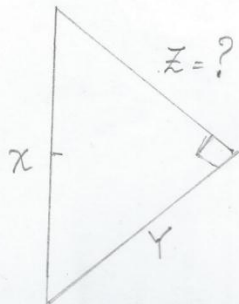
Pensé hacerlo sin tener presente la curva de la tierra. Pero ahora que veo la propuesta de Igyoseida, queda claro que debemos incluir la curvatura de la tierra. El detalle esta en que necesitamos tener acceso a internet para buscar datos que en el enunciado del problema no están dados de manera explícita.

Modelo Matemático:

Igyoseida:

Al hacer el dibujo de la tierra, su radio y el monumento teniendo en cuenta la altura sobre el nivel del mar de Barquisimeto. Se evidencia un triángulo rectángulo, aplicamos el teorema de Pitágoras y obtenemos un aproximado de la respuesta. Ver figura 19.

Modelo Matemático: Manto de la Divina Pastora:



Datos

Radio de la tierra (A): 6371 Km.

Altura del Manto (B): 62 m ó 0,062 Km

Altura sobre el nivel del mar de Barquisimeto (C): 597 m ó 0,597 Km

$$X = A + B + C ; Y = A$$

Z = Alcance de la visión desde el manto.

Entonces, por el teorema de Pitágoras:

$$X = 6371 \text{ Km} + 0,062 \text{ Km} + 0,597 \text{ Km}$$

$$X = 6371,66 \text{ Km}$$

$$Y = 6371 \text{ Km}$$

$$Z^2 + Y^2 = X^2$$

$$Z = \sqrt{X^2 - Y^2}$$

$$Z = \sqrt{(6371,66 \text{ Km})^2 - (6371 \text{ Km})^2}$$

$$Z = 91,7 \text{ Km}$$

Figura 20: Cálculo del Manto. Autor: Igyoseida.

Interpretación y validación:

Igyoseida:

Aproximadamente 91 km es el alcance de la visión en el pórtico del manto de la Divina Pastora. Aunque estuve allá, debo ir nuevamente a verificar esta respuesta, situando un punto de referencia.

Maylin:

Debemos ajustar el problema de modelización según el nivel de nuestros estudiantes. Tanto matemáticamente como extra matemáticamente. Tal vez para estudiantes de otras latitudes, por ejemplo, de Maracaibo, San Cristobal, entre otras ciudades, no vean al problema del manto como pertinente o interesante. El razonamiento de incluir la curvatura de la tierra y su radio en la solución del problema no es usual en estudiantes de bachillerato, ni en un primer semestre de una carrera universitaria.

Igyoseida:

Si queremos presentarles a nuestros estudiantes problemas de MM, como el de las pacas de pajas y el del manto de la Divina Pastora, debemos preparar nuestras clases de modelización, de tal manera que puedan surgir datos que no se ven en el enunciado de los problemas.

Problema: Monumento al Sol Naciente, propuesto por Francisco y Pedro

Francisco:

Nuestro planteamiento es una adaptación de un problema típico de cálculo, que aparece en el libro “Cálculo Diferencial con Funciones Trascendentes Tempranas”, autor: Jorge Sáenz. Editorial Hipotenusa, tercera edición. Específicamente el problema 13, sección 8.6. Ver figura 20.

PROBLEMA 13.

Se va a colocar un poste con un farol en el centro de una plazoleta circular de 20 m de radio. ¿Qué altura debe estar el farol para que ilumine lo mejor posible la vereda que rodea la plazoleta?

Se sabe que la iluminación I de la plazoleta es directamente proporcional al coseno del ángulo θ de incidencia de los rayos luminosos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d del farol a la plazoleta.

Figura 21: Problema ordinario de cálculo diferencial. Autor: Francisco.

El planteamiento para convertirlo en problema de MM es el siguiente:

Monumento al Sol Naciente: Se va a colocar un poste con un farol en el centro del Monumento al Sol Naciente de Barquisimeto. ¿A qué altura debe estar el farol para que ilumine lo mejor posible la carretera que rodea al monumento?



Figura 22: Monumento al sol naciente. Barquisimeto Estado Lara.

Nota: La iluminación del monumento es directamente proporcional al coseno del ángulo de incidencia de los rayos luminosos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del farol a la carretera que rodea al monumento.

Comentarios de los docentes**Francisco:**

Seleccionamos el monumento al sol naciente debido a que es un emblema en Barquisimeto, además, porque en realidad se necesita una luz en el centro de la redoma, ya que, a altas horas de la noche se puede apreciar personas que paran su carro allí

haciendo cualquier tipo de cosas, prácticamente es como una tasca al aire libre, el sitio se presta para eso cosas ya que, es muy oscuro.

La imagen fue tomada del Google Maps. El problema original del libro del profesor Sáenz, dan el radio de una plaza que no especifica. En nuestro problema, si se presenta una plaza real (el monumento al sol naciente) y no damos el dato del radio. Suponemos que el estudiante se vinculará con el problema y buscará el radio en Google Maps. Es importante resaltar que se pueden tener diferentes medidas del radio cada una con un margen de error pequeño, esto se debe al trazo del radio que elija el estudiante. A continuación, les dejo dos ejemplos para tomar el radio (ver figura 21.)



Figura 23: Monumento al sol naciente. Barquisimeto Estado Lara. Fuente: Google Maps.

Eudy:

Observando la adaptación de un problema típico (como lo llama Francisco) de cálculo a un problema de modelización matemática, me atrevo a decir que, para los que nos estamos iniciando en la MM en la educación matemática, parece una buena estrategia modificar problemas de cálculo que comúnmente enseñamos en clase, y que traten con cosas que cotidianamente nuestros estudiantes viven.

Maylin:

Los problemas del Manto y el monumento pueden parecer muy interesante para las personas del estado Lara, tal vez, para estudiantes de otras latitudes, como San Cristóbal o Puerto la Cruz no sea relevante. Aún así, la transformación de problemas que usamos de los libros de texto tradicionales de cálculo a problemas de MM es una buena práctica para los docentes para ir apropiándose de este tipo de actividades. Porque al plantear un problema, estás pensando en cada una de las fases del ciclo de modelización.

Problema: Salvavidas en Morrocoy, propuesto por *María*

María:

Con base al problema del Manto, planteo el siguiente problema de MM.

Un Salvavidas en Morrocoy:

Un salvavidas (ver figura 22) está sentado en la torre observando a las personas mientras se bañan en la playa de Morrocoy ¿Hasta dónde puede ver el salvavidas?



Figura 24: Salvavidas en una torre. **Fuente de la imagen:** <https://www.123rf.com/>

Comentarios de los docentes:

María:

No encontré una imagen de un salvavidas en Morrocoy. Este problema es una variante al del manto de la Divina Pastora, así que su solución es parecida. Claro hay que estimar la altura de la estructura, donde se encuentra el salvavidas, y la altura de una persona sentada, con esos datos junto con el radio de la tierra, suponiendo un día con un cielo azul de tal manera que la visión del salvavidas no presente obstáculos, podemos calcular qué tan lejos puede ver, a través de un cálculo similar al propuesto por la profesora Igyoseida.

El tamaño de la estructura es despreciable con respecto al radio de la tierra, que es aproximadamente 6300 km aproximadamente. Para simplificar cálculos, es posible que este dato a los estudiantes se les pase por alto, aunque no tiene incidencia importante en la respuesta. En los libros de Cálculo se usa la fórmula $W^2 = 13h$, donde W es el rango de visión en kilómetros y h es la altura desde los ojos del observador hasta el piso. El 13 proviene de incluir el radio de la tierra en el teorema de Pitágoras.

Francisco:

Si se presentará la foto de un salvavidas en Morrocoy, tal vez enganche más al estudiante. Porque mucho de ellos habrán visitado Morrocoy.

Problema de modelización: Propuesto por Estefanía y Eudy

Enunciado:

Se quiere medir una de las Torres del Decanato de Humanidades y Arte de la Ucla Ubicado en la carrera 15 con calles 26 y 27, antigua Cárcel conocida como las tres Torres de la época de Gómez. Ver figura 23.

