REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO "RAFAEL ALBERTO ESCOBAR LARA"
SUBDIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA Y GEOGEBRA EN LA ENSEÑANZA DE FUNCIONES PARA INGENIEROS

Tesis para optar al grado de Doctora en Educación Matemática

Autora: María Elena Bejarano Arias
Tutor: José Ortiz Buitrago

Maracay, Marzo de 2020

APROBACIÓN DEL TUTOR

En mi carácter de Tutor de la Tesis presentada por la ciudadana María Elena Bejarano Arias, para optar al Grado de Doctora en Educación Matemática, considero que dicha Tesis reúne los requisitos y méritos suficientes para ser sometida a la presentación pública y evaluación por parte del jurado examinador que se designe.

En la Ciudad de Maracay, a los trece días del mes de Febrero del año dos mil veinte.

Dr. José Ortiz B.
C.I. 4.203.049

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
"INSTITUTO PEDAGÓGICO RAFAEL ALBERTO ESCOBAR LARA"
SUBDIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
COORDINACIÓN GENERAL DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

ACTA DE APROBACIÓN

Nosotros, Miembros del jurado designado. Para la evaluación de la Tesis Doctoral Titulada: "**MODELIZACIÓN MATEMÁTICA Y GEOGEBRA EN LA ENSEÑANZA DE FUNCIONES PARA INGENIEROS**". Presentada por la Profesora: **María Bejarano**, Titular de la cédula de identidad N° 10.944.026. Para optar al título de Doctor en Educación Matemática, Estimamos que reúne los requisitos para ser considerado como:

Aprobado

Por sus aportes teóricos y metodológicos de gran valor para la Educación Matemática en Ingeniería, específicamente la integración de recursos tecnológicos en la enseñanza y aprendizaje del cálculo en futuros ingenieros, en contextos específicos, propicios para utilizar la modelización matemática y sus implicaciones.

En Maracay a los dieciséis días del mes de Julio del año dos mil veinte.

Dra. Idalis Rodríguez
C.I: 4.030.022

Dra. Martha Iglesias
C.I: 8.728.097

Dra. Zoraida Paredes
C.I: 13.240.792

Dr. Asdrúbal Belisario
C.I: 3.662.865

Dr. José Ortiz
C.I: 4.203.049
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR

INDICE GENERAL

LISTA DE CUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO RAFAEL ALBERTO ESCOBAR LARA
DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: PENSAMIENTO NUMÉRICO Y ALGEBRAICO

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA Y GEOGEBRA
EN LA ENSEÁNZA DE FUNCIONES PARA INGENIEROS

Autora: María Elena Bejarano
Tutor: José Ortiz Buitrago
Fecha: Marzo 2020.

RESUMEN

El trabajo consiste en analizar una propuesta formativa que propone la modelización matemática para la enseñanza de funciones reales, al resolver problemas de fenómenos contextualizados en el campo de la ingeniería, con apoyo del GeoGebra. Desde un enfoque cualitativo y un diseño de instrucción a través de los experimentos de enseñanza, se interpretan y analizan las producciones de los estudiantes, cuyos resultados se exponen mediante una descripción de las competencias de modelización observadas y niveles alcanzados en los momentos del proceso de modelización planteados por Ortiz (2002). A su vez, el diseño elaborado se construye bajo los experimentos de enseñanza, donde se proponen mediante tareas de modelización la resolución de problemas. El estudio enmarcado dentro del paradigma interpretativo, se enfoca en unidades de análisis, conformadas por las producciones de los estudiantes pertenecientes a unas secciones de Matemática I de los proyectos de ingenierías de la UNEG, durante los semestres 2016-II, 2017-II y 2018-III. La metodología está sujeta a la aplicación de la modelización socio-crítica, definida por Kaiser & Sriraman, (2006). La formación de categorías de análisis de las competencias logradas y sus niveles surgen, como producto del análisis desarrollado de las interpretaciones de los cuestionarios, las entrevistas realizadas a los docentes, las tareas de modelización entregadas en físico y por e-mail usando el GeoGebra y finalmente, del discurso de las disertaciones realizadas por los estudiantes, cuando exponen sus producciones cerrando el ciclo de modelización matemática, descrito por Blum & Leiβ (2007); esto último se evidencia mediante algunas videograbaciones. En el proceso de análisis (cualitativo y cuantitativo) se realiza triangulación de momentos, de métodos y del investigado. Se logran hallazgos en el aprendizaje de las funciones y sus propiedades mediante el modelar y el simular fenómenos, con el apoyo del GeoGebra, que potencian las competencias profesionales del futuro ingeniero.

Descriptores: Modelización matemática, GeoGebra, Funciones, Problemas Contextualizados.

INTRODUCCIÓN

La presente investigación consiste en analizar el impacto de la implementación de una propuesta didáctica, basada en la triada modelización matemática-software de matemática dinámica-funciones reales; en la formación matemática de futuros ingenieros.

El problema de investigación surge por la preocupación de la investigadora en base a los siguientes cuatro aspectos: en la búsqueda permanente de la docente-investigadora por satisfacer las demandas del currículo en la asignatura de Matemática I de los proyectos de carreras de ingenierías, por el alto índice de repitencia académica en esta cátedra, por las dificultades de tipo cognitivas y epistemológicas que presentan los estudiantes sobre la definición de función real y por la inquietud de desarrollar una cultura matemática en los estudiantes adaptada a los nuevos tiempos tecnológicos y globalizados.

Específicamente, se ha presentado en esta investigación una propuesta didáctica enfocada en la Didáctica de la Matemática en Contexto, valorada desde un análisis evaluativo de los productos de las tareas de modelización matemática entregadas por los estudiantes, donde la instrucción se ha orientado bajo los experimentos de diseño o de enseñanza y con la observación participante de un grupo de docentes del área de matemática de la UNEG.

En el estudio se valora la importancia que tiene la enseñanza contextualizada del cálculo en la formación de ingenieros, la cual se asume desde: los conocimientos matemáticos propios de capacitación que encierra esta disciplina, las competencias de modelización matemática, las capacidades y procesos que se pueden potenciar y que se propician desde la matemática a partir de su intervención didáctica, la cual viene orientada por unas guías de instrucción producto de un análisis didáctico previo a su implementación y en concreto, a partir del uso o aplicación de las funciones reales que sintetizan el comportamiento de fenómenos o problemas contextualizados.

Todo lo anterior, tiene su génesis en el estudio de la unidad de funciones reales de variable real contemplada en la asignatura Matemática I, de los programas de carreras de ingenierías de la Universidad Nacional Experimental de Guayana (UNEG, 2011). En esta investigación, se ha estructurado el contenido de funciones reales en tres ámbitos en simultáneo: desde la matemática (Ámbito Curricular), su enseñanza (Ámbito Educativo) y la investigación en Didáctica (Ámbito Investigativo).

En este sentido, confluyen los tres ámbitos en el siguiente propósito: el estudio pretende resaltar la necesidad de usar el conocimiento matemático (Ámbito Curricular) en la enseñanza de funciones, mediante la modelización matemática y uso de las tecnologías (Ámbito Educativo), como instrumentos de acción, formativo, gestor de cambio y de contextualización en el campo de la ingeniería y en otras áreas del saber (Ámbito Investigativo). De aquí, el carácter científico y utilitario de la presente investigación, ya que la metodología utilizada es aplicable a la enseñanza, incluso a otras áreas del saber dentro del plan curricular del futuro ingeniero.

La incorporación del uso de las tecnologías, proviene de las exigencias sociales, formativas y de actualización permanente de recrear realidades matemáticas en el contexto de la ingeniería de manera funcional y factible, por lo cual se plantea el modelado y el simulado de fenómenos asociados al mundo de la ingeniería; en virtud a ello, es necesario el uso del computador; particularmente, se eligió el software libre GeoGebra de fácil manejo, en función del compromiso de estos egresados universitarios con alguno de sus propósitos fundamentales como futuros profesionales en su desempeño. Tales como, por ejemplo, propósitos relacionados con: la planificación, el diseño, la evaluación de proyectos, sistemas, o cualquier propuesta genuina en respuesta de una situación problema, siempre tratada con mucha sensibilidad social y en concordancia con su perfil curricular.

En función a lo anterior, se ha asumido una actitud proactiva hacia el uso de las tecnologías de la información, hecho esencial actualmente para estar en sintonía con las demandas sociales de este mundo globalizado; además, de facilitar el manejo de grandes cantidades de registros y la visualización de las gráficas de las funciones que definen los modelos construidos para representar los fenómenos estudiados.

En este sentido, la modelización matemática se ha propiciado desde un laboratorio de computación, en tanto que refuerza ciertas competencias que permiten la reflexión y el análisis, además de evidenciar la ruta más fácil hacia la solución de un problema, que representa el quehacer diario de un profesional de la ingeniería.

La aplicación de la modelización, se muestra como generadora del desarrollo de capacidades para simular, estructurar modelos y hacer deducciones y construcciones lógicamente que formarán parte de la experiencia previa del ingeniero y que más tarde, se consolidarán como basamentos teóricos matemáticos más robustos que sustenten estás construcciones y deducciones y que permitan el fortalecimiento de la formación matemática del ingeniero.

En virtud a ello, los conocimientos matemáticos se han visto como una base sólida que sustenta el desarrollo y el desempeño profesional de todo ingeniero y la modelización matemática se ha planteado como la estrategia fundamental en este estudio para lograr la profundización de éstos conocimientos matemáticos sobre funciones reales de variable real; además de promover el abordaje de situaciones problemas contextualizados, donde el estudiante se familiariza con el estudio de fenómenos del entorno, para lo cual confronta situaciones reales, de manera individual y colectiva, que deben ser estudiadas, representadas y comunicadas mediante varios sistemas de representación utilizando los conocimientos matemáticos en la praxis de la búsqueda de alternativas de respuestas ante esas realidades.

A su vez, con el uso de la modelización, se ha intentado que los estudiantes se apropien de un lenguaje técnico formal, que le permitirá, como futuros ingenieros, comunicarse con claridad y precisión, hacer cálculos con seguridad, manejar instrumentos de medidas, de cálculo y representaciones gráficas para comprender el mundo en que viven, atendiendo a los estándares que rigen la simbología matemática.

En resumen, desde un enfoque cualitativo y un diseño de instrucción a través de los experimentos de enseñanza, se interpretan y analizan las producciones de los estudiantes (unidades de análisis) pertenecientes a una sección de Matemática I de los proyectos de ingenierías de la UNEG, durante los semestres 2016-II, 2017-II y 2018-III; cuyos resultados se exponen mediante una descripción de las competencias de modelización observadas y la evolución de los niveles alcanzados en los momentos del proceso de modelización planteados por Ortiz (2002).

Finalmente, en esta investigación se han estudiado, a partir de la resolución de las tareas de modelización entregadas por los estudiantes, las dificultades epistemológicas y cognitivas que han reflejado los mismos en sus trabajos.

La información contenida en el presente estudio se estructura en nueve capítulos, los cuales se sintetizan a continuación:

En el capítulo I, se describe la situación problemática investigada. Para ello, se presenta: el contexto, el problema de investigación, los objetivos del estudio, la justificación del problema investigado y el alcance del mismo.

En el capítulo II, se presenta la revisión bibliográfica realizada y los basamentos teóricos que soportan el estudio, en particular se enfatiza en: el proceso de modelización matemática en la formación matemática del ingeniero, las perspectivas de modelización matemática en la formación del ingeniero, los aportes del desarrollo de las competencias de modelización matemática a la formación integral del ingeniero mediante la enseñanza de funciones reales, los aportes del software GeoGebra para la enseñanza de funciones, las características de las tareas de modelización y algunos antecedentes y el marco teórico considerado.

En el capítulo III, se presenta todo el desarrollo de un análisis didáctico sobre la unidad de funciones reales de variable real; éste comprende: un análisis de contenido, un análisis cognitivo, un análisis de instrucción y un análisis de evaluación.

En el capítulo IV, se exponen las bases metodológicas que sustentan la investigación. Se ha estructurado de la siguiente manera: el tipo y el diseño de la investigación, las unidades de análisis, el modelo didáctico de instrucción, las dimensiones del estudio, el procedimiento general seguido, los instrumentos y las técnicas de recolección de los datos, los métodos de validación de los instrumentos, las técnicas del procesamiento y el análisis de la información y las técnicas de triangulación de la información.

En el capítulo V, se presenta el resultado de los análisis realizados en cuanto a los contenidos matemáticos existentes sobre funciones reales de variable real en: algunos textos de cálculo, en el plan programático de Matemática I, en los trabajos entregados por los estudiantes y en las disertaciones realizadas durante los lapsos académicos correspondientes a los años 2016, 2017 y 2018.

En el capítulo VI, se muestran los resultados en cuanto a las competencias de modelización matemática que potenciaron los estudiantes en sus producciones, en la búsqueda de resolver las tareas de modelización matemática propuestas. Específicamente, se presentan los resultados de la guía de observación utilizada por los docentes involucrados en el estudio, los niveles de logros y su evolución alcanzada en relación a las competencias de modelización matemática, durante las aplicaciones didácticas, y los resultados del análisis de los cuestionarios y las entrevistas realizadas.

En el capítulo VII, se presenta un análisis de los resultados de las tareas de modelización matemática realizadas por los estudiantes; estos trabajos en físico y en documentos virtuales (con extensión .ggb, es decir, elaborados en el GeoGebra), constituyeron parte de las unidades de análisis en este estudio.

En este capítulo VIII, se identifican las dificultades epistemológicas y cognitivas que estuvieron presentes en las producciones de los estudiantes.

Finalmente en el capítulo IX, se exponen las conclusiones de la investigación y algunas recomendaciones que se han planteado ante el problema objeto de estudio.

Se considera que los resultados de la presente investigación sirven de basamento para investigaciones posteriores, que propongan la modelización matemática y el uso de las tecnologías de la información bajo los experimentos de enseñanza, como método de acción. Esta línea de investigación, que centra los estudios en la Didáctica de la Matemática en Contexto, enfocada en el uso de los organizadores del currículo y en los experimentos de enseñanza continuos, que persiguen el perfeccionamiento progresivo de la enseñanza y aprendizaje de la matemática en ambientes educativos, está en boga en las recientes décadas de la historia de la enseñanza del cálculo universitario en las carreras de ingenierías en el mundo. De aquí, que se ha considerado esta época, de florecimiento de este paradigma educativo.

La investigadora de este estudio ha enmarcado la investigación dentro de este paradigma y su interés académico ha sido precisamente, el de consolidar una investigación de tipo experimental en el ámbito de la Educación Matemática en Contexto, como requisito parcial para optar al grado de doctora en Educación Matemática, por lo cual se ha realizado un estudio profundo del desarrollo de competencias de modelización matemática, a través del uso práctico de la matemática y la tecnología, en la enseñanza y aprendizaje de las funciones reales de variable real, en pro de la formación matemática de los futuros ingenieros.

CAPITULO I

EL PROBLEMA

Este documento tiene como propósito describir la situación problemática investigada. Para ello, se presentará: (a) el contexto; (b) el problema de investigación; (c) los objetivos del estudio; (d) la justificación del problema investigado y (e) el alcance del mismo.

El Contexto

El contexto del estudio estuvo constituido por la Universidad Nacional Experimental de Guayana (UNEG), la cual nace en el Estado Bolívar en Venezuela, el 9 de marzo de 1982, mediante el decreto presidencial N° 1.432. Actualmente, se extiende a través de siete sedes ubicadas en las ciudades de Puerto Ordaz (Sede principal), Ciudad Bolívar, Upata, El Callao, Guasipati, Santa Elena de Uairen y Caicara del Orinoco.

> La misión de la Universidad Nacional Experimental de Guayana, es formar ciudadanos, intelectuales y líderes para la transformación sociocultural y técnico-científica que aseguren el desarrollo social y económico sustentable, con respeto y protección al ambiente y a la diversidad biológica y cultural de la región Guayana para las generaciones futuras. (UNEG, 2003, p. 3)

Para cumplir esta misión en la formación estudiantil, es imprescindible la consideración de la enseñanza de estrategias que ameriten en el estudiante el alcance de una autonomía y participación activa en situaciones diversas en el ámbito educativo, para lo cual se requiere a diario, que ellos se enfrenten a procesos tales como: toma de decisiones, toma de conciencia de cómo se han ido apropiando de una actitud crítica y reflexiva a través de sus prácticas educativas y, sobre todo, cómo se usan los conocimientos adquiridos en situaciones contextuales.

Los proyectos de las carreras de ingenierías en la UNEG están diseñados, en función de buscar en los estudiantes habilidades y potencialidades para enfrentar situaciones problemáticas, que los lleven a plantearse escenarios de acción, para la toma de decisiones óptimas y la generación de respuestas satisfactorias a los problemas contextualizados que se planteen relacionados con su desempeño profesional. (UNEG, 2003).

En base a los requerimientos anteriores que se exigen en los diversos programas de formación del ingeniero egresado de la UNEG, se enmarcarán las interrogantes de esta investigación, en torno a la búsqueda de una enseñanza por competencias y contextualiza, donde la Matemática sirva como medio para el logro de esos objetivos. En concreto, este estudio se centró en la enseñanza del cálculo para futuros profesionales de la ingeniería, específicamente, en cómo enseñar el contenido matemático sobre funciones de variable real, profundizando en el estudio de fenómenos del mundo real del ingeniero, representados desde una relación funcional y simulando el comportamiento de estos fenómenos.

Grosso modo, se trabajará el contenido matemático sobre ciertas funciones reales (Polinómicas, Exponenciales, Logarítmicas, Trigonométricas, entre otras) que contiene el programa de Matemáticas I de los proyectos de carreras de ingeniería que se oferta en la UNEG: ingeniería industrial, ingeniería en producción animal, ingeniería forestal e ingeniería en informática.

La prospectiva de la UNEG contempla para sus egresados en ingeniería un profesional con sólidos conocimientos básicos comunes a las carreras de ingeniería, y una consistente formación en el área específica, donde vincula de forma integral, la teoría de decisiones, la teoría general de sistemas y el pensamiento crítico para responder a la necesidad de crear, evaluar y mejorar las tecnologías informáticas y de comunicaciones, los sistemas de producción y de servicios, actuando con sentido de sensibilidad y responsabilidad social, para el logro de la mejora continua del entorno y fundamentalmente comprometido con la conservación, defensa y mejoramiento del ambiente (UNEG, 2003).

Específicamente, el proyecto oficial de las carreras de ingenierías de la UNEG, plantea que:

> El Ingeniero egresado de los proyectos de carreras de ingenierías, es un profesional comprometido con la transformación social, política y económica de la nación y, en particular, con el desarrollo de la región Guayana. Con visión humanística y enfocado al servicio de las comunidades en sus más altos intereses colectivos. Respetuoso de los valores morales, éticos, sociales y existenciales para el desarrollo de la más alta forma de convivencia con su entorno (p. 1).

Tal y como lo establece la descripción del perfil del ingeniero, el egresado debe ser un profesional de alto desempeño con competencias para el diseño, planificación, gestión y mantenimiento de sistemas de producción y de servicios, que actúe con sentido de sensibilidad y responsabilidad social, para el logro de la mejora continua del entorno, haciendo uso racional de las tecnologías vigentes y capaz de realizar innovaciones tecnológicas que permitan el desarrollo de nuevos productos y fundamentalmente comprometido con la conservación defensa y mejoramiento del ambiente (UNEG, 2003).

Todas las competencias mencionadas anteriormente que requiere el ingeniero, deben promoverse desde la puesta en marcha de los programas curriculares en cada asignatura de los pensa de estudios, donde Matemática I, no pueden escapar de ello y ser la excepción. Tal y como lo establece el programa de la asignatura de Matemática I, de ingenierías en la UNEG (2003): "Esta unidad curricular contribuye a la formación profesional básica del Ingeniero, y le prepara para aplicar fundamentos matemáticos en la resolución de problemas que se presentan en su ejercicio profesional" (p. 1).

A su vez, el programa de Matemática I de los proyectos de ingenierías está diseñado para propiciar ciertas competencias de la unidad curricular, pero referidas no sólo al abordaje de contenidos matemáticos a desarrollar, sino a propiciar en los estudiantes habilidades y destrezas que los capacite de manera consciente y autónoma sobre el uso de la matemática en la aplicación de situaciones problemas en general. Por ejemplo, el programa de Matemática I de los proyectos de carreras de Ingenierías en la UNEG, plantea para la ejecución de las actividades propuestas que:

> Los alumnos, en forma grupal e individual, realicen acciones u operaciones sobre la base de la tarea. Luego, que la presenten y la expliquen para permitir

> en el grupo de clase el debate, la reflexión, el reanálisis, el control, la valoración, la evaluación, entre otros aspectos, que promueven la autonomía, la independencia, la asimilación y la toma de conciencia, con significado y sentido, acerca del proceso de apropiación del qué, cómo y para qué del contenido matemático (p 4).

El docente, oportunamente, guía, orienta, coordina, controla, aclara, esclarece, explica, da ayuda y evalúa el nivel de logro de los procesos de enseñanza, con el objeto de garantizar la ejecución correcta de la acción por parte del estudiante-grupo.

En base a lo anterior, es necesario desarrollar desde la enseñanza de la matemática competencias donde no se trabaje sólo el contenido matemático, sino se trabaje por promover competencias generales para su formación integral como ingenieros, en su condición de resolutores de problemas, de profesionales que se plantean retos permanentes para buscar soluciones factibles y eficientes a problemas cotidianos y tecnológicos que presenta la sociedad actualmente.

El Problema a Investigar

El problema surgió por la preocupación de la investigadora en base a los siguientes cuatro aspectos considerados:

1) *El alto índice de repitencia académica en la asignatura de Matemática I*: Durante los últimos dos (2) años, el cual es del conocimiento de la comunidad universitaria; hecho confirmado además desde la consulta realizada a las estadísticas que maneja la Dirección de Informática de la UNEG, como fuente de información oficial. Esta unidad arrojó los siguientes resultados: el 78% de alumnos inscritos en la asignatura Matemática I del proyecto de carrera de ingeniería resultaron aplazados, durante los últimos cuatro semestres: I-2015, II-2015, I-2016, II-2016.

2) *Las dificultades de tipo cognitivas y epistemológicas que presentan los estudiantes sobre la definición de función real*. De acuerdo a los resultados de un estudio exploratorio aplicado por la investigadora en la UNEG, en una sección de Matemática I, constituida por 20 estudiantes, durante el curso intensivo 2016, se pudo constatar que existieron dificultades en el manejo de algunos conceptos matemáticos utilizados: Un 30% de la muestra estudiada no determinaron si una relación era

función o no, de lo cual se deduce que no conocían a plenitud la definición de función; sobre todo cuando debía hacerse restricciones en el dominio de la función dada para que existiera su inversa; el 20% de los estudiantes identificaron incorrectamente la variable dependiente e independiente; a su vez, el 60% de los estudiantes no comprendían la definición de composición de funciones reales, el 20% de los estudiantes consultados desconocían la representación algebraica y gráfica de funciones básicas; tales como, las funciones cuadráticas y exponenciales.

En este estudio previo se evidenció que el 90% de los estudiantes consultados les era difícil hacer uso del conocimiento matemático sobre función para resolver situaciones problemas contextualizadas, ya que tuvieron dificultad para identificar aspectos esenciales de las situaciones problemáticas trabajadas y traducirla en términos matemáticos. Otras dificultades a considerar en este estudio fueron por ejemplo: el manejo inapropiado de los símbolos y términos matemáticos, las concepciones erradas en el manejo de conceptos, definiciones, relaciones, procedimientos y aplicaciones inadecuadas de leyes, datos mal utilizados o interpretaciones incorrectas, faltas de verificación de resultados, falsas creencias, entre otros.

3) *En la búsqueda permanente como docente-investigadora por satisfacer las demandas del currículo*, en cuanto a los fines de la enseñanza de la matemática en la formación inicial del ingeniero. En este sentido surgen las siguientes interrogantes: ¿Para qué enseñar cálculo en la formación del ingeniero?. ¿Se induce a ser consciente al estudiante de la utilidad práctica de los conocimientos matemáticos que se imparten?.

4) *Por la inquietud de desarrollar una cultura matemática en los estudiantes adaptada a los nuevos tiempos tecnológicos y globalizados*, mediante la incorporación en el aula de clases de materiales tecnológicos, técnicas didácticas de vanguardia, retroalimentación y actualización permanente del proceso de enseñanza del cálculo.

Según Camarena (2010), los ingenieros egresados a la hora de resolver un problema de la industria en su actividad profesional y laboral, donde la modelación matemática es necesaria, los estudiantes tienen dificultades para modelar el problema ya que no han sido preparados para ello durante sus estudios universitarios.

La enseñanza del cálculo en la UNEG no escapa de ello, se da totalmente desvinculada del contexto profesional del futuro ingeniero, es una enseñanza atomizada, en la cual no se integran los saberes de otras ciencias. Es una enseñanza basada sólo en los contenidos matemáticos y la metodología que se aborda en textos básicos de cálculo, donde no se resuelven problemas, sino ejercicios; generalmente no se promueven los diferentes sistemas de representación de los contenidos matemáticos que se abordan; no se consideran conocimientos de otras materias; ni mucho menos existe evidencia alguna en la cual se incorpore problemas sociales que tengan que ver con el arraigo de nuestra cultura regional o quizás nacional (Bejarano, 2008).

Aunado a lo anterior, Lopéz (2008), señala que existen problemas para introducir la modelización matemática en el aula con la incorporación de la tecnología, ya que existe escasez de recursos y materiales disponibles, además de la poca capacitación del docente.

Sin embargo, en el contexto UNEG la enseñanza de la matemática durante los quince años de experiencia laboral de la investigadora, específicamente en el proyecto de ingeniería industrial; se evidencia una resistencia generalizada de los docentes del área de matemática, en cuanto a los cambios que han surgido en la didáctica de la matemática con la incorporación de la tecnología. En consecuencia, la mayoría de los docentes que enseñan matemática en los cursos básicos, no se valen del potencial adosado en los medios tecnológicos que podemos disponer en nuestras aulas de clases; como por ejemplo: algún software educativo accesible, hacer uso de la red de Internet que existe a nuestra disposición en los laboratorios de computación, entre otros.

En este sentido, López (2012), recomienda que en la enseñanza de la matemática, a través de la modelización matemática, el aprendizaje se refuerza desde el uso de las nuevas tecnologías y la búsqueda de información.

Por todo lo antes señalado, en este estudio se intentó superar algunas de estas dificultades señaladas anteriormente en la enseñanza de funciones reales, como contenido clave dentro del currículo del ingeniero. Sobre todo la modelización matemática, el uso de un software dinámico y la resolución de problemas contextualizados en estos experimentos de enseñanza, todos como organizadores del currículo, han guiado el diseño de esta propuesta dirigida a la formación inicial del ingeniero dentro de su capacitación como futuros profesionales, con miras a proponer y viabilizar la vinculación de la matemática con el contexto real y en su accionar como ingenieros, resolutores de problemas dentro de sus competencias profesionales.

Del análisis de contenido y cognitivo a priori que se realizó del programa de Matemática I de los proyectos de carreras de ingenierías en la UNEG y del perfil del ingeniero establecido en su perfil como futuros profesionales egresados de la UNEG, surgieron los indicadores para analizar las competencias matemáticas que se estudiaron en función a las tareas propuestas, que incluyeron algunas de la amplia gama de competencias profesionales del ingeniero establecidas en su perfil curricular.

La modelización matemática tal y como es vista por Ortiz (2002), se concibe como "el proceso mediante el cual se construye y se estudia una relación entre un fenómeno y una estructura, a partir de una situación o problema del mundo real con la finalidad de aproximarse a este último" (p 66).

Esta innovadora concepción de asumir la modelización como un proceso que permitió, a partir de situaciones contextualizadas, diseñar y proponer tareas de modelización matemática que ayudaron al futuro ingeniero, a replantearse el uso de la matemática en la construcción de modelos, fue muy productiva para la apropiación por parte del estudiante de la definición de funciones reales y sus características.

Además, los estudiantes pudieron simular fenómenos de la realidad y plantearse modelos como alternativas de respuesta a problemas que involucraron un fenómeno en particular y de esta manera, potenciaron una serie de competencias de modelización que incluían competencias profesionales, mediante el desarrollo de procesos cognitivos que ejecutaba el estudiante al hacer uso del lenguaje matemático en las distintas representaciones en que se expresaba la definición de función real.

En virtud a ello, García y Ortiz (2007), afirman que:

> La modelización matemática contribuye a la comprensión de contenidos matemáticos conectados a otras formas de conocimientos. Su aplicación como una estrategia de enseñanza y aprendizaje es cada día más utilizada por los educadores matemáticos. Diferentes trabajos de investigación en educación matemática, tales como los presentados por Blum (1991), Blum & Niss (1991), Bassanezi (1994) y Bair & Haesbroeck (1998), Berry & Francis (2000) y Kutzler (2000) estrategia de enseñanza y aprendizaje (p 9).

En este sentido, se reflexionó en este trabajo sobre:

1) ¿Qué tipos de tareas de modelización matemática se propusieron al estudiante?. Esto tuvo que ver con valorar la complejidad de la tarea (Rico, 2005), con el reconocimiento y uso de las distintas formas de representación del conocimiento matemático (Duval, 1998) y de los procesos de modelización matemática que se desarrollaron (Medina y Ortiz, 2013); las cuales constituyeron las dimensiones estudiadas y a partir de ellas al establecimiento de algunas conjeturas validadas durante el desarrollo del estudio.

2) Otro de los cuestionamientos que involucró el problema de investigación, consistió en reflexionar acerca de cómo desde la enseñanza de las funciones, se podría contribuir a la capacitación de las competencias matemáticas planteadas en los currículos de las ingenierías, de manera de superar dificultades de tipo cognitivo y epistemológico sobre funciones y consecuentemente el rendimiento escolar.

Tomando en cuenta las ideas de Cruz (2010), mediante la implementación de la modelización matemática se pudo potenciar habilidades esencialmente de carácter intelectual que comprendían algunos factores; tales como: el diseño, la inventiva, el uso del sentido común, la simulación de fenómenos, la experimentación, la medición, la inferencia, la optimización, el uso de fuentes de información, la comunicación, el trabajo coordinado en equipo, el uso del pensamiento y el uso de la computadora.

3) Este último tiene que ver con un nuevo aspectos importante considerado en la problemática de esta investigación; y se refirió al hecho de cómo incorporar en la resolución de problemas matemáticos (donde se abordaron fenómenos del mundo real desde algunas funciones reales básicas), el uso de la tecnología; de tal manera de

profundizar en la cultura matemática que requiere el egresado en ingeniería de la UNEG, y de este modo estar familiarizado con el mundo tecnológico e informático que demanda la sociedad cada día con mayores exigencias tomando en cuenta las ideas de Rodríguez, (2015).

En este sentido, a partir de esta experiencia investigativa, se persiguió que el estudiante desde la modelación matemática se apoyara en las nuevas tecnologías; en este caso en particular, el software GeoGebra, para aprender a tomar decisiones, predecir tendencias futuras, decisiones sobre problemas ambientales, en los envases industriales, en economía, en sistemas biológicos, en ensayos médicos, en computación, en física; tal y como lo plantean Yanagimoto, en ICTMA 11 (2003), Haines, Galbraith , Blum and Khan, en ICTMA 12 (2007) y Hall y Lingefjärd, (2017), entre otros.

En los mercados competitivos de hoy en día, el ingeniero moderno necesita reducir el inicio, tiempos y costosas series de ensayos productivos y otros costos de construcción (Hall y Lingefjärd, 2017). Todo lo anterior se pudo favorecer desde la modelación matemática y la simulación asistida con GeoGebra, donde a través del uso práctico de la matemática se pudo establecer la interpretación y análisis de fenómenos que se proponían modelar en el mismo, propiciando de esta manera una enseñanza contextualizada de la matemática.

Con la incorporación al trabajo de aula del GeoGebra, se asumen las ideas de Goatache (2009), quien afirma que:

> "El profesor se encuentra frente al desafío de tener que adoptar nuevas estrategias y estilos de enseñanza, centrados en el alumno como principal protagonista del proceso de aprendizaje, y donde con ayuda de la tecnología ejercerá un rol de orientador, facilitador, motivador y estimulador de ese proceso. Este planteamiento compromete al docente en el ejercicio de nuevas funciones tales como la de diseñador de entornos de aprendizaje mediados por las TIC, así como también de diseñador de medios didácticos y su evaluación en el marco de una metodología que estimule el aprendizaje de la Matemática basado en la comprensión e interpretación conceptual" (p 10).

En definitiva, se trabajó con el software GeoGebra, como programa interactivo de fácil manejo, mediante el cual se exhibieron en su pantalla principal representaciones simultaneas del objeto matemático-función que se trabajó y sus características; donde este modelo computacional construido sintetizó el comportamiento de las variables que se estudiaron en los fenómenos abordados y simultáneamente, la aplicación del modelo permitió espacios de comprensión y reflexión de los entes matemáticos inmersos.

Por qué integrar el GeoGebra para la enseñanza de las funciones reales, en el diseño de esta propuesta didáctica?. Las razones por las cuales se optó en la escogencia del GeoGebra para hacer uso de la tecnología en el aula fue, precisamente, por todas las ventajas que ofrece este programa: Es un software libre, gratuito, de fácil acceso desde su plataforma online (http//:geogebra.org), funciona en todos los sistemas operativos (windows, linux, max) y en todos los dispositivos (tabletas, laptos, calculadoras gráficas, teléfonos inteligentes y PC en general); esto último se debe precisamente, porque su instalación y ejecución requiere de poca capacidad de memoria.

Uno de los aportes más importantes del GeoGebra, por lo cual fue considerado en esta investigación, es cómo este software permite integrar en una sola aplicación diversos registros de representación de un mismo objeto matemático en varias vistas en simultáneo. Además, este programa permite mediante su ejecución, el diseño de animaciones e incluso generar barras de desplazamientos llamadas deslizadores, que modifican en tiempo real las variables y parámetros, para comprobar estos cambios en sitio de manera dinámica en las pantallas proyectadas en simultáneo; esto último contribuye a activar el pensamiento variacional del estudiante, lo cual ha constituido un elemento de estudio dentro de la propuesta didáctica generada.

En base a toda la problemática planteada anteriormente, surgieron las siguientes interrogantes que orientaron el accionar de la investigadora, en la búsqueda de contribuir a subsanar todos estos aspectos:

1. ¿Cómo abordar desde la aplicación de los experimentos de enseñanza, el diseño y el análisis de tareas de modelización matemática para que los estudiantes

construyeran relaciones funcionales y simularan en GeoGebra fenómenos en ingeniería que se modelaran mediante funciones reales?.

2. ¿Cuáles podrían ser los aportes a la formación matemática de futuros ingenieros industriales, al integrar los organizadores del currículo, modelización matemática y uso del software dinámico GeoGebra, luego del diseño e implementación de una propuesta didáctica para la enseñanza de funciones reales?. Inicialmente, las expectativas de la investigadora se proyectaron en torno a identificar cuáles serían las competencias de modelización matemática que desarrollarían los estudiantes y si lograrán consolidar conocimientos matemáticos sobre funciones reales de variable real de esta manera.

3. ¿Cuáles serían los niveles de logro de los estudiantes en cuanto a los objetivos propuestos en cada tarea de modelización y su evolución, luego de aplicar el diseño del experimento didáctico, que constituyó la propuesta formativa e integradora?.

4. ¿Cuáles serían las dificultades epistemológicas y cognitivas que presentaría el estudiante en cuanto a la resolución de problemas contextualizados, la comprensión de fenómenos y el uso de los sistemas de representación con la incorporación del GeoGebra?.

Al considerar todos los cuestionamientos anteriores, se sostuvo en esta investigación que la enseñanza de la matemática se visualizó como un eje trasversal en las carreras de ingenierías, desde las ideas básicas del cálculo, definiciones y relaciones, que representan su formalización, hasta la contextualización de los problemas ingenieriles que constituyen las aplicaciones de estos conocimientos matemáticos y la incorporación de la tecnología como instrumento de apoyo.

En síntesis, en este estudio se profundizó en la enseñanza de las funciones reales, donde se ha privilegiado el contexto, el desarrollo de procesos matemáticos y competencias de modelización matemática en la formación profesional de los ingenieros en formación de la UNEG, con apoyo del GeoGebra.

Justificación del Problema Investigado

En este apartado se presentan las razones que justifican la realización de esta investigación; se presentan las respuestas a las interrogantes referidas anteriormente.