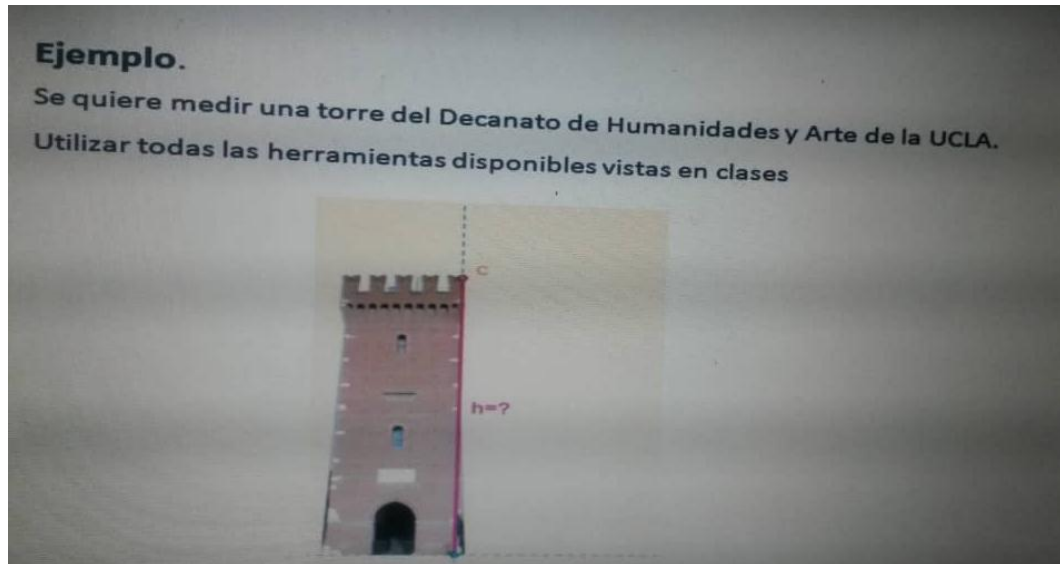


Figura 25: Torres del Decanato de Humanidades y arte de la Ucla. *Fuente de la imagen: Estefanía y Eudy.*

Solución:

Una posible solución pudiese ser, medir el ángulo de elevación con un instrumento de Topografía llamado Teodolito, que estaría ubicado a una altura de 1,30 metros del suelo.

Al realizar esta medición se obtiene un ángulo de 40°

Gráficamente tenemos (ver figura 17):

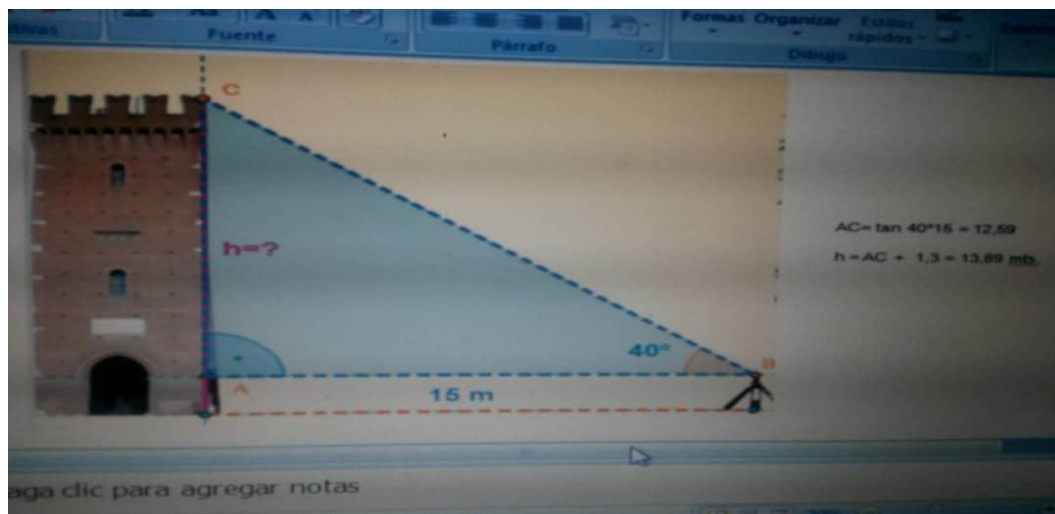


Figura 26: Torres del Decanato de Humanidades y arte de la Ucla - Pitágoras.

Fuente de la imagen: Estefanía y Eudy.

Entonces la altura de la Torre es: $h = 13,89$ Metros.

Parte 3: Reflexiones y aportes de los docentes sobre la MM y el curso (cuarta clase)

¿Por qué la MM debe estar presente en el programa de matemática?

Francisco

Porque busca integrar el conocimiento y la motivación en la práctica. Con la inclusión de la MM en el programa las clases no se hacen monótona y rutinarias. Las actividades de MM exigen cognitivamente al estudiante a reflexionar sobre su aprendizaje.

Maylin

La motivación de los estudiantes por la matemática, es un factor relevante el por qué debe estar presente la MM en el programa. Si nosotros le hacemos ver a los estudiantes de que la matemática es difícil, compleja, tienes que ser muy buen estudiante, entre otras creencias. Indiscutiblemente no vamos a tener avances en la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

La motivación de los estudiantes por la matemática, es un factor relevante el por qué debe estar presente la MM en el programa. Si nosotros le hacemos ver a los estudiantes de que la matemática es difícil, compleja, tienes que ser muy bueno, entre otras creencias, indiscutiblemente no vamos a tener avances en la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Si tratamos a nuestros estudiantes de manera distinta en el aula de clase ¡no significa esto regalar nota!, es decir, motivándolos con actividades interesantes en el proceso de enseñanza, y aprendizaje de la matemática, seguro que tendremos mejores resultados. Las actividades de MM es ese espacio propicio para involucrar al estudiante con las matemáticas. Por supuesto hay que tener una disciplina, y un nivel de conocimiento matemático apropiado para abordar problemas de modelización.

Igyoseida

El motivo de este curso, es crear conciencia en el docente que tiene que aceptar y estar abierto a los cambios. Si el docente es reactivo o desmotivado a cambios en la forma de conducir una clase, a la inclusión de la tecnología en el proceso de enseñanza y aprendizaje, esa actitud impacta significativamente en el desarrollo profesional de nuestros estudiantes. La nueva generación de estudiantes, requiere de más acción y menos clase a la manera tradicional, es decir, sólo ejercicios rutinarios, pizarrón y tiza.

Con las actividades de MM, los estudiantes se apropian de lo que están haciendo, y le toman más cariño a su carrera. Sienten más seguridad y sentido cuando trabajan matemáticamente. La MM contribuye a formar estudiantes, a que tengan más propiedad y decisión en su futuro desempeño profesional, porque la MM lleva al estudiante a lidiar con problemas que surgen de la realidad.

¿Cuáles son las condiciones que deben tener los estudiantes, profesores y el aula para trabajar con la MM?

Eudy:

El docente tiene que dominar el nivel al cual va dirigido el curso, si es del primer semestre o semestres avanzados de la carrera, lo que se dijo en la primera pregunta, tiene que ser relevante en la vida del discente.

Siempre que nosotros en el rol de docente conozcamos los pasos del proceso de MM, independientemente de un ciclo de modelización en específico, estaremos preparado para realizar actividades de MM con nuestros alumnos.

Francisco

El estudiante debe estar abierto a la participación, para ello el docente le debe brindar apoyo para que no se sienta cohibido durante sus intervenciones. Con respecto al aula, esta debe contar con tecnología, porque las actividades de MM necesitan de búsqueda de información.

Igyoseida

Condiciones físicas agradables con acceso constante a la tecnología. El docente debe tener la motivación, disposición, apertura a cambios, escuchar y aceptar las opiniones de los estudiantes. Debemos realizar un diagnóstico a nuestros estudiantes para dirigir las actividades de MM.