Esta investigación se asumió, por el hecho de estudiar si los estudiantes de ingeniería estarían siendo formados para desarrollar las competencias que permiten el uso de la matemática en las diversas situaciones de su mundo profesional cercano. En consecuencia, para la investigadora fue importante plantearse una propuesta didáctica donde se valorara la enseñanza de la matemática, en este caso de las funciones reales y su utilidad práctica.

Camarena (2010) sostiene que el aprendizaje de las matemáticas es un elemento crítico en la capacitación de un ingeniero, lo cual advierte que esto lleva a una situación de debilidad en la formación de los futuros ingenieros, ya que el aprendizaje de las matemáticas en general, y del cálculo en particular de manera indebida o incorrecta, puede dificultar el desarrollo profesional del futuro ingeniero.

Se suma a los planteamientos anteriores, lo expresado por Moreno (2005), quien sostiene que el aprendizaje del cálculo está afectado por la manera en cómo se da su enseñanza, la cual puede estar lejos de lograr que los estudiantes alcancen la comprensión de los conceptos y métodos de pensamiento que demanda esta parte de las matemáticas.

Moreno (2005), afirma que se ha perdido la concepción del rol que juega la enseñanza del cálculo en la ingeniería, dejando de lado la importancia que para esta tiene el carácter representacional y semántico de las matemáticas, y su impacto en el quehacer de los ingenieros para la formulación de posibles explicaciones o manejos de los fenómenos que enfrentan y sobre todo, la comunicación de las ideas matemáticas.

En virtud a ello, se han tomado las ideas de Cruz (2010) en relación a la necesidad existente de un replanteamiento de las formas tradicionales de la enseñanza del cálculo hacia metodologías efectivas de resolver problemas prácticos de la ingeniería, con el aprovechamiento de los recursos tecnológicos disponibles, y la modelación matemática.

En esta investigación se ha reflexionado, en base al por qué la enseñanza actual de las funciones, no es adecuada y cómo lograr que sea más efectiva y apropiada a las competencias profesionales que requiere el ingeniero (Cruz, 2010).

Los educadores matemáticos están llamados a asumir, verdaderamente, el problema de aislamiento de la matemática, que se traduce a presentar conceptos, relaciones (teoremas) y algunas aplicaciones de definiciones matemáticas, sólo en asignaturas asociadas al área. Por el contrario, los docentes deben vincular la matemática con otros campos del saber y dejar atrás, esa enseñanza del cálculo basada en una práctica tradicionalmente algebraica, memorística, repetitiva y algorítmica, donde se evalúan resultados, escasos procedimientos y muy pocas competencias.

Por otro lado, Dolores (1999) afirma que resulta inquietante dentro del aula de clases analizar los posibles obstáculos didácticos; por ejemplo, la insuficiencia de recursos, materiales o equipos tecnológicos pudiera limitar la visualización y representación en varias dimensiones del pensamiento. He aquí, una razón suficiente para incorporar el uso de la computadora en la enseñanza del cálculo en la propuesta didáctica generada; en concreto se ha utilizado el GeoGebra y con ello se ha logrado la visualización de la definición de función real desde varios sistemas de representación y su interpretación asociado a fenómenos contextualizados.

En definitiva, la investigación tuvo su génesis específicamente, en la búsqueda de aportar contribuciones didácticas al proceso de enseñanza de las funciones reales, mediante la incorporación de la tecnología y enfatizando en la modelización matemática, de tal manera de abrirse a la posibilidad de un estudio contextualizado haciendo énfasis en situaciones problemas asociadas al campo profesional del futuro ingeniero.

En virtud a todo lo anterior, se asumió la siguiente premisa: no se puede seguir descontextualizando la enseñanza de la matemática, restándole importancia a su uso práctico. Consecuentemente, este estudio propuso la modelización matemática, en los dos sentidos que ha planteado Mendible y Ortiz (2007): de la realidad hacia el modelo y viceversa, para abordar situaciones problemas que coadyuven a propiciar, tanto el desarrollo de procesos matemáticos, de modelización matemática y sobre todo, de las competencias que requiere el ingeniero, quien estará obligado a dar respuestas cónsonas, en función de las necesidades que demande la sociedad en el tiempo, en los diferentes campos de acción; llámese Universidad, sector industrial, comercial u otros.

La investigación tuvo relevancia social, además de utilidad metodológica, ya que se implementó una metodología para la enseñanza de funciones, que vinculara los conocimientos matemáticos que engloba la definición de funciones reales, sus características y su aplicabilidad en problemas que coadyuven en la búsqueda de soluciones a problemas ingenieriles, para trabajar en pro del desarrollo de una cultura matemática cónsona con estos tiempos modernos tecnológicamente mediados y globalizados.

De manera que, en este estudio se reflexionó en torno a las diferentes alternativas de respuestas que se han planteado en los problemas propuestos en las tareas de modelización, que no son más que problemas que probablemente enfrente el ingeniero; por ejemplo, relativos a comportamientos demográficos; comportamientos que caracterizan la economía del país, o de fenómenos ambientales propios, de sistemas de procesos industriales de las empresas, bien sea de producción, de calidad o de servicios, de producción animal en el sector agropecuario, entre otros.

Consecuentemente, se plantea otro aspecto tomado en cuenta en este estudio; tal como, las exigencias sociales y formativas de recrear realidades matemáticas en el contexto de la ingeniería, al simular, mediante el uso del computador, fenómenos del mundo del ingeniero en función del compromiso de estos egresados universitarios con alguno de sus propósitos como futuros profesionales en su desempeño relacionado con: la planificación, el diseño y la evaluación de proyectos, sistemas, o cualquier propuesta en respuesta de una situación problema. Aunado al hecho de asumir una aptitud acorde y en paralelo a la creación y perfeccionamiento de las nuevas tecnologías.

En definitiva, este estudió pretendió resaltar la necesidad de usar el conocimiento matemático en la enseñanza de funciones, mediante la modelización matemática, como instrumentos de acción, formativo, gestor de cambio y de contextualización en el campo de la ingeniería y en otras áreas del saber; de aquí, el carácter científico y utilitario del estudio, ya que la metodología utilizada es aplicable a la enseñanza incluso a otras áreas del saber; tales como: la física, la química, ciencias de los materiales, ingeniería de métodos, entre otras dentro de los currículos de las ingenierías.

En síntesis, con este sentido práctico y funcional surgió esta investigación, al valorar la importancia que tiene la enseñanza contextualizada del cálculo en la formación de ingenieros, la cual se asume desde los conocimientos propios de capacitación que encierra esta disciplina, las competencias y procesos que se propician desde la matemática a partir de su intervención didáctica y el uso o aplicación de las funciones que sintetizan el comportamiento de fenómenos, todo lo cual debería estar inmerso en el contenido programático de los proyectos de las carreras de ingenierías en la UNEG.

Objetivos de la Investigación

Objetivo General

Analizar el impacto de la implementación de una propuesta didáctica basada en la triada modelización matemática-software de matemática dinámica-funciones reales; en la formación matemática de futuros ingenieros.

Objetivos Específicos

1. Realizar el diseño y el análisis de tareas de modelización matemática para que los estudiantes construyan relaciones funcionales y simulen en GeoGebra fenómenos en ingeniería que se modelen mediante funciones reales.
2. Estudiar los aportes a la formación matemática de futuros ingenieros sobre funciones reales, al integrar los organizadores del currículo, modelización matemática

y uso del software dinámico GeoGebra, luego del diseño e implementación de una propuesta didáctica.

3. Establecer niveles de logros y su evolución alcanzados por los estudiantes en cuanto a competencias de modelización matemática y conocimiento sobre función, ambos indicadores incluidos en los objetivos a proponer en cada tarea de modelización.

4. Identificar las dificultades epistemológicas y cognitivas que ha presentado el estudiante en cuanto a la resolución de problemas contextualizados, la comprensión de fenómenos y el uso de los sistemas de representación.

Alcances del Estudio

Dentro de los alcances estuvieron los siguientes:

- El establecimiento de una metodología de trabajo fundamentada en el desarrollo de problemas contextualizados y centrados en la ejecución del proceso de modelización matemática para la enseñanza de las funciones.
- Se estudió el cálculo como una herramienta de la matemática, utilizada para analizar fenómenos autóctonos tanto de la región Guayana como del país Venezuela, donde intervinieron una serie de variables y se estudiaron relaciones de dependencia y de cambio.
- Se han concretado algunas sugerencias para superar ciertas dificultades de tipo cognitivas, epistemológicas e instruccionales que se presentaron al modelar fenómenos en el ámbito de la ingeniería con apoyo del GeoGebra, en base a la propuesta didáctica implementada.
- Se ha concebido una propuesta didáctica que integra el GeoGebra, la modelización matemática y las funciones reales de variable real como una estrategia metodológica, que contribuye hacia el desarrollo de procesos matemáticos, procesos de modelización matemática y competencias de modelización matemáticas fundamentales en el quehacer del futuro ingeniero, una vez que cierra el ciclo de modelización, al trabajar cada una de sus fases.

- Se ha logrado, mediante la implementación y perfeccionamiento de la propuesta didáctica generada, estudiar elementos teóricos que contribuyen en la formación matemática del ingeniero, a la luz de las teorías utilizadas al integrar los organizadores del currículo que fueron considerados.
- Finalmente, se ha logrado consolidar una investigación de tipo experimental en el ámbito de la Educación Matemática, cuyo propósito ha sido el de profundizar el estudio del desarrollo de competencias de modelización matemática a través del uso práctico de la matemática y la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las funciones reales, en pro de la formación matemática de los futuros ingenieros y sobre todo, presentar una propuesta didáctica concreta centrada en la matemática contextualizada que contempla el diseño curricular vigente en la UNEG.

Todo lo antes expuesto, permitió orientar todo el proceso de instrucción didáctica seguido mediante los experimentos de enseñanza que se desarrollaron bajo el acompañamiento de un grupo de docentes evaluadores; además de la ejecución de las tareas de modelización matemática que se propusieron, al considerar el ciclo del proceso de modelación matemática para resolver problemas contextualizados en las ingenierías mediante la incorporación del GeoGebra, aplicando conocimientos matemáticos desde distintos sistemas de representación y usos.

CAPITULO II
MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presenta la revisión bibliográfica realizada y los basamentos teóricos que soportan el estudio, en particular se enfatiza en: a) el proceso de modelización matemática en la formación matemática del ingeniero, b) las perspectiva de modelización matemática en la formación del ingeniero, c) los aportes del desarrollo de las competencias de modelización matemática a la formación integral del ingeniero mediante la enseñanza de funciones reales, d) los aportes del software GeoGebra para la enseñanza de funciones, e) las características de las tareas de modelización y f) algunos antecedentes y marco teórico considerado.

Proceso de Modelización Matemática en la Formación Matemática del Ingeniero:

La modelación matemática es considerada por muchos autores (Blum, 2002; Blum & Niss, 1991; García y Ortiz, 2007; Villa, 2014, Arrieta y Díaz, 2015) de suma importancia en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, ya que en su práctica como todo un proceso educativo, ayuda a los estudiantes a percibir la matemática como una disciplina que puede utilizarse para comprender y modificar la realidad, mediante el planteamiento de situaciones problemas cercanas a su sensibilidad. En consecuencia, la modelización matemática contribuye a la comprensión de contenidos matemáticos conectados a otras formas de conocimientos, comprendidas en los programas curriculares de las carreras de ingenierías.

Según Molina, Castro, Molina y Castro (2011), a finales del siglo XX es cuando comienza la modelización matemática a atenderse como una actividad creativa en la educación matemática siendo destacada por su potencial para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Blum & Niss, 1991; Haines y Crouch 2007; Lesh y Doerr, 2002, Lesh, Galbraith, Haines and Hurford (2010).

Plaza (2017), considera la modelización matemática como una herramienta de formación en el área de las matemáticas durante el proceso de profesionalización en ingeniería, campo en el que funciona como un eficaz instrumento para el aprendizaje.

Bassanezi (1999) en Zuluaga y Ortiz (2015), define la modelación como el arte de transformar problemas de la realidad en problemas matemáticos, resolverlos e interpretar sus soluciones en el lenguaje del mundo real. Su desafío para el profesor que la asume para enseñar matemáticas, consiste en ayudar al alumno a comprender y construir relaciones matemáticas significativas en cada etapa del proceso. En este sentido, en cada parte del proceso de modelización se generan espacios para la reflexión y el análisis del ingeniero en formación, con el objeto de construir representaciones que se acerquen a la situación problemática planteada y coadyuven a concretar alternativas de solución al problema contextualizado que se estudia.

Similarmente, Rodríguez (2016) en Arieta y Díaz (2015) considera que la modelación matemática constituye un medio pragmático en la enseñanza de la resolución de problemas reales, que hacen vivir al estudiante esta realidad y lo motivan a crear un modelo y la interpretación del fenómeno en estudio (p 166).

Barbosa (2003) entiende la modelación como un ambiente de aprendizaje en el cual los alumnos indagan y/o investigan, por medio de la matemática, sobre situaciones que surgen en otras áreas de la realidad.

Para Blomhøj and Jensen (2003), la modelación constituye una práctica de enseñanza que focaliza el proceso de enseñanza y aprendizaje en la relación entre el mundo real y la matemática.

A su vez, se asumen para esta investigación los aportes de López (2012), quien afirma que:

> La modelación matemática presenta características para ser consideradas en la aplicación de la enseñanza, por ejemplo: los modelos matemáticos son indispensables para comprender fenómenos, se puede observar y practicar el conocimiento matemático, ayuda a la resolución de problemas, da un mejor entendimiento del fenómeno del modelado, puede ser aplicado en diversos campos del conocimiento y ayuda al desarrollo de capacidades en el uso de la tecnología (p. 22).

En base a todo lo anterior, esta investigación se enmarcó en el ámbito de la modelización matemática y se asumió la modelización como una estrategia didáctica fundamental en la enseñanza y aprendizaje de las funciones reales para futuros ingenieros.

Ortiz (2002), señala que los resultados de la aplicación de la modelación matemática en la Educación matemática han determinado que es una forma organizada y dinámica para producir un acercamiento de las matemáticas al contexto físico y social del alumno.

Tomando en consideración las conceptualizaciones de Ortiz (2002), en este estudio, se asume la modelación como una estrategia de enseñanza que permite la construcción de conceptos matemáticos de forma más comprensiva para los estudiantes. En este sentido, la modelización es el proceso mediante el cual se estudia la relación entre un fenómeno y una subestructura o contenido matemático, a partir de una situación o problema del mundo físico, social o real, con la finalidad de aproximarse al fenómeno.

Sin embargo, Beltrón (2018) distingue que la competencia modelación matemática ha sido concebida por distintos autores y organizaciones desde dos perspectivas: desde una posición científica (Bassanezi, 2002; Biembengut y Hein, 2004; Cervantes, 2015; Maldonado y Montenegro, 2013; Mendible y Ortíz, 2007; Villa y Ruíz, 2009 en Beltrón (2018) y por otro lado, como una estrategia didáctica en el aula (Bassanezi y Biembengut, 1997; Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), 2018; Plaza, 2017; Rodríguez, 2010; Rodríguez y Quiroz, 2016; Rodríguez, 2013; Villa, 2007; Villa, 2013 en Beltrón (2018).

En este orden de ideas, para esta investigación el desarrollo de competencias de modelización matemática dentro del proceso de modelización matemática, se asumió en los términos científicos para evaluar el impacto de una propuesta formativa, donde la modelización se instrumenta inicialmente o se aplica como como una estrategia didáctica. De éste modo, el proceso de modelización se trabajó con carácter didáctico; sin embargo, la competencia de modelización matemática en esta investigación se abordó desde ese carácter experimental del método científico.

La competencia de modelización matemática se definió como la capacidad cognitiva, metacognitiva, afectiva y social garantizada por cada estudiante de manera individual y en colectivo para generar y desarrollar todos los procesos que involucra el ciclo de modelización matemática; tales como: la construcción del modelo real, la ejecución del trabajo matemático, el diseño del modelo matemático, del modelo computacional, la verificación y validación de los dos últimos, el establecimiento de hipótesis, la interpretación de los modelos en los términos del problema o fenómeno estudiado, la predicción y la inferencia a partir del modelo construido, la diversificación de la respuesta al problema planteado, la comparación de modelos, incluso la adecuación del modelo matemático obtenido a situaciones similares y la simulación de la situación problemática.

En este sentido, al desarrollar un proceso de modelización matemática el estudiante de ingeniería debe forjarse en la búsqueda continua de generar diseños concretos ante situaciones problemas o fenómenos contextualizados, de tal manera que este accionar le permita habituarse mediante el ciclo de modelización matemática, a la construcción permanente y progresiva de alternativas de respuestas o soluciones factibles ante los problemas planteados y más tarde ante los desafíos que tendrá como futuro profesional.

Estas prácticas de construcción de un modelo del aprendiz basadas en el manejo de información, pasan por el uso de conocimientos matemáticos y técnicos bien consolidados, apoyándose en las TIC, donde mediante una comunicación escrita y verbal fluida a través de un lenguaje adecuado, se estructuren y simulen realidades sujetas a cambios permanentes, tan vertiginosamente cambiantes en este siglo XXI globalizado y sujeto a las telecomunicaciones que abarcan incluso las redes sociales actualmente.

Asimismo, Kaiser & Sriraman (2006) sostiene que utilizar la modelación en la enseñanza de las matemáticas contribuye a que el estudiante comprenda la relevancia de estas para abordar conceptos de otras áreas científicas y también situaciones cotidianas surgidas en su contexto. Así, el uso de esta estrategia puede contribuir a desarrollar competencias que le permitan comprender problemas del mundo real y abordarlos a través de las matemáticas.

En base a lo anterior, se utilizó el modelo que plantea Blum & Leiβ (2007), en cuanto al proceso de modelización de una situación problema. Se presenta a continuación una representación gráfica de este modelo.

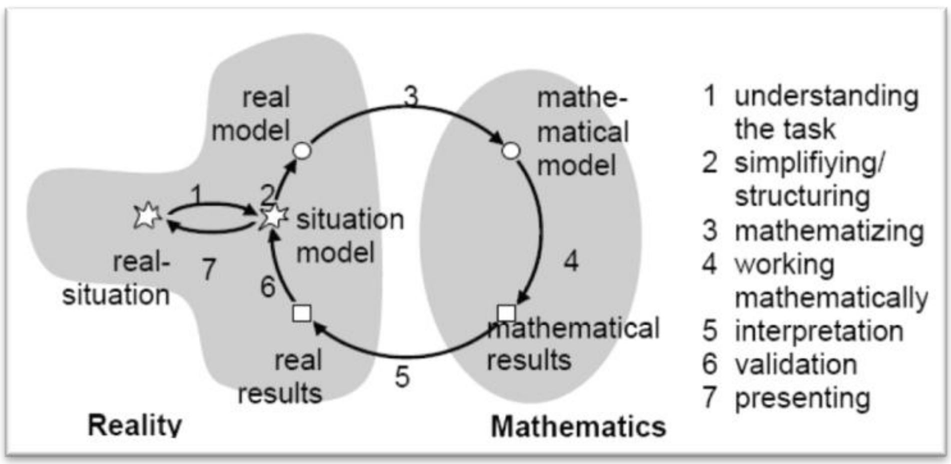


***Gráfico 1*. El ciclo de modelización**. Tomado de Blum, W., & Leiβ, D., 2007, Modelling problems from a cognitive perspective Rita Borromeo Ferri, University of Hamburg, GermanyIn C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics: proceedings from the twelfth International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications (p. 261).* Chichester: Horwood

El ciclo se interpretará como:1) Comprendiendo la tarea (Identificación de la situación problema); 2) Simplificando la estructura o la tarea; 3) Matematizando (construyendo el modelo); 4) Trabajando Matemáticamente (Elección de los contenidos y métodos matemáticos apropiados, resolviendo el problema); 5) Interpretación, 6) Validación y 7) Presentación.

En consecuencia, la modelización matemática no se ha manejado sólo como una competencia que deben alcanzar los estudiantes, sino como todo un proceso investigativo en este estudio que persigue el desarrollo de todas y cada una de las etapas correspondientes al ciclo de modelización establecido mediante el Gráfico 1; además, de evaluar el impacto de ese proceso al incorporar GeoGebra en la enseñanza de funciones.

A su vez se han considerado, las fases del proceso de modelización que plantea Houston, & Jiang (2003), que están en correspondencia con los momentos del ciclo de modelización matemática que describe Ortiz, (2002):

***Gráfico 2*. Fases del Proceso de Modelización Matemática.** Gráfico ajustado desde los planteamientos de Ortiz (2007) y aportes de Galbraith, Goos, Renshaw y Geigeren (2003).

De acuerdo a García y Ortiz (2007), la modelización comprende los cuatro momentos (ver Gráfico2) señalados a continuación:

Momento 1: Paso de la situación del mundo real al modelo real.

Momento 2: Construcción del modelo matemático.

Momento 3: Elección de los contenidos y métodos matemáticos apropiados.

Momento 4: Interpretación de los resultados.

Luego de obtener el modelo matemático, el estudiante construía el modelo computacional, que se obtenía mediante la utilización del GeoGebra, desde datos iniciales producto de las observaciones realizadas al fenómeno en estudio. En esta fase, se pudo simular con el uso del computador alguno de los fenómenos propuestos, desde la variación de los parámetros presentes en los modelos computacionales construidos por el estudiante.

Es importante señalar que la modelización matemática se entendió como un proceso flexible, dinámico, recursivo y cíclico; donde los modelos construidos estuvieron orientados a comprender y resolver un problema o situación real en el cual el desarrollo de cada fase no necesariamente seguía un ciclo continuo y consecutivo. Precisamente, esto se debió a que la modelación es un proceso de indagación, de búsqueda y hallazgos con miras a describir, predecir y prescribir situaciones referentes a fenómenos específicos. De ahí alguna de las utilidades de la modelización en la resolución de problemas del mundo real.

Se consideraron las ideas de Mendible y Ortiz, (2007), que asumen que la modelación matemática contribuye a fortalecer en los estudiantes una filosofía de trabajo, donde se superen, por ejemplo, las barreras de considerar que existe sólo una respuesta correcta a un problema matemático y que existe una única manera de conseguir esa respuesta.

Todo lo anterior, socaba las bases de una educación tradicional, donde predominaba la resolución de ejercicios ante cualquier problema del contexto y donde la investigación, la obtención de registros de medidas, la experimentación quedó secuestrada o excluida ante la rutina de la información que se brindaba en los salones de clases y donde el docente de manera unidireccional era el dueño exclusivo del conocimiento que se brindaba al estudiante. De allí, radica la importancia del enfoque de la didáctica en contexto, donde la modelización matemática para el futuro ingeniero se concibe como un proceso transversal en su formación integral; éste pasa a ser un proceso vital para la experimentación que requiere este innovador en su acercamiento sucesivo a los fenómenos reales o a los problemas que ha de enfrentar como profesional de la ingeniería.

En concreto, la modelización matemática promovió la adquisición de conocimientos matemáticos, la comprensión profunda de los mismos y la habilidad de utilizar esos conocimientos para la resolución de problemas reales. Los citados autores también destacan su efecto motivador y de mejora en las actitudes de los estudiantes hacia las Matemáticas. Adicionalmente se le reconoce potencial como estrategia metodológica para romper con la atomización del currículo (Aravena, Caamaño y Giménez, 2008).

Finalmente, tomando las ideas de Plaza (2017), se concluye que la modelización matemática es un valioso medio para ser utilizado tanto en proyectos de investigación, como en la enseñanza de la matemática en los programas de ingenierías.

Perspectivas de Modelización Matemática en la Formación del Ingeniero

La enseñanza de la matemática, y específicamente la enseñanza del cálculo mediante modelización matemática, ha sido objeto de estudio de muchas investigaciones en la Educación Matemática en Latinoamérica y particularmente en Venezuela. En consecuencia, se ha convertido en las 2 últimas décadas en tema de interés central de diversas comunidades académicas, regionales y mucho más allá, de grupos científicos consolidados en la Educación Matemática.

En este mismo sentido de divulgación y reflexión sobre la modelización matemática y aplicación de la matemática, existe la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), a través del estudio PISA (Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes) editado por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE, 2005), quien establece que el estudio de las matemáticas y en este caso, la enseñanza del Cálculo debe estar en función de las necesidades de la vida del ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo.

Cada vez con mayor frecuencia se plantea la modelación matemática como un tema de investigación sujeto a ser considerado en muchas experiencias novísimas en el campo de la Educación Matemática (Kaisser, 2006).

Villa-Ochoa, Bustamante, Berrio, Osorio & Ocampo 2009 en Gutiérrez y Prieto (2016), sostienen que la modelación reviste importancia para el desarrollo de una Educación Matemática socialmente pertinente, inclusiva y conectada con la realidad y otras disciplinas científicas.

El estudio de Plaza (2017), refiere muchas investigaciones que abordan la modelización matemática en la enseñanza, específicamente en algunas asignaturas de la carrera de ingeniería. A lo largo de su exposición se reflexiona sobre los resultados que diversas investigaciones han obtenido sobre el tema, rescatando aquellas propuestas que han replanteado la concepción de la enseñanza de la matemática y las estrategias en las que se debería explorar para lograr, entre los alumnos, una formación profesional integral, reflexiva y capaz de resolver problemas en el ejercicio de la ingeniería.

La capacitación de los futuros ingenieros en el manejo de la Matemática está asociada a la promoción de la modelización matemática, como una metodología de trabajo más acorde con la idea de modelación en ingeniería y el abordaje (desde los inicios en la educación universitaria y en forma permanente), de la solución de problemas reales para los cuales la Matemática es un instrumento para modelar.

En ese contexto la Universidad debe estructurar la ingeniería en función no sólo de unos saberes científicos y tecnológicos, sino también en la mira de buscar soluciones óptimas de problemas reales de la sociedad. Bajo esta concepción la modelación matemática a aplicar es la *Modelación Realística y Aplicada*, aquella que según Kaiser & Sriraman, (2006), "se desarrolla con fines pragmáticos y utilitarios, es decir, para resolver problemas reales, comprender fenómenos y promover competencias de modelación", (p. 304).

Se hace importante resaltar que la formación profesional en el campo de la ingeniería posee condiciones especiales que se traducen en competencias, que al ser empleadas o demostradas por los egresados les permite resolver problemas de ingenierías contextualizados de manera óptima con un alto contenido social y crítico. Este hecho sustenta e identifica algunas aristas a ser consideradas en esta investigación: la resolución de problemas, la valoración de competencias del ingeniero desde una perspectiva de *Modelación Socio- Crítica* (Kaiser & Sriraman, 2006), con fines pedagógicos, donde se busque el entendimiento crítico del mundo que rodea al futuro profesional; además de fomentar las actitudes del ingeniero en formación, señaladas por Grech (2001) mediante esta perspectiva. Estas actitudes son: actitud crítica, imparcial, investigativa, con responsabilidad social, de respeto a las normas legales, previsión, coherente, de respeto a la opinión de los demás, actitud responsable, positiva, negativa, de apertura mental y proactiva.

Por tanto, la enseñanza de la matemática que se imparte a los ingenieros en formación debe ser contextualizada y basada en la resolución de problemas de la vida real; donde la modelación matemática juegue un rol importante, al permitir hacer de la matemática una herramienta para vincular la matemática con la realidad además de exigir, el desarrollo de un trabajo cognitivo del estudiante, quien debe sustentar con argumentos aceptables la creación de modelos que simulen el comportamiento de los fenómenos que se estudien.

Los procesos cognitivos que ejecuta el aprendiz cuando resuelve una tarea de modelización matemática, potencian algunas habilidades y destrezas que requiere el ingeniero para enfrentarse a diario a situaciones problemas, lo cual es de gran trascendencia para su capacitación dentro de las competencias profesionales establecidas en el currículo. Dentro de estas habilidades, cabe mencionar las citadas por Grech (2001): Liderazgo, generar confianza, creatividad, capacidad de análisis, espíritu de observación, capacidad de síntesis, capacidad lógica, habilidad numérica, razonamiento mecánico, serendipia, habilidad para buscar información, habilidad de pensamiento divergente y convergente, habilidad para dibujar, sentido común, perfeccionamiento, expresarse claramente y organización de la información (p 91).

En base a estas últimas ideas, se implementó la *Modelación Cognitiva* (Kaiser & Sriraman, 2006), con el interés de la investigadora de identificar procesos cognitivos que forman parte del proceso de modelización, cuando los estudiantes se pasean desde los modelos creados en cada una de las fases; bien sea, el modelo real, matemático o computacional.

El proceso de modelización en este estudio se ha considerado básico para direccionar las tareas que deben cumplir los ingenieros en su campo laboral, relativas por ejemplo, al área de mejoramiento de la calidad de sistemas de producción, de bienes y servicios, de planificación, diseño y mantenimiento de los sistemas de información. Específicamente, se planificaron tareas para la ejecución de técnicas de comunicación oral y escrita, uso de los servicios de internet, técnicas de manejos de grupos, técnicas de generación de ideas, encuestas, leyes y normas vigentes del tema en estudio, nociones de cálculo, entre otras.

Similarmente, Mendible y Ortiz, (2007), afirman que:

> El ingeniero en formación, debe adquirir unas competencias específicas, para que en el área real de trabajo pueda "diseñar" ideas, dispositivos, sistemas, mecanismos, soluciones, alternativas, etc. El objetivo en la formación de este estudiante, de conformar, un cuerpo coherente y productivo de ideas y de competencias de diseño mediante las cuales, de manera creativa, sea capaz de modificar su entorno natural que redunde en una mejor calidad de vida de las personas que se vean dentro del alcance de su acción profesional, se logra recreando la realidad con planteamientos concretos escritos en forma de problemas que deben ser análogos a los que se enfrentará una vez labore en el área (p 134).

En este mismo orden de ideas, Cruz (2010) afirmaba que el ingeniero, está llamado a aplicar modelización matemática como una actividad propia de su intelecto, de reto permanente como profesional que se enfrenta desde su experiencia y conocimientos técnicos a situaciones problemas contextualizados.

A su vez, se sostienen las afirmaciones de Chih-Hsien Huang (2011), quien plantea que el modelado matemático debe considerarse fundamental para la matemática universitaria o la educación de ingeniería, ya que conecta el mundo real con el mundo matemático y puede estimular el proceso de aprendizaje y ayudar a los estudiantes a desarrollar conceptos clave y nociones de matemáticas. En este sentido, se aplicó *Modelación Educativa***,** donde a través de una didáctica estructurada se buscó la introducción y el desarrollo del concepto matemático función y sus características.

En concreto, la modelación matemática ayuda a articular dos niveles: uno de naturaleza epistemológica, en estrecha relación con los contenidos matemáticos y el otro de naturaleza cognitiva, que concierne al pensamiento del sujeto que resuelve la tarea matemática.

Así pues, se establecieron las siguientes conjeturas para optimizar un proceso, partiendo de la concepción de sus bases filosóficas institucionales, los futuros ingenieros de la UNEG, resolvieron problemas dentro de su contexto mediante el cálculo, para lo cual se requirió de una buena lógica matemática (razonamiento matemático), de excelentes habilidades algebraicas, numéricas y geométricas, de una aceptable producción de ideas intuitivas y de un buen nivel de análisis matemático, a través de lo cual se llegó a alcanzar una adecuada racionalización de los recursos empleados en un determinado proyecto y consecuentemente se evidenció la verdadera contextualización alcanzada de la situación problema propuesta.

En base a los planteamientos anteriores, el reto para el docente de matemática en Ingeniería, es aplicar *Modelización Educativa* para contextualizar situaciones didácticas, en la búsqueda de la construcción y la apropiación, por parte de sus alumnos, de definiciones matemáticas presentes en problemas de ingeniería. (Mendible y Ortiz, 2007).

En este orden de ideas, se sostiene que la ingeniería es una disciplina que estudia la aplicabilidad de los conocimientos científicos, para resolver necesidades sociales, para producir cambios en la naturaleza, medio ambiente u organización (UNEG, 2003); por lo cual se hace indispensable pensar y aplicar modelos didácticos que introducidos como innovación en el currículo, puedan brindar la oportunidad al docente de matemáticas en ingeniería, de contextualizar situaciones problema, en las que se contemplen la naturaleza de los objetos que intervienen en su solución para que el estudiante de ingeniería interprete de manera eficaz los aspectos que desea y convienen cambiar. En este sentido, deben tratarse adecuadamente los conceptos y las variables involucradas en cada situación problema.

Estas últimas afirmaciones, dieron sentido a la propuesta de diseñar un programa para la enseñanza de funciones reales, basada en promover el desarrollo de los procesos de modelación desde problemas ingenieriles contextualizados, de tal manera de ir propiciando en los alumnos esas competencias de modelación matemática que han de definir su perfil propuesto en el currículo oficial y que deben satisfacer las demandas que requiere la sociedad desde sus necesidades de producción, bienes y servicios.

Por tanto, el ingeniero en formación, debe adquirir unas competencias específicas, para que en el área real de trabajo pueda diseñar de manera crítica ideas, dispositivos, sistemas, mecanismos, soluciones, alternativas y en fin, optimice procesos, el uso y manejo de recursos disponibles a la hora de desempeñarse en el campo laboral.

Por tanto, los estudios más relevantes coinciden en destacar la modelización matemática como elemento que abre la posibilidad de vincular el conocimiento académico, propio de las aulas, y la realidad empírica del mundo laboral y social.

Aportes del Desarrollo de las Competencias de Modelización Matemática a la Formación Integral del Ingeniero mediante la Enseñanza de Funciones Reales

Para el ingeniero en formación se debe potenciar, como afirman Mendible y Ortíz (2007), la competencia modelación matemática, por ser considerada una competencia profesional de innegable utilidad práctica en el quehacer del ingeniero, quienes se dedican al diseño de ideas, dispositivos, sistemas, mecanismos, soluciones y alternativas viables en respuesta a las demandas que requiere la sociedad en general.

A su vez, se comparten las ideas de estos autores en el sentido que debe dotársele al estudiante de ingeniería, desde su formación inicial, de herramientas conceptuales y funcionales que contribuyan al manejo contextual de la modelación matemática; la modelización vista como un proceso cíclico en el abordaje de una situación problema, lo cual debe propiciar disciplina en el proceso de modelización matemática permanente, donde el estudiante se habitúe a las acciones y procesos progresivos que debe ejecutar, que les permitan desarrollar ciertas capacidades y consecuentemente potenciar competencias matemáticas que lo forjen como un resolutor de problemas.

En la búsqueda de intentar desarrollar algunas competencias de modelización matemática con el abordaje y aprendizaje de las funciones reales, se ha obtenido en esta investigación que el estudiante logre plantearse una situación problema contextualizada, que interprete, analice, presente alternativas de solución, seleccione la mejor opción de respuesta y logre simular en base a una relación funcional construida, un comportamiento que se aproxime a la situación inicial planteada.

En síntesis, se ha logrado que los estudiantes transformen varios problemas contextualizados dados a una representación real, matemática o modelo matemático y computacional, tomando en cuenta las posibles relaciones matemáticas inmersas y el conocimiento matemático vinculado sobre funciones.

Todo lo anterior, ha permitido que los estudiantes alcancen cierto desarrollo de competencias de modelización matemática mediante el logro de algunas capacidades durante el proceso de aprendizaje de las funciones en su praxis educativa universitaria en Matemática I, mediante la resolución de las tareas de modelización propuestas y mediante procesos de argumentación, interpretación, análisis, selección, modelización, verificación y simulación; que han permitido al futuro ingeniero ir capacitándose intelectualmente e ir consolidando las exigencias establecidas en su perfil curricular para enfrentarse a situaciones como resolutores de problemas e innovadores de diseños; esto último, constituye la esencia del ser y el hacer de todo ingeniero.

Los resultados de investigación de Nejad y Bahmaei (2012) en Plaza (2017), reafirman lo anterior y demuestran que la enseñanza con la modelización matemática tiene un efecto positivo entre los estudiantes, pues favorece el desarrollo de importantes habilidades para resolver problemas. La aplicación de las matemáticas y en especial, cuando se usan relaciones funcionales que representan fenómenos no puede separarse de la utilización de modelos y procesos de modelización matemática que potencian la capacitación del ingeniero y por ende su formación integral.

Ahora bien, la enseñanza de la modelización matemática en las universidades requiere que los estudiantes ya cuenten con algunos conceptos previos. Es recomendable que antes de enseñar modelización matemática en cursos de cálculo, sean enseñados ciertos procesos de resolución de problemas. Para lograr éxito en la modelización matemática no basta con tener conocimientos especializados en las técnicas matemáticas, estadísticas e informáticas, recabar y analizar información o recolectar registros de datos; sino contar con habilidades como: claridad de pensamiento, enfoque lógico, buena idea de los datos, capacidad de comunicación y entusiasmo por hacer la tarea.