Pedro:

Los estudiantes necesitan tiempo suficiente para buscar datos, y resolver los problemas. Las actividades de modelización requieren del trabajo en grupo. Esto da un giro de 180 grados a la manera de trabajar actualmente. Por ejemplo, en el Politécnico, las evaluaciones de Cálculo son 4 exámenes de 25% c/u, y no hay tiempo para otro tipo de actividad, entonces cabe la pregunta, ¿Cómo insertar la herramienta pedagógica MM en nuestras aulas?

¿En qué momento debe aparecer la MM en el programa de matemática o se debe diseñar una asignatura exclusiva para la MM?

María

Se debe incluir desde que el niño inicia la escolaridad. Porque si desde edad temprana comienza a buscar, y analizar situaciones se va acostumbrado, eso tiene como consecuencia, que al llegar a un nivel universitario los estudiantes ya tienen un nivel de maduración adecuado y habilidades para manejar tareas de MM complejas.

Maylin:

La MM debe ser una parte frecuente en la enseñanza de las matemáticas. Es decir, las actividades de MM no deben ser solo una actividad una vez por semestre, sino al menos una vez por cada unidad de la asignatura.

Francisco

La MM debe aparecer desde el inicio del programa de matemática.

Igyoseida

Trabajar con actividades de modelización matemática les brinda a los estudiantes y profesores la posibilidad de obtener otra perspectiva más amplia sobre las matemáticas como asignatura en la universidad. Por lo que, debemos promocionar más la MM en las aulas.

¿Cómo evaluar la MM?

Francisco

No se puede evaluar con exámenes ordinarios. Requiere de tiempo fuera del aula.

María

Estas actividades requieren de tiempo (posiblemente días), según los problemas tratados en este curso, es evidente que no será igual a evaluar un examen tradicional. Porque el estudiante necesita buscar información, suponer, establecer un modelo matemático y ponerlo a prueba con la realidad del problema. Todo desde una perspectiva de socialización con sus pares.

Como las respuestas de los problemas de MM son abiertas, el docente debe preparar un intervalo razonable de posibles respuestas al momento de evaluar una actividad de MM, además el docente debe estar preparado para comprender la forma de recorrer el ciclo de modelización, y el procedimiento efectuado en cada fase del mismo, por parte de los estudiantes.

Eudy

Practica 50 % y 50 % en trabajos de investigación

¿Cómo deberían ser las intervenciones del profesor durante una actividad de modelización?

Pedro

Veo que, en la etapa inicial de la resolución de un problema de modelización, no entras directamente con las matemáticas, sino que previo a la manipulación matemática debe darse una socialización entre los participantes para comprender, suponer e inferir aspectos relevantes del problema, con ese preámbulo entramos al mundo de las matemáticas. En ese sentido debemos acompañar a nuestros estudiantes durante cada una de las fases del proceso, en la medida que vayan agarrando experiencia, el apoyo disminuirá.

Francisco

Como profesores no tenemos problemas para reconocer que el enunciado junto con las preguntas proviene del "mundo real", que necesitamos "las matemáticas" para resolverlo y luego las respuestas matemáticas confrontarlas con la realidad. Los problemas surgen más con el "modelo real" o "modelo matemático" y con las diferentes flechas que conectan las fases como "simplificación", "interpretación", "conocimiento extra matemático" o "validación". Esto puede ocurrir con los estudiantes. Por ejemplo, para el término "modelo", es importante dejarles claro que, representa una imagen simplificada de una situación real.

María

Si se busca es cómo los estudiantes desarrollan un procedimiento, hay que darles unas orientaciones, por ejemplo, qué te parece si sacas esta cuenta o realizas tal o cual procedimiento.

Eudy

Mediadora, como un tutor, no forzar la solución dejar que el estudiante vea las alternativas de solución, que pueden ser varias (si las tiene).

¿La MM debe ser enseñada por quién?

Francisco

Sería muy interesante, experimentar la MM de la siguiente manera:

Supongamos que tenemos una sección de Cálculo Diferencial de una Variable, donde todos los estudiantes se estén formando como futuros ingenieros químicos y el profesor sea ingeniero químico y el núcleo de sus clases sea la MM.

Pienso que formaríamos profesionales más conscientes y con una visión adecuada a los tiempos que se vivan. Porque concentras la materia en el interés principal de los estudiantes, la química.

Maylin

Es muy interesante esta pregunta, como la MM debe partir de una realidad, que debe ser de interés para los estudiantes, por ejemplo, informática, electrónica, mecánica, etc. La terminología del contexto extra matemático que se esté abordando es fundamental que el profesor de matemática domine la terminología utilizada en el problema. Creo que la MM no solo debe ser enseñada por profesores del área de matemática, sino que también por profesionales que fueron formado para el mismo pregrado que los estudiantes. Sería excelente que en la asignatura Base de Datos del pregrado de Informática, los estudiantes realicen prácticas de MM.

Reflexiones de los docentes con respecto al curso:

Estefanía y Eudy

1. ¿Cuáles contenidos y métodos son apropiados para un curso de MM dirigido a los docentes?

Tienen que ser contenidos del entorno social, económico o deportivo, entre otros, que sea relevante y que se vea la aplicación de una herramienta como GeoGebra.

2. ¿Cuáles son las dificultades que surgen en las diferentes actividades del curso?

No tener las competencias en la herramienta, en este caso GeoGebra te dificulta un poco la solución, la parte Matemática es más fácil por la formación, pero el no estar al día con el Software te dificulta la experiencia de la Modelización.

Igyoseida y Maylin

1. ¿Cuáles contenidos y métodos son apropiados para un curso de MM dirigido a los docentes?

Consideramos que uno de los contenidos importantes es el manejo y uso de la tecnología, y cómo método relacionar el contenido a la vida real, acorde al entorno del estudiante.

2. ¿Cuáles son las dificultades que surgen en las diferentes actividades del curso?

Las dificultades que se presentan es la falta de conocimiento de las herramientas tecnológicas, y la apertura al cambio de paradigmas de algunos Docentes.

Francisco y Pedro

1. ¿Cuáles contenidos y métodos son apropiados para un curso de MM dirigido a los docentes?

Me parece que el contenido proporcionado en este curso es el adecuado, le agregaría un curso previo sobre el manejo básico del Software GeoGebra u otro paquete destinado a realizar simulaciones y al trabajo matemático. Esto es esencial, porque la resolución de un problema de la vida real a través de un ciclo de modelización matemática, lleva implícito graficar y predecir eventos o fenómenos de la cotidianidad.

El curso debería ser más extenso en cuanto a tiempo, tal vez, una vez por semana durante tres meses. De tal manera, que nos permita aplicar los conocimientos adquiridos en este seminario, en nuestras clases de Cálculo y así recabar información y discutirla en estos espacios.

2. ¿Cuáles son las dificultades que surgen en las diferentes actividades del curso?

La principal dificultad, tiene que ver con el manejo del GeoGebra. Es la primera vez que tenemos contacto con este importante y educativo programa.

MOMENTO V

REFLEXIONES

Con base al análisis e interpretación de los resultados obtenidos y a los objetivos específicos 1 y 2, se presentan las siguientes reflexiones.

Objetivo Específico 1: *Diseñar e implementar un curso dirigido a los docentes del área de matemática que integre los aspectos de la modelización matemática.*

El curso se diseñó siguiendo los lineamientos establecidos por Borromeo Ferri (2018), para la capacitación docente en la enseñanza de la modelización. Con la finalidad de poner en evidencia las siguientes competencias de los docentes, y así registrar sus vivencias con la modelización matemática:

1. Conocimientos sobre los Ciclos de modelización, objetivos / perspectivas para la modelización, tipos de tareas de modelización e intervenciones.
2. Capacidad para identificar fases en los procesos de modelización, y diagnosticar las dificultades de los alumnos durante dichos procesos. Evaluación de tareas de modelización.
3. Habilidad para resolver, analizar, desarrollar y crear tareas de modelización.
4. Capacidad para ejecutar clases de modelización, y el conocimiento de las intervenciones apropiadas durante los procesos de modelización de los alumnos.
5. Valorar el trabajo en equipo y respetar las opiniones de los compañeros.