La modelización matemática debe estimularse en el salón de clase, en tanto que refuerza ciertas competencias que permiten la reflexión y el análisis, además de evidenciar la ruta más fácil hacia la solución de un problema; para ello se utilizan expresiones matemáticas que representan fenómenos y procesos de nuestra vida cotidiana, tal como lo exponen Obando, Sánchez, Muñoz y Villa (2013) en Plaza (2017). La modelización matemática según estos autores es tanto un dispositivo como un proceso académico que en el aula demuestra las siguientes ventajas, las cuales fortalecen el desarrollo de algunas competencias de modelización matemática:

a) Ayuda al estudiante a comprender mejor el escenario en el que se desarrolla (perspectiva estratégica)

b) Refuerza el aprendizaje de las matemáticas (motivación).

c) Estimula el desarrollo de algunas habilidades actitudinales de tipo matemático. (Praxis afectiva).

d) Coadyuva a tener una mejor óptica de las matemáticas (visión integral y holística).

Aunado a todas las competencias listadas anteriormente, que son fundamentales en la formación matemática del ingeniero, es necesario que en esta formación se incluyan actividades conectadas con la vida real, de tal manera que como aprendiz se motive a estudiar situaciones problemas de su entorno durante su trayecto formativo, y así logre desplegar al máximo sus capacidades. En función de esto, la modelización matemática se asume como un potente recurso para el estudiante, con cuya utilización este logra construir una representación, estructurada y matematizada de la realidad, y obtener así, un verdadero sentido de la realidad en su proceso de formación integral.

Finalmente, se comparten las ideas de Romo (2014) en Plaza (2017), quien pondera elementos teórico-metodológicos en el diseño de actividades didácticas que propone para los cursos de matemáticas en la carrera de ingeniería. Este autor plantea objetivos por competencias o por contenidos, de tal modo que, mediante tareas, el alumno pueda modelar situaciones de la vida cotidiana. En función a esto, la autora de esta investigación retoma los planteamientos de Romo (2014) y para ello, se ha desarrollado el objetivo de la unidad 3, correspondiente a funciones reales en la asignatura Matematica I de las carreras de ingenierías en la UNEG, de acuerdo a las competencias que establece el perfil del ingeniero en esta universidad desarrollando a su vez, los contenidos correspondientes de acuerdo al mismo programa de esta cátedra.

Cabe destacar los trabajos de investigación de Rodríguez (2015), quien asume que la modelización matemática ha demostrado funcionar eficazmente como estrategia de aprendizaje e instrumento para acceder a nuevos saberes. El proceso de modelización permite integrar saberes de otras ciencias, cuando se intenta resolver un problema contextualizado, lo cual amerita y exige el desarrollo de competencias de modelación; aunado a la acción de simular un fenómeno desde una relación funcional. Todo esto contribuye a la formación de un profesional integral que irá concatenando sus conocimientos matemáticos y de otras disciplinas para dar respuestas ante los desafíos que tenga que enfrentar como futuro profesional de la ingeniería.

De esta manera, se puede dar garantías en la formación del ingeniero del desarrollo de una capacidad mínima adecuada y trabajada, que promueva competencias de modelización matemática, que contribuyan en el desenvolvimiento laboral de estos profesionales de la ingeniería.

Como ya se mencionó, la modelación organiza la selección, diseño y secuenciación de tareas. Como parte de la formación inicial de un profesional este proceso requiere el desarrollo de unas capacidades. Las capacidades que se logran desarrollar cuando se piensa y reflexiona sobre el uso de la modelación como estrategia de enseñanza, se esbozan en Mora y Ortiz (2014) y Zuluaga (2015) y se mencionan a continuación:

• Identifica fenómenos en distintos contextos, asociados al concepto.

• Identifica situaciones de distintas áreas de conocimiento o asignaturas asociadas al contenido, donde sea posible utilizar la modelación.

• Identifica situaciones reales donde sea posible utilizar la modelación, relacionándola con contenidos matemáticos específicos.

• Abstrae de una situación real, las propiedades y características que permiten la construcción del modelo para aproximarse a ésta.

• Identifica los contenidos, conceptos, propiedades y estrategias propias de la Matemática escolar que posibilitan obtener resultados a partir del modelo.

• Integra la modelación en el planteamiento de situaciones u oportunidades de aprendizaje.

• Selecciona la forma de utilización de modelación matemática en el diseño de las tareas u oportunidades de aprendizaje.

• Desarrolla preguntas y cuestionamientos sobre situaciones reales, para utilizarlas como punto de partida en el proceso de modelación matemática.

• Diseña actividades de exploración e investigación donde se abordan distintos contenidos matemáticos escolares, que permitan la utilización de la modelación por parte de los estudiantes.

De acuerdo con estas capacidades, la modelación como estrategia de enseñanza, ha permitido a los profesores reflexionar y negociar significados sobre el tipo de tareas u oportunidades de aprendizaje que elaboran cuando planifican una unidad didáctica. Para esto, se establecieron relaciones entre las expectativas de aprendizaje, las dimensiones de la competencia matemática implicadas en ellas, los errores y dificultades previstas y los recursos seleccionados para la enseñanza, entre otros.

Oliveira (2006) en Zuluaga (2015), refiere que la modelación posibilita el desarrollo de conocimientos matemáticos, brinda una percepción del papel de las matemáticas en la sociedad y propicia el escenario para su integración en la práctica educativa (p. 3).

Por su parte, el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos de la OCDE (PISA, por sus siglas en inglés) considera que el docente de matemáticas en los programas de ingeniería debe promover determinadas habilidades entre sus alumnos; algunas de crucial importancia son las siguientes:

1. Pensamiento holístico, investigación crítica, análisis y reflexión.
2. Aprendizaje activo y aplicación práctica.
3. Autoconsciencia y empatía.
4. Comunicación y una fuerte capacidad de escucha.

Adicionalmente, este programa PISA destaca que el pensamiento sistémico y crítico se consideran dos competencias transversales, importantes a desarrollar por un ingeniero, ciudadano del siglo XXI.

Todas las ideas anteriores fueron orientadoras a la hora de desarrollar la propuesta didáctica que se diseñó e implementó.

Aportes del Software GeoGebra para la Enseñanza de Funciones Reales

El Geogebra fue utilizado en esta investigación tomando en cuenta la perspectiva de Hohenwarter y Fuchs (2004), quienes han determinado las contribuciones de este software en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Específicamente, fue considerado como:

1.- Una herramienta de visualización e identificación.

2.- Una herramienta de construcción

3.- Una herramienta de descubrimiento.

La experiencia con el uso del GeoGebra permitió en esta investigación, reafirmar las consideraciones de éstos autores; ya que permitió a la docente investigadora ordenarse en su planificación y ejecución, en cuanto a los contenidos que fueron desarrolladas; además de acelerar el abordaje de todos los contenidos matemáticos estudiados y propiciar el desarrollo de competencias de modelización matemática, sobre todo a la hora de argumentar, proponer alternativas de solución y simular los fenómenos estudiados.

Más adelante en los capítulos VII y IX se explicará con mayor detenimiento los aportes del GeoGebra en esta propuesta didáctica, dedicada a la enseñanza y aprendizaje de las funciones reales.

Características de las Tareas de Modelización Matemática

Se elaboraron en este estudio una serie de tareas de modelización matemática (Watson y Ohtani, 2015). Estas tareas fueron diseñadas con el objetivo de impulsar e inducir al desafío colectivo planteado por López (2012), de resolver problemas contextualizados durante el desarrollo de las sesiones de clases planificadas para que, desde la modelización matemática, los estudiantes pudieran analizar las funciones y sus elementos característicos desde el planteamiento y la reflexión de problemas reales.

Para ello, se tomaron en cuenta durante la planificación y el diseño de las tareas de modelización utilizadas, los principios generales de McCombs (1998), citado por Houston, y Jiang (2003), aquellos relacionados con la motivación que se debía propiciar a la hora de realizar las prácticas de instrucción de la tarea. Estos principios consistieron en: Las actividades debían animar a los estudiantes en su propio aprendizaje, debían estar relacionadas con las necesidades personales, intereses y/o objetivos y debían ser a la vez, desafiantes y realizables; pero que permitieran a los estudiantes tomar riesgos.

A su vez, se tomó en cuenta la concepción de Zawojewski, Diefes-Dux, y Bowman, (2008), en lo que respecta a la investigación de desarrollo de modelos (o la investigación del diseño), la cual sostiene que el problema que se propuso a los estudiantes de ingeniería debía surgir de una situación del "mundo real". Por lo tanto, el trabajo de diseño realizado concierne más a la ingeniería que a una ciencia "pura". En este sentido, el docente que forma ingenieros debe enfatizar a menudo en su didáctica:

1. La ingeniería es la ciencia de resolver los problemas de la "vida real" donde el ingeniero no tiene suficiente tiempo, o dinero u otros recursos, y donde varias partes interesados en resolver un problema, a menudo, tienen puntos de vistas contradictorios sobre el éxito de la naturaleza de la respuesta (bajos costos versus alta calidad), simplicidad versus integridad y así sucesivamente.
2. Soluciones realistas a problemas realmente complejos generalmente se necesitaba integrar ideas y procedimientos de más de una sola disciplina, o teoría o tema de libros de textos de diversas áreas temáticas.
3. Cuando los problemas de toma de decisiones de alto riesgo surgen en situaciones de la "vida real", por lo general, es importante diseñar para el éxito (potencia, compartibilidad, reutilización) - no sólo para la prueba de ello.

En base a los anteriores criterios, se propusieron tareas de modelización a los estudiantes basados en problemas reales del mundo del ingeniero, en la búsqueda de aportes en cuanto a eficiencia y efectividad en las respuestas de modelos construidos, integrando algunos tópicos abordados en asignaturas del currículo de los proyectos de ingeniería de la UNEG; tales como: ingeniería de materiales, ingeniería de métodos, ingeniería financiera e ingeniería del ambiente, investigación de operaciones, planificación y control, entre otras.

Por otro lado, se afirma que la modelación matemática en esta investigación se enmarcó en dos tipos de actividades, según López (2012):

Actividades Piensa y Actúa: "Se le presentaban al estudiante todos los datos o elementos para que éstos lograran obtener un modelo matemático el cual, reprodujeran de la mejor manera la situación planteada" (p. 657).

Actividades de Ajuste de Curvas: "Fueron las actividades en donde al alumno se le presentaba una serie de datos obtenidos a partir de una medición, con el propósito de que los manipulara y obtuviera un modelo matemático que representaba de la mejor manera la gráfica de la situación planteada" (p. 657).

Por otro lado, se diagnosticaron los contenidos que abordaron las funciones reales en Matemáticas I dentro del plan de las carreras de Ingenierías en la UNEG.

A su vez, Blum, Galbraith and Niss (Eds.) (2007), admiten que las actividades de modelización matemática y la construcción de la motivación para el aprendizaje pueden influir en el interés de los estudiantes en un aprendizaje para toda la vida, que es un norte para todo educador por lo cual se tuvo especial cuidado en el diseño del tipo de tareas a proponer a los estudiantes.

En cuanto a la estructura de estas tareas de modelización, se propusieron de 3 tipos en base a las ideas de Rico (2005):

1. *Tareas de Reproducción*: que consistían en realizar operaciones matemáticas básicas y uso de fórmulas simples y algoritmos ya conocidos.
2. *Tareas de Conexión*: con el propósito de relacionar ideas para resolver los problemas propuestos. Para ello, se indujo a los estudiantes a buscar y usar nuevas estrategias o formas para intentar resolver situaciones problemáticas

de los fenómenos estudiados.

3. *Tareas de Reflexión*: cuando describían demandas de tareas que requerían comprensión y reflexión, creatividad e innovación. En estas se relacionaban conocimientos previos para resolver problemas más complejos, donde se buscaba generalizar y justificar los resultados.

Algunos Antecedentes y Marco Teórico Considerado

Entre los antecedentes se pueden mencionar los siguientes estudios realizados en Venezuela; no obstante, en la región Guayana en concreto se desconoce aún alguna investigación en materia de Educación Matemática que incorpore en la enseñanza de funciones reales para ingenieros los descriptores: modelización matemática y/o GeoGebra.

En este sentido, el Cuadro 1 que se presenta debajo, contiene 9 investigaciones que sirvieron, de alguna manera a la investigadora, para generar ideas en el diseño de la propuesta didáctica que ha surgido en esta investigación; en cuando al uso de la modelización matemática, el GeoGebra y la enseñanza de la matemática en contexto en el aula de ingeniería.

Cuadro 1.

Antecedentes del Estudio.

Autor (es)/año	Título	Aportes	Relación con la Investigación
Ortiz (2002)	Modelización y Calculadora Gráfica en la Enseñanza del Álgebra. Un estudio Evaluativo	Expone la evaluación de un programa de formación para profesores, que integra a través del álgebra lineal, el uso de la calculadora gráfica y la modelización. Presenta competencias didácticas desarrolladas por los docentes en formación, cuando diseñaron actividades de enseñanza de contenido algebraico.	Ambos estudios diseñan una propuesta didáctica para la enseñanza de la matemática, que incorpora la modelización matemática y el uso de la tecnología en el aula: uno para la enseñanza del álgebra lineal con calculadora y el otro para la enseñanza del cálculo con GeoGebra.

Autor (es)/año	Título	Aportes	Relación con la Investigación
Prieto, J., Araujo, Y. y Gutierrez R. (2012)	Aportes de una secuencia para analizar los efectos geométricos relacionados con la función cuadrática utilizando GeoGebra	Se describe una secuencia para el análisis de los efectos geométricos provocados por la variación de los parámetros de la función cuadrática sobre la parábola, al dar sentido a los efectos de deformación, traslación y reflexión, experimentados por las familias de parábolas estudiadas mediante el GeoGebra.	Ambos estudios comparten la intencionalidad de generar métodos de enseñanza para los profesores de matemática, a través de la integración de Software Libre en la dinámica académica. En ambos estudios, se visualizan los efectos geométricos provocados por la variación de los parámetros de la función cuadrática sobre la parábola.
Medina y Ortiz (2013)	Competencias matemáticas y uso de calculadora gráfica en un contexto de resolución de problemas aplicados.	Brinda un programa educativo para el aprendizaje de la matemática, donde se integró la modelización matemática y la calculadora gráfica, logrando en los estudiantes competencias matemáticas vinculadas a las funciones reales.	Se trata de dos (2) estudios con carácter evaluativo, donde se analizan en los estudiantes el logro de competencias matemáticas vinculadas a las funciones reales, mediante la incorporación de la modelización y el uso de las tecnologías.
Mendible y Ortiz (2007)	Modelación matemática en la formación de ingenieros. La importancia del contexto.	Presenta un estudio empírico en el ámbito de la ingeniería, relacionados con las competencias en modelización y aplicaciones en contextos matemáticos del currículo actual en ingeniería.	En ambos casos la modelización es empleada para propiciar una enseñanza contextualizada al mundo del ingeniero y una didáctica adecuada que permita el incremento de sus habilidades. La importancia del contexto es vital para comprender el proceso de modelización matemática en ingeniería, puesto que contribuye a fortalecer y humanizar el trabajo del estudiante hacia su futuro desempeño profesional.
Ortiz, J., Iglesias, M. y Paredes, Z. (2013)	Los docentes y su formación inicial hacia el aula de matemática: Una propuesta con modelización y nuevas tecnologías.	Este estudio permite mediante la modelización desarrollar y agilizar el proceso de resolución de problemas del mundo real, facilitando la comprensión y análisis de los problemas, además que por sus pasos o momentos, desarrolla en los alumnos su capacidad de abstracción e interpretación de los resultados; y además permite que los alumnos reflexionen y analicen acerca del trabajo que están realizando, incrementando su motivación.	La modelización permite representar matemáticamente situaciones de la vida real mediante la promoción de procesos internos que desarrolla el estudiante, lo que origina un acercamiento de éste a su entorno a través de la resolución de problemas.

Autor (es)/año	Título	Aportes	Relación con la Investigación
Molina, M., Castro, E., Molina, J.L., y Castro, E. (2016)	Modelización en el aula de Ingeniería: Un estudio de caso en el marco de un experimento de enseñanza	Este estudio aporta información detallada de utilidad para la implementación de la modelización en el aula. Se detecta una concepción no unidireccional del proceso de modelización, con riqueza de interacción entre sus fases y omisión de acciones claves en la matematización y desmatematización del problema.	Estudios de casos que se enmarcan dentro de un experimento de enseñanza dirigido a analizar la implementación de la modelización matemática en un aula de ingeniería
Benedicto, C. (2000)	Estudio de Funciones con GeoGebra	Presenta una propuesta de mejora de la comprensión de conceptos referidos a función, gracias al uso del GeoGebra	Ambas plantean la visualización de conceptos referidos a función gracias a las imágenes dinámicas del GeoGebra. La comprensión e integración de conceptos matemáticos, ambientes de participación activo y colaborativo de los estudiantes y aprendizajes significativos.
Plaza, L. (2017).	Modelación matemática en ingeniería	Se exponen resultados que diversas investigaciones han obtenido sobre la modelación en ingeniería, rescatando aquellas propuestas que han replanteado la concepción de la enseñanza de la matemática y las estrategias en las que se debería explorar para lograr, entre los alumnos, una formación profesional integral, reflexiva y capaz de resolver problemas en el ejercicio de la ingeniería	Toman la modelación matemática como una estrategia didáctica para que mediante la enseñanza de las funciones, buscar formar un profesional de la ingeniería con una formación integral que los potencie en las competencias de resolución de problemas contextualizados.
Plaza, L. (2016).	Obstáculos presentes en modelación matemática. Caso ecuaciones diferenciales en la formación de ingenieros.	Se intentan mejorar los procesos de modelación en la tríada alumno/enseñanza/docente	Se buscó identificar obstáculos en la aplicación didáctica que propone el estudio de la tríada alumnos/ docentes/ enseñanza; mediante el proceso de modelización matemática en ciertas disciplinas de los proyectos de ingenierías, siempre en la búsqueda de mejorar la formación matemática del ingeniero en conjunto con su formación integral.

Dentro de muchos referentes teóricos que existen en la literatura, se han seleccionado los que a continuación se describen en el siguiente cuadro, en base a los esenciales aportes que le han proporcionado a la investigación:

Cuadro 2.

Referentes Teóricos

Autor (es)	Texto	Aportes a la Investigación
Zawojewski y colbs. (2008).	Models and Modaling in Engineering Education	Este texto aportó ideas sobre los modelos que se pueden construir en la formación de ingenieros. Mediante este material bibliográfico, la investigadora se nutrió sobre fundamentos teóricos en torno a las competencias de modelización de matemática.
Blum, Werner and Galbraith, Peter L. (2007).	Modelling and Applications in Mathematics Education.	Con este libro la investigadora se inició al mundo del modelado matemático. Este texto le proporcionó una visión general integral de los avances en el campo de la modelización y las aplicaciones en la educación matemática. Aquí, se tratan temas clave importantes en la jerga de esta investigación, tales como: El papel del modelado y las aplicaciones en la enseñanza matemática cotidiana. Algunas estrategias de evaluación en la práctica, que sirvieron de modelos, descripción de los niveles de las competencias de modelización matemática, entre otros.

Rico, L., Lupiáñez, J. y Molina, M. (Eds) (2013).	Análisis didáctico en educación matemática. Granada. Editorial: Comares, S.L.	Este texto, presenta un compendio de investigaciones que abordan el análisis didáctico, donde se muestra su potencial en la Didáctica de la Matemática, lo cual fue de gran utilidad práctica en esta investigación para conocer los fundamentos teóricos del análisis didáctico. En virtud a ello, el análisis didáctico realizado en este trabajo sobre el tema de funciones, fue esencial para planificar y diseñar las tareas de modelización matemática que se aplicaron. A su vez, el análisis de instrucción y evaluativo fue desarrollado bajo las orientaciones de algunos autores de este texto y sirvió para evaluar el impacto de la propuesta didáctica que surgió en esta investigación
C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.).	Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics. Teaching of Mathematical Modelling and Applications.	Este texto, fue clave para que la investigadora se familiarizara al mundo de los problemas contextualizados para modelar en aula. Aquí, Peter expone comportamientos del modelado en la ingeniería y sus aplicaciones; estas aplicaciones han sido importantes para esta investigación como ejemplos prácticos. En cada capítulo nos muestra cómo los problemas de la vida real se pueden discutir durante las conferencias universitarias, en las aulas escolares y en la investigación industrial. Particularmente en este estudio, este texto aportó discusiones de problemas contextualizados en la ingeniería industrial.

Blum, W., Galbraith, P., and Niss, M. (Eds.) (2007).	Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study. New York: Springer.	Éste libro habla acerca del modelado y el modelado en educación y en ingeniería. Fue importante como texto guía para tomar ejemplos prácticos trabajados en clases y propuestos en las tareas de modelización matemática
Hall, J. y Lingefjârd, T. (2017).	Mathematical Modeling: Applications with GeoGebra. New Jersey: John Wiley & Sons.	Éste texto presenta información detallada sobre cómo el GeoGebra se puede utilizar como guía para el modelado matemático, lo cual fue de gran utilidad práctica en esta investigación. Cada capítulo aborda ejemplos prácticos para ilustrar las habilidades de modelado matemático necesarias para la resolución de problemas; estas habilidades fueron tomadas en cuenta por la investigadora para potenciar las competencias de modelización matemática mediante las capacidades desarrolladas al resolver problemas sobre funciones reales.

CAPÍTULO III

ANÁLISIS DIDÁCTICO PARA LA UNIDAD DE FUNCIONES

En este capítulo se presenta todo un análisis didáctico desarrollado sobre la unidad de funciones reales de variable real; este comprende: un análisis de contenido, un análisis cognitivo, un análisis de instrucción y un análisis de evaluación.

Análisis Didáctico para el Diseño de la Unidad sobre Funciones Reales:

Para el análisis didáctico realizado fue significativo considerar los aportes contemplados en Rico, Lupiañéz, Molina (2013) y Eds., Zuluaga (2015), Guerrero (2017), ya que para estos autores, el análisis didáctico ofrece una secuencia estructurada para orientar y guiar el diseño de unidades didácticas. A partir de una sólida base conceptual y curricular, el análisis didáctico contribuye a estudiar y analizar propuestas educativas.

En esta investigación se construyó una propuesta didáctica para la enseñanza de la unidad de funciones. El diseño de esta unidad curricular estructurada formó parte de la propuesta y se ha planificado tomando en cuenta los lineamientos que plantean los autores antes citados sobre el análisis didáctico. En este sentido, el análisis didáctico desarrollado abordó tres ámbitos destacables de la Didáctica de la Matemática:

- El **Ámbito Curricular**: Al reflexionar sobre la estructura curricular de la asignatura Matemática I de los proyectos de ingenierías que oferta la UNEG actualmente.
- El **Ámbito Educativo**: Como estrategia metodológica con el uso de los organizadores del currículo (Modelización Matemática y Uso de las Tecnologías); siempre en la búsqueda de potenciar las competencias de

modelización matemática de los profesionales en formación y su conocimiento matemático sobre función.

- El **Ámbito Investigativo**: Como metodología de investigación en Didáctica de la Matemática, al pretender evaluar en este estudio el impacto que ha generado la aplicación de la propuesta didáctica construida por la investigadora y sus colaboradores.

Inicialmente, el análisis didáctico contribuyó en el buen manejo de los conceptos matemáticos abordados y para guiar la intencionalidad de la investigadora en función a la construcción de la propuesta didáctica en torno a la formación matemática sobre función de los ingenieros en formación, la profundización de las competencias de modelización matemática y el uso adecuado del software GeoGebra como herramienta interactiva.

En concreto, para desarrollar el análisis didáctico se realizó un análisis conceptual, de contenido, cognitivo, de instrucción y evaluativo como métodos de investigación consolidados en la investigación educativa.

Análisis Conceptual:

Estructura Conceptual de la Definición de Función Real de Variable Real

Este análisis muestra una síntesis de los conceptos y relaciones que se articulan e integran el tema de funciones reales de variable real correspondientes a la asignatura Matemática I de los proyectos de carreras de ingenierías que se ofertan en la UNEG. Para ello, se revisaron los Programas Analíticos de la asignatura Matemática I que se dicta en la UNEG, para los proyectos de Ingenierías (en Informática, Industrial, Forestal y Producción Animal); con el objeto justificar, identificar y delimitar la noción de la estructura conceptual, los sistemas de representación, las relaciones y propiedades del tema antes mencionado.

A continuación se presenta un gráfico que contiene la estructura y subestructura conceptual conformada en esta investigación. Esta clasificación muestra cómo fue categorizado el contenido de función para desarrollar el trabajo realizado mediante las tareas de modelización diseñadas intra y extra clases.

Gómez (2005), afirma que en la estructura conceptual pueden verse las relaciones concepto a concepto, viendo la estructura en donde se establece el concepto y la estructura matemática que forma. En la estructura conceptual se muestran los términos propios de esta unidad y las destrezas que los alumnos deberían adquirir a lo largo de la unidad.

Específicamente, los términos usados durante esta investigación fueron los siguientes: Relaciones binarias y sus gráficas, magnitudes, valor, variable independiente, variable dependiente, gráfica, tabla de valores, imagen, dominio, recorrido, puntos de corte, ejes, continuidad, discontinuidad, función creciente, función decreciente, máximo relativo, mínimo relativo, simetrías, función par, función impar, función periódica, período, tasa variación media. Funciones polinómicas: función constante, funciones lineales, funciones cuadráticas, funciones cúbicas, funciones de cuarto grado, de quinto grado, entre otras. Funciones racionales, función radical, función por partes, función valor absoluto, función parte entera, funciones definidas a trozos, funciones trascendentes: función exponencial, función logarítmica, trigonométricas y sus inversas, función inversa, pendiente, ordenada, origen, parábola, vértice, eje de simetría, asíntota vertical, asíntota horizontal, modelo real, modelo computacional, modelo matemático, problemas de aplicación de las funciones, uso del software GeoGebra en la modelización y simulación de fenómenos contextualizados (comandos que incluye el software, operadores, parámetros, deslizadores), operaciones con funciones, composición de funciones, traslación, unidad de medida y cambio de escala en gráficas.

Seguidamente, se abordará el tema de funciones reales de variable real tomando en cuenta una estructura organizacional que se diseñó, tomando algunas ideas del contenido sobre función que abordan algunos textos de cálculos y el programa que comprende el actual plan de la asignatura Matemática I de los proyectos de ingenierías en la UNEG. Esta estructura sirvió de orientación a la investigadora en la construcción de las tareas de modelización matemática propuestas a los estudiantes.

El diseño de la estructura organizacional del tema de función fue producto del análisis de contenido desarrollado a lo largo de esta investigación y consecuentemente se realizaran más adelante algunas sugerencias a ser incorporadas en el programa de la asignatura Matemática I en la UNEG de los proyectos de ingenierías, incluso a algunos textos de cálculo consultados sobre la temática de función.

La estructura organizacional de la unidad de funciones reales de variable real, se ha dispuesto por zonas. Cada zona representa un conjunto de contenidos. Por lo tanto, la estructura organizacional de la temática de funciones, se ha dispuesto como una familia de conjuntos, de la siguiente manera:

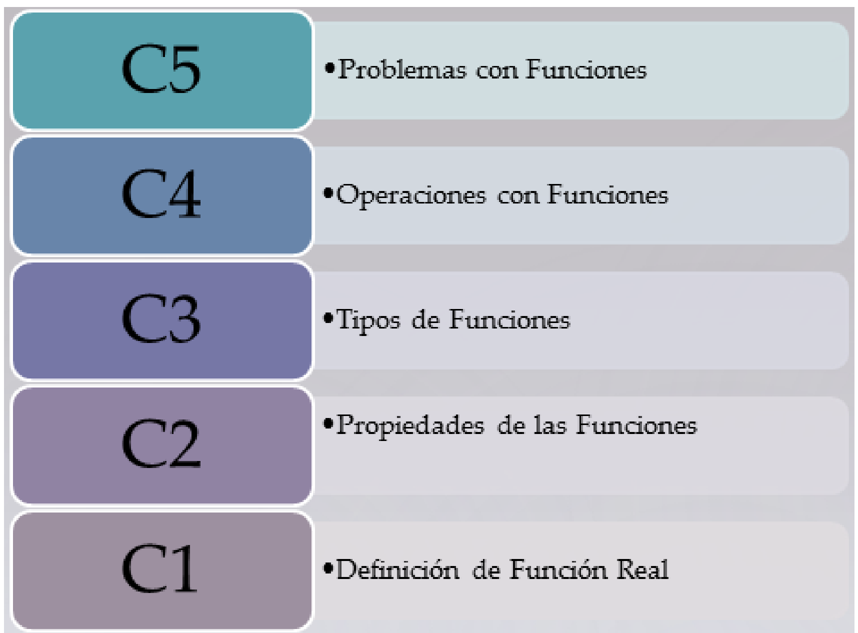


***Grafico 3.* Zonas de contenidos sobre funciones reales.**

Leyenda:

La zona uno, llamada conjunto C1 incluyó lo siguiente: la definición de función real de variable real y la prueba de la recta vertical.

La zona dos, llamada conjunto C2, comprendió: el dominio y el rango o recorrido de una función f, gráficas de una función f, las definiciones de: inyectividad, sobreyectividad, biyectividad, paridad e imparidad, periodicidad. Puntos de cortes con los ejes coordenados, valores máximos o mínimos relativos, simetrías, asíntotas, tabla de valores, función creciente, decreciente.

La zona tres, llamada conjunto C3 abarcó las funciones elementales: contiene las funciones polinómicas, racionales, irracionales, valor absoluto, parte entera, definidas a trozos o por partes, logarítmicas y exponenciales y trigonométricas. Gráficas de estas funciones e interpretación geométrica. Funciones paramétricas.

La zona cuatro, llamada conjunto C4, estuvo conformado por el álgebra de funciones, la composición de funciones, la definición de función inversa, la traslación de funciones y los cambios de éstas en las gráficas. Sistemas de representación. Modelado Matemático de Funciones. La graficación con computadora.

La zona cinco, llamada conjunto C5 consideró problemas que involucraron relaciones funcionales, bien sea: Dado el enunciado, dado un gráfico, presentada una representación del modelo real, entregados registros relativos al comportamiento de fenómenos; o inclusive, problemas que fueron investigados por los estudiantes en el ámbito de su posible futuro ambiente profesional. Tasa de variación. Media, magnitudes y valores. Variable dependiente e independiente. Visualización e interpretación de los efectos de los parámetros en algún software. Simulación de fenómenos que se representaron mediante una relación funcional.

En síntesis, se asume en esta estructura organizacional de contenido para esta unidad de funciones reales, como un constructo epistemológico, donde cada zona representa un conjunto (C1, C2, C3, C4 y C5) y cada conjunto contiene los elementos precisos a visualizar de este objeto matemático: funciones reales de variable real; aunque este ente matemático tenga sus propiedades intrínsecas que les son propias. Esta estructura organizacional de los contenidos sobre función se ha conformado con el fin de organizar en gavetas, la visualización de cada una de las definiciones matemáticas, caracterizaciones, tipos, operaciones y problemas del objeto matemático función; y sobre todo sintetizar, a la hora de realizar los respectivos análisis, la presentación de resultados y conclusiones sobre el contenido de funciones reales. Lo anterior, ha de representar en esta investigación todo un constructo epistémico, asumido como una estrategia metodológica para el fácil manejo del contenido de funciones reales.

Aproximación Histórico-Crítica

Según Díaz (2013), el análisis de la evolución histórica del concepto de función muestra que éste es un concepto muy complejo, y para llegar a la definición actual se tuvo que pasar por un proceso largo y laborioso. Este autor afirma que en el aspecto curricular el concepto de función es una definición transversal que se trabaja, tanto en los cursos de enseñanza secundaria como en los universitarios, donde con frecuencia se utiliza para modelar procesos físicos, químicos, sociales y de ingeniería, entre otros.

Las primeras relaciones funcionales aparecen en problemas de astronomía en un tratado del Libro I, en su capítulo 11 (Almagesto, según García (s/f)). Ptolomeo introduce la función seno con su tabla de cuerdas; no obstante, ni los trabajos de Ptolomeo ni los llevados a cabo por Apolonio dieron lugar a la idea de variable o de función. Sin embargo, en la antigüedad se llevaron a cabo estudios sobre diversos casos de dependencias entre cantidades de diferentes magnitudes; pero no se llegaron a aislar las nociones generales de cantidad variable y de función.

En este sentido, cualesquiera que hayan sido las causas y circunstancias que condujeron a las características de la ciencia antigua, el pensamiento matemático de la antigüedad no creó una noción general de cantidad variable o de una función (Youschkevitch 1976 en Díaz 2013, p. 40).

El autor antes citado afirma que en la Edad Media el estudio de la ciencia cayó en manos de los árabes. Sin embargo, en la idea de función, no se puede decir que hubiera un gran cambio, no avanzaron en el concepto de función, pese a que trabajaron con muchas funciones.

A partir del siglo XIII los estudios cuantitativos de los fenómenos de la naturaleza adquieren gran relevancia. En esta época aparecen conceptos fundamentales ligados a la idea de función: cantidad variable, velocidad instantánea o puntual y la aceleración. Es a partir de este siglo que aparecieron con notable regularidad tratados sobre proporciones. Estos trabajos equivalen a un álgebra de relaciones del tipo $y = kx^n$, donde n tiene un valor racional. Esta teoría de proporciones fue básica en todas las ciencias cuantitativas hasta la época de Newton (Boyer, 1946, en Díaz 2013, p. 9).

Por su parte, Boyer (1946) señala que Nicolás Oresme intentó dibujar también ciertas funciones para las cuales la tasa de cambio no era constante, las gráficas en estos casos eran líneas quebradas o curvilíneas. Este autor escribe que la latitud de formas representó una teoría primitiva de funciones, en la que ésta tenía que ver con la dependencia de una cantidad variable sobre otra. No obstante, en las representaciones de Oresme no se expresa la dependencia en el sentido actual. Oresme, la escuela de Paris y la escuela de Oxford del siglo XIV tuvieron gran influencia en Galileo y Descartes primero, y en Barrow, Newton y Leibnitz después.

Según Díaz (2013), la palabra "función" apareció por primera vez en los manuscritos de Leibniz, de Agosto de 1673 y la introdujo para designar un objeto geométrico asociado con una curva; es precisamente allí en el siglo XVII, que nace la geometría analítica y el cálculo infinitesimal, y por consiguiente el concepto de función.

Galileo en sus estudios sobre movimientos establece funciones como leyes entre magnitudes. Descartes, en 1637, escribe "La Géometrie", libro que marca el inicio de la geometría analítica, permite interpretar curvas y superficies a través de ecuaciones. Además, por primera vez se ve la idea de dependencia entre dos variables. Descartes y Fermat formalizaron los ejes de coordenadas, la ecuación de la recta y las ecuaciones de la circunferencia y las cónicas. Newton, entre otros, desarrolla las funciones como series infinitas de potencias a mitad del siglo XVII, lo que da lugar a poder representar analíticamente la mayoría de funciones estudiadas hasta entonces.

A partir del siglo XVIII, el análisis matemático toma mayor importancia y pierde su carácter geométrico y mecánico en favor de la aritmetización y el álgebra. Jean Bernoullli es el primero en dar una definición explícita de función como una expresión analítica en 1718, pero su notación no perduró. El mérito grande de Euler ha sido el de incluir expresamente las funciones implícitas además de las explícitas, siendo su notación la usada hasta nuestros días. Euler introduce el concepto de función, así como otros términos relacionados, al inicio de su "Introductio in Analysis Infinitorum" en 1748.

Según Guerrero (2017), en los trabajos de Fourier, Cauchy y Dirichlet durante el siglo XIX se consigue desarrollar del todo el concepto de función de una manera más amplia. Este mismo autor afirma que en 1829 Dirichlet llega a formular por primera vez el concepto moderno de función $y = f(x)$ de una variable independiente en un intervalo $a < x < b$.

Debates entre muchos matemáticos famosos, incluyendo a Fourier, Dirichlet, Cauchy, Riemann, Weirstrass, Lebesgue y Borel dieron ímpetu al continuo desarrollo histórico del concepto de función. Bourbaki, dio una formulación general de función como una regla de correspondencia entre el dominio y el rango, donde ambos conjuntos son arbitrarios.

Finalmente, la teoría de conjuntos supuso una gran generalización en el concepto de función. Díaz (2013), afirma que la discusión de cómo los matemáticos deben definir las funciones no ha cambiado significativamente desde el milenio pasado. Sin embargo, el tema no ha sido completamente resuelto.

Génesis Epistemológica

Algunos de los resultados de investigaciones sobre la noción de función, tales como Vinner, Tall, Dreyfus, Sfard, Dubinsky, Bakar, Even, conducen a determinar las “concepciones erróneas” que los estudiantes adquieren durante su aprendizaje y en general concluyen que: “El concepto de función es inherentemente difícil para los alumnos cualquiera que sea el método de enseñanza.”(Ruiz, 1993 en Díaz 2013, p 19).

A su vez, Marnyanski, Thomas, Bell, y Janvier, Markovits et. al, Eisenberg en Díaz, 2013; afirman que las investigaciones que tratan la noción de función, sus representaciones y componentes concluyen que: “Los estudiantes, hasta los de más alto nivel intelectual, se quedan en los niveles más bajos de comprensión de la noción de función” (p 20).

Según este autor, la variedad de concepciones erróneas y dificultades que se reportan en la literatura revelan las siguientes cuatro grandes áreas de problemas esenciales en el aprendizaje de las funciones: No considerar el dominio y el rango de las funciones; una tendencia por la regularidad; un enfoque puntual (en las gráficas);

y una separación entre el contexto gráfico y el algebraico.

En consecuencia, se tomaron en cuenta para la propuesta didáctica elaborada durante esta investigación, tales deficiencias señaladas por los autores antes referidos en cuanto a la comprensión del concepto de función por parte de los estudiantes, ya que existe en la literatura revisada un consenso general en relación sobre qué aspectos son cruciales para una profunda comprensión del concepto de función. Las áreas identificadas incluyen:

1. Interpretación de funciones representadas por gráficas (Ámbito Curricular).
2. Descripción de situaciones, fórmulas y tablas. (Ámbito Curricular).
3. Modelación de situaciones del mundo real. (Ámbito Investigativo).
4. Transferencia entre las múltiples representaciones de las funciones. (Ámbito Curricular e Investigativo).
5. Análisis de los efectos de cambio en los parámetros de las gráficas de las funciones. (Ámbito Investigativo).
6. Aplicación de la tecnología para representar las funciones. (Ámbito Educativo e Investigativo).

A las áreas anteriores se le adiciona en este estudio, las siguientes aristas que fueron consideradas a la hora de la construcción de la propuesta didáctica diseñada para la enseñanza de funciones a los futuros profesionales de la ingeniería:

7. Identificación de las características de cada uno de los tipos de funciones reales que se estudiaron (propiedades cualitativas). (Ámbito Curricular).
8. Resolución de problemas contextualizados (Ámbito Educativo e Investigativo).
9. Dificultades epistemológicas y cognitivas en torno al aprendizaje de la definición de función. (Ámbito Educativo).
10. Simulación de fenómenos que se pueden describir mediante relaciones funcionales. (Ámbito Investigativo).
11. Niveles de logros de las competencias de modelización matemática en el trabajo matemático desarrollado al usar el conocimiento sobre función real. (Ámbito Investigativo).

Los aspectos anteriores fueron considerados cuando se concebía la unidad didáctica que se diseñó sobre funciones reales. Ésta se construyó en base a las categorías que surgieron del análisis conceptual realizado. En este sentido, la evaluación de la implementación de la propuesta didáctica estuvo en función del estudio de la existencia de los términos y áreas que surgieron de esas categorías construidas a lo largo de la investigación y su relación entre ellos.

Análisis de Contenido

El análisis de contenido permitió la selección y organización de conceptos o focos de interés, de los sistemas de representación trabajados y el uso de la fenomenología; además de organizar el proceso de enseñanza de las funciones reales de variable real; ésta última estuvo orientada a partir de unas guías de instrucción que se entregaron en cada sesión de clases.

En este estudio, se estructuró el contenido de funciones en tres ámbitos en simultáneo: desde la matemática (Ámbito Curricular), su enseñanza (Ámbito Educativo) y la investigación en Didáctica (Ámbito Investigativo) durante el desarrollo de tres fases: a) de profundización; b) de diseño o toma de decisiones; y de actuación y evaluación.

A) Fase de Profundización: Esta fase comprendió el análisis de contenido.

El desarrollo de esta fase comprendió el examinar ampliamente el contenido matemático sobre función real, con la finalidad de describir la estructura matemática de este contenido, de modo que este análisis fue considerado a la hora del aprendizaje y la enseñanza en el aula.

Focos Conceptuales y sus Dimensiones

Inicialmente, se identificaron los focos que conformaron la estructura de la investigación, los cuales estuvieron en plena correspondencia con los objetivos del estudio. A su vez, estos focos guardan cierta relación con el plan programático de la asignatura Matemática I, los propósitos del perfil prospectivo de la UNEG para sus ingenieros egresados y los objetivos de la investigación. Estos son:

1) Formación Matemática del Ingeniero (F1).

2) Propuesta Didáctica (F2).

3) Modelización Matemática (F3).

4) Uso del Software GeoGebra (F4).

En cuanto a la subestructura quedó conformada de la siguiente manera en relación a cada uno de los focos respectivamente:

1.1) Conocimiento sobre Funciones Reales de variable Real (F1.1).

1.2) Uso de los Sistemas de Representación (F1.2).

1.3) Dificultades Matemáticas: Epistemológicas y Cognitivas (F1.3).

2.1) Niveles de logro de las competencias de modelización alcanzados durante el ejecútese del ciclo de modelización matemática (F2 .1).

3.1) Resolución de Problemas Contextualizados (F3.1).

3.2) Competencias de Modelización Matemática (F3.2).

4.1) Uso de los comandos y herramientas del software GeoGebra (F4.1).

4.2) Simulación del Fenómeno (F4.2).

De manera esquemática la estructura general de los focos, quedó de la manera siguiente:

Gráfico 4. **Esquema que presenta una estructura organizacional de los ámbitos de la investigación.**

A continuación, se presenta un esquema específico que contiene las dimensiones y subdimensiones generadas en este estudio:

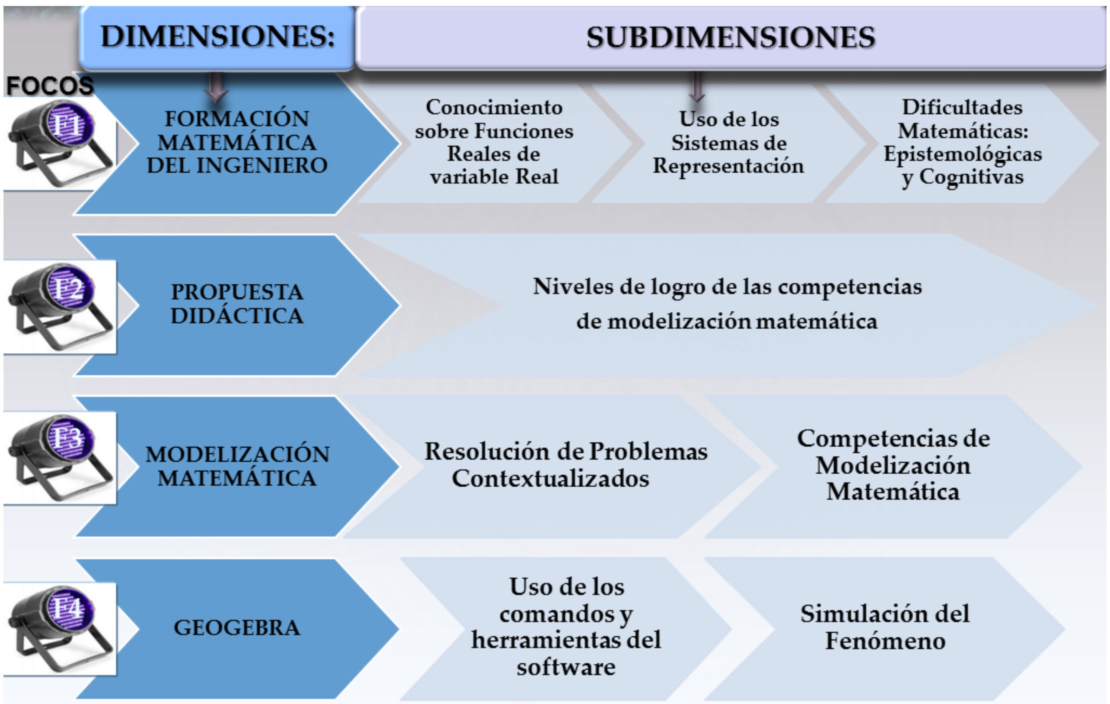


Gráfico 5. **Esquema que presenta una estructura organizacional de las dimensiones y subdimensiones de la investigación.**

A continuación se presenta al lector, el ciclo considerado por la docente investigadora, el cual orientó la propuesta de acción.

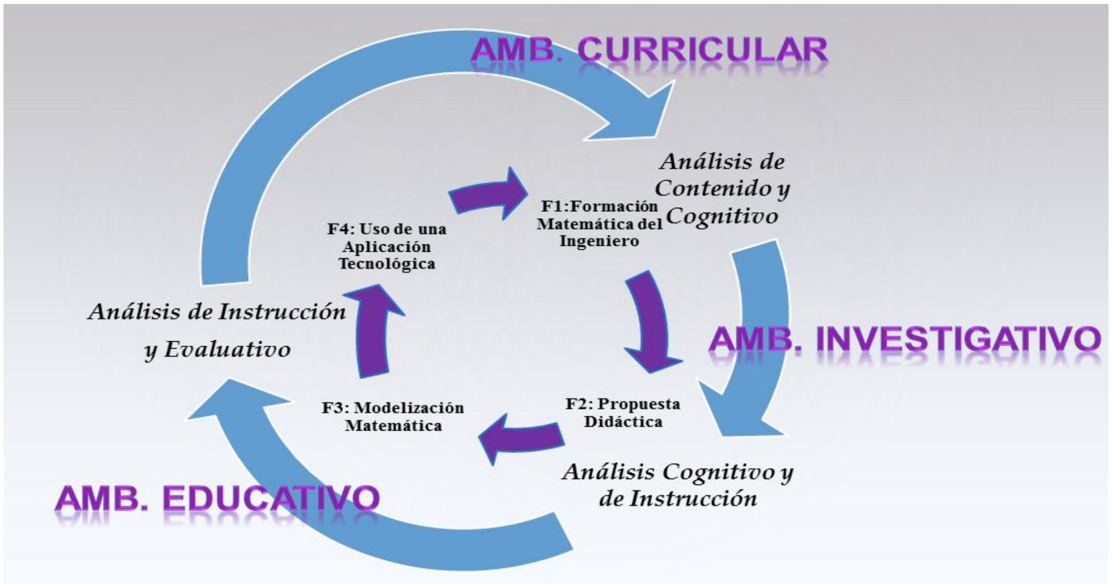


Gráfico 6. **Ciclo para accionar e implementar la propuesta didáctica.**

En base al ciclo anterior, se estableció una secuencia de trabajo en la búsqueda de alcanzar los objetivos de la investigación y en consecuencia, estudiar los focos en cada uno de los ámbitos considerados:

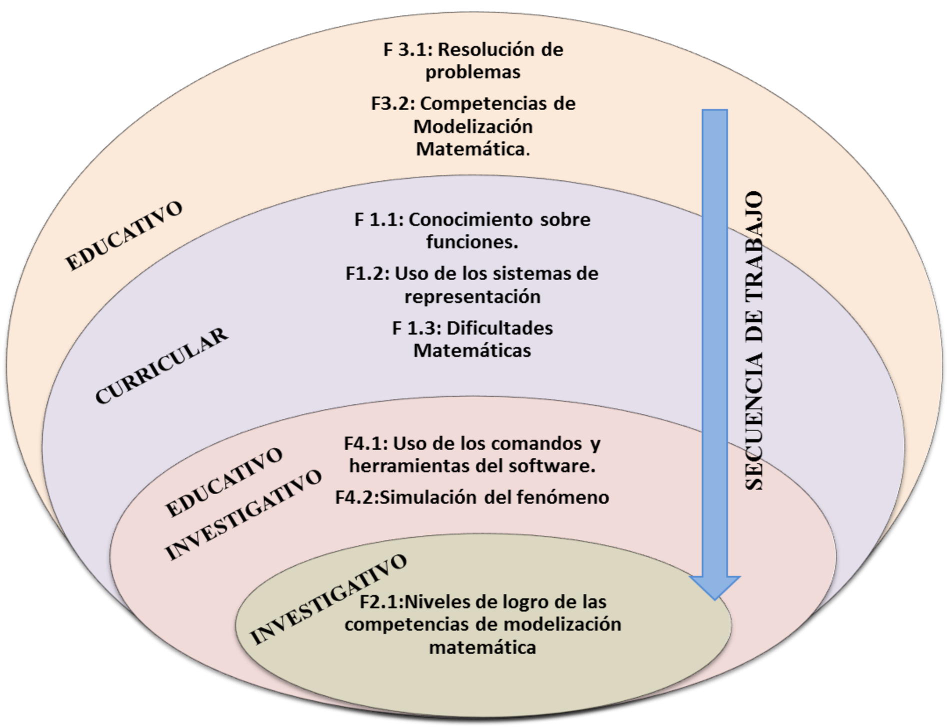


Gráfico 7. **Esquema de acción de las subdimensiones de los focos estudiados en cada ámbito.**

Toda vez, realizada está estructura o matriz que orientó cómo trabajar los focos de estudios en esta investigación, se pasó a reflexionar en qué medida el Programa de Matemática I de los proyectos de Ingeniería en la UNEG, sugiere éstos focos considerados en este estudio, pasando por los ámbitos y las dimensiones creadas, siempre en la búsqueda de alcanzar los objetivos propuestos.

De este modo, se ubica al lector mediante el siguiente cuadro en una escala de medición (Bueno, Regular, Deficiente); donde se ha establecido el nivel de alcance considerado por la investigadora en los programas de Matemática I de cada dimensión establecida.

Cuadro 3.

Niveles de alcance de los focos en el programa de Matemática I de los proyectos de ingenierías de la UNEG.

Focos	**Dimensiones**	**Bueno**	**Regular**	**Deficiente**
Modelización Matemática (F3)	Competencias de Modelización Matemática (F4.1).		X	
	Resolución de Problemas Contextualizados (F4.2).		X	
Formación Matemática del Ingeniero (F1)	Conocimiento Sobre Función (F3.1).	X		
	Uso de los Sistemas de Representación (F3.2).			X
	Dificultades Matemáticas: Epistemológicas y Cognitivas (F3.3).		X	
Uso del Software GeoGebra (F4)	Uso de los comandos y herramientas del software GeoGebra (F2.1).			X
	Simulación del Fenómeno (F2.2)			X
Propuesta Didáctica (F2)	Niveles de logro de las competencias de modelización alcanzados durante el ejecútese del ciclo de modelización matemática (F1.1).		X	

Las hipótesis que se manejaron en el estudio consistieron en:

Hipótesis (H1): la propuesta didáctica diseñada e implementada, para la enseñanza de funciones reales, debe contribuir a superar todos los aspectos o dimensiones que se han considerado como deficiente o regular inicialmente, de acuerdo al análisis realizado al Programa de Matemática I.

Hipótesis (H2): la propuesta didáctica diseñada e implementada, para la enseñanza de funciones reales, debe contribuir a mantener todos los aspectos o dimensiones que se han considerado como buenos inicialmente, de acuerdo al análisis realizado al Programa de Matemática I.

Hipótesis (H3): la propuesta didáctica debe suscitar a innovaciones en las problemáticas contextualizadas, que han de ser prolíferas para el futuro profesional de la ingeniería.

En definitiva, a partir de la implementación de la propuesta didáctica se midió el impacto de la misma en: la formación matemática del futuro ingeniero en torno a funciones, el nivel de desarrollo de las competencias de modelización matemática alcanzadas y el uso de la tecnología en el aula que le prepararán a aplicar fundamentos matemáticos en la resolución de problemas contextualizados que se le presenten en su ejercicio profesional.

Por otra parte en esta fase del ***análisis de contenido,*** se realizó una revisión del Currículo Básico Nacional (CBN) a objeto de ser considerado como parte de la experiencia previa qué los alumnos podrían saber sobre el tema de funciones. A su vez, se consultaron algunos libros de texto clásicos de Cálculo I con Geometría Analítica, que propone el programa de matemática I en sus referencias bibliográficas y otros que utilizan los docentes para los cursos básicos de Matemáticas Universitarias, a objeto de revisar el contenido que abordan sobre función real.

Entre muchos de los textos de Educación Media que tratan el tema de funciones reales se encuentran los intitulados:

- "Conciencia Matemática", de segundo año de bachillerato. Este libro de Duarte (2012), de la colección Bicentenario se usa como texto oficial dentro de los programas de Educación Media en Venezuela y desarrolla en sus capítulos 5, 6, 8 y

10 los contenidos de funciones lineales y polinómicas, mediante temas muy interesantes como lo son: el embarazo, el HIV y la población de Venezuela.

- "Naturaleza Matemática", de 4 año. Aquí, en el capítulo 3 de este libro de la Colección Bicentenario por Duarte (2012) se aborda el tema sobre análisis gráfico de funciones reales de una manera muy didáctica con un problema referido a las pistas de automovilismo. El aprendizaje y la enseñanza sobre funciones se enfocan a partir de un problema que aborda un fenómeno físico que ocurre en una pista, el cual relaciona velocidad, rapidez, distancia y tiempo de recorrido. A partir de este problema se trata de encontrar una función que aproxime la carrera de un auto de alto cilindraje, donde se relaciona la rapidez con los kilómetros recorridos y posteriormente se representa en términos geométricos esta relación funcional en un plano cartesiano.

En el texto referido anteriormente, el tema de funciones se vuelve a tratar en el capítulo 6, ahora para estudiar las funciones exponenciales y logarítmicas a través de los siguientes problemas: el crecimiento de la población mundial, el crecimiento de los bebés desde su nacimiento, el comportamiento de una población de bacterias y un modelo de crecimiento referido al salario mínimo en Venezuela a partir del año 2008.

Finalmente, en el capítulo 10 de este libro, se desarrolla el tema de las funciones trigonométricas, trabajando el proceso de modelización matemática, con un problema que trata el comportamiento de las mareas del lago de Maracaibo. En este capítulo, se construye una función trigonométrica, desde una tabla de mediciones procedentes de los registros de un mareógrafo, que tiene a su cargo la Corporación de Desarrollo del Estado Zulia, quien ha medido sistemáticamente el comportamiento de las mareas de este Lago, en un punto geográfico ubicado en Punta Palma, zona Norte de este lago.

A su vez, en este libro "Naturaleza Matemática", se estudiaron características principales de la función periódica seno, función que aproxima el comportamiento de las mareas, la cual encierra una relación entre la altura de la marea y el tiempo en que alcanza la medida correspondiente. Para finalizar este capítulo, se estudian más adelante, otros 5 funciones trigonométricas básicas; tales como la función: Coseno, Tangente, Cotangente, Secante y Cosecante.

Sistemas de representación

Se ha tomado en cuenta para el diseño de esta unidad didáctica sobre el tema de función real, la clasificación propuesta por Bejarano (2008), mediante el uso de los siguientes sistemas de representación: Pensamiento Matemático en su dimensión Numérica, Algebraica y Geométrica.

El pensamiento Matemático en su dimensión Numérica, comprende el uso y comunicación de conceptos, resultados y procedimientos numéricos asociados a la definición de función. Tales como: la definición de función vista como una sucesión de puntos que satisfacen la relación, una serie de registros o mediciones incorporados en una tabla de valores, la evaluación puntual de una función, entre otros. El pensamiento numérico incluye la generación del pensamiento secuencial.

El pensamiento Matemático en su dimensión Algebraica: es producto del uso y la comunicación de conceptos, relaciones y procedimientos en base a las propiedades algebraicas asociadas a la definición de función real. Por ejemplo: al trabajar las propiedades del álgebra de funciones; al manipular los simbólicos para representar la definición de función: f, x, y, (,),[,],Dom , =, ≤, ≥, ∞, −, +, ℝ; al caracterizar propiedades cualitativas o características de los tipos de funciones estudiados y representados de manera algebraica, incluso usando la vista algebraica del GeoGebra.

El pensamiento Matemático en su dimensión Geométrica, se ha desarrollado por el uso y la comunicación de conceptos, relaciones y procedimientos geométricos asociados a la definición de función real. Aquí, la representación de una función real es vista como una curva en el plano cartesiano, bien sea en medios concretos (papel, pizarra acrílica, un objeto en físico) o en medios audiovisuales (vista gráfica del GeoGebra, proyección del video beam).

La trasmisión de estas tres formas de pensamiento se ha evidenciado a lo largo del desarrollo de esta investigación, tanto de manera verbal como escrita, mediante un lenguaje formal y técnico, con el uso de herramientas y recursos según las exigencias, siguiendo las instrucciones dadas para el desarrollo de las demandas de tareas de modelización matemática que han sido propuestas durante cada sesión de clases ejecutada (Ver Capítulo VII).

Análisis Fenomenológico

Para Rico, Lupiáñez, Marín y Gómez (2008) en Rico (et. al) 2013, el análisis fenomenológico propone mostrar la vinculación de conceptos y estructuras matemáticas con ciertos fenómenos que están en su origen, y que los vinculan con el mundo natural, cultural, social y científico (p 149).

Por su parte, Lupiáñez (2013) puntualiza que su propósito final es identificar familias de fenómenos en diferentes contextos y describir cómo son modelizados por alguna subestructura de la estructura matemática original. Agrega que el análisis fenomenológico de una estructura matemática implica la identificación de tres aspectos relevantes, a saber: (a) las subestructuras correspondientes a esa estructura, (b) los fenómenos o contextos organizados por cada una de ellas y (c) la relación entre subestructuras y fenómenos.

La estructura estuvo conformada en este estudio por los focos establecidos (F1, F2, F3 y F4); mientras que la subestructura estuvo representada por las subdimensiones creadas (F1.1, F1.2, F1.3, F2.1, F2.2, F3.1. F3.2, F4.1) y la relación entre las subdimenciones y focos se estableció a lo largo de la investigación.

Las subestructuras declaradas anteriormente (F 1.1, F 1.2, F 1.3, F 2.1, F 2.2, F 3.1. F 3.2, F 4.1) se trabajaron, se estudiaron y se desarrollaron; mientras que las competencias de modelización matemática (F2.1), los conocimientos sobre función (F1.1); se ejecutaron y se potenciaron. A su vez, con la resolución de problemas contextualizado (F2.2) y el uso del software GeoGebra (F3.1) se desarrollaron y se promovió la simulación de fenómenos; se analizaron niveles de logros de competencias de modelización matemática (F4.1), mediante el estudio de cada fenómeno tratado.

Las distintas conexiones establecidas entre cada subestructura con la estructura conformaron proposiciones en el estudio a ser evidenciadas por la investigadora. Por ejemplo: La resolución de los problemas propuestos (F2.2) y la profundización simultánea de las competencias de modelización matemática (F2.1) permitieron el desarrollo completo del ciclo de modelización matemática (F2). Y consecuentemente, el establecimiento de los niveles de logro de las competencias de modelización matemática (F4.1), alcanzadas durante el ejecútese del ciclo.

La implementada la propuesta didáctica (F4), sirvió para fomentar el uso de los distintos sistemas de representación (F1.2) y para definir las funciones y sus características y a su vez, se realizó todo un análisis de las dificultades epistemológicas y cognitivas (F1.3) que presentaron los estudiantes.

El manejo de los comandos y herramientas del GeoGebra (F3.1), permitieron el uso de un software (F3) en el aula y por ende, la introducción del uso de las tecnologías de la información en la propuesta de enseñanza de las funciones (F4) para los futuros profesionales egresados de la UNEG, lo cual contribuyó a la consolidación de su formación matemática como ingenieros (F1) y en concreto, a profundizar sus conocimientos sobre funciones reales (F1.4).

Para la consolidación de los conocimientos sobre función se trataron relaciones funcionales que abordaban el comportamiento de fenómenos contextualizados, tal y como lo expresan Rico, Lupiáñez, Marín y Gómez (2008), en Rico (et. al) 2013, en sus apuntes sobre fenomenología: en nuestra vida podemos encontrar diversos fenómenos sociales, naturales, físicos que se pueden expresar como algo variable. En este sentido, existieron muchos ejemplos que se podrían mencionar relacionados, por ejemplo, con los procesos que transcurren en el tiempo, longitudes recorridas en trayectorias que describen móviles; cambios de temperatura, variaciones en el número de habitantes a consecuencia de la natalidad o mortalidad de una población, variación en costos de producción, consumo de rubros, entre otros.

En este sentido, las relaciones de dependencia e independencia se han considerado importantes en el análisis de contenido de este estudio y más tarde en el proceso de asimilación de los conocimientos sobre funciones. De esta manera, los estudiantes se situaron en el papel que jugaba cada variable presente en los fenómenos estudiados y podían discernir si estas relaciones representaban una función o no. Además, esta correspondencia entre variables les sirvió para pronosticar qué tan válido fueron los modelos matemáticos que se obtuvieron en el trascurrir del tiempo.

En cuanto a los fenómenos, existió gran variedad de situaciones que incluyeron correspondencia entre variables importantes, cuyo comportamiento podía ser aproximado mediante relaciones de funciones que definían modelos matemáticos y que sirvieron para el tratamiento de problemas sociales familiarizados con el mundo de la ingeniería. Además, se estimaron en esta investigación partiendo del análisis de los contenidos, problemas para que los estudiantes establecieran posibles vínculos entre el quehacer del futuro ingeniero y su formación matemática.

De esta manera, se propusieron en esta investigación problemas que posiblemente se podrían presentar en el ejercicio profesional del futuro ingeniero, tal y como lo propone el programa de Matemática I en su propósito general y referido en este estudio como parte del contenido programático (C5). Estos problemas estuvieron relacionados con fenómenos demográficos, sobre economía, otros en torno a temas ambientales en Venezuela. Tales como, el crecimiento de la población mundial y del país, las importaciones y exportaciones de algunos Estados en materia de rubros alimenticios y recursos minerales. Así como también, problemas sobre la contaminación ambiental que presentaban ciertas industrias básicas en la región Guayana, el crecimiento del río más grande del país en un período determinado, el proceso de construcción de piezas mecánicas en empresas de la zona.

En algunos casos se presentó al estudiante el modelo ya construido, con la idea que reflexionarán en torno a él, lo validarán y realizarán predicciones del fenómeno desde el modelo dado. En muchos otros, los estudiantes debían construir el modelo que representaba una aproximación al comportamiento del fenómeno estudiado, partiendo de algunos gráficos, de tablas de valores, de enunciados que describían la situación problema; incluso hubo demandas de tareas que exigían que los estudiantes investigaran la situación problema por su cuenta.

Los Fenómenos o Contextos Organizados

En lo referente a los fenómenos, la autora estudió varias situaciones de aprendizaje donde el tema de funciones reales tiene aplicabilidad, desde una óptica que proporciona el proceso de modelización matemática desde varias perspectivas: cognitiva, pedagógica, sociocrítica y educativa. Se hizo énfasis en la perspectiva sociocrítica, sin dejar de abordar las restantes. Los fenómenos referidos en el apartado anterior, se estudiaron bajo estas perspectivas de modelización matemática y pueden ser tratados en varias asignaturas del currículo de las ingenierías de la UNEG; tales como: ingeniería de métodos, física, matemática II, matemática III, ingeniería de materiales e ingeniería económica.

B) Fase de diseño o toma de decisiones:

Esta fase comprendió el análisis cognitivo y el análisis de instrucción

Análisis Cognitivo:

Siguiendo las ideas de Lupiáñez (2013), la investigadora tomó en cuenta en la planificación de la unidad didáctica diseñada, relativa al tema de funciones reales, los objetivos y el contenido de esta unidad curricular. Este análisis se realizó antes de la puesta en práctica de la unidad didáctica e intentó prever el comportamiento de los alumnos.

En virtud a ello, el ***análisis cognitivo*** que se desarrolló permitió organizar de manera sistemática las expectativas de aprendizaje, planificar esas posibles expectativas o capacidades que podían desarrollar los estudiantes al poner en evidencia sus experiencias en bachillerato y a posteriori, luego de la implementación de la propuesta (durante los tres momentos de aplicación: año 2016, 2017 y 2018), proyectar las posibles oportunidades de aprendizaje o contribuciones en los niveles de competencias de modelización matemática alcanzados (en el ejecútese de esas capacidades en desarrollo), cuando resolvían las situaciones problemas contextualizadas vinculadas al contenido de funciones reales.

A continuación se presenta una síntesis de cómo fue organizado el aprendizaje, esto incluyó las demandas cognitivas y las posibles limitaciones en el aprendizaje.

Relación de Inclusión de los Objetivos Específicos y los Contenidos Establecidos por Zonas en cada Ámbito:

A continuación se enumeran los objetivos específicos de la investigación y se establece una relación de inclusión de éstos con los contenidos presentes en cada zona de la estructura organizacional y los ámbitos donde se trabajaron. De esta manera se buscaron establecer relaciones entre la estructura de contenidos y los objetivos de la investigación para completar el análisis fenomenológico desarrollado en este estudio. Se listan los objetivos seguidamente:

1. Realizar el diseño y el análisis de **tareas de modelización matemática** para que los estudiantes **construyan relaciones funcionales** (aquí están presentes los contenidos: C1, C2, C3 y C4 en los ambientes: A1 y A2) y **simulen en GeoGebra fenómenos** en ingeniería que se **modelen mediante funciones reales** (presente el contenido de C5 en ambiente: A3).
2. Estudiar los **aportes a la formación matemática de futuros ingenieros** sobre **funciones reales**, al integrar los organizadores del currículo, **modelización matemática y uso del software dinámico GeoGebra**, luego del diseño e implementación de una **propuesta didáctica** (aquí se trabajaron los contenidos: C1, C2, C3, C4 y C5 en los ambientes: A1, A2 y A3).
3. Establecer **niveles de logros y su evolución** alcanzados por los estudiantes en cuanto a **competencias de modelización matemáticas y conocimiento sobre función**, ambos indicadores incluidos en los objetivos a proponer en cada **tarea de modelización** (aquí están presentes los contenidos: C1, C2, C3, C4 y C5 en los ambientes: A2 y A3).
4. Identificar las **dificultades epistemológicas y cognitivas** que presentará el estudiante en cuanto a la **resolución de problemas contextualizados, la comprensión de fenómenos y el uso de los sistemas de representación**. (presente el contenido de: C5 en el ambiente de A1).

En resumen, de alguna manera todos los contenidos sobre funciones reales presentes en cada zona de la estructura organizacional, se ha reflejado en los objetivos de la investigación. De esta manera, se puede afirmar que existió una cohesión interna entre ambos elementos de la investigación desde los tres ámbitos destacables de la Didáctica de la Matemática.

Demandas Cognitivas

Tomando en cuenta los objetivos y el contenido programático de la asignatura

Matemática I, de las carreras de ingenierías en la UNEG, la investigadora elaboró guías de instrucción para cada sesión de clases. La construcción de estas guías incluyó el diseño de estrategias metodológicas para la enseñanza y comprensión de las funciones reales, usando modelización matemática, donde se estudiaron relaciones funcionales que describían fenómenos contextualizados con apoyo del software GeoGebra, a partir de cada actividad programada.

A su vez, se redactaron los objetivos a desarrollar en cada sesión de clases, tomando en cuenta los objetivos y el contenido establecidos en el plan programático, se proyectó la metodología a utilizar, las expectativas de aprendizaje de los estudiantes y las estrategias de evaluación. Todo lo anterior, siempre diagnosticando estar en función a los propósitos de la investigación que se llevó a cabo.

Para un cierto tipo de fenomenología, los tipos de funciones elementales que sirvieron de modelo en las guías de instrucción durante el proceso de enseñanza de las funciones reales, se clasificaron en:

- Lineales (grado 1): fenómenos de proporcionalidad directa relacionados; por ejemplo, problemas que trataron la economía del país, en relación a las importaciones y exportaciones de ciertos rubros; problemas químicos que abordaron el porcentaje de concentración de materiales residuales en ciertas muestras; problemas ambientales que tenían que ver con la crecida del caudal del Río Orinoco (ubicado en territorio venezolano) en períodos con cierta irregularidad cada año.

- Cuadráticas (grado 2): cuando se acumulaban efectos lineales; por ejemplo, al construir el modelo que representaba el tendido del cableado que sostiene el puente Angostura, ubicado en Ciudad Bolívar, capital del Estado Bolívar.

- Irracionales: aquellos problemas que trabajaron ciertas cónicas; por ejemplo: al construir un modelo para representar una relación funcional que describía media circunferencia, la cual al girar sobre un eje coordenado forma un sólido de revolución que simulaba la construcción de una pieza mecánica que se construyó en una empresa básica de la zona llamada: Vhicoa.

- Exponencial o logarítmicas (funciones inversas): cuando ocurrían cambios vertiginosamente acelerados o desacelerados en el tiempo; por ejemplo: crecimientos demográficos, crecimiento de bacterias.

- Trigonométricas: aquellas donde se trataron movimientos oscilatorios periódicos; por ejemplo, oscilación del péndulo, comportamiento de las mareas o el movimiento de las aguas del río Orinoco en el Estado Bolívar.

- Funciones a trazos: aquellas que describían comportamientos muy particulares; por ejemplo, problemas de señales: de encendido y apagado de un sistema eléctrico; el problema de la neutralización del lodo rojo presente en una muestra de material de bauxita, que es un material residual producto del procesamiento de decantación que realiza la empresa “Ferrominera del Orinoco”, ubicada en el Estado Bolívar .

- De valor absoluto: aquellas que describían movimientos particulares; por ejemplo, de carreras de automóviles.

Es importante resaltar que la mayoría de los problemas abordados tuvieron que ver de alguna manera con la idiosincrasia del Estado Bolívar. En este sentido, los fenómenos estudiados trataron problemas contextualizados, que fueron seleccionados con el previo propósito de incentivar una actitud crítica en los estudiantes sobre éstos; además de crear posibilidades de garantías en cuanto al abordaje y el estudio de problemas similares a los que pudiera enfrentarse en otras asignaturas del currículo o tal vez, como futuro ingeniero más tarde en su mundo profesional.

En resumen, se trabajaron durante esta investigación fenómenos que involucraron los contenidos del programa de Matemática I de las carreras de ingenierías. Tales como, aquellos que describen los comportamientos de funciones polinómicas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y sus inversas entre otras (C3). Se estudiaron propiedades de los modelos a construir (C2); tales como: el dominio, el rango, las asíntotas (si existían), el dominio restringido de la función inicial para hallar su inversa, las traslaciones verticales y horizontales, las reflexiones con los ejes coordenados, la compresión o dilatación y amplitud de las curvas, incluso (C4) al cambiar los parámetros presentes en el modelo. Representaciones de funciones en varios sistemas de representación: el algebraico, el geométrico, el numérico o tabular (C4). Las formas canónicas de las funciones reales (C2 y C4). Diagramas de dispersión, ajuste de curvas (C1 y C2). Estudio de los parámetros y variables que involucraban los modelos construidos (C5).

Expectativas de Aprendizaje

A continuación se presenta la relación de similitud que existió entre el propósito del programa de Matemática I con el objetivo general que se planteó en la guía de instrucción que se diseñó, siempre en la búsqueda de alcanzar los objetivos de la investigación y el establecimiento de un entramado cónsono entre los objetivos de la investigación, los materiales usados y lo que establece el programa institucional de la asignatura:

El propósito del programa busca "contribuir a la formación profesional básica del Ingeniero, al prepararlo para aplicar fundamentos matemáticos en la resolución de problemas que se le presenten en su ejercicio profesional". Mientras que el objetivo de una de las guías de instrucción utilizada en esta investigación asume "estudiar funciones reales de variable real como modelos matemáticos, al resolver problemas asociados a la ingeniería, con apoyo de la tecnología".

En este orden de ideas, tanto el propósito del programa curricular como el objetivo de la guía de instrucción tienen la finalidad de alcanzar en los estudiantes conocimientos matemáticos al resolver problemas, donde éstos últimos se encuentren vinculados con el quehacer profesional del futuro ingeniero.

La guía de instrucción, es una material que orientó el desarrollo de las clases en todo momento; por lo cual la elaboración de la misma, contempló la planificación de un conjunto de actividades, llamadas capacidades que irían a desarrollar los estudiantes a la hora del ejecútese de cada problemática planteada.

Rico (2005), define las capacidades como competencias y las identifica con el proceso que es capaz de hacer el alumno con sus conocimientos y destrezas matemáticas. Inicialmente, estas competencias se diagnosticaron en los productos desarrollados por los estudiantes cuando resolvían sus tareas matemáticas para el año 2016. Más adelante, para la segunda aplicación (año 2017), la investigadora amplió su óptica y se habla de ahora en adelante de competencias de modelización matemática; estas competencias ahora más específicas, ya que se abre a un mundo de posibilidades al potenciar una diversidad de capacidades, que constituyen las competencias de modelización matemáticas, con una visión de carácter más concreta, al profundizar más en la praxis educativa, a través de un estudio más detallado y puntual sobre la resolución de problemáticas contextualizadas que trataron la construcción de funciones reales que aproximaban el comportamiento de las variables que intervenían en los fenómenos estudiados.