En el diseño del curso, se pudo revisar con profundidad:

1. ¿Cómo fue el origen de la MM en educación matemática?
2. Los significados de la MM encontrados en la literatura especializada.

3. Los diferentes ciclos de MM, tales como el de diagnóstico y pedagógico.
4. Características de los problemas de modelización.
5. Tipos de intervenciones de los docentes en las actividades de MM.
6. Formas de evaluar la MM.

La implementación del curso se llevó a cabo con docentes del área de matemática en las instalaciones de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado en el Decanato de Ciencia y Tecnología, con una duración de 16 horas académicas.

Las asignaturas que imparten los participantes del curso son, matemática 1, 2 y 3 pertenecientes a los pregrados de Ingeniería Informática, Ingeniería de Producción, Ingeniería en Telemática y Agronomía. Se puede observar que el objetivo general común de las asignaturas es: desarrollar las capacidades analíticas y de abstracción, la intuición, el pensamiento lógico y riguroso, validando e interpretando modelos de situaciones reales y simuladas.

Objetivo específico 2: *Analizar las competencias de los docentes*

Los docentes sabían sobre la modelización y lo que significa, lo que no sabían era que la MM era un campo tan grande. Los más aproximados a un proceso de modelización que los docentes han puesto en práctica es la guía para “resolver problemas” de Poyla (1957).

No se imaginaban que existían tantos ciclos de modelización como instrumentos para trabajar con actividades de modelización. Los problemas resueltos por los docentes revelan que, no siguen de manera secuencial las fases de los ciclos, incluso algunos obviando los pasos del mundo extra matemático. Los docentes deben reflexionar sobre el estilo de pensamiento matemático o extra matemático preferido, porque en las clases de modelización quizás se concentren inconscientemente más en la realidad o en las matemáticas en lugar de equilibrar ambos aspectos al realizar actividades de modelización con los estudiantes en el aula.

Los docentes reflejaron que entendieron el ciclo de modelización de diagnóstico o de siete pasos a través del problema de las “Pacas de Paja”. Además, señalaron que las

bases teóricas los ayudarán a crear una tarea de modelización propia, por lo que para ellos la teoría y la práctica se vinculan en el curso.

En el primer problema (Pacas de Pajas), los docentes se enfrentaron a una situación que, para ellos resulta rara, porque necesitaban un conocimiento matemático que no estaba explícito en el problema, adicionalmente era preciso buscar los datos necesarios para resolver el problema. Por supuesto, esto resultó un desafío para ellos al principio, pero con el tiempo adoptan estrategias y se adaptan a trabajar en problemas de modelización.

A raíz de ese primer contacto con la modelización, y con la teoría abordada de manera socializada, era de esperar que hayan tenido éxito al crear su propio problema de MM como asignación del curso, los criterios que deben tener los problemas de modelización le sirvieron de apoyo como una lista de verificación. Además, aprendieron cómo pueden cambiar un problema de un libro de Cálculo a uno de modelización reduciendo los datos dados u omitiendo todos los datos y fórmulas específicas, modificando la situación real si es necesario para hacerla más auténtica y formulando preguntas abiertas.

Para los docentes quedó demostrado que el contexto real de un problema de modelización puede provocar diferentes reacciones, y puede influir en el proceso de resolución. Al elegir el problema de modelización, utilizaron un contexto adecuado para estudiantes de la región.

Como las actividades de modelización se deben trabajar en grupo, para discutir, buscar datos y finalmente llegar a un consenso sobre su solución, los docentes se percataron de que este tipo de actividad no pueden ser estrictamente controladas por un tiempo rígido como es el caso de los exámenes tradicionales.

Por otra parte, las intervenciones o el apoyo adecuado hacia los estudiantes durante las actividades de modelización requieren de preparación, y maduración por parte de los docentes. Por lo tanto, el manejo de intervenciones en el aula es importante para la que la enseñanza y el aprendizaje de la MM tenga éxito.

Los problemas de MM son abiertos y normalmente la matemática a utilizar no es evidente en el enunciado del problema, por lo tanto, los problemas de modelado son

más desafiantes que los problemas tradicionales. Además, estas actividades permiten el uso de las tecnologías, las cuales deben ser promovidas por el docente, y este debe indicar a sus estudiantes cuándo la tecnología es necesaria para resolver preguntas de la vida real.

Se debe enfatizar, en la necesidad de brindarles escenarios (como el curso presentado en esta investigación) a los docentes del área de matemática, para debatir sobre la modelización matemática tanto a nivel teórico como práctico, incluidas las experiencias con la modelización en el aula de clases con sus estudiantes. Además, ofrecer cursos sobre el uso de herramientas tecnológicas como es el caso de GeoGebra.

MOMENTO VI

APORTES DE LA INVESTIGACIÓN

Se establecen los aportes teóricos develados con respecto al objetivo específico 3 y con base a los hallazgos obtenidos en la presente investigación. También se dejan recomendaciones y preguntas abiertas las cuales pueden ser motivos de futuras investigaciones, y que no fueron parte del estudio, pero que el autor considera pertinente para el avance de la enseñanza de la Modelización Matemática en la praxis universitaria.

Objetivo específico 3: *Derivar una concepción teórica como alternativa para la enseñanza de la modelización matemática.*

Significado de la Modelización Matemática en Educación Matemática.

La MM se debe enseñar con problemas cuyos contextos procedan del mundo real (no hay actividad de modelización sin hechos de la vida real), además que se relacionen con la carrera para la cual se están formando los estudiantes. Por ejemplo, para un estudiante de Ingeniería Química, los problemas que debe resolver en una actividad de modelización han de estar orientados a su perfil. En ese sentido, la MM es un instrumento potencial para apoyar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, tal y como lo sostienen los autores Freudenthal (1973), Blum y Niss (1991), Borromeo Ferri (2018).

La MM también puede ser vista como una actividad que simula un entorno de trabajo profesional, donde se organizan equipos con un líder (o gerente) y cada miembro tiene responsabilidades y roles que debe asumir y llevar a cabo. Entre todos

los integrantes hay un compromiso por resolver un problema determinado, y buscar soluciones optimas, como lo soportan Cordero (2008), Buendía y Cordero (2005).

En el mundo laboral, los problemas no son ficticios, ni bien elaborados, ni cerrados como los encontrados en los libros de texto tradicionales de matemática. Sino por el contrario reales, con pocos detalles y abiertos. Es allí donde encajan los problemas de modelización matemática, tal como lo manifiesta Borromeo Ferri (2018).

Así, con las actividades de MM los estudiantes adquieren desde temprano en su formación profesional, roce y habilidades propias del mundo laboral. Como son: la comprensión en equipo de una situación problemática planteada, asignaciones de tareas para cada miembro, búsqueda de información adecuada, selección de herramientas (tecnológicas u otras), plantearse preguntas que no son dadas en el planteamiento del problema original, buscar la matemática adecuada, validar la(s) respuesta(s) matemáticas con la situación original, con la posibilidad de realizarla fuera del aula de clases y, la presentación de un informe con su correspondiente argumentación de los hallazgos encontrados, como lo respalda Borromeo Ferri (2018).

Modelo teórico propuesto por el autor, para la preparación docente en actividades de Modelización Matemática.

Una vez que el docente está consciente del alcance de las actividades de Modelización Matemática, y la teoría que subyace en ella, está en condiciones de preparar y poner en práctica dichas actividades. Para ello, se presenta un modelo teórico (ver figura 27) con los momentos necesarios y sus respectivos enlaces, que debe poner en práctica un docente, y así, consolidar actividades de MM en la enseñanza de la matemática en ambientes universitarios, esto como consecuencia de los resultados obtenidos en este trabajo.

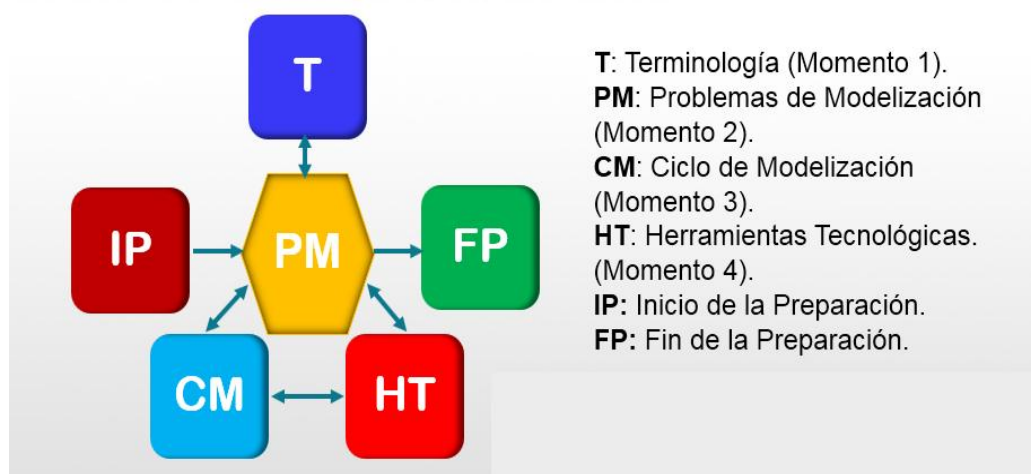


Figura 27: Modelo teórico propuesto por el autor: Preparación Docente en Actividades de Modelización Matemática (PDAM). Fuente: Autor.

Momento 1: Terminología (T)

En ambientes universitarios, específicamente en la formación de profesionales no matemáticos (Ingenieros, Economistas, Licenciados en Administración, entre otros), los docentes de matemática tienen que apropiarse de la terminología básica del pregrado que cursan los estudiantes a quienes estará dirigida las actividades de modelización, con el apoyo de especialistas en el área, como lo sostiene Borrromeo Ferri (2018).

Por ejemplo, para el caso de economía, se manejan los siguientes términos básicos: ganancia, pérdida, ingreso total, costo total, costo fijo, costo variable, punto de equilibrio, oferta, demanda, análisis marginal, producto del ingreso marginal, elasticidad de la demanda, propensión marginal al consumo, excedentes de los consumidores y de los productores, tipos de interés y anualidades. El docente puede pedir apoyo (en caso de ser necesario) a economistas, para profundizar tanto en el significado como su aplicación en cada uno de estos términos sugeridos.

Es fundamental, que el docente desarrolle un glosario de términos básicos, de acuerdo al contexto donde pondrá en práctica las actividades de MM. Dicho glosario debe ser revisado y actualizado periódicamente con otros colegas. A fin de depurar y ajustarse a los nuevos tiempos, retos y oportunidades.

Momento 2: Problemas de Modelización (PM)

Los enunciados de los problemas de Modelización Matemática nacen de una realidad, por consiguiente, el docente tiene tres alternativas para presentarles problemas de MM a sus estudiantes, la primera, buscar problemas de MM establecidos por otros autores, y adaptarlos según las necesidades del docente (haciendo la respectiva referencia de los autores originales); la segunda, convertir los problemas con enunciados verbales que aparecen de libros de texto de matemática, a problemas de MM y la tercera, crear problemas de MM inéditos. En cada una de estas alternativas, el docente tiene que estar consciente del pregrado para la cual va dirigida la actividad. Como lo señalan Niss, Blum y Galbraith (2007).

Para docentes que se inician en actividades de MM, se sugieren los siguientes pasos para plantear auténticos problemas de MM:

1. Examinar los problemas con enunciados verbales que aparecen en libros de texto y relacionarlos con situaciones o lugares de la región o el país, tales como, industrias, plazas, monumentos, agricultura, ganadería, obras civiles, informática, economía entre otras esferas de la vida real.
2. Buscar información relevante de las situaciones o lugares seleccionados en el primer paso.
3. Construir el enunciado de la situación problemática, con las características que debe llevar un problema de MM, es decir, que sea autentico, abierto, que permita la posibilidad al estudiante de plantear preguntas, además debe estar contextualizado para lo que se está formando el estudiante.
4. Resolver el problema antes de aplicarlo a los estudiantes, recorriendo el ciclo de modelización elegido por el docente, con la finalidad de verificar si se cumplen todas las fases del ciclo, y analizar que herramientas tecnológicas se deben utilizar si fuese necesario.
5. Validar la solución encontrada, fuera o dentro del aula de clases, según sea el caso.

Por otra parte, en el diseño de un problema de MM puede surgir la necesidad de nuevos términos que no se tenían presentes, los cuales serán los nutrientes que harán crecer al glosario y por consiguiente el docente va adquiriendo experiencia en la terminología empleada en el correspondiente pregrado, como lo establece Borromeo Ferri (2018).

Momento 3: Ciclo de Modelización (CM)

El docente debe elegir, entre el ciclo de modelización desde una perspectiva cognitiva o el ciclo pedagógico. El primero para estudiantes que tengan experiencia con la MM, es decir, con estudiantes que hayan trabajado en alguna asignatura con problemas y estudios de casos, todos ellos adaptados a la vida real o a su carrera, y el segundo para estudiantes que están iniciándose con las actividades de MM, que no han experimentado la modelización durante su escolaridad.

Por tal motivo, es de suma importancia que el docente adapte el ciclo de modelización acorde al o lo(s) grupo(s) que tenga asignado, ya que cada grupo de estudio tienen características particulares.

El docente debe estar dispuesto a usar la tecnología en cualquier fase del ciclo, desde la interpretación de la situación real hasta la validación de los resultados matemáticos. Se puede dar el caso, de que todo el ciclo se realice con el apoyo de herramienta tecnológicas, tal como lo sostienen Kaiser (2014), Blum (1996), Kaiser-Meßmer (1986), Schupp (1988), Henn (1995), Humenberger y Reichel (1995), Maaß (2002) y Borromeo Ferri (2004).

Momento 4: Herramientas Tecnológicas (HT)

Las actividades de modelización son apoyadas por el uso de las HT (se refiere a software), en especial por los programas de cálculo simbólico, gráficos y aquellos que permiten realizar simulaciones de fenómenos de la vida real. Por lo tanto, el docente debe indicarles a sus estudiantes desde el inicio de la actividad las herramientas tecnológicas que pueden utilizar.

En ese sentido, el docente establece las herramientas tecnológicas a utilizar en la actividad de MM, cuando resuelva el problema antes de exponerlo a sus estudiantes. Si las actividades de MM van dirigidas a estudiantes que tengan experiencia con la MM y manejo de las HT, se les puede dejar que ellos elijan las HT que consideren necesarias.

Por otra parte, es fundamental que el docente, gane experiencia con el uso de las herramientas tecnológicas, tales como, GeoGebra, Excel, Maple y Symbolab.com, las cuales brindan un amplio repertorio de instrucciones y gráficas, para la consolidación y prueba del modelo matemático.

Existen enunciados sobre situaciones reales que manejen una cantidad de datos considerables, en ese caso, el uso de las HT es imprescindible para predecir algún fenómeno determinado. El docente tiene que estar consiente sobre este tipo de escenarios y participarlo al estudiante si es necesario, así como lo plantea Borromeo Ferri (2018).

Aportes teóricos desde las preguntas de investigación.

¿Por qué la MM debe estar presente en el programa de matemática?

La MM es un vehículo motivador para afianzar los conocimientos matemáticos, porque trata con problemas vinculados con el interés para la cual se está formando el estudiante.

¿Cuáles son las condiciones que deben tener los estudiantes, profesores y el aula para trabajar con la MM?

Estudiantes: Tener aprobados los cálculos de Ingeniería o de Licenciatura.

Profesores: Tener un curso de capacitación en MM.

Aula: Contar con Tecnologías Educativas principalmente video bean, computadoras, conexión continua a internet y GeoGebra.

¿En qué momento debe aparecer la MM en el programa de matemática o se debe diseñar una asignatura exclusiva para la MM?