Se mencionan a continuación un diagnosticó que sugiere capacidades que fueron propuestas para ser desarrolladas por los estudiantes a partir de la guía de instrucción, cuando éstos resolvían sus tareas de modelización matemática. Estas capacidades se han traducido en competencias de modelización matemática que desarrollaron los estudiantes a la hora de resolver los problemas planteados. Estas competencias consistieron en:

CAP1: identificar si una relación entre variables es una función o no, a partir de la tabla de la gráfica.

CAP2: Representar una función estudiando sus propiedades: dominio, recorrido, intervalos de crecimiento y/o decrecimiento, extremos relativos, simetría y periodicidad, inyectividad, sobreyectividad y biyectividad.

CAP3: Modelar y analizar relaciones funcionales vinculadas a situaciones de la vida cotidiana.

CAP4: Interpretar sus gráficas de funciones o tablas de valores.

CAP5: Representar gráficas de funciones a partir del análisis de un enunciado, una tabla o relaciones algebraicas.

CAP6: Reconocer las propiedades características más importantes en una gráfica.

CAP7: Obtener el dominio de una función mediante su expresión algebraica, geométrica o numérica.

CAP8: Describir los intervalos de crecimiento de una función.

CAP9: Describir la periodicidad de una función.

CAP10: Calcular la tasa de variación media de una función en un intervalo.

CAP11: Resolver problemas, utilizando conocimientos sobre las funciones reales y desarrollando el ciclo de modelización matemática.

CAP12: Analizar las características de una función dada mediante su gráfica.

CAP13: Representar funciones en el GeoGebra.

CAP14: Ajustar los modelos de regresión más apropiados, de acuerdo a cada uno de los diagramas de dispersión construidos en el GeoGebra.

CAP15: Determinar la expresión de las funciones obtenidas (modelos matemáticos) en forma canónica.

CAP16: Señalar los parámetros existentes y expresar su significado en función del fenómeno estudiado.

CAP17: Interpretar de acuerdo al contexto del problema en estudio, los significados de las posibles transformaciones de los parámetros que intervienen en los modelos construidos, cuando éstos experimentan cambios.

CAP18: Simular fenómenos que vinculen relaciones funciones en el GeoGebra.

CAP19: Inferir comportamientos a partir de modelos obtenidos.

CAP20: Validar los modelos matemáticos construidos.

CAP21: Comparar críticamente los modelos construidos que representen fenómenos similares.

Estas competencias también fueron ampliadas en los resultados de la implementación de la propuesta didáctica para el año 2018. Finalmente, se diagnosticaron y evaluaron 56 competencias de modelización matemáticas (ver Cuadros 16, 17, 18 y 19), las cuales desarrollaron los estudiantes para resolver los problemas propuestos.

Competencias de modelización matemática consideradas en la investigación

Las competencias de modelización matemática alcanzadas por los estudiantes en sus producciones al dar respuesta a las tareas propuestas durante los años 2017 y 2018, fueron dándose en cada una de las fases del ciclo de modelización de Blum & Leiβ (2007). Estas consistieron en:

Nivel 1: INTERPRETATIVO: comprende la Fase I, donde se incluyó las siguientes competencias de modelización matemática:

CMM1) Competencia para identificar y estructurar situaciones problema.

CMM2) Competencia para entender y analizar el problema real.

CMM3) Competencia para interpretar el modelo en términos reales.

CMM4) Competencia para interpretar el modelo en términos del dominio del software GeoGebra.

CMM5) Competencia para interpretar el resultado en la situación real.

Nivel 2: ARGUMENTATIVO: comprende la Fase II y Fase III, donde se incluyó las siguientes competencias de modelización matemática:

CMM6) Competencia para crear un modelo matemático a partir de términos real.

CMM7) Competencia para trabajar con el modelo matemático.

CMM8) Competencias para la toma de decisiones en la elección de la mejor alternativa de solución.

CMM9) Competencia para comunicar el modelo y sus resultados.

CMM10) Competencia para usar un software y trabajar en él el modelo computacional.

CMM11) Competencia para determinar y manejar variables.

CMM12) Competencia para manipular las variables (parámetros) del modelo computacional.

CMM13) Competencia para usar lenguaje formal y técnico.

CMM14) Competencia para comparar alternativas de solución de la situación problema.

Nivel 3: PROPOSITIVO: comprende la Fase IV, donde se incluyó las siguientes competencias de modelización matemática:

CMM15) Competencia para validar los modelos obtenidos.

CMM16) Competencia para simular la situación problema mediante el GeoGebra.

CMM17) Competencias para predecir en base al modelo obtenido.

CMM18) Competencia para adaptar el modelo a nuevas situaciones.

CMM19) Competencias para realizar análisis sociocrítico de la situación problema.

Competencias del Programa Vs Fases propuestas en la Unidad Didáctica

A continuación, se listan las competencias genéricas que establece el plan programático de Matemática I y a su vez, se especifica, la fase a la cual se ha considerado estar asociada cada competencia genérica.

CG 1) Identificación, planteamiento y resolución de problemas a través de diferentes métodos. (Fase 1, 2 y 3).

CG 2) Capacidad crítica. (Fase 2 y 4).

CG 3) Comunicación escrita y verbal en su idioma nativo y en otro idioma (Fase 1,3).

CG 4) Comprensión, decodificación e interpretación del lenguaje formal y simbólico, para entender su relación con el lenguaje natural. (Fase 1, 2 y 3).

CG 5) Manejo de los recursos instrumentales y metodológicos de la investigación. (Fase 2, 3 y 4)

CG 6) Aplicación de las tecnologías de la información y la comunicación. (Fase 3).

Consecuentemente, se establece una relación entre las competencias genéricas que establece el plan programático y las competencias ubicadas en cada fase que comprende el proceso de modelización matemática seguido.

En forma esquemática se tiene:

Cuadro 4.

Competencias ubicadas por fases que comprende el proceso de modelización matemática.

Capacidad	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4	Subtotal
CG1	X	X	X		3
CG2	X	X	X	X	4
CG3		X	X	X	3
CG4	X	X	X	X	4
CG5	X	X	X	X	4
CG6	X		X	X	3
Subtotal	5	5	6	5	21

Leyenda: Competencias del Programa de Matemática I de las Carreras de Ingenierías en la UNEG (CG1, CG2,…, CG6) Vs sus Fases de la Investigación (Fase 1, 2, 3 y 4).

Las competencias del plan son exigidas para cualquier profesional universitario egresado de la UNEG, son validadas y comunes para todos los proyectos de carreras que se ofertan en esta casa de estudios universitarios, mientras que las competencias de modelización matemática son propuestas dentro de las fases del ciclo de modelización y agrupadas por niveles. En virtud a ello, las competencias genéricas (consideradas más generales) se han potenciado por transitividad cuando se alcanzan las competencias de modelización matemática (consideradas más específicas), con el trabajo exigido y ejecutado durante el desarrollo de cada fase.

Se presenta en el cuadro siguiente las competencias genéricas de los proyectos de carreras UNEG, con la distinción de asociarlas tanto a los niveles del proceso de modelización como a las competencias de modelización matemática establecidas para esta investigación.

Se trató de establecer el nivel donde los estudiantes podían trabajar las competencias genéricas referidas en el programa de la asignatura, en función de la ejecución de las capacidades de modelización desarrolladas, siempre con miras de potenciar las competencias de modelización matemática.

Cuadro 5.

Competencia de Modelización Matemática vs Capacidad establecidas en el Plan Programático.

	Competencia de Modelización Matemática			
Capacidad	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Subtotal
CG1	CMM1, CMM2, CMM3, CMM4	De CMM6 hasta CMM14	CMM15	14
CG2	CMM3, CMM4, CMM5	CMM8, CMM9, CMM13, CMM14	CMM15, CMM17,CMM18, CMM19.	11
CG3		CMM7, CMM9, CMM10, CMM13, CMM14	CMM15, CMM16, CMM18, CMM19	9
CG4	CMM3, CMM4	CMM6, CMM7, CMM10, CMM12, CMM13	CMM16, CMM17, CMM18, CMM19	11
CG5	De CMM1 hasta CMM5	De CMM6 hasta CMM14	De CMM15 hasta CMM19	18
CG6	CMM4	CMM10, CMM12	CMM16	4
Subtotal	15	34	19	68

Al analizar los cuadros anteriores, se puede afirmar que existe cierto equilibrio, en cuanto al número de competencias de modelización matemática diagnosticada por cada fase. Similarmente, el diseño construido en la búsqueda de potenciar las competencias de modelización matemática y consecuentemente, el trabajo de las competencias genéricas del programa de Matemática I, es completo, porque están presentes todas las competencias que abarca este programa institucional.

Dificultades

En el período de prácticas de laboratorio realizadas durante el desarrollo de este estudio, se pudo comprobar que los alumnos mostraban dificultades en la comprensión de ciertas nociones; tales como:

- D1: Recorrido.
- D2: Vértice de una parábola.
- D3: Si una relación es función o no.
- D4: Simetrías de las gráficas de f.
- D5: Definición de función creciente o decreciente en un intervalo.
- D6: Período de una función periódica.
- D7: Amplitud de curvas.

También se observó la dificultad de los alumnos para comprender razonamientos o procedimientos como:

-D8: Cortes de f con los ejes coordenados.
-D9: Puntos que satisfacen la relación funcional.
-D10: Hallar puntos relativos de f, de manera algebraica.
-D11: Hallar la inversa de una función algebraicamente.
-D12: Reconocer las tasas de cambios implícitas en los modelos construidos.

Todo lo anterior, lo comprueba y lo asegura el equipo de profesores que acompañó esta investigación a lo largo de las sesiones de clases que se dieron.

A su vez, se comparten las dificultades planteadas por García (2013), en cuanto a que la enseñanza de la matemática, basada en el álgebra, previa a los cursos de cálculos, no está relacionada con la realidad o el entorno del estudiante, así como con las necesidades propias de la ingeniería.

García (2013) afirma que: “La algebrización del cálculo y la aritmetización del álgebra han perdido de vista el origen del cálculo y su papel en la ingeniería, dejando de lado la importancia que para esta tiene el carácter representacional y semántico de las matemáticas, y su impacto en el quehacer de los ingenieros para la formulación de posibles explicaciones o manejos de los fenómenos que enfrentan” (p. 39).

En consecuencia, este accionar habitual y heredado que traen los estudiantes en su formación matemática a la educación universitaria, constituye una dificultad que limita la comprensión del cálculo y su aplicabilidad y por ende; particularmente, en la enseñanza y aprendizaje de las funciones reales, por el desconocimiento inducido y tal vez inconsciente, de cómo aprovechar los recursos que pueden ofrecer las funciones para hacer uso del conocimiento matemático en la búsqueda de alternativas de solución ante problemas contextualizados del mundo de la ingeniería.

Errores

Algunos errores, con respecto a la representación de las funciones, que se estimaban que ocurrieran según las ideas de Azcarate y Deulofeu (1990), y en efecto éstas ocurrieron durante las sesiones de clases:

- Graduar los ejes de manera errónea: la escala utilizada para el sistema de coordenadas creado, en algunos casos, no era la más adecuada de acuerdo a los datos iniciales. No obstante, el GeoGebra mediante el uso de los comandos “Aproximar o Alejar” y un click, permite variar de manera automática la escala; sin embargo, a la mayoría de los estudiantes les era difícil adecuar o modificar las ventanas de visualización en los ejes coordenados que contuviesen todos los datos suministrados de la relación (E1); la lectura de las unidades de las variables en juego representó otra dificultad y el cambio errado de estas unidades un error. (E2).
- Invertir el orden de coordenadas (E3).
- Errores al leer y representar coordenadas racionales (E3).
- Mezclen la idea de función con la de su expresión analítica (E4).

Limitaciones en el Aprendizaje y la Enseñanza de las Funciones Reales

Uno de los grandes retos de esta investigación, consistió en la implementación de la propuesta didáctica durante dos períodos intensivos de Matemática I (año 2016 y 2017). Estas aplicaciones implicaron mucha celeridad, tanto en el tiempo de maduración de los conocimientos matemáticos por parte de los estudiantes, de la metodología de trabajo, del manejo del software, como sobre todo del tiempo de respuesta de los mismos para realizar sus tareas de modelización propuesta.

El desarrollo de estos cursos vacacionales se estiman, generalmente, en un lapso de 5 semanas consecutivas; de esta manera se cubre igual número de horas académicas que se exige en un semestre regular, pero con mayor intensidad en los bloques de horarios establecidos durante toda la mañana: clases de lunes a jueves, de 7:00 a.m. a 12 m. y los viernes de 7:00 a.m. a 9:00 a.m. Para la aplicación de la propuesta didáctica, se utilizaron 4 semanas de estas 5, en un horario de 10:00 a.m. a 12:00 m de lunes a jueves y los viernes de 8:00 a.m. a 11:30 a.m. No obstante, cuando se requirió tiempo extra para atender dudas que manifestaban los estudiantes, se realizaron consultas fuera del horario de clases, previo y mutuo acuerdo con los estudiantes interesados y la profesora.

El proceso de enseñanza de las funciones para la investigadora, fue cuesta arriba en estos cursos vacacionales, ya que la información que no se pudo recabar durante el período que duró cada curso intensivo, no se pudo recolectar luego. Ya que generalmente, estos cursos concentran, estudiantes de varios proyectos de carreras, lo que no ocurre durante un semestre regular, lo cual influye negativamente en los niveles de comunicación, ya que los estudiantes no se encuentran ubicados en una sola sede de la Universidad. Por esta razón, no se pudo realizar una caracterización profunda de las unidades de análisis y se decidió trabajar con todos los estudiantes que cursaban la materia.

Para el período 2017, los estudiantes no entregaron tareas manuales en físico; sólo las realizadas con el software y sus disertaciones, a diferencia de las restantes aplicaciones. Esto fue consecuencia, precisamente, de las exigencias de tiempos mínimos a los que se reduce los intensivos, tal y como están concebidos. Sin embargo, estas limitaciones en los tiempos de respuestas fueron subsanadas durante la aplicación del año 2018, la cual fue aplicada en un semestre regular.

En cuanto a las dificultades cognitivas que mostraron los estudiantes, se pueden afirmar las siguientes:

A una cantidad importante de estudiantes (50% de los estudiantes observados) les costaba el intercambio de ideas, porque no dominaban inicialmente mucha terminología y definiciones previas que involucran el tema de funciones. Por ejemplo, el signo de igualdad lo cambiaron por el de equivalencia o el de implicación. No dominan el concepto de relación, los conjuntos reales, entre otros.

El 100% de los estudiantes no poseían una cultura de aprendizaje colaborativo para lograr metas comunes, lo cual generó obstáculos de tipo cognitivo, por la naturaleza de los conocimientos previos errados que manejaban, lo que influyó en la construcción de los nuevos. En este sentido, el intercambio de saberes para lograr un consenso en sus respuestas, fue una ardua labor.

Los estudiantes se familiarizaron rápido con el uso del software, ya que es de fácil manejo. Sin embargo, este software era nuevo para ellos. En consecuencia, se dio una fase de experimentación muy genuina en sus propósitos iniciales. Luego, se concretaron tareas más precisas con objetivos orientados netamente hacia la profundización de la investigación.

Otro de las imprecisiones que ocurrió con el uso del software, consistió en que durante las sesiones realizadas en el laboratorio para el período correspondiente al año 2017, se usaba la versión 5 del programa bajo Linux, mientras que cuando los estudiantes iban a trabajar el programa fuera del aula usaban otra versión, ahora bajo Windows. Lo que traía confusiones en los estudiantes en relación, por ejemplo, a la ubicación de algunos comandos, herramientas del menú, procedimientos, secuencias de pasos, entre otros.

A la mayoría de los estudiantes les fue cuesta arriba lograr la simulación de los fenómenos contextualizados estudiados. Ellos no estaban familiarizados con el hecho de construir relaciones y mucho menos de trabajar procesos para recrear realidades de comportamiento de fenómenos. Una gran mayoría de estudiantes participantes del estudio, no relacionaban cómo afectaba la variación de la variable independiente a la dependiente, con el significado de lo que representaba cada variable. En principio, los estudiantes sólo trabajaron relaciones funcionales para obtener resultados de ejercicios: hacer evaluaciones de funciones a partir del modelo construido, realizar despejes para hallar algún dato.

Se pudo observar que la mayoría de los estudiantes (alrededor de 80%) tenían pocos hábitos para redactar por escrito, usando un lenguaje formal y técnico, las conclusiones obtenidas al resolver los problemas planteados. Lo cual se da en menor proporción a la hora de expresar estos resultados de manera verbal (de cada 3 estudiantes por lo menos 1, se expresó usando un lenguaje adecuado).

Análisis de Instrucción

Este análisis refleja los materiales y recursos que se han utilizado a lo largo de esta investigación; así como también cómo fue llevada la gestión educativa en el aula de clases.

Según Gómez (2005), el resultado de este análisis de instrucción tiene la finalidad de localizar y describir actividades que se puedan incluir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los alumnos.

Gestión de Aula y las Unidades de Análisis

Se presenta en el desarrollo de este análisis el diseño de la unidad didáctica; cómo fue la gestión de aula en el estudio: en cuanto al Currículo (A1), lo Educativo (A2) y lo Investigativo (A3). En este sentido, se vinculan los objetivos del plan programático de la asignatura Matemática I (O1), el propósito general del ingeniero egresado de la UNEG, en base a su perfil como profesional, que tiene que ver con su formación integral (O2) y los objetivos de la investigación (O3), los cuales están en correspondencia directa con los mencionados anteriormente para accionar la gestión de aula.

Inicialmente, se indagaron aspectos teóricos relacionados con las competencias de modelización matemática planteadas por Houston y Jiang *(2003)*, Maaß (2006), Blum

& Leiβ (2007) (O2), competencias que se buscaron potenciar desde las tareas de modelización propuestas a los estudiantes (O3).

Posteriormente, en función de los fines de la presente investigación (O3), se estudiaron competencias de modelización matemática (O2) que se visualizaron dentro de las observaciones y evaluaciones que realizaron los profesores involucrados, a las producciones de los estudiantes; cuyos resultados fueron reforzados por los registros que se recolectaron mediante la guía de observación aplicada, las entrevistas y los cuestionarios que llenaron estos docentes (O3) para las últimas dos aplicaciones de la propuesta didáctica que se ejecutaron.

A su vez, se investigaron y estudiaron situaciones problemas que involucraron el contenido de funciones reales de variable real (O1), desde fenómenos autóctonos de la región vinculados al mundo de la ingeniería (O3). Estos problemas fueron resueltos desarrollando una metodología centrada en la modelización matemática (O3), como estrategia didáctica y con apoyo de las tecnologías de manera colectiva; específicamente con el uso del software GeoGebra.

Para esta fase se realizó el primer acercamiento de la investigadora del presente estudio con las unidades de observación y con el docente (D1) que tenía a cargo el curso donde se implementó la propuesta didáctica por vez primera: Agosto 2016.

Durante el primer intercambio se motivó, tanto a los alumnos como al docente, para su participación en la investigación. Se dio a conocer la forma de trabajo grupal y colaborativo (A3), el tema a desarrollar (A1), su propósito (A3), los materiales a entregar y los recursos que se disponían para el momento (A3), las sesiones prácticas en el laboratorio de computación (A3), las estrategias de evaluación (A3) y el tiempo estimado para desarrollar todo lo planificado (A3). Todo lo anterior, se informó a objeto de familiarizar a todos con la dinámica que se seguiría durante el desarrollo de cada sección de clases; además de dar a conocer el software GeoGebra, su uso y algunas aplicaciones (A3).

Esta primera experiencia se desarrolló durante los meses de Agosto y Septiembre del año 2016 y constó de 8 sesiones de clases correspondientes al período de curso intensivo 2016 (semestre III-2016). Este grupo de estudiantes estuvo conformado por

13 estudiantes pertenecientes a los proyectos de carreras de ingeniería industrial e ingeniería en informática, quienes asistieron al salón de clases habitual y al laboratorio de computación básica en horarios extra clases.

Los instrumentos que sirvieron para evaluar a los estudiantes fueron los trabajos que entregaron en físico y sus trabajos virtuales en el software GeoGebra. Para este primer experimento de enseñanza, se contó con una videograbación de una de las seis clases que se desarrollaron en el laboratorio de computación y unos registros fotográficos de las clases impartidas.

La segunda aplicación de la propuesta didáctica se realizó durante los meses de Septiembre y Octubre del año 2017 y correspondió al período intensivo, semestre III-2017. Se repitió la experiencia tratando de desarrollar contenidos sobre función y algunas competencias de modelización que no se lograron obtener para la primera oportunidad en el producto de las tareas propuestas; así como también, faltó implementar algunos instrumentos de evaluación que se estimaban aplicar a los docentes involucrados: la guía de observación, el cuestionario y la entrevista.

Para esta segunda oportunidad, las unidades de análisis fueron 15 estudiantes que pertenecían a los proyectos ingeniería en informática, ingeniería forestal e ingeniería en producción animal; donde se evaluaron sólo sus producciones virtuales en el software GeoGebra y la exposición de sus tareas grupales, ya que se logró recolectar las tareas de modelización en físico.

Sin embargo, se contó con tres videograbaciones que registraron cortos períodos de las clases desarrolladas en el laboratorio de computación y unos registros fotográficos de las clases impartidas, tanto en el aula como en el laboratorio de computación.

La tercera aplicación se ejecuta para el semestre regular III-2018, que comprendió los meses de Octubre y Noviembre del año 2018. Aquí, se consolidaron las competencias antes alcanzadas y surgieron nuevas al completar el ciclo de modelización matemática planteado por Maaß (2006) y Blum & Leiβ (2007), cuando los estudiantes resolvían problemas contextualizados, tanto en el aula de clases, en el laboratorio de computación y fuera del recinto universitario.

El grupo que conformó las unidades de análisis estuvo conformado por 13 estudiantes pertenecientes al proyecto de carrera de ingeniería en informática. Para esta oportunidad se logró aplicar la totalidad de instrumentos diseñados, ya validados por los expertos para ese momento. Se realizaron dos videograbaciones de las sesiones de trabajo en el laboratorio de computación, por lo que se contó tanto con registros fílmicos como fotográficos para realizar los análisis respectivos. Se evaluó las producciones de los estudiantes, la exposición de sus tareas grupales, los trabajos en físico que entregaron y los virtuales en el software GeoGebra.

Específicamente, se aplicó el diseño de experimento en tres momentos:

- Para el período académico intensivo 2016-II: durante 4 semanas entre los meses de Agosto y Septiembre. Específicamente, se dieron 8 sesiones en el aula de 90 minutos cada clase y 4 en el laboratorio de 135 minutos cada encuentro de trabajo.
- Durante el período académico intensivo 2017-II: durante 4 semanas entre los meses de Agosto y Septiembre. Específicamente, se dieron 10 sesiones de clases, todas en el laboratorio de computación con una duración aproximada de 120 minutos cada encuentro.
- En el segundo semestre del año 2018: durante 6 semanas entre los meses de Octubre y Noviembre. Aquí se desarrollaron 2 encuentros por semana: el primer encuentro de la semana se desarrolló en el aula de clases con una duración de 90 minutos y el otro en el laboratorio con un tiempo estimado de 180 minutos aproximadamente, por cada sesión de trabajo.

Unidad Didáctica

La propuesta didáctica se aplicó para 3 momentos, a objeto de ir perfeccionando progresivamente la propuesta de enseñanza, cuya naturaleza misma, bajo los experimentos de enseñanza, lo ameritaba. Es decir, la investigación se basó en un reacomodo continuo de las formas de enseñar funciones durante tres años consecutivos, con el acompañamiento y la contribución permanente de 4 profesores más la investigadora. Para los respectivos análisis, los docentes participantes se designaron como: Docente 1, 2 y 3 investigadores acompañantes para la aplicación realizada para el año 2016), Docente 1, 2, y 4 (investigadores acompañantes para la aplicación realizada para el año 2017) y finalmente, Docente 1, 2, 3 y 5 (investigadores acompañantes para la aplicación realizada para el año 2018).

Continuando con el desarrollo de las expectativas de aprendizaje en este análisis cognitivo, se muestran al lector las relaciones propuestas por la investigadora, donde se vinculan los objetivos del trabajo de investigación con el propósito de la unidad curricular institucionalmente establecida en el programa de la asignatura Matemática I. Las perspectivas de la investigación en función a sus objetivos y tomando en cuenta lo contemplado en el propósito de la asignatura, es la siguiente como producto del análisis de instrucción seguido:

Para cumplir con el propósito de la asignatura Matemática I, según el plan programático, el estudiante debe aplicar "fundamentos matemáticos en la resolución de problemas que se presentan en su ejercicio profesional", entonces para lograr esos fundamentos matemáticos el futuro ingeniero debe familiarizarse con técnicas metodológicas (que han formado parte de la propuesta didáctica estudiada (F3 y F4)). Estas técnicas, llamadas organizadores del currículo, coadyuvan en la resolución de problemas a los cuales se tienen que enfrentar éstos profesionales en formación y como resolutores de problemas deben valerse, en simultáneo, de los conocimientos matemáticos que poseen y que construyen en sus prácticas educativas.

En esta investigación se ha trabajado con el Uso del Software GeoGebra (F4) y la aplicación de la Modelización Matemática (F3). El Uso del Software (F4) se incorporó para proporcionar en los estudiantes información sobre el manejo de herramientas y recursos tecnológicos que complementen el hecho de propiciar en ellos una formación matemática (F1) cónsona con los grandes retos tecnológicos que tendrán como futuros ingenieros o resolutores de problemas, que constituye la esencia de su accionar como ingenieros y más en estos tiempos vertiginosos donde la tecnología nos invade todos los espacios.

En simultáneo durante la investigación, se implementó la Modelización Matemática (F3), con el propósito principal de enmarcar este estudio en la búsqueda continua de regularizar el desarrollo de procesos, procedimientos y competencias de modelización matemática cuando los ingenieros en formación diseñen; por ejemplo, alternativas de respuestas ante las situaciones conflictivas en contexto que se les presenten a lo largo de su carrera y más tarde en su mundo laboral, tal y como lo exige su perfil profesional.

En este sentido, enfocados en una educación prospectiva: los estudiantes deberían habituarse al hecho de potenciar las competencias de modelización matemática, cuando construyen modelos que aproximen comportamientos de fenómenos contextualizados; o en sus efectos, al simular realidades de su entorno a medio y largo plazo de los futuros programables y posibles; competencias tan necesarias para abordar las exigencias de la sociedad en su conjunto como para su accionar cotidiano.

Explícitamente, "la formación profesional básica del Ingeniero" que refiere el programa de Matemática I se ha considerado, dentro de los análisis prospectivos que surgieron en este estudio, como parte de la Formación Matemática (F1) de estos egresados y ambas han de servir como base para enfrentar los retos sociales que tendrán estos profesionales de la ingeniería. En este sentido, la Formación Matemática del ingeniero (F1), constituyó el primer foco de estudio en esta investigación, como parte integral de la formación básica del ingeniero que propone el programa de la asignatura Matemática I en los proyectos de ingeniería de la UNEG.

Caracterización de las Guías de Instrucción Contentivas de las Tareas de Modelización Propuestas

Este material de instrucción fue elaborado por la docente investigadora (ver Anexo G), tomando en cuenta lo que sostiene la investigación de diseño, la cual requiere siempre de un material instruccional, donde exista una secuencia bien definida, con la idea de una retroalimentación constante y consecuentemente, un perfeccionamiento continuo de cada próxima sesión de trabajo, luego de la intervención del grupo de profesionales que acompañaban y evaluaban la praxis educativa una vez terminada.

La estructura de las 10 guías de instrucción fue la siguiente, incorporando en cada sesión de trabajo nuevo contenido sobre función real (con la finalidad de abarcar los 33 contenidos asumidos en las zonas); además de ir progresivamente adicionando los cambios sugeridos por el grupo interventor de cada sesión de clase anterior:

1) Identificación institucional donde se estaba aplicando el instrumento.
2) Identificación del nivel educativo.
3) Protocolo de instrucción: Bienvenida y motivación. Repaso de la sesión anterior. Objetivos de la sesión de clases y su importancia. Presentación del problema matemático contextualizado propuesto.
4) Desarrollo de la Modelización Matemática como estrategia metodológica, según las ideas de Houston & Qi-Jiang (2013) y Rico (2005); declarando para ello, las exigencias de las**:**

Demandas de Tareas Cognitivas y de Contenido: Se propusieron tareas de reproducción, toda vez que la investigadora concluyera el análisis de la estructura conceptual del tema y de la organización de los aprendizajes sugeridos. Se abordó las siguientes interrogantes: cuáles contenidos considerar, secuencia de abordaje de los mismos, cómo enseñarlos, cómo era posible que aprendieran los estudiantes. La planificación de este tipo de tareas, fue mediante el uso de la Modelización Cognitiva, aquella donde se previeron los posibles procesos cognitivos que desarrollarían los estudiantes para la resolución de estas tareas; procesos que constituirían las competencias de modelización matemática.

Demanda de Tareas de Instrucción: Para ello, se diseñaron tareas de conexión, aquellas que relacionaban conceptos. Estas tareas surgen, toda vez que la investigadora reflexionara sobre el diseño de la propuesta de investigación: cuál metodología implementar, cómo relacionar los conceptos sobre función al potenciar las competencias de modelización matemática y la formación matemática del futuro ingeniero, incorporando la tecnología. Aquí, se hizo énfasis en la perspectiva de Modelación Educativa, con fines pedagógicos se planificó el desarrollo de procesos y la consolidación del concepto de función.

Demanda de Tareas de Actuación: Tareas de Reflexión. Estas tareas surgen, toda vez que la investigadora reflexionara sobre el análisis del rediseño de la propuesta didáctica de la investigación: cómo mejorar la propuesta didáctica, cómo lograr alcanzar en los estudiantes procesos intrínsecos al desarrollo de una modelización crítica. Se priorizó este tipo de Modelización, donde las reglas de la matemática y otras ciencias, que sirvieron de complemento para lograr la resolución de los problemas propuestos y la simulación de los mismos, fueron examinadas. A su vez, se trabajó la Modelización Realista, aquella prevista con fines pragmáticos y utilitarios, mediante la cual se resolverían problemas contextualizados y se trabajarían una vez más, las competencias de modelización matemática.

5) Simulación del modelo construido en Geogebra que estimará el comportamiento del fenómeno estudiado.
6) Transformación de los parámetros que intervenían en el modelo.
7) Validación e interpretación del modelo alcanzado.
8) Diversificación del modelo matemático logrado a otros contextos.
9) Evaluación del modelo. Estudio de las posibles limitaciones del modelo en función de su contextualización.

La información obtenida en el análisis de contenido y el análisis cognitivo permitió elaborar la planificación de las sesiones de clases, la estrategia de evaluación, de igual forma sirvió de base para diseñar la guía de observación, los cuestionarios y las entrevistas aplicadas.

Relación entre el propósito del programa curricular de la asignatura Matemática I y los objetivos de la guía de instrucción diseñada en la investigación:

El programa contempla la aplicación de fundamentos matemáticos en la resolución de problemas que se podrían presentar en el ejercicio profesional del ingeniero; este aspecto fue considerado en la guía de instrucción que orientó cada clase, a partir de la resolución de problemas matemáticos contextualizados, cuando se desarrollaba un trabajo matemático en los mundos extra e intramatemático que promovía el ciclo de modelización matemática; además del uso de la tecnología, para potenciar en conjunto, competencias de modelización matemática que prepare al futuro ingeniero para sus desafíos profesionales.

En cuanto al contenido curricular, el programa propone el análisis del dominio, rango y las gráficas de funciones de variable real y sus inversas. Mientras que en el diseño de las guías de instrucción utilizadas en clases durante la investigación, también se ha propuesto el análisis de esos mismos contenidos, incluyendo otros ya referidos en apartados anteriores. (Ver anexo G: Guía de instrucción).

Estrategias Didácticas y Procedimientos

En cuanto a las estrategias didácticas estuvo concebida en ambos instrumentos, como un conjunto de acciones u operaciones que se planificaron, ejecutaron, controlaron, evaluaron y perfeccionaron para permitir a los estudiantes, de manera individual y luego grupal, la apropiación consciente de conocimientos y habilidades y el desarrollo de las competencias de la unidad curricular, contando siempre con la guía, coordinación y orientación de los profesores involucrados en el estudio.

Siguiendo el programa oficial de Matemática I de la UNEG, la estrategia didáctica se instrumentó en tres momentos (el programa abarca los 3 primeros y se adicionan dos más a la propuesta didáctica de la investigación). Estos son:

1. Establecimiento de las condiciones de realización de la tarea y el modelo de acciones a ejecutar: los alumnos y la profesora reflexionan sobre el conjunto de condiciones concretas y necesarias para la construcción correcta y racional de las posibles secuencias (acciones en clase) que el estudiante (o grupo) debe cumplir en el proceso de apropiación del contenido matemático, sobre la base del cronograma de las actividades y su relación histórica y lógica con la estructura de las matemáticas.
2. Ejecución de la actividad: los alumnos, en forma individual y luego grupal, realizan acciones u operaciones sobre la base de la tarea. Luego, la presentan y explican para permitir en el grupo de clase el debate, la reflexión, el reanálisis, el control, la valoración, la evaluación, entre otros aspectos, que promuevan la autonomía, la independencia, la asimilación y la toma de conciencia, con significado y sentido, acerca del proceso de apropiación del qué, cómo y para qué

del contenido matemático. La docente, oportunamente, guía, orienta, coordina, controla, aclara, esclarece, explica, da ayuda y evalúa el nivel de logro de las competencias. De ser necesario, el docente ajusta, complementa o rectifica el proceso de enseñanza, con el objeto de garantizar la ejecución correcta de la acción por parte del estudiante-grupo.

3. Reconstrucción retrospectiva y proyección: los alumnos y la profesora concluyen con significado y sentido (en cada clase) el proceso histórico-lógico vivido de elaboración del qué del contenido matemático de manera precisa, señalando los aspectos esenciales y formales del tema tratado. La profesora, en función del cronograma de las actividades, recomienda (orienta) a los estudiantes el conjunto de actividades previas a la siguiente clase: estudio de los contenidos temáticos a partir de las referencias bibliográficas seleccionadas, y/o confección (diseño, elaboración) de modelos y algoritmos que permitan comprender el significado de las definiciones u operaciones del cálculo. De igual manera, informa acerca de los nuevos ejercicios y problemas propuestos, para afianzar el proceso de aprendizaje. De surgir dudas, dificultades u obstáculos, los estudiantes acuden a la preparaduría o tutoría para la correcta realización de los mismos.
4. Los alumnos van al laboratorio de computación de manera de incorporar un recurso tecnológico en la resolución de los problemas contextualizados propuestos. En la propuesta en particular, se usó el GeoGebra, como un software dinámico para trabajar en las Pc de manera grupal y luego generar el debate colectivo.
5. A su vez, se intentó con el proceso de simulación recrear realidades de fenómenos autóctonos que vincularon un trabajo matemático extra con algunas relaciones funcionales básicas; además, de propiciar el pensamiento crítico mediante la concientización de la conservación del medio ambiente, del conocimiento de algunos problemas de la región que afectan a los ciudadanos del entorno, de realizar previsiones, inferencias o pronósticos con el aprovechamiento de los recursos disponibles, y la máxima disposición presta a garantizar calidad en los servicios a ofrecer, como profesionales de la ingeniería, de acuerdo a las demandas de la comunidad en general.

Documentos curriculares que han orientado el trabajo en esta unidad didáctica:

Esta unidad didáctica se engloba dentro de la legislación curricular vigente en Latinoamérica, específicamente en Venezuela y en la Universidad Nacional Experimental de Guayana y agrupa documentos escritos en dos tipos, según Sandín (2003): (a) documentos oficiales, son registros, materiales oficiales y públicos disponibles como fuentes de información y (b) documentos personales, son elaborados por iniciativa propia de la investigadora.

A continuación se mencionan los documentos oficiales y personales analizados en esta investigación.

1) UNESCO, Cresalc (1996). Declaración sobre la Educación Superior en América Latina y el Caribe. La Habana. Autor. UNESCO, Cresalc (1996). Plan de Acción para la Transformación de la Educación Superior en América Latina y el Caribe. Caracas. Autor.