Como los estudiantes llegan a la etapa universitaria con un dominio matemático débil, y sin ninguna experiencia con la MM. Se sugiere diseñar una asignatura exclusiva para la MM de carácter presencial, para un semestre, la cual debe aparecer en el programa luego de estudiar las matemáticas fundamentales de cada Carrera Ingeniería.

¿Cómo evaluar la MM?

1. Con proyectos presentados por grupos de tres o cuatro (3 o 4) integrantes y su correspondiente presentación en plenaria. Para un curso de un semestre (16 semanas), cuatro (4) proyectos donde el último se exhibirá en una jornada de MM al público en general de la Universidad.
2. El docente suministrará el enunciado del problema de modelización de cada proyecto.

¿Cómo son las intervenciones del profesor durante una actividad de modelización?

1. El docente debe motivar a los estudiantes y escuchar sus opiniones.
2. Ser acompañante y guía durante todo el proceso de la actividad de modelización.
3. Visitar cada grupo durante el desarrollo de la actividad de modelización, y preguntar en que parte del ciclo se encuentran, e indagar con preguntas, para luego aportar sugerencias que den pistas y que sirvan de apoyo para una mayor comprensión de la situación planteada, si fuese necesario.

¿La MM debe ser enseñada por quién?

Se sugiere que la MM debe ser enseñada por especialistas o profesionales afines al área de matemática, con previa preparación en actividades de MM.

Se cree que es importante que los profesionales especialistas en el área para lo cual se están formando los estudiantes, pongan en práctica actividades de Modelización Matemáticas en sus asignaturas, con apoyo de los docentes del área de matemática.

Recomendaciones para futuras investigaciones.

Recomendación 1:

Creemos que es fundamental que los docentes pongan en práctica las actividades de Modelización Matemática con sus estudiantes durante el curso de Modelización Matemática, para luego compartir sus hallazgos con los demás integrantes en el curso.

De esta manera se pueden establecer reflexiones con base a esas experiencias, y así seguir avanzando por una mejor enseñanza de la Modelización Matemática.

Recomendación 2:

Proponemos cursos o talleres de Modelización Matemática dirigidos a docentes con la finalidad de diseñar problemas de Modelización Matemática, relativos a cada pregrado de Ingeniería de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado UCLA.

Recomendación 3:

Como la tecnología y la Modelización Matemática van de la mano, es necesario que los docentes se preparen en cursos, seminarios, talleres sobre:

- ✓ Manejo de las TIC`S.
- ✓ GeoGebra orientado a simulaciones.

Preguntas para futuras investigaciones.

1. ¿Cuáles son los contenidos y métodos apropiados para un curso sobre el diseño de problemas de Modelización Matemática dirigido a docentes?
2. ¿Cómo enseñar a estudiantes de pregrado a formular problemas de Modelización Matemática?

3. ¿Qué contenidos matemáticos debe poseer el programa de la asignatura Modelización Matemática?

Propuesta de un modelo para un curso de Modelización Matemática dirigido a Docentes.

Contenido:

1. Significado de la Modelización Matemática.
2. Matemática aplicada Vs. Modelización Matemática.
3. GeoGebra para tareas de modelización matemática.
4. Desarrollo histórico de la Modelización Matemática en educación matemática.
5. Objetivos y perspectivas de la Modelización Matemática en educación matemática.
6. La modelización como campo de investigación y desarrollo en educación matemática.
7. Investigación en formación docente en modelización matemática.
8. Matematización simple.
9. Matematización compleja.
10. Ciclos de modelización.
11. Competencias de modelización matemática.
12. Características de los problemas de modelización.
13. Tareas de modelización Vs. actividades ordinarias de clase.
14. Conversión de un problema de matemática aplicada a un problema de modelización.
15. Planificación y ejecución de clases de Modelización Matemática
16. Tipos de intervenciones del Profesor durante las actividades de modelización.
17. Evaluación de las tareas de modelización.
18. Aplicación de las actividades de modelización en el aula.
19. Reflexiones finales por parte de los participantes sobre: las aplicaciones de las actividades de modelización en el aula y el curso de MM dirigido a los docentes.

Competencias:

1. Conocimientos sobre los Ciclos de modelización, objetivos / perspectivas para la modelización, tipos de tareas de modelización e intervenciones.
2. Capacidad para identificar fases en los procesos de modelización, y diagnosticar las dificultades de los alumnos durante dichos procesos. Evaluación de tareas de modelización.
3. Habilidad para resolver, analizar, desarrollar y crear tareas de modelización.
4. Capacidad para ejecutar clases de modelización y el conocimiento de las intervenciones apropiadas durante los procesos de modelización de los alumnos.
5. Valorar el trabajo en equipo y respeta las opiniones de los compañeros.

Actividades:**Cuadro 6****Actividades propuestas por el autor**

Clase	Actividades
1, 2, 3 y 4	• Introducción a la modelización. • Curso sobre GeoGebra orientado hacia la modelización. • Discusión socializada sobre los antecedentes teóricos de la modelización matemática y resolución de problemas.
5 y 6	• Presentación de clases sobre MM en el curso por parte de los participantes.
7 y 8	• Reflexiones sobre las aplicaciones de actividades de MM en el aula de clase. • Reflexiones sobre el curso de modelización matemática dirigida a los docentes

Fuente: Autor.

Referencias

- Anderson, J. (2010). Collaborative problem solving as modelling in the primary years of schooling. In Kaur, B and Dindyal, J (Eds.), *Mathematical Applications and Modelling: Yearbook 2010, Association of Mathematics Educators*, (pp. 78- 93). Singapore: World Scientific Publishing.
- Anderson, J., & White, P. (2004). Problem solving in learning and teaching mathematics. In B. Perry, G. Anthony, & C. Diezmann (Eds.), *Research in mathematics education in Australasia 2000-2003* (pp. 127-150). Flaxton, Qld: Post Pressed.
- D’Ambrósio, U. (2005). Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. *Educação e Pesquisa*, 31(1), 99–120.
- Balakrishnan, G., Yen, Y. P., & Goh, L. E. E. (2010). Mathematical modelling in the Singapore secondary school mathematics curriculum. In B. Kaur & J. Dindyal (Eds.), *Mathematical applications and modelling. Yearbook of the Association of Mathematics Educators*, 237–257. Singapore: World Scientific.
- Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: A critical and discursive perspective. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 38(3), 293–301.
- Berry, J., Burghes, D.N., Huntley, I.D., James, & D. GJ, Moscardini, A.O. (Eds.) (1984). *Teaching and Applying Mathematical Modelling*. Chichester: Ellis Horwood.
- Blomhøj, M. (2011). Modelling competency: Teaching, learning and assessing competencies – Overview. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 343–349). New York: Springer.
- Blomhøj, M., & Hoff Kjeldsen, T. (2006). Teaching mathematical modelling through Project work – Experiences from an in-service course for upper secondary teachers. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 163–177.
- Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2007). What’s all the fuss about competencies? Experiences with using a competence perspective on mathematics education to develop the teaching of mathematical modelling. In W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study* (pp. 45–56). New York: Springer.

- Blomhoj, M & Kjeldsen, T. (2007). Learning the integral concept through mathematical modelling. In: Pitta-Pantazi, D & Philippou, G. (Eds): *CERME 5 – Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2070-2079.
- Blömeke, S., Busse, A., Kaiser, G., König, J., & Suhl, U. (2016). The relation between content-specific and general teacher knowledge and skills. Teaching and teacher education. *An International Journal of Research and Studies*, 56, 35–46.
- Blum, W.: 1985, 'Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion', *Mathematische Semesterberichte* 32, 195-232.
- Blum W (1996) Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht – Trends und Perspektiven. In: Kadunz G, Kautschitsch H, Ossimitz G, Schneider E (eds) *Trends und Perspektiven*. Holder-Pichler-Tempsky, Wien, pp 15–38.
- Blum W, Niss M (1991) Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – state, trends and issues in *mathematics instruction*. *Educ Stud Math* 22:37–68.
- Blum, W., & Kaiser, G. (1997). Vergleichende empirische Untersuchungen zum mathematischen Anwendungsfähigkeiten von englischen und deutschen Lernenden. – Unveröffentlichter Antrag auf Gewährung einer DFG Sachbeihilfe.
- Blum, W., & Kirsch, A. (1989). The problem of the graphic artist. In W. Blum, J. S. Berry, R. Biehler, I. D. Huntley, G. Kaiser-Meßmer, & L. Profke (Eds.), *Applications and modelling in learning and teaching mathematics* (pp. 129–135). Chichester: Ellis Horwood.
- Blum, W., & Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der “Tanken”-Aufgabe. *Mathematik lehren*, 128, 18–21.
- Blum, W. & Leiß, D. (2007). “Filling Up” - the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In: Bosch, Marianna (Ed.): *CERME 4 – Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 1623-1633.
- Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 15–30). New York: Springer.