2) ***Programa analítico de la*** asignatura Matemática I del proyecto de carrera de Ingeniería Industrial**.** Este documento oficial contiene información institucional de la asignatura Matemática I, en el Proyecto de Carrera de Ingeniería Industrial e Informática que se oferta en la UNEG, ubicada en la ciudad de Puerto Ordaz, Estado Bolívar. Está conformado por doce elementos a saber: a) datos de identificación, b) propósito de la unidad curricular, c) competencias genéricas, d) competencias profesionales específicas, e) competencia de la unidad curricular, f) valores y actitudes, g) temario, h) contenido detallado por tema; i) estrategias didácticas, j) plan de evaluación, k) referencias bibliográficas, l)cronograma de actividades.

Este documento permitió adecuar los objetivos, el contenido, algunas competencias, valores y actitudes que comprendieron las tareas de modelización matemática diseñadas, el propósito, las competencias, el temario, ciertas estrategias didácticas y referencias bibliográficas establecidas en el plan programático de la asignatura.

3) El otro documento que se tomó en cuenta fue el llamado: Perfiles y competencias de los proyectos de carrera de ingeniería de la UNEG, el cual es un

documento en línea que se ubica a través de un link existente a través de la Coordinación de Currículo desde la página oficial de la Universidad: http://www.uneg.edu.ve/htmls/?t&p=portal.html.

Se trabajó con este documento para listar y relacionar todas las capacidades que se perseguían fomentar en los alumnos, durante las sesiones de trabajo que comprendió la investigación, en función de los objetivos de este estudio, propósito del plan programático y sobretodo con las competencias exigidas dentro del perfil profesional de los ingenieros UNEG egresados de los distintos proyectos de ingenierías que se ofertan, tal y como lo establece este documento institucional.

Con respecto a los documentos personales, se trabajó con los siguientes recursos y materiales construidos para los efectos de la recolección de la información y su análisis en este estudio:

C) *Fase de Actuación y Evaluación:* Esta fase comprendió el análisis de actuación.

Evaluación:

En cuanto a la evaluación del tema de funciones reales descrita en el programa de Matemática I, se basa en una evaluación docente por competencias, de forma escrita e individualmente, cuya ponderación representa el 20% del total de la evaluación del programa y se encuentra sujeta a ser evaluada por el docente de la asignatura. A diferencia de la evaluación desarrollada en la propuesta didáctica, se planteó una evaluación por competencias de manera oral y una escrita, la cual se basó en una disertación donde los estudiantes exponían de manera grupal el producto de la tareas de modelización ejecutadas, con el uso del software GeoGebra y la presentación de dos trabajos escritos: uno en físico y el otro virtual.

La evaluación estuvo a cargo de todos los docentes que participaron en la investigación en los tres momentos que se realizaron estas presentaciones respectivamente (3, 3 y 4 docentes para los años (2016, 2017 y 2018 respectivamente); siempre orientados por una guía de observación, recurso que se utilizó como material de apoyo y homogenización de criterios de las dimensiones a ser observadas.

En síntesis, la evaluación del impacto de la propuesta didáctica implementada para la enseñanza de funciones consistió, básicamente en:

- ✓ Revisar el conocimiento matemático, los procesos y las competencias de modelización matemática que desarrolló el estudiante.
- ✓ Evaluar la resolución de los problemas planteados sobre fenómenos del contexto del ingeniero: analizó la representación del modelo real, el modelo matemático y el modelo computacional.
- ✓ Valorar los procesos de modelización matemática desarrollados por los estudiantes entorno a las relaciones funcionales construidas.
- ✓ Visualizar los sistemas de representación desarrollados por los estudiantes al comunicar sus ideas matemáticas entorno a las funciones reales.
- ✓ Valorar la simulación del comportamiento del fenómeno estudiado en GeoGebra, mediante las relaciones funcionales que se construyeron.

En base a lo anterior, todas las actividades se propusieron fue el propósito de ayudar a los estudiantes a lograr los objetivos descritos y a su vez, con miras a subsanar los errores y dificultades descritas en los diferentes momentos de la aplicación de la propuesta didáctica.

Una característica que permaneció a lo largo de este estudio de diseño durante sus tres momentos de aplicación, fue el perfeccionamiento continuo de la propuesta didáctica; lo cual incluyó, errores y dificultades de contenido, de procesos, metodológicos, de espacios, de tiempos, entre otros.

Criterios para Evaluar la Calidad del Estudio

La calidad en cualquier estudio independiente del enfoque de investigación cuantitativo o cualitativo, se define a través de los criterios de validez y confiabilidad. En este sentido, Rojas de Escalona (2014) afirma que la validez es un aspecto crucial en cualquier investigación. Asimismo, señala que la credibilidad sustituye al concepto de validez interna, porque son los propios actores de la investigación quienes le dan su aprobación.

En la presente investigación, se cumplieron los criterios de credibilidad antes mencionados: el primero, al describir de forma detallada todo el proceso de planificación, desarrollo y análisis de las sesiones de clases; el segundo, al compartir los resultados obtenidos con los participantes quienes estuvieron de acuerdo con los mismos, garantizando de esta forma la veracidad de la información obtenida, y el tercero, por el doble papel de la investigadora-docente en la dinámica de trabajo elegida para desarrollar las sesiones de clases; lo cual requirió mantener una relación interactiva y empática con las unidades de observación, aun cuando la investigadora no era la docente de la asignatura, logró conocer y familiarizarse con todas las unidades de análisis.

Instrumentos de Evaluación

El instrumento de evaluación fue una guía de observación utilizada por los docentes que acompañaron a la investigadora de este trabajo, una vez validada por un panel conformado por docentes del área de matemáticas de la UNEG, quienes cursaban sus estudios de maestrías o doctorado en educación matemáticas en ese tiempo.

En cuanto a la guía de observación será descrita con más detalles más adelante. Esta contiene dentro de los niveles de modelización, las posibles competencias de modelización matemáticas que lograrían los alumnos, con sus capacidades asociadas. El propósito de la misma era dirimir la existencia o ausencia de algunas capacidades que se evaluaron cuando los estudiantes presentaban los productos de la resolución de sus tareas de modelización.

Se han desarrollado en este estudio las fases de los experimentos de enseñanza planteadas por Cobb y Gravemeijer (2008), en Molina, Castro, Molina y Castro (2011); quienes distinguen 3 fases en el desarrollo de los experimentos de enseñanza: preparación del experimento, experimentación y análisis retrospectivo de los datos.

Para el análisis de la información recogida en los experimentos de enseñanza TDE, como consecuencia del carácter cíclico de los estudios de diseño, se hizo necesario 2 tipos de análisis de datos: uno continuo, que se efectuó después de cada sesión, y uno final de todos los datos recogidos en el proceso de investigación. Las cuestiones a las que da respuesta el "análisis entre sesiones" fueron típicamente de carácter práctico y estuvieron relacionadas con el objetivo de promover el aprendizaje de los estudiantes participantes. Al finalizar la experimentación se llevó a cabo el análisis retrospectivo de cada intervención de enseñanza de cada sesión de clases (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011).

La metodología de investigación TDE conllevó, además del análisis previo y retrospectivo, el análisis del trabajo desarrollado socialmente y del expuesto individualmente.

Evaluación Grupal

La evaluación de los productos de las tareas de modelización se realizó de manera grupal. Se asumió la definición de Lomas (1999), quien afirma que el evaluar exige utilizar de una manera adecuada estrategias y métodos que nos permitan conocer lo que ocurre a lo largo y al final de cada secuencia didáctica y valorar el grado de coherencia que es posible observar entre lo que se pretende (objetivo), lo que se enseña (contenidos) y lo que ocurre en el aula (metodología).

Al término de cada sesión de clases la investigadora acompañada con algunos de los cinco (4) docentes vinculados diretamente al estudio, evaluaban de manera grupal el desempeño de los alumnos, la relación de coherencia entre objetivos logrados, contenidos abordados y metodología que incluía el proceso de modelización matemática desarrollado y el uso del GeoGebra.

Los experimentos de enseñanzas exigían el perfeccionamiento continuo de la relación intrínseca de coherencia entre éstas tres aristas, de manera previa, durante y al término de cada sesión de clases.

A su vez, la investigadora dedicó tiempo al inicio de cada sesión de clases para que cada grupo de estudiantes expusiera los adelandos de los productos de sus tareas de modelización, las cuales se expondrían como trabajo final al término de la unidad didáctica. En consecuencia, existió un informe del progreso grupal semanal por cada grupo.

Diseño y Análisis de las tareas de modelización matemática, materiales y recursos:

En este apartado se va a analizar, una a una, todas las tareas de modelización desarrolladas. Concretamente se van a estudiar qué contenidos, competencias de modelización matemática y objetivos se alcanzaron mediante el ejecútese de estas tareas. Se indican los errores que los alumnos cometieron y que se buscaron evitar, además de los materiales y recursos que se necesitaron y cómo se agrupó al alumnado.

Las tareas consistieron en resolver ciertos problemas contextualizados (ver Anexo A); tales como:

Problemas estudiados:

1. Costos de las Importaciones de Venezuela.

1.1.- Comparación de los Costos de las Importaciones de Venezuela desde el año 1998 al primer trimestre del año 2014, en cualquiera de 2 de los capítulos del 1 al 15, según data del Servicio Nacional Integrado de Administración Aduanera y Tributaria, SENIAT, procesada por el Instituto Nacional de Estadística, INE en su página web: http://www.ine.gov.ve/index.php?option=com_content&view=category&id=48&Itemid=33#.

1.2.- Producción de Petróleo en Venezuela y Colombia en los últimos 20 años, en miles de barriles por día, según Vedatos (2006) en data ubicada en la página web: http://vedatos.com/stats/petroleo.

1.3.- Suscriptores del servicio de telefonía móvil de 2 compañías a nivel nacional, durante los años de 1998 al 2015, según data de la fuente del Observatorio Estadístico Conatel, dispuesta en la página web: www.conatel.org.ve.

1.4.- Compare el crecimiento poblacional de los habitantes de 2 Estados del país, a partir del año 2000, según data del Instituto Nacional de Estadística (INE) dispuesta en línea en:http://www.ine.gov.ve/index.php?option=com_content&view=category&id=98&Itemid=51

Objetivo General: Aplicar **Modelación Matemática** a fenómenos contextualizados del mundo real, asociados a la ingeniería, donde se usen relaciones de funciones reales de variable real, con apoyo del GeoGebra.

Contenidos: C1, C2 y C3: Funciones Polinómicas, Gráficas de estas funciones e interpretación geométrica. C4: enunciados de problemas que involucran relaciones lineales. Variable independiente, dependiente. Visualización e interpretación de los efectos de los parámetros en algún software. Tasa de variación. Magnitudes.

Competencias: Todas las 33 competencias de modelización matemática que incorpora la guía de observación (Ver anexo B).

Capacidades: Todas (A1 hasta la A21).

Dificultades: Todas (D1 hasta D12).

Errores: E1, E2 y E3.

Materiales y recursos: una computadora por cada equipo de trabajo que contenían el software GeoGebra. Pizarra acrílica. Video Beam. Profesores que participaron en la investigación. Guía de instrucción.

Disposición del alumnado: De manera individual inicialmente, por equipos de 2 personas en el laboratorio de computación.

2.- Problema estudiado: Cableado de suspensión del puente de Angostura.

En relación al cableado de suspensión del puente de Angostura, se propuso el siguiente problema de Simulación Implícita, en Bejarano y Ortiz, (2018) en torno al puente de Angostura ubicado sobre el río Orinoco en la región de Guayana,Venezuela. (Fuente de los datos en: http://www.precomprimido.com/)

Gráfico 8. **Imágenes del Puente de Angostura**.
Fuente: http://www.arqhys.com/articulos/fotos/articulos/Puente-de-Angostura-Venezuela.jpg.

Objetivo General: Aplicar **Modelación Matemática** a fenómenos contextualizados del mundo real, asociados a la ingeniería, donde se usen relaciones de funciones reales de variable real, con apoyo del GeoGebra.

Contenidos: C1, C2, funciones cuadráticas, gráficas de estas funciones e interpretación geométrica, C4 y C5.

Competencias: Todas las 33 competencias de modelización matemática que incorpora la guía de observación (Ver anexo B).

Capacidades: Todas (A1 hasta la A21).

Dificultades: Todas (D1 hasta D12).

Errores: E1, E2 y E3.

Materiales y recursos: una computadora por cada equipo de trabajo que contenían el software GeoGebra. Pizarra acrílica. Video Beam. Profesores que participaron en la investigación. Guía de instrucción.

Disposición del alumnado: De manera individual inicialmente, por equipos de 2 personas en el laboratorio de computación.

3.- Problema estudiado: Neutralización del Lodo Rojo en Bejarano y Ortiz, (2018):

Continuando con el proceso de modelización matemática de problemas contextualizados en el mundo de la ingeniería que se viene desarrollando a lo largo de esta investigación, se inició este nuevo problema de modelización matemática ejecutando el manejo de algunas herramientas del GeoGebra para profundizar en el análisis de un modelo que representa el comportamiento de un fenómeno de carácter socioambiental.

En este sentido, se partió de una gráfica que constituye la representación del modelo propuesto por un investigador en la materia. Así mismo se trabajó el modelo establecido como una alternativa de solución al fenómeno abordado y cómo reutilizar un producto residual que se combina para lograr su neutralización mediante el modelo propuesto.

Objetivo General:

Usar modelización crítica para fenómenos contextualizados del mundo real asociados a la ingeniería que usen relaciones de funciones reales: Funciones Lineales y Exponenciales.

Enunciado del problema: El Doctor Leonir Gómez, investigador de la Universidad Nacional Experimental de Guayana, estudia desde hace una década, cómo neutralizar los componentes contaminantes (soda cáustica y partículas radioactivas, entre otros) que se encuentran en el Lodo Rojo, el cual es un material residual originado del procesamiento de obtención de la alúmina que constituye la materia prima para la obtención del aluminio en Venalum y Alcasa. La propuesta de investigación del Dr. Gómez consiste en lograr la neutralización del Lodo Rojo mediante la inducción de reacciones con el coque de petróleo, siguiendo un método sencillo equivalente a la pulvimetalurgia, con el fin de desarrollar nuevos materiales híbridos con características adecuadas para el beneficio de la sociedad, lo que conlleva a contribuir con la conservación del medio ambiente en zonas intervenidas por la actividad industrial.

***Gráfico 9*. Polvos de lodo rojo mezclados en proporciones de 5, 10, 15, 20, 25 y 50% en peso de coque. Lodo Rojo y Coque de Petróleo Pulverizados por L. Gómez**

Consecuentemente, se originan los modelos lineales (que se trabajaron en Geogebra, cambiando el valor de parámetros) para esta serie de datos en el fenómeno estudiado. A continuación se presenta en la siguiente tabla los valores del porcentaje de coque aplicado en una muestra de Lodo Rojo, en relación a la temperatura al hacer el pH igual a 7, que es cuando se alcanza la neutralización.

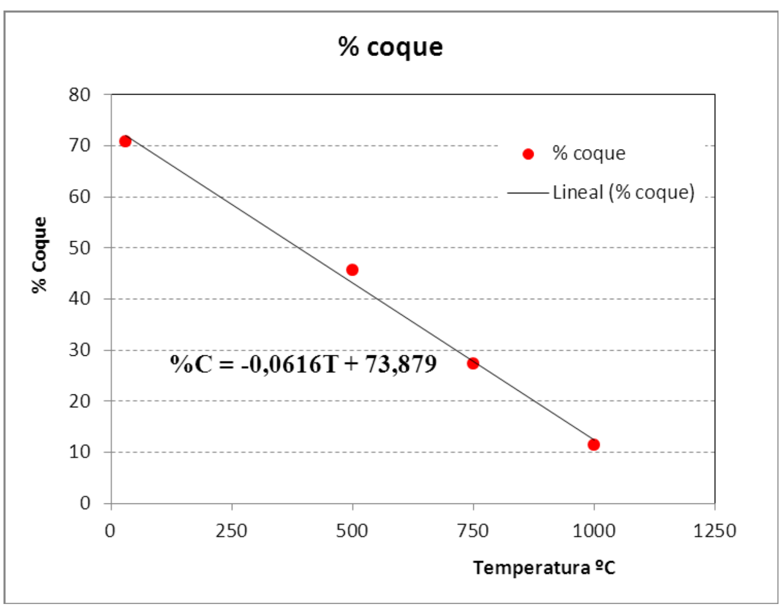


***Gráfico 10.* Representación Gráfica de la Relación Temperatura vs %Coque**

Cuadro 6.
Registros de Temperatura y % Coque en Mezcla de Lodo Rojo.

Temperatura (°C)	Lineal	% coque (pH = 7)
Tamb	pH = -0,0503.%C + 10,562	70,8
500	pH = -0,0669.%C + 10,052	45,6
750	pH = -0,0817.%C + 9,2381	27,4
1000	pH = -0,1857.%C + 9,1048	11,3

Estos datos son presentados en la gráfica de la figura anterior y mediante ajuste de curva se obtiene el valor de la constante **L = 0,0616 (%/ºC); lo cual genera el siguiente modelo cuya representación gráfica es la siguiente:**

$$\%Coque = -0{,}0616 * T + 73{,}879$$

Este modelo matemático lineal relaciona el porcentaje de coque necesario en función de la temperatura para lograr la neutralización del lodo rojo, el cual se alcanza cuando el pH es igual a 7.

Esta expresión sugiere que, por ejemplo, para lograr la neutralización del Lodo Rojo a una temperatura de 1000 ºC se requieren aproximadamente 12,3% de coque o aproximadamente algo más de 1030 ºC para neutralizarlo con un 10% de coque.

Evidentemente, se cumple la relación expuesta en el modelo sólo si se produce alguna reacción de los hidróxidos con el carbono para producir nuevas fases que conlleven a la reducción del pH y esto se logra, de acuerdo a lo observado, a temperaturas superiores a los 750 ºC, para bajas concentraciones de coque.

Adicionalmente, mediante un tratamiento térmico a 1000 ºC se realizó sobre un rango mayor de porcentaje de coque para así observar el valor del pH, tal como se presenta en el gráfico siguiente. Esto permite obtener un modelo que contenga valores más precisos para predecir la cantidad de coque necesario a fin de lograr la neutralización del Lodo Rojo a esta temperatura, según Gómez.

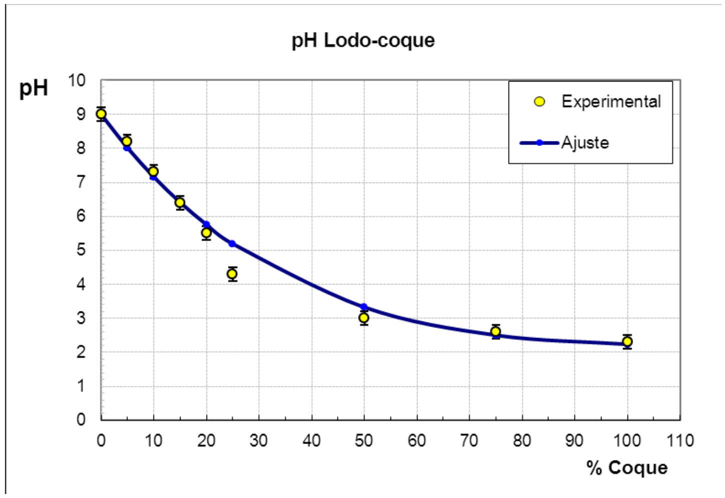


***Gráfico 11*. Potencial de hidrógeno en función de la concentración de coque en el lodo rojo una vez tratado a 1000 ºC.**

El modelo matemático en este caso es el siguiente:

$$pH = 9 * e^{-0,025*C} + 0,015 * C$$

Donde C es el porcentaje de coque presente en la muestra.

Esta expresión indica que se alcanza un pH neutro para una concentración de 11% de coque, lo cual está en consonancia con el valor dado en la tabla anterior, para 1000 ºC.

En conclusión, como se ha logrado la neutralización del Lodo Rojo bajo ciertas condiciones, es factible el uso de este material residual en cualquier ámbito. Sin embargo, a pesar de grandes esfuerzos e investigaciones, no se han alcanzado resultados contundentes que minimicen el impacto socio-ambiental que estos representan en nuestro país, tomando en cuenta la disposición de estos residuos generados en los procesos industriales de refinación, la cual es presentada en elevados volúmenes, en especial tanto del Lodo Rojo como del coque de petróleo.

Contenidos: C1, C2, funciones lineales y exponenciales, gráficas de estas funciones e interpretación geométrica, C4 y C5.

Competencias: Todas las 33 competencias de modelización matemática que incorpora la guía de observación (Ver anexo B).

Capacidades: Todas (A1 hasta la A21).

Dificultades: Todas (D1 hasta D12).

Errores: E1, E2 y E3.

Materiales y recursos: una computadora por cada equipo de trabajo que contenían el software GeoGebra. Pizarra acrílica. Video Beam. Profesores que participaron en la investigación. Guía de instrucción.

Disposición del alumnado: De manera individual inicialmente, por equipos de 2 personas en el laboratorio de computación.

4.- Problema Estudiado: Crecimiento de la población mundial en Bejarano y Ortiz (2018):

Según información del banco mundial sobre estadísticas del comportamiento de la población mundial, expuesta en la página web: http://datos.bancomundial.org/indicador/SP.POP.TOTL se tiene que: al principio de 1960, la población mundial era de 3,035 mil millones y en Enero de 2015 ha sido de 7,347 mil millones. Es sabido que el crecimiento poblacional describe una relación funcional exponencial, cuyo modelo matemático básico es:

$$f(x) = Ae^{kt},$$

donde t es el tiempo medido en años, A representa una constante de crecimiento y $f(x)$ representa el comportamiento de la población mundial.

Objetivo General: Aplicar **Modelación Matemática** a fenómenos contextualizados del mundo real, asociados a la ingeniería, donde se usen relaciones de funciones reales de variable real, con apoyo del GeoGebra.

Contenidos: C1, C2, Funciones Exponenciales, Gráficas de estas funciones e interpretación geométrica, C4 y C5.

Competencias: Todas las 33 competencias de modelización matemática que incorpora la guía de observación (Ver anexo B).

Capacidades: Todas (A1 hasta la A21).

Dificultades: Todas (D1 hasta D12).

Errores: E1, E2 y E3.

Materiales y recursos: una computadora por cada equipo de trabajo que contenían el software GeoGebra. Pizarra acrílica. Video Beam. Profesores que participaron en la investigación. Guía de instrucción.

Disposición del alumnado: De manera individual inicialmente, por equipos de 2 o 3 personas en el laboratorio de computación.

5.- Problema Estudiado: La evolución de la población en Venezuela:

La población de Venezuela durante los años del 1960 al 2010, viene dado a partir de la siguiente tabla de datos:

Cuadro 7.
Población de Venezuela durante 6 décadas consecutivas.

Año	Población
1960	7.58
1970	10.72
1980	15.10
1990	19.74
2000	24.41
2010	29.04

Actividades:

a) Escriba un modelo de transición demográfica que mejor se ajuste de acuerdo a los datos subministrados.
b) Infiera las previsiones del número de habitantes de Venezuela, siguiendo el modelo construido para el año 2100, sin que varíen las condiciones iniciales del comportamiento de la población.
c) Opine sobre la tasa de crecimiento de este modelo de transición demográfica con respecto al tiempo.
d) Opine sobre el comportamiento de la población cuando t se hace suficientemente grande.

Objetivo General: Aplicar **Modelación Matemática** a fenómenos contextualizados del mundo real, asociados a la ingeniería, donde se usen relaciones de funciones reales de variable real, con apoyo del GeoGebra.

Contenidos: C1, C2, Funciones Exponenciales, Gráficas de estas funciones e interpretación geométrica, C4 y C5.

2) **Competencias**: Todas las 33 competencias de modelización matemática que incorpora la guía de observación (Ver anexo B).
3) **Capacidades**: Todas (A1 hasta la A21).
4) **Dificultades**: Todas (D1 hasta D12).
5) **Errores:** E1, E2 y E3.
6) **Materiales y recursos**: una computadora por cada equipo de trabajo que contenían el software GeoGebra. Pizarra acrílica. Video Beam. Profesores que participaron en la investigación. Guía de instrucción.
7) **Disposición del alumnado**: De manera individual inicialmente, por equipos de 2 personas en el laboratorio de computación.

6.- Problema Estudiado: Comportamiento Demográfico Mundial.

A partir de un gráfico publicado por Telesur (s/f) en este artículo: "Estiman un 33% de crecimiento de la población mundial para 2050", el cual se encuentra ubicado en la página web: http://www.telesurtv.net/news/Estiman-un-33-de-crecimiento-de-la-poblacion-mundial-para-2050-20160830-0039.html**,** donde refieren el comportamiento demográfico de las poblaciones de China e India en cierto período, realice las siguientes demandas de tareas:

a) Encuentre los modelos que mejor se ajustan al comportamiento demográfico de India y China, según el gráfico referido.

b) Evalúe en cada modelo obtenido en el apartado a), las poblaciones de ambas ciudades para el año 2060. Establezca comparaciones de esos comportamientos.

c) ¿Podría (según el modelo obtenido) el comportamiento de crecimiento demográfico llegara a ser cero para ambas ciudades en un tiempo determinado?. Explique e interprete esta situación problema en el mundo real, llámese extramatemático.

7.- Problema Estudiado: Crecimiento de los Niveles del Río Orinoco en el Sector de Palúa, en Ciudad Bolívar y en Caicara del Orinoco, del 25/07/2017 al

03/08/2017:

Según información de la Dirección de Protección Civil del Estado Bolívar, expuesta en la página web: http://datos.proteccioncivil.com

En base a los datos registrados por esta Dirección en relación a los recientes niveles alcanzados por el Río Orinoco en el puente de Palúa, ubicado en Ciudad Guayana, en el Estado Bolívar; los cuales dan una alerta amarilla en la región:

REPUBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
GOBERNACIÓN DEL ESTADO BOLÍVAR
SECRETARIA DE SEGURIDAD CIUDADANA
DIRECCION DE PROTECCION CIVIL

FECHA EMISION
03/08/2017

NIVELES DEL RIO ORINOCO ULTIMOS 10 DIAS
(m.s.n.m)

FECHA	CAICARA 1943	1951	1976	2015	2016	2017	[illegible]
25-Jul	34.15	34.00	34.99	32.58	34.02	33.75	+5
26-Jul	34.23	34.29	35.09	32.64	34.10	33.83	+8
27-Jul	34.27	34.42	35.18	32.70	34.14	33.91	+8
28-Jul	34.45	34.55	35.25	32.77	34.17	34.02	+11
29-Jul	34.54	34.65	35.33	32.79	34.22	34.11	+9
30-Jul	34.63	34.77	35.41	32.86	34.26	34.19	+8
31-Jul	34.66	34.86	35.49	32.90	34.29	34.26	+7
01-Ago	34.76	34.90	35.56	32.95	34.32	34.33	+7
02-Ago	34.80	34.95	35.58	32.99	34.36	34.40	+7
03-Ago	34.88	34.99	35.59	33.03	34.39	34.44	+4
SITUACION ACTUAL	ALERTA AMARILLA						

FECHA	CIUDAD BOLIVAR 1943	1951	1976	2015	2016	2017	[illegible]
25-Jul	16.53	16.51	17.08	14.40	15.86	16.28	+14
26-Jul	16.62	16.69	17.17	14.52	15.92	16.44	+16
27-Jul	16.78	16.84	17.27	14.60	16.00	16.58	+14
28-Jul	16.87	16.99	17.36	14.68	16.02	16.66	+8
29-Jul	16.98	17.10	17.46	14.78	16.08	16.76	+10
30-Jul	17.08	17.24	17.58	14.86	16.18	16.86	+10
31-Jul	17.12	17.34	17.74	14.90	16.20	16,96	+10
01-Ago	17.23	17.39	17.85	14.96	16.30	17.02	+6
02-Ago	17.28	17.45	17.95	15.00	16.36	17.10	+8
03-Ago	17.37	17.49	18.00	15.06	16.04	17.16	+6
SITUACION ACTUAL	ALERTA AMARILLA						

FECHA	PALUA 1943	1951	1976	2015	2016	2017	[illegible]
25-Jul	11.03	11.28	11.83	9.12	10.38	10.98	+19
26-Jul	11.13	11.43	11.88	9.24	10.34	11.62	+64
27-Jul	11.23	11.53	11.97	9.33	10.43	11.68	+6
28-Jul	11.33	11.68	11.99	9.42	10.52	11.00	-68
29-Jul	11.48	11.73	12.04	9.48	10.52	11.15	+15
30-Jul	11.53	11.88	12.11	9.79	10.55	11.19	+4
31-Jul	11.58	11.93	12.27	9.70	10.61	11,28	+9
01-Ago	11.63	11.93	12.43	9.67	10.70	11.31	+3
02-Ago	11.63	11.88	12.55	9.67	10.79	11.37	+6
03-Ago	11.73	11.88	12.58	9.70	10.82	11.49	+12
SITUACION ACTUAL	ALERTA VERDE						

ALERTA SITUACIONAL	ESTACION	CAICARA	CIUDAD BOLIVAR	PALUA
	ALERTA VERDE	33.50 (*)	16,50	11,00
	ALERTA AMARILLA	34.00	17,00	11,50
	ALERTA ROJO	35.00	18,00	12,50

EFEMERIDES: UN DIA COMO HOY EN EL AÑO 1976 EL RIO ORINOCO ALCANZO NIVEL DE ALERTA ROJA EN CIUDAD BOLIVAR, PALUA Y CAICARA.

NOTA: LOS DIAS ESPECIFICADOS (28) NIVEL 11,00 Y (29) NIVEL 11,15, EL RIO EN PALUA SE COMENZARON A TOMAR ELECTRONICAMENTE (CON SENSORES)

Gráfico 12 **. Niveles del Río Orinoco durante cierto período de tiempo.**

Objetivo General:

Aplicar Modelización crítica de fenómenos contextualizados del mundo real, asociados a la ingeniería, que usen relaciones de funciones reales: Funciones Lineales.

Demandas de Tareas:

a) Elabore un diagrama de dispersión en GeoGebra con los datos investigados en cuanto al comportamiento del nivel de agua del Río Orinoco en lo que ha transcurrido para las fechas señaladas.

b) Ajuste los modelos de regresión más apropiados, de acuerdo a cada uno de los diagramas de dispersión construidos. Para ello, seleccione líneas de tendencias que mejor se ajuste de acuerdo a cada uno de los diagramas obtenidos.

c) Traslade a la hoja algebraica del GeoGebra la relación funcional que aproxime el comportamiento de este fenómeno hidrológico.

d) Según el modelo seleccionado, estime la fecha cuando se dará la alerta roja a la población.

e) Utilice los deslizadores del programa, para visualizar la variación de la gráfica, al modificar los parámetros que contiene el modelo. Interprete estos cambios al contextualizar las variables del fenómeno estudiado y escriba las conclusiones de su análisis realizado.

f) Simule en GeoGebra, el comportamiento de los modelos del fenómeno estudiado.

g) Determine la expresión de la función obtenida (modelo matemático) en forma canónica.

h) Señale los parámetros existentes y exprese su significado en función del fenómeno estudiado.

i) Interprete de acuerdo al contexto del problema en estudio, los significados de las posibles transformaciones de los parámetros que intervienen en los modelos construidos, cuando éstos experimentan cambios. Sugerencia: use los deslizadores que proporciona GeoGebra.

j) Compare los niveles del Río Oricono en Palúa con los presentados en Ciudad Bolívar y el Delta.

Contenidos: C1, C2, Funciones Polinómicas, Gráficas de estas funciones e interpretación geométrica, C4 y C5.

Competencias: Todas las 33 competencias de modelización matemática que incorpora la guía de observación (Ver anexo B).

Capacidades: Todas (A1 hasta la A21).

Dificultades: Todas (D1 hasta D12).

Errores: E1, E2 y E3.

Materiales y recursos: una computadora por cada equipo de trabajo que contenían el software GeoGebra. Pizarra acrílica. Video Beam. Profesores que participaron en la investigación. Guía de instrucción.

Disposición del alumnado: De manera individual inicialmente, por equipos de 2 personas en el laboratorio de computación.

8.- Problema Estudiado: **Problema del cilindro**

Construcción de una pieza de fabricación constituida por un cilindro circular recto: La tarea consiste en la simulación de la construcción de una chimenea que realizan en la empresa Vhicoa, según imágenes dadas.

***Gráfico 13*. Imagen de la pieza facricada en Vhicoa.**

Fuente: Foto tomada por Bejarano, M. en la empresa Vhicoa en 2017.

Objetivo General:

Aplicar Modelización crítica de fenómenos contextualizados del mundo real, asociados a la ingeniería, que usen relaciones de funciones reales: Funciones Irracionales. Funciones Paramétricas.

Demandas de Tareas:

a) Especificar las propiedades cualitativas del modelo matemático que han trabajado, al intentar simular la construcción de esta pieza.
b) Presentar el modelo real, el modelo matemático y el modelo computacional que han elaborado. Especificar los parámetros de la relación funcional construida.

c) Definir qué representan los parámetros en relación a las variables que intervienen en el problema.
d) Construir hipótesis, posibles predicciones, otras alternativas de solución para resolver el problema.
e) Validar del modelo matemático construido.

Contenidos: C1, C2, Funciones Irracionales. Funciones Paramétricas. Gráficas de estas funciones e interpretación geométrica. C4 y C5.

8) **Competencias**: Todas las 33 competencias de modelización matemática que incorpora la guía de observación (Ver anexo B).
9) **Capacidades**: Todas (A1 hasta la A21).
10) **Dificultades**: Todas (D1 hasta D12).
11) **Errores**: E1, E2 y E3.
12) **Materiales y recursos**: una computadora por cada equipo de trabajo que contenían el software GeoGebra. Pizarra acrílica. Video Beam. Profesores que participaron en la investigación. Guía de instrucción.
13) **Disposición del alumnado**: De manera individual inicialmente, por equipos de 2 personas en el laboratorio de computación.

Otros problemas:

9.- Problema de la Viela: (Para estudiar las funciones trigonométricas y sus inversas).

10.- Problema de Señales: (Para el estudio de la función característica).

11.- Problema de carreras de auto (Para el estudio de la función valor absoluto).

Todos las competencias de modelización matemática anteriores se potenciaron a partir de las tareas de modelización propuestas, ya que el aprendizaje matemático que se dio se realizó desde la interpretación de realidades del entorno del estudiante y esto los motivó a centrar sus esfuerzos en la obtención de soluciones (no como un fin en sí mismo), sino tomando en cuenta aspectos cognitivos y socio-afectivos y haciendo que el aprendizaje del cálculo, contribuyera al desarrollo integral del educando que estudia Ingeniería.

CAPÍTULO IV

MARCO METODOLÓGICO

En esta sección se exponen las bases metodológicas que han sustentado la investigación. En consecuencia, se compone de las siguientes partes: (a) el tipo y el diseño de la investigación; (b) las unidades de análisis; (c) el modelo didáctico de instrucción; (d) las dimensiones del estudio; (e) el procedimiento general seguido; (f) los instrumentos y las técnicas de recolección de los datos; (g) los métodos de validación de los instrumentos; h) las técnicas del procesamiento y el análisis de la información; (i) la técnica utilizada para el diseño e implementación de la propuesta didáctica y j) los criterios para evaluar la calidad del estudio y triangulación de la información.

Tipo y Diseño de la Investigación

La investigación fue de diseño, bajo un enfoque de naturaleza cualitativa, en el campo de las Ciencias del Aprendizaje. Se entendió la investigación de diseño tal y como la definen (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011), aquella que consiste en: "Analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistémica del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación" (p. 76).

A su vez, se implementaron en este estudio los experimentos de diseño. Para ello, se asumieron las ideas de Confrey (2006) en Valverde (2014), quien define los estudios de diseño como "amplias investigaciones de interacciones educativas, que contemplan el uso de un conjunto de tareas, cuidadosamente secuenciadas que estudian cómo algún conjunto de competencias son aprendidas mediante la interacción de los alumnos, bajo una guía de instrucción" (p 3).

De acuerdo a Collins, A.; Joseph, D. y Bielaczyc, K. (2004) en Molina et. al. (2011), los experimentos de diseño se desarrollan como una forma de llevar a cabo una investigación formativa para probar y refinar diseños educativos basados en principios teóricos derivados de investigaciones previas. Este enfoque de refinamiento progresivo en el diseño implicó poner una primera versión de un diseño (aplicación de la propuesta didáctica durante el año 2016) para ver cómo funcionaba. Entonces, el diseño se revisó constantemente basado en la experiencia, buscando que todos los errores se resolvieran (aplicaciones consecutivas durante los años 2017 y 2018).