- Blum, W. (1996). Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht – Trends und Perspektiven. In G. Kadunz, H. Kautschitsch, G. Ossimitz, & E. Schneider (Eds.), *Trends und Perspektiven* (pp. 15–38). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.
- Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In S. J. Cho (Ed.), *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education – Intellectual and attitudinal challenges* (pp. 73–96). New York: Springer.
- Borromeo Ferri, R. (2004). Vom Realmodell zum mathematischen Modell - Analyse von Übersetzungsprozessen aus der Perspektive mathematischer Denkstile. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 109–112.
- Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 86–95.
- Borromeo Ferri, R. (2007). Modelling from a cognitive perspective: Individual modelling routes of pupils. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling. Education, engineering and economics* (pp. 260–270). Chichester: Horwood Publishing.
- Borromeo Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modelling behaviour. *Journal für Mathematik didaktik*, 31(1), 99–118.
- Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. New York: Springer.
- Borromeo Ferri, R. (2014). Mathematical Modeling – The Teachers' Responsibility. In: Sanfratello, A. & Dickman, B. (Eds.) *Proceedings of Conference on Mathematical Modeling at Teachers College of Columbia University, NYC*, pp. 26–31.
- Borromeo Ferri, R., & Blum, W. (2010). Mathematical Modelling in teacher education - experiences from a modelling seminar. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *CERME 6. Proceedings of the sixth congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, January 28th-February 1st 2009 Lyon (France) (pp. 2046–2055). Lyon: Institut national de recherche pédagogique.
- Borromeo Ferri R.B., Lesh R. (2013) Should Interpretation Systems Be Considered to Be Models if They Only Function Implicitly? In: Stillman G., Kaiser G., Blum W., Brown J. (eds) *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. Springer, Dordrecht.

- Buendía, G., & Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. *A socio epistemological study. Educational Studies in Mathematics*, 58, 299–333.
- Cordero, F. (2008). El Uso de las Gráficas en el Discurso del Cálculo Escolar. Una visión Socioepistemológica. En Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama, A. y Romo (Eds.). México: *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa*, AC y Ediciones Díaz de Santos, S. A., pp. 285–309.
- Cooper, B. (1985). *Renegotiating Secondary School Mathematics: A Study of Curriculum Change and Stability*. London and Philadelphia: The Palmer Press.
- English, L. D. (2007). Interdisciplinary modelling in the primary mathematics curriculum. In J. Watson, & K. Beswick (Eds.), *Proceedings of the 30th annual conference of the mathematics education research group of Australasia* (pp. 275–284). Australia: MERGA Inc.
- Freudenthal H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educ Stud Math* 1(1/2):3–8.
- Freudenthal H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Reidel, Dordrecht.
- Hattie, J. A. C. (2009). *Visible learning. A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. London/New York: Routledge.
- Henn, H.-W. (1995). Volumen bestimmungbeieinem Rundfass. In G. Graumann, T. Jahnke, G. Kaiser, & J. Meyer (Eds.), *Materiali en füreinen realitäts bezogenen Mathematikunterricht* Bd. 2 (ISTRON) (pp. 56–65). Hildesheim: Franzbecker.
- Henn, H.-W. (2002). Mathematik und der Rest der Welt. *mathematiklehren*, 113, 4–7.
- Hernández S., R., Fernández C., C. y Baptista L., P. (2007). *Metodología de la Investigación* (4ta Ed.). México: Mc Graw Hill.
- Hernández S., R., Fernández C., C. y Baptista L., P. (2014). *Metodología* (6ta Ed.). México: Mc Graw Hill.
- Humenberger, H., & Reichel, H.-C. (1995). *FundamentaleIdeen der Angewandten Mathematik*. Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich: BI Wissenschaftsverlag.
- Johnson, D., & Johnson, R. (1999). *Learning together and alone: Cooperative, competitive and individualistic learning*. New York: Prentice Hall.

- Jordan, A., & vom Hofe, R. (2008). Diagnostizieren von Schülerleistungen – „Schlüssel“ zur individuellen Förderung. *Themenheft 150 mathematiklehren, Basisartikel*, 4–12.
- Kacerja, S. (2012). Real life contexts in mathematics and students' interests. University of Agder, Kristiansand, Norway.
- Kaiser, G. (1995). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht – Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. In G. Graumann (Ed.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht* (pp. 66–84). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.
- Kaiser, G. (2013). Introduction: ICTMA and the Teaching of Modeling and Applications. In R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines, & A. Huford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies. ICTMA 13* (pp.1-2). Netherlands: Springer.
- Kaiser G. (2014). Mathematical Modelling and Applications in Education. In: Lerman S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Dordrecht.
- Kaiser, G., & Brand, S. (2015). Modelling competencies: Past development and further perspectives. In G. A. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical modelling in education research and practice. Cultural, social and cognitive influences* (pp. 129–149). Cham: Springer.
- Kaiser G, Messmer (1986). Anwendungen im Mathematikunterricht. Vol. 1 – *Theoretische Konzeptionen*. Vol. 2 – *Empirische Untersuchungen*. Franzbecker, Bad Salzdetfurth.
- Kaiser, G., & Stender, P. (2013). Complex modelling problems in co-operative, self-directed learning environments. In G. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, & J. Brown (Eds.), *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (pp. 277–293). Dordrecht: Springer.
- Kaiser G, Sriraman B (2006). A global survey of international perspectives on modeling in mathematics education. *ZDM Int J Math Educ* 38(3):302–310.
- Kunter, M., & Baumert, J. (2011). Das COACTIV-Forschungsprogramm zur Untersuchung professioneller Kompetenz von Lehrkräften-Zusammenfassung und Diskussion. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss, & M. Neubrand (Eds.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften-Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (pp. 345–366). Münster: Waxmann.

- Galbraith, P. (1989). From applications to modelling. In D. Blane & M. Evans (Eds.), *Mathematical modelling for the senior years* (pp. 78-86). Parkville: The Mathematical Association of Victoria
- Greefrath, G., & Vorhölter, K. (2016). *Teaching and learning mathematical modelling: Approaches and developments from German speaking countries. ICME-13 topical survey*. Cham: Springer.
- Greefrath, G. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Springer Spektrum.
- Griesel, H. (2005). Modelle und Modellieren eine didaktisch orientierte Sachanalyse, zugleich ein Beitrag zu den Grundlagen einer mathematischen Beschreibung der Welt. In H.-W. Henn, & G. Kaiser (Eds.), *Mathematik und Unterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation*. Festschrift für Werner Blum (pp. 61–70). Hildesheim: div.
- Leiß, D. (2007). *Hilf mir, es selbst zu tun. Lehrerinterventionen beim mathematischen Modellieren*. Hildesheim/Berlin: Franzbecker.
- Lesh, R.A., & Doerr, H. (Eds.) (2003). *Beyond Constructivism: A Models and Modelling Perspective on Teaching, Learning, and Problem Solving in Mathematics Education*. Mahwah: Lawrence Erlbaum.
- Lesh, R. A., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 763–804). Greenwich: Information Age.
- Lingefjaerd, T. (2007). Mathematical modelling in teacher education – necessity or unnecessarily. In: Blum, W., Galbraith, P., Henn, H.-W. & Niss, M. (Eds): *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New York: Springer, 333-339.
- Maaß, K. (2002). Handytarife. *Mathematik Lehren*, 113, 53–57.
- Maaß, K. (2005). Modellieren im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. *Journal für Mathematik didaktik*, 26, 114–142.
- Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM*, 38(2), 113–142.
- Maaß, K. (2007). Modelling in class: What do we want the students to learn? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, S. Khan, & Mathematical Modelling (Eds.), *Education, engineering and economics* (pp. 65–78). Chichester: Horwood Publishing.