En concreto, en esta investigación se ha diseñado e implementado una propuesta formativa particular para la enseñanza de las funciones reales para los futuros profesionales de la ingeniería; donde se ha ejecutado un refinamiento progresivo del diseño inicial y se ha intentado, durante cada sesión sucesiva, mejorar en la propuesta didáctica los posibles errores que existieron en estas prácticas educativas. Por lo cual, engrana el uso de la investigación de diseño como "un enfoque que persigue comprender y mejorar la realidad educativa a través de la consideración de contextos naturales en toda su complejidad, y del desarrollo y análisis paralelo de un diseño instruccional específico" (Molina et. al., 2011, p.75).

En este sentido, en el diseño implementado se observaron el desarrollo de capacidades que potenciaron ciertas competencias de modelización matemática durante la enseñanza de las funciones reales. Aquí, la propia docente investigadora se encontró implicada, participando directamente en el proceso de resolución de las tareas de modelización propuestas; además de estudiar en concreto cuáles fueron las competencias de modelización matemática que desarrollaron los alumnos cuando resolvían las tareas de modelización, tareas que formaron parte del diseño de instrucción a priori.

A su vez, se analizó el uso del software GeoGebra en un lapso del desarrollo de cursos de Matemática I durante tres períodos académicos siguiendo guías de instrucción; todo ello se evaluó y redefinió mediante el estudio y análisis de las producciones de los alumnos, incluyendo la presentación del trabajo final y su discusión grupal, las cuales se filmaron durante las dos últimas aplicaciones de la propuesta didáctica que se ejecutó.

De esta manera, se establecieron los niveles de logro de los estudiantes en cuanto a los objetivos propuestos en cada tarea de modelización planificada y su evolución, luego de aplicar el diseño del experimento didáctico, que constituyó la propuesta formativa e integradora, mediante una interpretación hermenéutica del uso de los recursos tecnológicos y conocimientos matemáticos que manifestaron los alumnos, las competencias de modelización matemática que desarrollaron en la resolución de las tareas propuestas y los niveles de modelización matemática alcanzados.

La estructura general de la investigación general seguida fue la planteada por Molina et. al. (2011), tal y como se presenta a continuación:

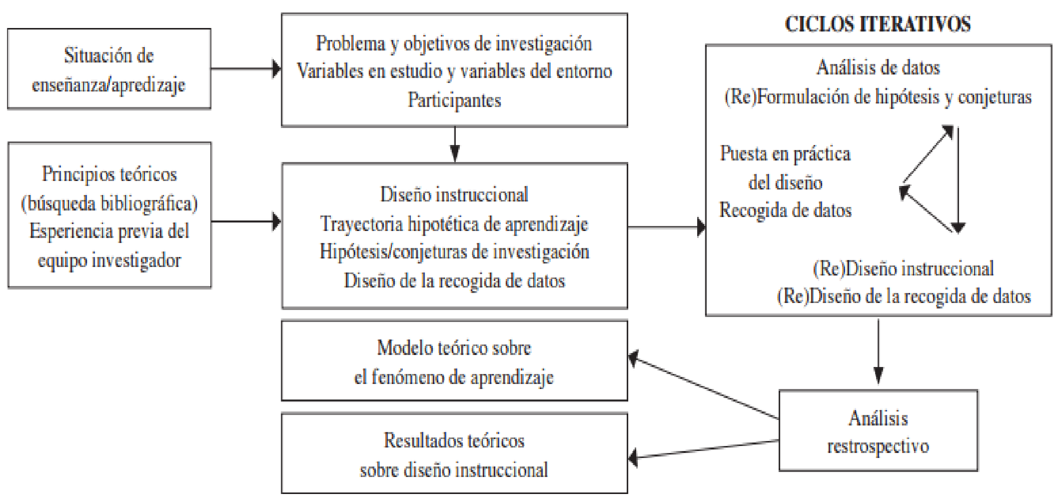


***Gráfico 14*. Estructura General de la Investigación de Diseño**

Fuente: Molina et. al. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1) p 3.

Por otra parte, se identificaron y describieron a lo largo del estudio las dificultades epistemológicas y cognitivas y los errores que presentaron los estudiantes en cuanto a la resolución de problemas contextualizados, la comprensión de fenómenos y el uso de los sistemas de representación en GeoGebra, con un nivel analítico desde una aproximación hermenéutica, mediante un diseño de abducción, donde el conocimiento que se conformó no tan sólo se basó en las verdades científicas, sino en la propia praxis del alumno, lo que generó un proceso creativo de interpretación, análisis e intervención de las prácticas educativas. El método fue inductivo, se caracterizó lo particular en relación a las dificultades observadas, para luego generalizar las dificultades presentes en este estudio.

En este sentido, fue importante considerar el uso de los experimentos de enseñanza para establecer el ciclo interacción-reflexión de la docente investigadora, quien estuvo acompañada de un grupo de especialistas que nutrieron el análisis e intervención continua de las secciones de clases, planeando y modificando las subsiguientes intervenciones de enseñanza.

Los experimentos de enseñanza dentro del paradigma de la investigación de diseño se desarrollaron en tres fases, en base a las ideas de Valverde, (2014): Preparación, experimentación y análisis retrospectivo de los datos.

De todo el proceso creativo que se desarrolló durante las prácticas de enseñanza del cálculo en este estudio, se obtuvo una metodología de trabajo fundamentada en el desarrollo de problemas contextualizados y centrados en la ejecución del proceso de modelización matemática para la enseñanza de funciones reales de variable real en el contexto de la formación inicial de los ingenieros.

Unidades de Análisis

El estudio comprendió tres (3) lapsos de experimentación, donde se aplicó la propuesta didáctica a tres (3) grupos de análisis, durante tres períodos académicos consecutivos: curso intensivo 2016, curso intensivo 2017 y un semestre regular en el 2018.

Cada grupo estuvo conformado por todos los estudiantes que conformaron una sección de la asignatura Matemática, pertenecientes a los diferentes proyectos de ingenierías que oferta la UNEG actualmente.

Específicamente, el primer grupo estuvo conformado por 13 estudiantes pertenecientes a los proyectos de carreras de ingeniería industrial e ingeniería en informática, quienes cursaban la asignatura Matemática I, durante el período intensivo, correspondiente al semestre III-2016.

El segundo grupo estuvo conformado por 15 estudiantes que confluyeron en un curso de Matemática I; sin embargo, correspondían a los proyectos de carreras de: ingeniería en informática, ingeniería forestal e ingeniería en producción animal para el período intensivo correspondiente al semestre III-2017.

El tercer grupo estuvo conformado por 13 estudiantes pertenecientes al proyecto de carrera de ingeniería en informática, correspondiente a un curso regular de Matemática I, durante el período académico III-2018.

Sin embargo, las unidades de análisis estuvieron constituidas por 25 producciones de los estudiantes, producto de resolver sus tareas de modelización durante las tres aplicaciones didácticas que se dieron. Estas 25 producciones consistieron en: 20 exposiciones observadas, cuando los estudiantes presentaron la resolución de sus tareas de modelización sobre los problemas contextualizados planteados y 5 tareas analizadas, producto de los trabajos entregados en físico por los estudiantes (Ver Anexo H).

En síntesis, las unidades de análisis fueron 25 producciones desarrolladas por 41 estudiantes en total, que cursaron la asignatura Matemática I en la UNEG, sede Atlántico, ubicada en la ciudad de Puerto Ordaz, Venezuela; por consiguiente la investigadora no asumió criterios de selección específicos para la conformación de la muestra, ya que se trabajó con todas las exposiciones desarrolladas y los trabajos entregados por los estudiantes inscritos en los cursos asignados.

Modelo Didáctico de la Instrucción

Este trabajo se orientó desde la Didáctica de la Matemática en Contexto y se inscribe en la línea de Modelización Matemática**, v**iabilizando la premisa que consiste en que los estudiantes de ingeniería son usuarios de la matemática y requieren en su formación de situaciones que les muestren la utilidad de los conocimientos matemáticos en su especialidad y de manera interdisciplinaria**.**

Particularmente, uno de los propósitos del estudio consistió en dotar la instrucción didáctica de significado contextualizado, partiendo de problemas autóctonos de la región y haciendo énfasis en el ciclo del proceso de modelización matemática, para generar el diseño de situaciones problemáticas de la ingeniería, mediante el uso del GeoGebra, como herramienta de apoyo.

Específicamente, se aplicó en esta investigación la Modelización Socio-Crítica, Realística y Aplicada, Educativa y Cognitiva. (Kaiser & Sriraman, 2006); donde independientemente del tipo de modelación que prevaleció, se desarrolló a través de uno de los dos sentidos considerados, según Mendible y Ortiz (2007):

Modelo Explícito: que va del modelo a la realidad. Aquí, se presentó a los estudiantes el modelo ya construido, con la idea que ellos reflexionaran en torno a él y validaran el mismo, donde se ofrecía la posibilidad de aplicar el modelo dado a otros contextos, es decir, a realidades semejantes.

Modelo Implícito: Esta visión se direccionó en sentido contrario al anterior: del fenómeno en estudio hacia la construcción del modelo matemático. En ésta los alumnos debían construir el modelo que representaba una aproximación al comportamiento del fenómeno estudiado. Aquí, la información se presentó de dos (2) maneras, mediante:

a) Listas de datos, las cuales se incorporaron en la hoja tabular del GeoGebra. Estas tareas para encontrar un modelo matemático, están definidas por López (2012), como actividades de *Ajuste de Curvas*.

b) Gráficos para extraer datos que representaban puntos o curvas que caracterizaban la relación funcional existente entre las variables que intervenían en los fenómenos que se estudiaban. Estas tareas son según Lopéz (2008), actividades de *Piensa y Actúa*.

Para ambos sentidos, sea explícito o implícito, se construyó un nuevo modelo matemático y/o computacional que se aproximaba al comportamiento del fenómeno estudiado.

El diseño de instrucción de la propuesta didáctica estuvo orientado de manera general a responder a los objetivos de la investigación, los cuales estuvieron dirigidos a profundizar en los ingenieros en formación, en torno a sus conocimientos sobre función real y sus propiedades; además de propiciar en ellos el desarrollo de competencias de modelización matemática cuando resolvían problemas contextualizados, de modo que los sintetizaran en modelos matemáticos, reales y computacionales con coherencia interna y si era posible, que simularan estos fenómenos en GeoGebra.

Dimensiones del Estudio

Las dimensiones consideradas fueron de tres (3) tipos: Las que tenían que ver con las competencias de modelización matemática, otra relacionada con los niveles de competencias que pudieron desarrollar los estudiantes y aquellas que abarcaron las diversas formas de representación del objeto matemático: la definición de función real de variable real. En consecuencia, se presenta a continuación la matriz generada de las dimensiones de la investigación:

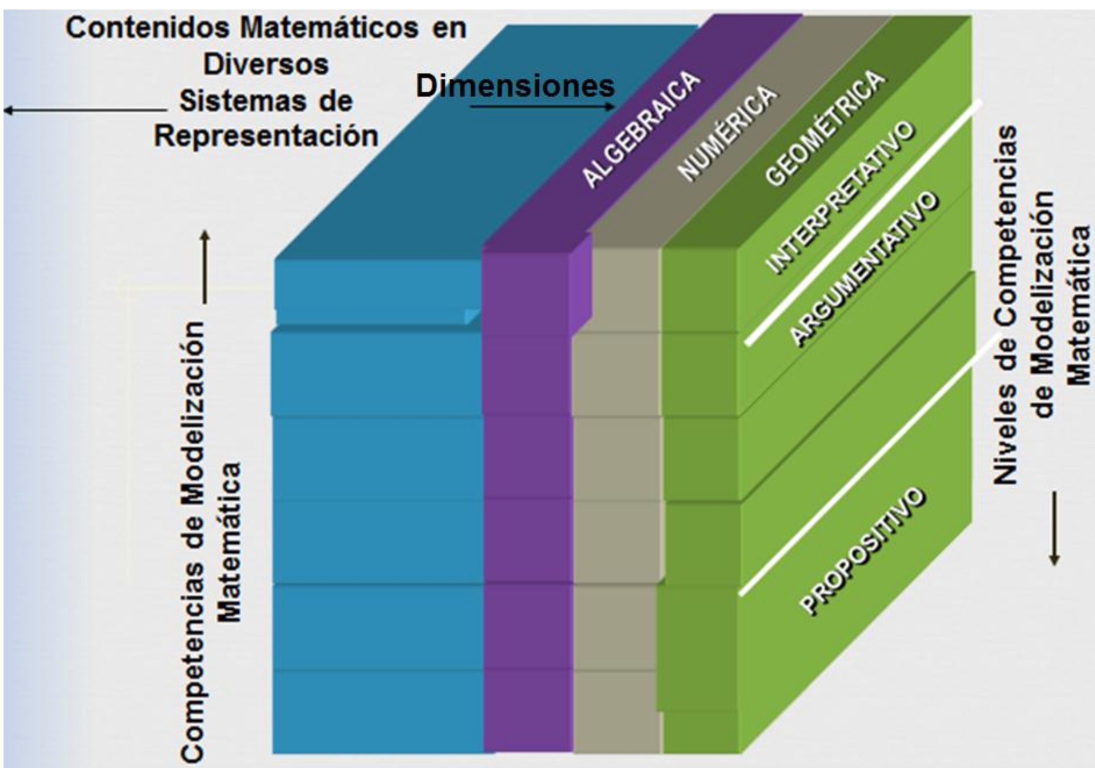


***Gráfico 15*. Dimensiones del Estudio. Modelo construido en este estudio**.

Procedimiento General

El procedimiento general comprendió el desarrollo de tres (3) etapas: Documental y de preparación, b) De recolección de la información y c) De análisis e interpretación de resultados y conclusiones.

La primera etapa del estudio se circunscribió a la consulta de los profesores en la UNEG que habían dictado la asignatura de Matemática I, en cuanto al uso e implementación de la modelización matemática como estrategia didáctica en su contexto de trabajo; a su vez, se indagó la existencia de investigaciones previas en esta materia. Por otro lado, se hizo análisis de contenido, cognitivo y de instrucción para generar el diseño del material instruccional con que se trabajó, se exploró y describió el contexto del estudio (tanto las aulas de clases como el laboratorio de computación), se preparó el escenario de acción para activar la propuesta lo que implicó la preparación de los estudiantes en el manejo del GeoGebra.

La segunda etapa comprendió la planificación y la elaboración de los instrumentos utilizados, el estudio de los fenómenos que se estudiaron y el diseño de la propuesta didáctica desarrollado. Se trabajó con diferentes registros de representación, para lo cual se aplicaron talleres o sesiones de trabajo práctico en el laboratorio de computación usando GeoGebra.

La tercera etapa comprendió la implementación de la propuesta didáctica, su evaluación e interpretación, análisis y conclusiones del producto de las tareas de modelización y de los instrumentos aplicados, resultados y triangulación de la información; además del extenso análisis didáctico que se hizo del desarrollo de la propuesta formativa implementada. Esquemáticamente el procedimiento seguido fue el siguiente:

Procedimiento General

Primera Fase: Documental y de preparación

1. Revisión de los fenómenos contextualizados estudiados y del plan de estudio de Matemática I sobre funciones reales.
2. Elaboración del cuadro de factores y dimensiones.
3. Diseño de instrumentos y materiales: Cuestionarios; Guion de la Entrevista; Material de Instrucción; sin perder de vista su validez y confiabilidad.
4. Planificación y Diseño de las tareas de Modelización: Análisis de contenido matemático, cognitivo y de Instrucción.
5. Entrenamiento de los estudiantes para el uso del GeoGebra.
6. Revisión bibliográfica sobre investigaciones previas
7. Análisis didáctico: análisis de contenido, cognitivo.

Segunda Fase: De recolección de la información

6. Análisis Didáctico: análisis de instrucción, de actuación y evaluativo.
7. Validación de los instrumentos.
8. Aplicación de la propuesta didáctica y recolección de las tareas diseñadas en GeoGebra por los alumnos.
9. Aplicación de los cuestionarios a docentes involucrados.
10. Realización de las videograbaciones de las presentaciones de la resolución de las Tareas de Modelización Matemática.
11. Aplicación de las Guías de Observación.
12. Desarrollo de Entrevistas a los profesores vinculados al estudio.

Tercera Fase: De análisis de la información

15. Interpretaciones de las opiniones de los docentes a partir de las entrevistas y los cuestionarios.
16. Verificación de los criterios de validación de los instrumentos.
17. Análisis cualitativo de las entrevistas y de los cuestionarios, de las tareas de modelización.
18. Triangulación de tiempo o momentos, de métodos y del investigado.
19. Formación de la estructura de la propuesta didáctica en base a los análisis cualitativo y cuantitativo a partir de la de información registrada.
20. Análisis y resultados.
21. Validación de los resultados y confiabilidad.
22. Presentación de conclusiones y recomendaciones.

Gráfico 16. **Procedimiento General de la Investigación**

Instrumentos y Técnicas Desarrolladas

Las técnicas desarrolladas en esta investigación fueron: la encuesta, la observación y la entrevista, mediante los siguientes instrumentos de recolección de la información respectivamente:

1. Cuestionarios semiestructurados con el propósito de conocer las opiniones de los profesores vinculados al estudio, quienes constituyeron el grupo de especialistas que acompañaron la investigación como observadores directos. Este instrumento permitió la recogida de información, en cuanto a la estrategia didáctica implementada con el uso de los organizadores del currículo: uso de la tecnología y el desarrollo de la modelización matemática mediante la resolución de problemas contextualizados, usando diferentes sistemas de representación (Ver Anexo D).
2. Guías de Observación para registrar las capacidades y/o competencias de modelización desarrolladas por los estudiantes y determinar los niveles de competencias de modelización matemáticas alcanzados de modo de describir su evolución (Ver Anexo B).
3. Guías de entrevistas estructuradas definidas por Hernández (2014), a algunos profesores que habían dictado la asignatura Matemática I en los proyectos de carrera de ingeniería en la UNEG, en torno a la enseñanza del cálculo mediante modelización matemática y el uso de la tecnología en el aula (Ver Anexo C).

   Los instrumentos que se le entregaron a los estudiantes consistieron en:

4. Guías de instrucción centradas en propiciar el desarrollo del proceso de modelización matemática con apoyo del GeoGebra en la enseñanza de funciones para ingenieros, las cuales orientaron todas las sesiones prácticas haciendo especial énfasis en superar las dificultades existentes en el planteamiento y la resolución de los problemas contextualizados, de manera de alcanzar el cierre del ciclo de modelización en cada situación problema planteada (Ver Anexo G).

5. Material entregado contentivo de las tareas propuestas a los estudiantes. Tanto las guías de instrucción como el material contentivo de las tareas de modelización surgieron toda vez que la investigadora realizó el análisis de contenido y cognitivo a priori, antes de la implementación de cada propuesta didáctica (Ver Anexo A).
6. DVD que contiene las videograbaciones de algunas de las sesiones de clases.

Validación de los Instrumentos

Validación de los Cuestionarios

Resultados de la Validación del Cuestionario

El siguiente instrumento fue diseñado con el propósito de alcanzar la validación del cuestionario elaborado, a partir del proceso de validación de 9 expertos mediante la validación de constructo, validación de contenido y validación aparente. Esta validación estuvo a cargo de este grupo, conformado por 9 docentes del área de matemática de la UNEG.

Seguidamente, se presenta un cuadro que contiene información proporcionada por los docentes evaluadores, a partir de la validación realizada.

Cuadro de Frecuencias de las Opiniones de los Docentes Consultados

El presente instrumento fue llenado por la investigadora en función a la información proporcionada en los cuestionarios aplicados.

Criterios de Validación del Cuestionario

A: Diseño B: Coherencia C: Redacción D: Pertenencia

Cuadro 8. Validación del Cuestionario, mediante la Técnica de Proporción de Acuerdos (Hurtado, 2012).

Item	Criterio	D 1	D 2	D 3	D 4	D 5	D 6	D 7	D 8	D 9	ACUM	Acuerdo
1	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	✓
	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
	C	1	1	1	0	0	0	1	1	1	5	
	D	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
2	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	✓
	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
	C	1	1	1	0	0	1	1	1	1	7	
	D	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
3	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	✓
	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
	C	1	1	1	0	0	1	1	1	1	7	
	D	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
4	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	✓
	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
	C	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
	D	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
5	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	✓
	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
	C	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
	D	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
6	A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**X**
	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
	C	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
	D	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
7	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	✓
	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
	C	1	1	1	1	0	1	1	1	1	8	
	D	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	

Item	Criterio	D 1	D 2	D 3	D 4	D 5	D 6	D 7	D 8	D 9	ACUM	Acuerdo
8	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	✓
	B	0	0	0	1	1	1	1	1	1	6	
	C	0	0	0	1	1	1	1	1	1	6	
	D	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
9	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	✓
	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
	C	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
	D	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
10	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	✓
	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
	C	0	0	0	1	1	1	1	1	1	6	
	D	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
11	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	✓
	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
	C	0	0	0	1	1	1	1	1	1	6	
	D	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
12	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	✓
	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
	C	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
	D	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
13	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	✓
	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
	C	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
	D	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
14	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	✓
	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
	C	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
	D	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	

Item	Criterio	D 1	D 2	D 3	D 4	D 5	D 6	D 7	D 8	D 9	ACUM	Acuerdo
15	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	✓
	B	0	0	0	1	1	1	1	1	1	6	
	C	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
	D	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
16	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	✓
	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
	C	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
	D	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
17	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	✓
	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
	C	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
	D	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
18	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	✓
	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
	C	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
	D	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	
										Total	615	✓
										Índice	615/648 =0,95	

Leyenda:

Número de Item: 1,2,3,…,18.
Criterio del Docente 1:(D1); Criterio del Docente 2:D2,…, Criterio del Docente 9: D9
0: Inexistencia del Criterio evaluado por ítem correspondiente.
1: Existencia del Criterio evaluado por ítem correspondiente.
Total: Frecuencia Acumulada de Acuerdos
Índice: Sumatoria total de Acuerdos/Número de Acuerdos
Acuerdos:
✓ : Ítem Válido.
X : Ítem no Válido.

Observaciones:

Los criterios para registrar acuerdos o desacuerdos son:

- Cuando los nueve docentes coincidan en el criterio de existencia al cual pertenece el ítem, se considera que el ítem está bien formulado y se registra como un acuerdo (valor: 1).

- Cuando una mayoría circunstancial de docentes coincidan en el criterio de existencia al cual pertenece el ítem, se registra como un acuerdo (valor: 1)
- Cuando una mayoría circunstancial de docentes coincidan en el criterio de inexistencia al cual pertenece el ítem, se considera un desacuerdo (valor: 0).
- Cuando los nueve docentes coincidan en el criterio de inexistencia a la cual pertenece el ítem, se considera un desacuerdo (valor 0).

Luego, se obtuvo un índice de validez, mediante la técnica de proporción de acuerdos. Este se calculó sumando todos los acuerdos y dividiendo el resultado entre el total de ítem. Hurtado (2012) indica que, para instrumentos que miden eventos de las ciencias sociales, el índice obtenido debe superior a 0,70 para que sea aceptable, el instrumento. En función a esto, el cuestionario validado fue aceptable, como instrumento a ser utilizado en esta investigación, ya que arrojó un índice igual 0,94.

En relación a los "ítems válidos" o "no válidos", se concluye que se eliminó sólo el ítem 6, ya que el criterio "diseño", no estuvo adecuado, tomando en cuenta la opinión de los docentes evaluadores.

Otra forma por la cual se estudió la validez de contenido de cada ítem de este cuestionario, fue mediante el juicio de expertos utilizando el coeficiente de validez V de Aiken (1980) en Escurra (1988). Los resultados que arrojó este coeficiente, se evaluaron a través de la tabla de probabilidades de la cola derecha.

A continuación, se presenta un cuadro que presenta los resultados por ítem.

Cuadro 8.1. Validación del Cuestionario, mediante la Técnica de Validez de Contenido por Jueces, usando el Coeficiente V de Aiken (1980).

Ítem	CRITERIO	RESULTADO DE DOCENTE									*S*	*V*	*p*	Descripción
		D 1	D 2	D 3	D 4	D 5	D 6	D 7	D 8	D 9				
1	Diseño	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Coherencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Redacción	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Pertinencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
2	Diseño	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Coherencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Redacción	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Pertinencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
3	Diseño	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Coherencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Redacción	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Pertinencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
4	Diseño	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Coherencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Redacción	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Pertinencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
5	Diseño	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Coherencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Redacción	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Pertinencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
6	Diseño	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	No valido
	Coherencia	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	No valido
	Redacción	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	No valido
	Pertinencia	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	No valido
7	Diseño	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido

	Coherencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Redacción	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Pertinencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
8	Diseño	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Coherencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Redacción	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Pertinencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
9	Diseño	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Coherencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Redacción	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Pertinencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
10	Diseño	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Coherencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Redacción	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Pertinencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
11	Diseño	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Coherencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Redacción	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Pertinencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
12	Diseño	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Coherencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Redacción	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Pertinencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
13	Diseño	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Coherencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Redacción	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Pertinencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
14	Diseño	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Coherencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Redacción	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Pertinencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido

15	Diseño	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Coherencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Redacción	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Pertinencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
16	Diseño	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Coherencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Redacción	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Pertinencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
17	Diseño	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Coherencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Redacción	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Pertinencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
18	Diseño	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Coherencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Redacción	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido
	Pertinencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	0,002	Válido

Leyenda: D1, D2, …, D9: Resultado de opinión del docente 1, 2,3,..., 9 respectivamente o Valor *si* asignado por cada uno de los 9 jueces. *S*: Sumatoria de los *si*. *V*: coeficiente V de Aike, *p*: probabilidad. Descripción: resultado de la validación del ítem correspondiente.

La fórmula para calcular el coeficiente V de Aike es la siguiente:

$$V = \frac{S}{\left(n(c-1)\right)}$$

$S: la\ Sumatoria\ de\ si$

$si: Valor\ asignado\ por\ el\ juez\ i$

$n: número\ de\ jueces$

$c: número\ de\ valores\ de\ la\ escala\ de\ valoración$

Así,

$$V = \frac{9}{\left(9(2-1)\right)} = 1$$

Y de acuerdo a la tabla de probabilidades de una cola a la derecha, se tiene que la probabilidad es igual a:

$$p = 0{,}002 < 0{,}5$$

Por lo cual, según Aike (1980), se acepta la probabilidad y en consecuencia los criterios establecidos en cada ítem. Concretamente, cada ítem es válido por presentar confiabilidad de contenido en los criterios establecidos, según la teoría de Aike.

El ítem 6, no es válido porque su probabilidad 0, lo ubicó en un extremo del intervalo de confiabilidad establecido por Aike.

Validación de la Guía de Observación y de la Guía de Entrevista:

Para validar ambos instrumentos se usó juicios de expertos, para alcanzar el desarrollo de una validación de constructo. Esta validación estuvo a cargo de la docente investigadora, conjuntamente con dos profesores evaluadores: uno que laboraba en el área de matemática de la UNEG y el otro profesor, trabajaba en ciencias básicas de la Universidad de Carabobo, Venezuela.

Tomando como base los objetivos de la investigación, los objetivos del instrumento, las dimensiones establecidas en el estudio (los focos), las competencias de modelización matemática y las capacidades matemáticas por niveles definidos, se fueron analizando todas estas aristas en el tiempo previo a cada implementación de la propuesta didáctica.

Los análisis anteriores permitieron el perfeccionamiento continuo del diseño de los instrumentos: la guía de observación y la guía de entrevistas. Los profesores evaluadores valoraron la construcción de ambas guías, de acuerdo al número de ítem adecuado para tomar registros de cada una de las dimensiones estudiadas en esta investigación (focos); tratando de establecer un orden en el desarrollo del constructo en función a los niveles creados (interpretativo, argumentativo y propositivo). A su vez, se tomó en cuenta el grado de dificultad de cada ítem, para ser comprendido por los profesores observadores y evaluadores posteriores, una vez obtenido el diseño correspondiente para cada instrumento.

De acuerdo a lo anterior, se pudo inferir que, con respecto a la validez de contenido y de constructo realizadas, las aportaciones cualitativas de los profesores evaluadores consideraron apropiado el diseño de las guías de ambos instrumentos, con el propósito para el que habían sido construidas. Concretamente, sufrieron modificación un número ínfimo de ítem, en ese proceso de perfeccionamiento continuo, originado desde el método de los experimentos de enseñanza; siempre tomando en cuenta los resultados del análisis didáctico (de contenido y cognitivo) que se realizó previo al análisis de instrucción y evaluación.

Técnicas de Procesamiento y Análisis de la Información

El producto de las tareas de modelización, se ha sometido a técnicas de análisis cuantitativas y cualitativas, que se presentan en el capítulo V y VI, donde se expone el análisis de los resultados en esta investigación. Así mismo, por tratarse de un estudio interpretativo y descriptivo, se hizo necesario el uso de la técnica de análisis de contenido, ya que "ofrece la posibilidad de investigar sobre la naturaleza del discurso" (Porta y Silva, 2003. p 8). Estos análisis se realizaron desde las producciones escritas que entregaron los estudiantes, tanto en papel como on-line.

Desde el discurso que manejaron los estudiantes en sus exposiciones del trabajo realizado en grupo y con el manejo del GeoGebra en vivo, se identificaron y describieron las capacidades matemáticas y competencias de modelización matemática que éstos lograron a la hora de presentar la resolución de sus tareas y los diferentes pensamientos que abarcaron desde los sistemas de representación que usaron; así como también el tipo de modelización que desarrollaron. Todo lo anterior, mostró evidencia de la evolución alcanzada en cuanto a los niveles de modelización y el conocimiento sobre función adquirido y para ello, se realizó un análisis de instrucción y análisis de evaluación.

En virtud a esto, las capacidades desarrolladas, las competencias de modelización matemática potenciadas, los niveles de competencia logrados y el conocimiento matemático adquirido se reconocieron y se legitimaron a partir de los análisis realizados por el grupo de docentes, quienes fueron observadores y evaluadores de todo el trabajo investigativo que se realizó. Las opiniones de estos especialistas fueron prácticamente consensuadas, ya que coincidieron en su mayoría, tal y como se mostrará más adelante en el capítulo V y VI que presenta los resultados de la investigación.

Por otra parte, para analizar las tareas de modelización matemática en GeoGebra entregadas por los estudiantes, los profesores involucrados conjuntamente con la docente investigadora, realizaron análisis del trabajo virtual entregado. Este análisis se estructuró en: un análisis de contenido, un análisis cognitivo y uno de evaluación; donde se diagnosticaron los contenidos matemáticos abordados, los conocimientos adquiridos, las capacidades y competencias desarrolladas, las dificultades y errores presentados, las falencias que poseían los estudiantes y la evolución seguida a lo largo de cada implementación de la propuesta didáctica, en cuanto a los niveles de competencia de modelización matemática.

Se utilizó como técnica de análisis de datos, la triangulación, definida por Bisquerra, (1989). Esta técnica ha de lograrse desde el contraste de la información de todas las producciones entregadas por los participantes; estas producciones serán las tareas resueltas a mano desde la guía de instrucción que se entregaron para cada sesión de clases, como aquellas que se originaron con el uso del GeoGebra y los trabajos que se entregaron en físico. Los tres resultados serán producto del análisis de estos registros, los cuales fueron confirmados al triangular la información que arrojaron las exposiciones de los productos obtenidos en repuestas a las tareas propuestas. En base a esto, a partir de la triangulación de métodos, de tiempos y del investigado se asumieron los resultados obtenidos.

En este sentido, se consideró la investigación de campo con carácter interpretativo, descriptivo y evaluativo, ya que se interpretó, describió y evaluó el impacto de la propuesta didáctica para la enseñanza de las funciones reales de variable real en la formación matemática del futuro ingeniero.

La evaluación de carácter crítico exigió una mayor participación de todos los elementos que intervinieron en el proceso de evaluación según Adelman (1987), en Santos (1996), donde para asumir esas posiciones críticas se centró la evaluación en tres funciones relevantes que considera Santos (1993): Diálogo, Comprensión y Mejora; bajo la cultura de la autocrítica, el debate, la incertidumbre, la flexibilidad y la colegialidad.

La fiabilidad de la propuesta formativa se evaluó con base en la medida en la que el análisis fue sistemático, los criterios asumidos en el análisis fueron explícitos, las argumentaciones o conclusiones finales procedieron de razones que se construyeron a lo largo del estudio, donde el análisis se ha expuesto para ser criticado por otros profesores que intervinieron en el estudio (Molina et. al., 2011).

La docente investigadora buscó promover el desarrollo del conocimiento sobre funciones a través de actividades preparadas para el grupo. En algunas sesiones de clases fue preciso e importante recoger la información mediante grabaciones audiovisuales, porque el video permitió: destacar la amplia información simultánea que prestó la posibilidad de analizar la filmación de la clase con otros participantes del estudio, la posibilidad de recoger detalles de la acción y permitió la repetición y la fijación de la actividad.

Por lo cual, la docente investigadora concertaba con otros investigadores para analizar las sesiones previas, generar y modificar modelos del desarrollo del conocimiento del profesor y planear las siguientes intervenciones de enseñanza.

A su vez, los experimentos de enseñanza que se desarrollaron, permitieron a la investigadora ser observadora o cuantificadora de situaciones experimentales; donde el doble papel que jugó proporcionó una oportunidad para construir conocimiento a través de múltiples iteraciones de un ciclo de reflexión-interacción.

Se desarrollaron en este estudio las fases de los experimentos de enseñanza planteadas por Cobb y Gravemeijer (2011) en Molina et. al. (2011), quienes distinguen 3 fases en el desarrollo de los experimentos de enseñanza: preparación del experimento, experimentación y análisis retrospectivo de los datos (p. 79).

Para el análisis de la información recogida en los experimentos de enseñanza TDE, como consecuencia del carácter cíclico de los estudios de diseño, se hizo necesario 2 tipos de análisis de datos: uno continuo, que se efectuó después de cada sesión, y uno final de todos los datos recogidos en el proceso de investigación. Las cuestiones a las que dio respuesta el "análisis entre sesiones" son típicamente de carácter práctico y estuvieron relacionadas con el objetivo de promover el aprendizaje de los estudiantes participantes. Al finalizar de la experimentación se llevó a cabo el análisis evaluativo, que comprendió un análisis retrospectivo de la intervención de enseñanza (Molina et. al., 2011).

La metodología de investigación TDE conllevó, además del análisis previo y retrospectivo, al análisis del trabajo desarrollado socialmente y del expuesto individualmente.

Técnica Utilizada para el Diseño e Implementación de la Propuesta Didáctica

En el modelo de evaluación considerado en este estudio, planteado por Stufflebeam and Coryn (2014), para el diseño e implementación de la propuesta formativa, se realizó análisis didáctico tal y como lo concibe y Fernández (2013); que comprendió: un análisis conceptual, de contenido, cognitivo, de instrucción y uno evaluativo.

Criterios para Evaluar la Calidad del Estudio y la Triangulación de la Información:

La fiabilidad y la validez, como cualidades esenciales que deben tener los instrumentos utilizados y que han garantizado el rigor científico en los resultados de este estudio, se han asegurado gracias a los siguientes criterios: la credibilidad, la transferibilidad, la consistencia, la confirmabilidad, la relevancia y la adecuación teórico-epistemológica.

En este sentido, Rojas de Escalona (2014) afirma que la validez es un aspecto crucial en cualquier investigación. En este estudio se ha logrado la **credibilidad**, porque son los propios docentes vinculados a la investigación quienes le dieron aseveración a los resultados que observaron. En consecuencia, los resultados de este estudio se asumen verdaderos para los docentes que han experimentado cómo fue la implementación de la propuesta didáctica, conjuntamente con la docente investigadora, quienes dan garantías de la veracidad de las afirmaciones y conclusiones que ha arrojado este trabajo de investigación

Específicamente, se ha cumplido el criterio de **credibilidad**, ya que primeramente, se ha descrito de forma detallada todo el proceso de planificación, desarrollo y análisis de la implementación de la propuesta entre otras; el segundo, al compartir los resultados obtenidos (todos los docentes, observadores directos del estudio), garantizando de esta forma la veracidad de la información recolectada durante estos tres años consecutivos de aplicación; y el tercero, por el doble papel de la docente investigadora en cuanto a la metodología de trabajo desarrollada durante cada sesión de clases; lo cual requirió en todo momento de una actitud interactiva y dinámica en vivo, directamente con las unidades de análisis y con el grupo de docentes especialistas del área de matemática que acompañaron la investigación.