- Maaß, K. (2010). Classification scheme for modelling tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31, 285–311.
- Maaß, K., & Gurlitt, J. (2011). LEMA – Professional development of teachers in relation to mathematics modelling. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in the teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 629–639). New York: Springer.
- Niss M., Blum W., Galbraith P. (2007). Introduction. In: Blum W., Galbraith P.L., Henn HW., Niss M. (eds) *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New ICMI Study Series, vol 10. Springer, Boston, MA.
- Niss, M. (1996). Goals of Mathematics Teaching. In Bishop, A., Clements, K., Keitel, C, Kilpatrick, & J., Laborde, C. (Eds.). *International Handbook of Mathematical Education*. (pp. 11-47). Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers.
- Palm, T. (2002). The realism of mathematical schools tasks – Features and consequences. PhD Thesis. Umeå, Sweden: Umeå University.
- Palm, T. (2007). Features and impact of the authenticity of applied mathematical school tasks. In W. Blum et al. (Eds.), *Applications and modelling in mathematics education; new ICMI studies series no. 10* (pp. 201–208). New York: Springer.
- Pollak, H. (1968). On some of the problems of teaching applications of mathematics. *Educ Stud Math* 1(1/2):24–30.
- Polya, G. 1957. *How to Solve It*. Garden City, NY: Doubleday, second edition.
- Reusser, K. (2001). Co-constructivism in educational theory and practice. In N. J. Smelser, P. Baltes, & F. E. Weinert (Eds.), *International encyclopedia of the social and behavioral sciences* (pp. 2058–2062). Oxford: Pergamon/Elsevier Science.
- Sahlberg, P., & Berry, J. (2002). One and one is sometimes three in small group mathematics learning. *Asia Pacific Journal of Education*, 22(1), 82-94.
- Sherin, M., Jacobs, V., & Philipp, R. (Eds.). (2011). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. New York: Routledge.
- Schoenfeld, A. H. (1994). *Mathematical thinking and problem solving*. Hillsdale: Erlbaum.
- Schorr, R., & Lesh, R. (2003). A modelling approach for providing teacher development. In R. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism – Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 141–157). Mahwah: Erlbaum.

- Schwarz, B., & Kaiser, G. (2007). Mathematical modelling in school – Experiences from a project integrating school and university. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *CERME 5 – Proceedings of the fourth congress of the European Society for Research in mathematics education* (pp. 2180–2189).
- Schmidt, B. (2010). Modelling in the classroom – Motives and obstacles from the teacher's perspective. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *CERME-6 – Proceedings of the sixth congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Lyon: NRP, pp. 2066–2075.
- Schupp, H. (1988). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I zwischen Tradition und neuen Impulsen. *Der Mathematikunterricht*, 34(6), 5–16.
- Schupp, H. (1989). Applied mathematics instruction in the lower secondary level—Between traditional and new approaches. In W. Blum, et al. (Eds.), *Applications and modelling in learning and teaching mathematics* (pp. 37–46). Chichester: Ellis Horwood.
- Schukajlow, S., & Krug, A. (2014). Do multiple solutions matter? Prompting multiple solutions, interest, competence, and autonomy. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(4), 497–533.
- Stillman, G. (2009, Jun 4). *Implementing applications and modelling in secondary school: Issues for teaching and learning*. Keynote address delivered at the Mathematics Teachers Conference, Singapore.
- Strauss, A. y Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. (1era ed. En español). Universidad de Antioquia
- Tanner, H., & Jones, S. (2002). Assessing children's mathematical thinking in practical modelling situations. *Teaching Mathematics and its application*, 21(4), 145-159.
- Timperley, H. S. (2011). *Realizing the power of professional learning*. London: Open University Press.
- Winter, M., & Venkat, H. (2013). Pre-service Teacher Learning for Mathematical Modelling. In G. A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum & J.P. Brown (Eds.), *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice* (pp. 395-404): Springer.

- Williams, J., Roth, W.-M., Swanson, D., Doig, B., Groves, S., Omuvwie, M., Borromeo Ferri, R., & Mousoulides, N. (2016). *Interdisciplinary mathematics education. A state of the art*. New York: Springer.
- Villa-Ochoa J.A., López C.M.J. (2011). Sense of Reality Through Mathematical Modelling. In: Kaiser G., Blum W., Borromeo Ferri R., Stillman G. (eds) Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling, vol 1. Springer, Dordrecht.
- Spandaw, J. & Zwaneveld, B. (2009). Modeling in mathematics teachers' professional development. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, F. Arzarello, (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Working group 11 Application and Modeling*. Lyon: Université 1 de Lyon. See: www.inrp.fr/editions/cerme6.
- Schwarz, B. & Kaiser, G. (2007). Mathematical Modelling in school – experiences from a project integrating school and university. In: Pitta-Pantazi, D. & Philippou, G. (Eds): *CERME 5 – Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2180-2189.
- Terwel, J. (2003). Co-operative learning in secondary education: A curriculum perspective. In R. M. Gillies & A. F. Ashman (Eds.), *Co-operative Learning: The Social and Intellectual Outcomes of Learning in Groups* (pp. 54-68). London: Routledge Falmer.
- Zais, T., & Grund, K.-H. (1991). Grund position en zum anwendung sorientierten Mathematik un terricht beibesonderer Berücksichtigung des Modellierungs prozesses. *Der Mathematik un terricht*, 37(5), 4–17.
- Zbiek, R. M., & Conner, A. (2006). Beyond motivation: Exploring mathematical modelling as a context for deepening students' understanding of curricular mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 89-112.

ANEXOS

ANEXO A

PROPAGANDA DEL CURSO DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA COMO HERRAMIENTA PARA LA ACTIVIDAD DOCENTE



UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL "LISANDRO ALVARADO"
VICERECTORADO ACADÉMICO
DIRECCIÓN DE FORMACIÓN PERSONAL ACADÉMICO

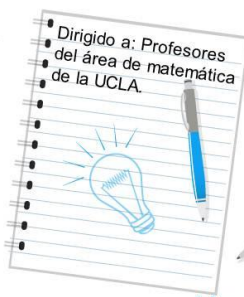


Curso Modelización Matemática como herramienta para la actividad docente

Utilizando Software



Lugar: Laboratorio 2, Centro de
Computación – DCyT
Duración: 16 horas académicas, 8
horas presenciales y 8 horas de
aprendizaje independiente.



Fechas: 19/11/2019 y 26/11/2019
(8 horas presenciales).
Horario: 8:00 am. A 12:00 m.

Facilitador: Msc. Alexis Salcedo.

Información: dfad@ucla.edu.ve

CURRICULUM VITAE

ALEXIS EDUARDO SALCEDO YANEZ

Ingeniero Electrónico en Computación egresado de la UNY Barquisimeto, Magister en Matemática mención Enseñanza de la Matemática del programa de postgrado Interinstitucional UNEXPO-UCLA-UPEL, con 14 años de servicio en Educación. Trabajó durante 3 años adscrito al Departamento de Informática en el IUJO Barquisimeto con las asignaturas Cálculo I y II. Ha trabajado en la UNEY con la asignatura Matemática y Estadística Aplicadas del pregrado Ciencias del Deporte. Actualmente es profesor ordinario en la categoría de agregado en el Decanato Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado con las asignaturas Matemática I y Matemática II de los pregrados Administración Comercial, Contaduría Pública y Economía. Colaborador en el libro de texto Cálculo Diferencial con Funciones Trascendentes Tempranas para Ciencias e Ingeniería, segunda edición, autor Jorge Sáenz.