La **transferibilidad** se alcanzó, gracias a la descripción detallada de las unidades de análisis que participaron y del contexto educativo donde se desarrolló la investigación.

La **confirmabilidad** o **auditabilidad** definida por Guba (1989), se logró mediante la veracidad de las opiniones emitidas por los docentes participantes en el estudio, para lo cual se realizaron las transcripciones textuales del discurso emitido por éstos a la hora de responder las preguntas de opinión y conocimiento de las entrevistas, según clasificación de Mertens (2010), en Hernández (2014); y a su vez, fueron respaldados los significados y las interpretaciones de este discurso para ser tomado en cuenta en los resultados del estudio. En consecuencia, se acudió nuevamente a los entrevistados para que certificaran una vez más las afirmaciones que evocaron cuando fueron entrevistados y de esta manera asegurar la precisión de los resultados obtenidos.

Por otra parte, se logró respaldar este criterio de **confirmabilidad** cuando se contrastó los resultados de la investigación con resultados de otras investigaciones existentes en la literatura y revisadas cuando se estudió el estado del arte asociado a este estudio. A su vez, en este trabajo de investigación las decisiones tomadas se han consensuado con todos los docentes participantes y se ha cuidado de que queden descritos registros producto de esos consensos; de tal manera que otro investigador examine la información y pueda llegar a conclusiones similares a las presentadas aquí bajo condiciones similares.

En cuanto a la **adecuación teórica-epistemológica**, se generó por la correspondencia existente entre los objetivos de la investigación y las teorías existentes en materia académica. La investigación ha sido **relevante**, porque alcanzó realmente todos los objetivos planteados al inicio del estudio.

El criterio de **consistencia** se logró sustentado en la triangulación que se desarrolló; mediante la cual se pudo contrastar información proveniente de diferentes fuentes, técnicas y métodos que determinaron la congruencia entre los resultados. En este sentido, Denzin, citado en Pérez (1994), indica que existen diversos tipos de **triangulación**; en esta investigación, se utilizaron los siguientes: (a) triangulación de tiempo o momentos, (b) triangulación de métodos y (c) triangulación del investigado.

Con respecto a **la triangulación de tiempo o momentos**, Santos (1995) señala que en este tipo de triangulación la información obtenida se comprueba desde una perspectiva temporal que se inicia con antes, durante y después que se producen los hechos en los sujetos y en los ambientes, con la finalidad de contemplar el fenómeno desde diferentes ópticas que se complementan para analizarlo en profundidad.

De esta forma en la presente investigación dicha triangulación se desarrolló de manera dinámica tomando en cuenta el análisis de contenido y cognitivo previo a la resolución de tareas de modelización (antes), luego considerando desde el análisis de instrucción la dinámica y el trabajo realizado en clases por los estudiantes, su interés, motivación y participación en el laboratorio de computación (durante) y finalmente en el análisis evaluativo se logró el análisis y reflexión de cada sesión de clases con los docentes involucrados (después), lo cual contribuyó al perfeccionamiento continuo de la propuesta didáctica diseñada y a evaluar el impacto de la misma en la implementación de la triada: modelización matemática, uso de las tecnologías y enseñanza de las funciones.

En relación con **la triangulación de métodos**, Parra de Chópite (1995) indica que consiste en validar los datos que se han obtenido a través de diferentes técnicas y/o instrumentos de recolección de datos de un mismo tema. En este caso, se utilizaron diversas técnicas como la observación directa, análisis de documentos y grabaciones de audio y video; asimismo, se utilizaron instrumentos como los cuestionarios, las entrevistas, la guía de observación, el producto en físico de las tareas de modelización realizadas por los estudiantes y el trabajo en el software. Todo lo anterior, se concibió para dar respuesta a los objetivos de la investigación.

Por otra parte, **la triangulación del investigado** se realizó a través del análisis y discusión de los datos obtenidos en el estudio con todos los docentes participantes directos en el estudio; quienes aportaron sugerencias para enriquecer las interpretaciones de las sesiones de clases y describir exhaustivamente la implementación de esta propuesta para la enseñanza de funciones reales a lo largo de tres años consecutivos; así como también, mediante publicaciones arbitradas en las que se expusieron avances de la investigación. Por todo lo antes señalado, se afirma que esta investigación cuenta con argumentos necesarios para considerar su credibilidad y confiabilidad.

CAPÍTULO V

ANÁLISIS DE RESULTADOS EN CUANTO A CONTENIDOS MATEMÁTICOS SOBRE FUNCIONES REALES

En este capítulo se presentan los resultados que se lograron a partir de la implementación de la propuesta didáctica en cuanto a los contenidos matemáticos sobre funciones reales; tales como: los resultados de la propuesta didáctica en cuanto a los contenidos sobre funciones reales en algunos textos de cálculo, en el plan programático de Matemática I, en los trabajos entregados por los estudiantes y en las disertaciones realizadas durante los lapsos académicos correspondientes a los años 2017 y 2018.

Resultados de la Propuesta Didáctica en Cuanto a los Contenidos Matemáticos sobre Funciones Reales

Este análisis se realiza con el objetivo de registrar cuáles son los contenidos matemáticos que se proponen adecuados, para ser desarrollarlos desde la propuesta didáctica que se ha diseñado para la enseñanza y aprendizaje de las funciones reales de variable real.

En virtud a ello, inicialmente se identificaron cuáles son los contenidos matemáticos que proponen algunos textos de cálculos, en la unidad sobre funciones reales y el plan programático de la asignatura Matemática I de los proyectos de ingenierías de la UNEG. Ambos estudios constituyeron un análisis de contenido previo a la aplicación de la propuesta didáctica, lo cual orientó en un principio sobre los contenidos a ser considerados en la propuesta didáctica diseñada para la enseñanza y aprendizaje de las funciones reales.

Análisis de Contenido sobre Funciones Reales en los Textos de Cálculo Consultados y en el Plan de Estudios de Matemática I, estructurados de acuerdo a las Zonas de Contenidos Construidas en esta Investigación.

La siguiente matriz muestra la existencia de los conocimientos abordados, en el capítulo que trata el tema de funciones reales de variable real, en algunos textos de Cálculo con Geometría Analítica. Estos textos existen, por lo general, en las bibliotecas de cada universidad y se consultan frecuentemente, para el estudio de los contenidos de la asignatura Matemática I de los proyectos de ingenierías de las universidades venezolanas.

Los evaluadores de los textos analizados fueron 3 de docentes del área de matemática de la UNEG, 2 de ellos apoyaron y acompañaron este estudio en todos los experimentos de enseñanza que se dieron y la tercera persona la representó la docente investigadora.

A continuación, se presenta un cuadro que muestra la existencia de contenidos matemáticos sobre funciones reales que han sido abordados por 8 autores de textos de Cálculo I, frecuentemente utilizados y existentes para su consulta en la biblioteca de la UNEG.

De esta manera, este instrumento de recolección y agrupación de la información fue utilizado a priori para orientar, en cuanto a contenidos se refiere, el diseño de la propuesta didáctica implementada.

En síntesis, se analizó la "existencia" (X) o "no existencia" (O) de cada contenido matemático relativo al tema de funciones reales de variable real, en cada texto consultado y en concreto, sólo en el capítulo dedicado a funciones reales; luego se obtuvo la frecuencia acumulada de ambos tipos de resultados por cada contenido estudiado en todos los libros: frecuencia acumulada de existencia por cada contenido en todos los textos analizados (FAE) y frecuencia acumulada de no existencia por cada contenido en todos los textos analizados (FANE) y finalmente en la última columna, se muestra los contenidos sobre función que aborda el único programa de Matemática I de los proyectos de ingenierías de la UNEG.

De este modo, se pudo evidenciar cuáles conceptos, definiciones, propiedades y métodos fueron trabajados por los autores referidos y el plan programático de Matemática I, incluso se estableció una frecuencia acumulada que contabiliza la cantidad de contenidos matemáticos sobre función existentes en la unidad de funciones en cada uno de los 8 textos consultados y del programa.

Los resultados de este análisis fueron organizados de acuerdo a las zonas construidas, que han conformado la estructura organizacional de contenidos diseñada.

Seguidamente, se presenta la tabla que muestra los resultados del diagnóstico realizado sobre los contenidos de función presentes en algunos textos; específicamente, aquellos contenidos de funciones reales ubicados exclusivamente en el capítulo donde los autores tratan este tema.

La equis (X) indica existencia del contenido y la (O) significa ausencia del contenido sobre funciones reales de variable real estudiado en algunos textos de cálculo.

Las columnas once y doce, de izquierda a derecha, dan información de las frecuencias acumuladas de la dicotomía entre existencia y ausencia del contenido sobre función en los textos estudiados respectivamente y la última columna muestra los resultados de éstos contenidos en el programa de Matemática I de las carreras de ingenierías en la UNEG.

Cuadro 9.

Contenidos sobre funciones reales de algunos textos de Cálculo y del Programa de Matemática I de los proyectos de ingenierías en la UNEG.

N°	CONTENIDOS	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	FAE	FANE	PROG.
C1	Definición de Función	X	X	X	X	X	X	X	X	8/8	0/8	X
	Prueba de la Recta Vertical	X	X	O	X	X	X	X	X	7/8	1/8	O
C2	Dominio	X	X	X	X	X	X	X	X	8/8	0/8	X
	Rango	X	X	X	X	X	X	X	X	8/8	0/8	X
	Paridad e Imparidad de Funciones	X	O	X	O	X	X	X	X	6/8	2/8	X
	Función Periódica	X	X	X	X	X	X	X	O	7/8	1/8	X
	Función Creciente y Decreciente	X	X	O	O	X	X	X	X	6/8	2/8	O
	Clasificación de función: inyectiva, sobreyectiva y/o biyectiva	X	O	O	O	O	O	X	O	2/8	6/8	X
	Puntos Críticos	O	X	O	X	O	O	O	X	3/8	5/8	O
	Puntos Máximo o Mínimos	O	X	O	X	O	O	O	X	3/8	5/8	O

N°	CONTENIDOS	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	FAE	FANE	PROG.
C3	Funciones Polinómicas	X	X	X	O	O	X	X	X	6/8	2/8	X
	Funciones Racionales	X	X	O	X	X	X	X	X	7/8	1/8	X
	Función Valor Absoluto	X	O	X	X	X	X	X	X	7/8	1/8	X
	Funciones Irracionales	O	X	X	X	X	X	O	X	6/8	2/8	X
	Función Parte Entera	X	O	X	X	X	X	O	X	6/8	2/8	X
	Funciones Definidas a Trozos o por Intervalos	X	O	X	X	X	X	X	X	7/8	1/8	X
	Gráficas de Funciones Elementales.	X	X	X	X	X	X	X	X	8/8	0/8	X
	Funciones trigonométricas	X	X	X	O	O	X	X	X	6/8	2/8	X
	Función Exponencial	X	X	O	O	X	X	X	O	5/8	3/8	X
	Función Logarítmica	X	X	O	O	X	X	X	O	5/8	3/8	X
C4	Funciones Paramétricas	X	X	O	O	X	X	X	O	5/8	3/8	O
	Álgebra de Funciones	X	X	X	X	O	X	X	X	7/8	1/8	X
	Composición de Funciones	X	X	X	X	X	X	X	X	8/8	0/8	X
	Función Inversa	X	O	O	O	X	O	X	O	3/8	5/8	X
	Traslaciones y Reflexiones de Funciones. Parámetros	X	X	X	X	X	X	X	O	7/8	1/8	O
	Modelado Matemático de Funciones	X	X	O	O	X	X	X	X	6/8	2/8	X
	Graficación de Funciones con Calculadora o Computadora	O	X	X	X	X	X	X	X	7/8	1/8	O
	Sistemas de Representación	X	X	X	X	X	X	X	X	8/8	0/8	O
C5	Variable Dependiente e Independiente	X	X	O	X	X	O	X	X	6/8	2/8	X
	Problemas de Aplicación de Funciones	O	X	X	X	X	X	X	X	7/8	1/8	X
	Efectos de los Parámetros con algún Software para graficar	O	X	X	O	O	X	X	O	4/8	4/8	O
	Simulado de fenómenos que se representan mediante una relación funcional	O	O	O	O	O	O	O	O	0/8	8/8	O
	Subtotales	$\frac{25}{32}$	$\frac{25}{32}$	$\frac{19}{32}$	$\frac{20}{32}$	$\frac{24}{23}$	$\frac{26}{32}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{23}{32}$	$\frac{189}{264}$	67/264	$\frac{23}{32}$

Leyenda: T1: Guerreiro, T2: Minton y Smith, T3: Finney, T4: Purcell, T5: Penney, T6: Thomas, T7: Stewart y T8: Leithould. FAE: Frecuencia Acumulada del Contenido Existente sobre Función en los 8 textos consultado y organizados por zonas. FANE: Frecuencia Acumulada de los Contenidos Ausentes sobre Función en los 8 textos consultados y organizados por zonas. PROG.: Existencia o ausencia del contenido sobre función en el programa de Matemática I en los proyectos de ingeniería de la UNEG. X: Existencia del contenido. O: Ausencia del contenido. C1, C2, C3; C4 y C5: zonas establecidas en la estructura organizacional de contenidos de la investigación.

Del cuadro anterior, se pudo deducir los contenidos matemáticos que se abordan en la unidad dedicada a funciones reales y que están presentes en todos los textos consultados; éstos son: la definición de función, definición del dominio y el rango de una función, las gráficas de funciones elementales, composición de funciones y la representación de las funciones desde varios sistemas. En cuanto a los contenidos matemáticos sobre función presentes en el plan programático de la asignatura Matemática I, de los proyectos de ingenierías de la UNEG, se afirman que por lo mínimo coinciden todos los listados anteriormente, a excepción de los sistemas de representación.

De acuerdo a los resultados anteriores, se observó que el texto que desarrolla la mayor cantidad de contenidos sobre funciones reales, en función de los aspectos considerados en esta investigación, fue el Stewart. En consecuencia, se sugiere como texto de referencia bibliográfica, en el programa de Matemática I de las carreras de Ingenierías de la UNEG para la unidad de funciones; y como textos auxiliares podrían considerarse los siguientes autores: Guerreiro (1998), Minton y Smith (2000) y el Thomas (2006), sin establecer orden de prioridades.

Cabe destacar, que lo textos de cálculos cuyos autores son Stewart, Guerreiro, y Minton y Smith (2000) no se encuentran como referencias bibliográficas dentro de los textos que propone el Programa de Matemática I de los proyectos de ingenierías de la UNEG; sin embargo, como resultado del análisis realizado es oportuno recomendarlos para el estudio de la unidad de funciones reales, ya que manejan la mayor cantidad de contenidos sobre función, incluso sugieren incorporar el uso de la tecnología en el aula y trabajan, someramente, la modelización de las relaciones funcionales y la visualización de los efectos de los parámetros en las familias de funciones que se estudian.

Es importante resaltar que aunque estos textos no son editados recientemente, son textos que se encuentran en la biblioteca de la universidad, lo que permite que sean de fácil acceso para los estudiantes, aunado a las bondades descritas anteriormente generadas a partir del análisis de contenido realizado.

Una vez, identificados cuáles son los contenidos que están presentes en todos los materiales analizados, se pasó a diagnosticar lo contrario, la ausencia de ciertos contenidos sobre función o aquellos que se presentan con menos frecuencia en los recursos estudiados.

A continuación se presenta una tabla que refleja una proporción entre los contenidos sobre función existentes en todos los libros consultados por cada contenido ubicado por zona en este estudio, (los contenidos por zonas fueron establecidos de acuerdo a la estructura organizacional de contenidos construida inicialmente).

En cada proporción generada referida a la unidad de funciones de los textos consultados, los casos favorables comprenden los contenidos existentes sólo de aquellos que ha tomado en cuenta la investigadora para el tema de funciones reales. Mientras que para el estudio de los contenidos del plan programático por zonas, se realizó una proporción entre los contenidos del capítulo de funciones existentes en el programa de Matemática I, por cada zona de la estructura organizacional de contenidos establecida por la investigadora.

Cuadro 10.

Contenidos matemáticos sobre función por zonas construidas en algunos recursos estudiados.

	ZONAS DE CONTENIDOS				
RECURSO	C1	C2	C3	C4	C5
LIBROS	15/16	43/64	63/80	51/64	17/32
PROGRAMA	1/2	5/8	10/10	4/8	2/4

Del análisis de la tabla anterior, se puede concluir que la propuesta didáctica sugiere a los autores de los textos consultados, hacer énfasis en los contenidos ausentes para las zonas C2 y C5. En estas regiones es donde se observa la mayor ausencia de algunos contenidos correspondientes a estas zonas; esto se infiere de las menores proporciones $\left(\frac{43}{64}\right)$ de C2 y $\left(\frac{17}{32}\right)$ de C5, quienes son las más bajas de las cinco.

Mientras que en el programa de Matemática I, se sugiere incorporar algunos contenidos ausentes en las zonas C1, C4 y C5. Esto se deduce tomando en cuenta los criterios anteriores: desde lo observado, se escogen las menores proporciones, las cuales están representadas por $\left(\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{4}{8}\right)$ y $\left(\frac{2}{4}\right)$ correspondientemente, las cuales son equivalentes incluso.

Específicamente, se sugiere, a los autores de los libros de textos consultados, incorporar en el capítulo que dedican a funciones los siguientes temas: la clasificación de funciones en inyectiva, sobreyectiva y/o biyectiva, que no sea considerado un preliminar; los valores máximos, mínimos y críticos; la definición de función inversa, los efectos de los parámetros con algún software para graficar y el simulado de fenómenos que se representan mediante una relación funcional. Esto es válido, sólo para los textos que carecen de estos temas en el capítulo de función, incluso se podría considerar una reorganización de la temática abordada en el capítulo dedicado a funciones reales, ya que la mayoría tienen estos contenidos pero en sesiones posteriores.

Mientras que en el programa de Matemática I, se sugieren incorporar algunos de los contenidos correspondientes a las zonas C1, C4 y C5. En consecuencia, del análisis del cuadro anterior se deduce que en el programa de Matemática I, la temática debe completarse con los siguientes contenidos, incluso para incorporar las tecnologías de la información: Regla de la recta vertical, función creciente y decreciente, puntos críticos, puntos máximos o mínimos, traslaciones y reflexiones de funciones, graficación con la computadora, funciones paramétricas, efectos de los parámetros con algún software para graficar, simulación de fenómenos que se representen mediante relaciones funcionales y las funciones desde sus diferentes sistemas de representación.

En general, los análisis de contenido elaborados en los textos consultados y en el programa de Matemática I, orientaron a la investigadora a registrar y definir los contenidos que se incluirían para ser desarrollados en la propuesta didáctica diseñada para la enseñanza de las funciones reales.

Proporciones Establecidas entre los Contenidos sobre Funciones de Algunos Recursos y los Contenidos establecidos en cada una de las Zonas Construidas.

La tabla que se presenta seguidamente muestra algunas proporciones establecidas entre los contenidos sobre función existentes en los textos consultados y los contenidos que comprende cada zona construida en esta investigación. Por otro lado presenta otras proporciones entre los contenidos sobre función existentes en el plan programático de Matemática I y los contenidos establecidos en cada zona de contenidos sobre función construida.

Cuadro 11.

Proporciones establecidas entre los contenidos sobre función existentes en los textos consultados y en el plan programático de Matemática I.

N°	Contenidos sobre Función	PROGRAMA	LIBROS
C1	Definición de Función	1/2	15/16
	Prueba de la Recta Vertical		
C2	Dominio	5/8	43/64
	Rango		
	Paridad e Imparidad de Funciones		
	Función Periódica		
	Función Creciente y Decreciente		
	Clasificación de función: inyectiva, sobreyectiva y/o biyectiva		
	Puntos Críticos		
	Puntos Máximo o Mínimos		
C3	Funciones Polinómicas	10/10	63/80
	Funciones Racionales		
	Función Valor Absoluto		
	Funciones Irracionales		
	Función Parte Entera		
	Funciones Definidas a Trozos o por Intervalos		
	Gráficas de Funciones Elementales.		
	Cambio de Escala en Gráficas		
	Funciones trigonométricas		
	Función Exponencial		
	Función Logarítmica		

N°	Contenidos sobre Función	PROGRAMA	LIBROS
C4	Funciones Paramétricas	4/8	51/64
	Álgebra de Funciones		
	Composición de Funciones		
	Función Inversa		
	Traslaciones y Reflexiones de Funciones. Parámetros		
	Modelado Matemático de Funciones		
	Graficación de Funciones con Calculadora o Computadora		
	Sistemas de Representación		
C5	Variable Dependiente e Independiente	2/4	17/32
	Problemas de Aplicación de Funciones		
	Efectos de los Parámetros con algún Software para graficar		
	Simulado de fenómenos que se representan mediante una relación		
	Subtotal de Contenidos	22/32	189/256

En base a los resultados de la tabla anterior, se deducen las siguientes afirmaciones:

- Hay que hacer énfasis en el contenido programático de los libros, en cuanto a lo que comprende los contenidos de las zonas: C2 y C5.
- Hay que hacer énfasis en el contenido programático del plan de estudios en cuanto a lo que comprende los contenidos de las zonas: C1, C4 y C5.

Las afirmaciones anteriores se convierten en sugerencias para los responsables en cada ámbito educativo: las editoriales de los textos consultados y la Universidad (UNEG). Es decir, se debe hacer énfasis en ciertas propiedades, operaciones con funciones y problemas sobre funciones.

Posteriormente, se realizó un tercer análisis de contenido, ahora a las producciones de los estudiantes, toda vez aplicada la metodología implementada. Específicamente, se determinó los contenidos matemáticos que los estudiantes abordaron en sus tareas de modelización matemática sobre funciones reales entregadas en físico y durante todas las exposiciones que éstos realizaron al presentar sus producciones finales.

Contenidos Matemáticos Desarrollados al Implementar la Propuesta Didáctica

La siguiente matriz fue diseñada para enumerar los conocimientos sobre función que han permitido de algún modo estudiar las contribuciones que se han alcanzado en la formación matemática de los futuros ingenieros egresados de la UNEG; específicamente, en relación al tema de funciones reales de variable real, una vez implementada la propuesta didáctica que se diseñó en esta investigación a lo largo de 3 tiempos determinados durante tres (3) años consecutivos.

Específicamente, se presenta un cuadro que muestra resultados en cuanto a los contenidos matemáticos que abordaron los estudiantes al desarrollar las tareas de modelización matemática propuestas. Para ello, se han analizado 5 tareas entregadas por grupos de estudiantes pertenecientes a los proyectos de Ingeniería: Industrial e Informática; todos cursantes en una misma sección de Matemática I, durante el período intensivo 2017.

De esta manera, este instrumento de recolección de información fue utilizado a posteriori de las sesiones de clases y sirvió para evaluar a 5 grupos, cada uno conformado por 3 estudiantes participantes del entorno educativo, una vez aplicada la estrategia didáctica que se implementó.

En consecuencia, se analizó la "existencia" (E) o "no existencia" (N E) de cada contenido matemático relativo al tema de funciones reales de variable real, en cada una de las tareas entregadas y finalmente se obtuvo la frecuencia acumulada de ambos tipos de resultados por cada contenido. De este modo, se pudo evidenciar cuáles conceptos, definiciones, propiedades y métodos fueron trabajados por los estudiantes.

Los evaluadores de estas tareas fueron, a parte de la docente investigadora, 2 de los docentes que apoyaron y acompañaron este estudio en todos los experimentos de enseñanza que se dieron. Por lo tanto, la cantidad de evaluadores fueron 3 docentes.

Cuadro 12.

Contenidos matemáticos relativos al tema de funciones reales de variable real, en todas las tareas entregadas en físico por los estudiantes durante la aplicación didáctica del año 2017.

CONTENIDO MATEMÁTICO SOBRE FUNCIÓN	Resultados		Porcentaje	
	E	NE	E	NE
Definición de Función	5/5	0/5	100	0
Prueba de la recta Vertical	3/5	2/5	60	40
Álgebra de Funciones	0/5	5/5	0	100
Paridad e Imparidad de Funciones	2/5	3/5	40	60
Función Periódica	0/5	5/5	0	100
Función Creciente y Decreciente	1/5	4/5	20	80
Composición de Funciones	2/5	3/5	40	60
Función Inyectiva	1/5	4/5	20	80
Función Sobreyectiva	0/5	5/5	0	100
Función Biyectiva	0/5	5/5	0	100
Función Inversa	4/5	1/5	80	20
Función Exponencial.	1/5	4/5	20	80
Propiedades de la Función Exponencial.	1/5	4/5	20	80
Función Logaritmo.	2/5	3/5	40	60
Propiedades de la Función Logaritmo.	1/5	4/5	20	80
Traslaciones y Reflexiones (Parámetros).	4/5	1/5	80	20
Funciones Paramétricas	0/5	5/5	0	100
Gráficas de Funciones	5/5	0/5	100	0
Funciones trigonométricas	5/5	0/5	100	0
Funciones Polinómicas	2/5	3/5	40	60
Funciones Racionales	0/5	5/5	0	100
Modelado Matemático de Funciones	2/5	3/5	40	60
Dominio y Rango	5/5	0	100	0
Variable Dependiente e Independiente.	0/5	5/5	0	100
Asíntotas.	0/5	5/5	0	100

CONTENIDO MATEMÁTICO SOBRE FUNCIÓN	Resultados		Porcentaje	
	E	NE	E	NE
Problemas de Aplicación de Funciones.	3/5	2/5	60	40
Puntos Críticos	0/5	5/5	0	100
Puntos Máximos o Mínimos de Funciones	0/5	5/5	0	100
Funciones Definidas a Trozos.	0/5	5/5	0	100
Función Parte Entera	0/5	5/5	0	100
Funciones Radicales.	0/5	5/5	0	100
Graficación con Calculadora o Computadora	5/5	0/5	100	0
Función Valor Absoluto.	0/5	5/5	0	100
Sistemas de Representación	5/5	0/5	100	0
Efectos de los Parámetros con algún Software para Graficar	4/5	1/5	80	20
Amplitud de una función trigonométrica	4/5	1/5	80	20
Subtotales				

Se presenta seguidamente los resultados anteriores en un diagrama de barras:

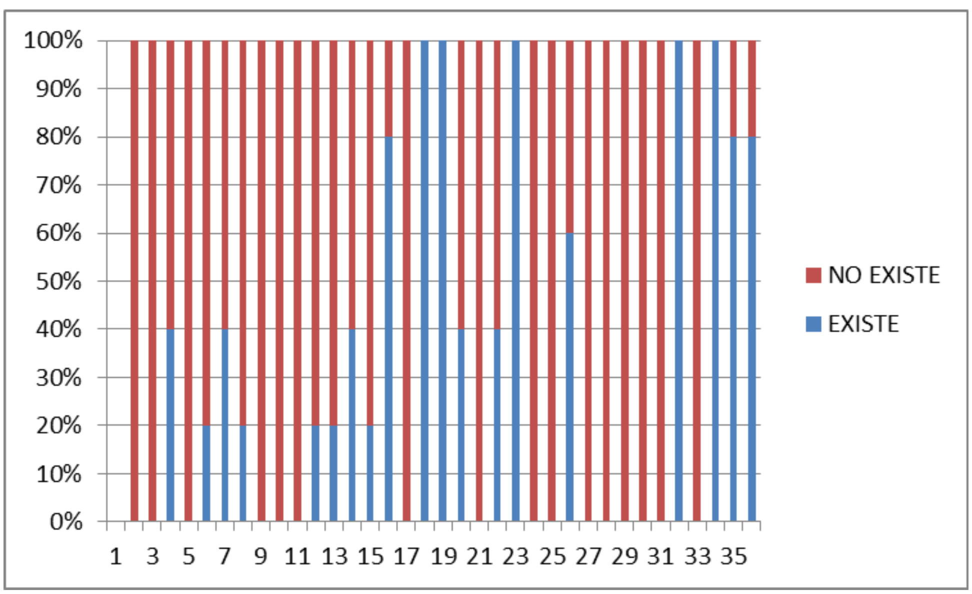


Grafico 17. **Porcentajes que relacionan la existencia o no existencia de los**

contenidos en torno a función en las tareas de modelización entregadas en físico por los estudiantes.

Del gráfico se pudo observar que existió mucha deficiencia por parte de los estudiantes en torno a los contenidos sobre función abordados al entregar sus tareas de modelización en físico. Por el contrario, a los resultados presentados cuando éstos presentaron sus productos finales mediante una disertación pública en grupos.

En este sentido, se presenta un cuadro que contiene una síntesis del análisis, donde se expone la presencia de los contenidos existentes sobre funciones en cada recurso: Compendio de textos analizados, plan de estudios de la asignatura Matemática I de las carreras de ingenierías de la UNEG y el conglomerado conformado por todas las exposiciones que realizaron los estudiantes en cada uno de los tres períodos que comprendió la aplicación de la propuesta didáctica.

El objetivo de la siguiente tabla se realizó con el propósito de establecer una comparación entre los contenidos sobre función que consideran la mayoría de los textos de Cálculo I en el capítulo dedicado a este tema, el programa de Matemática I en la unidad dedicada a función y la evolución de todo el abordaje sobre funciones desarrollado en cada una de las aplicaciones que se dieron de la propuesta didáctica.

Cuadro 13.

Contenidos matemáticos sobre función estudiados en diversas fuentes de información.

CONTENIDOS	TEXTOS	PROGRAMA	EXPOSICION 2016	EXPOSICION 2017	EXPOSICION 2018
Relaciones Binarias y sus Gráficas	✓	✓	✓	✓	✓
Definición de Función	✓	✓	✓	✓	✓
Prueba de la Recta Vertical	✓	X	✓	✓	✓
Dominio y Rango	✓	✓	✓	✓	✓
Variable Dependiente e Independiente	✓	✓	✓	✓	✓
Función Inyectiva	X	✓	X	✓	✓
Función Sobreyectiva	X	✓	X	✓	✓
Función Biyectiva	X	✓	X	✓	✓
Álgebra de Funciones	✓	✓	✓	✓	✓
Paridad e Imparidad de Funciones	✓	✓	✓	✓	✓
Función Periódica	✓	✓	X	✓	✓
Función Creciente y Decreciente	✓	X	✓	✓	✓
Composición de Funciones	✓	✓	✓	✓	✓
Función Inversa	X	✓	✓	✓	✓
Funciones Polinómicas	✓	✓	✓	✓	✓
Funciones Racionales	✓	✓	✓	✓	✓
Funciones Irracionales	X	✓	X	X	✓
Funciones Definidas a Trozos o por Intervalos	✓	✓	X	✓	✓
Función Parte Entera	✓	✓	X	X	X
Función Valor Absoluto	✓	✓	X	X	✓
Función Exponencial	✓	✓	X	✓	✓
Propiedades de la Funciones	✓	✓	✓	✓	✓
Función Logarítmica	✓	✓	X	✓	✓
Existencia	✓	✓	✓	✓	✓

Amplitud	✓	✓	✓	✓	✓
Funciones Trigonométricas	✓	✓	✓	✓	✓
Gráficas de Funciones Elementales. Cambio de Escala en Gráficas	✓	✓	✓	✓	✓
Funciones Paramétricas	✓	X	X	X	✓
Modelado de Funciones	✓	✓	X	X	✓
Problemas de Aplicación de Funciones	✓	✓	✓	✓	✓
Graficación de Funciones con Calculadora o Computadora	✓	X	✓	✓	✓
Sistemas de Representación	✓	X	✓	✓	✓
Efectos de los Parámetros con algún Software	✓	X	✓	✓	✓
Funciones Paramétricas	✓	X	X	X	✓
Número Total de Contenidos	29/34	27/34	21/34	28/34	33/34

Leyenda:

✓ : Existencia del contenido.
X : Ausencia del contenido.

El resultado de los contenidos que manejan los textos consultados surgió del criterio de selección escogido: que tiene que ver con el resultado que predomina en cuanto a la mayor frecuencia acumulada se refiere de los 8 textos analizados. En este sentido, el hecho de que exista o no un contenido sobre funciones en la unidad establecida para desarrollar este tema, no establece la existencia o no de este aspecto en todos los textos consultados, se asevera que se tomó como definitiva el resultado que más se repite en la totalidad de textos analizados. Por ejemplo, para ser explicito se presenta un caso: en la mayoría de los textos de cálculo I estudiados, no se aborda la definición de función inversa para el capítulo dedicado a funciones reales, por lo cual para esta investigación se ha tomado como resultado último que este aspecto no es estudiado en el capítulo dedicado a las funciones reales; sin embargo, existen pocos autores de los consultados que si lo tratan dentro de la unidad de funciones, pero no representan la mayoría; mientras que existen otros autores que lo tratan en capítulos posteriores al tema de funciones reales.

La clasificación de las funciones abordadas (inyectivas, sobreyectivas y/o biyectivas) fue importante para la investigadora, a la hora de hallar y definir la función inversa de una función. En los textos, no profundizan mucho en esta clasificación; aunque muy someramente se alude la definición de función biyectiva en la unidad relativa a funciones. Pareciera que estas definiciones se asumen como parte de los preliminares en la mayoría de los textos de cálculo consultados.

Por otro lado, se pudo diagnosticar que los programas de Matemática I correspondientes a las carreras de Ingenierías en la UNEG, es el mismo para todas las ramas de la ingeniería que se ofertan en la UNEG. Este programa presenta la menor cantidad de contenidos en relación al número de contenido que abordan la mayoría de los textos analizados en cuanto al tema de funciones reales. Mientras que durante las exposiciones en los tres años consecutivos, una vez aplicada la propuesta didáctica en los cursos de Matemática I de la UNEG, se pudo observar que fueron aumentando progresivamente los contenidos sobre funciones en el trascurrir del tiempo. De esta manera, la última aplicación concentró el mayor número de contenidos abordados sobre función durante las exposiciones. Consecuentemente, se deduce en relación a la evolución que se dio de la implementación de la propuesta didáctica, que el mejor abordaje para la enseñanza de las funciones que se obtuvo durante esta investigación fue el correspondiente al año 2018: de 34 contenidos planteados, los alumnos trabajaron y desarrollaron 33 contenidos sobre el tema de funciones reales en la presentación de sus trabajos finales.

En base a los resultados anteriores, se observó que la función parte entera, aunque es considerada dentro del contenido programático, no fue abordada en ninguna de las aplicaciones de la propuesta didáctica, ya que encontrar un fenómeno que se describa mediante esta relación funcional fue muy difícil de asociar. Sin embargo, la definición de la función parte entera se definió en las últimas dos aplicaciones didácticas durante las clases.

En conclusión, se abordaron todos los contenidos establecidos en los libros de textos y en los programas de Matemática I de los proyectos de ingenierías de la

UNEG, a excepción de la función parte entera, para lo cual no se asoció un fenómeno contextualizado que describiera estas relaciones funcionales por los momentos. La propuesta que se presentará en este estudio siempre será perfectible en el tiempo y aún más, cuando su abordaje metodológico ha sido sustentado en los experimentos de diseño.

En general, la evolución de los contenidos matemáticos a lo largo de las tres aplicaciones de la propuesta didáctica, fue productiva ya que se pudo observar cómo se fueron incorporando algunos contenidos, mediante la intervención evaluación y modificación constante que exigen de por sí, los diseños de experimentos al término de cada sesión de clases. Los contenidos que se fueron sumando fueron: clasificación de las funciones (Inyectivas, Sobreyectivas y/o Biyectivas), la función valor absoluto, la función definida a trozos, la función exponencial y logarítmica, el modelado de funciones y las funciones paramétricas. Esto se generó como consecuencia de ir mejorando el diseño de la propuesta didáctica a medida que se iba dando la implementación de la propuesta cada año, con la finalidad de que la propuesta implementada contribuyera en la mayor medida posible, a una excelente y amplia formación matemática de los futuros ingenieros egresados de la UNEG.

A su vez, se pudo observar que existen contenidos que no son abordados en los programas de Matemática I de los proyectos de Ingenierías de la UNEG en el tema de funciones reales de variable real; sin embargo, fueron incluidos en la propuesta didáctica. Estos fueron: la prueba de la recta vertical para determinar si una relación es función o no, las definiciones de funciones crecientes y decrecientes, las funciones paramétricas, los sistemas de representación para trabajar en las diferentes dimensiones (algebraica, numérica, geométrica), la graficación de funciones con la computadora y los efectos de los parámetros usando algún software dinámico, ha objeto de comprender la variación generada en cada parámetro transformado y el significado de este cambio en cada variable que podría intervenir en los fenómenos estudiados.

En base a lo anterior, la investigadora propone en su propuesta didáctica para la enseñanza de funciones reales, que se incorpore los 35 contenidos antes mencionados a los Programas de Matemática I de los proyectos de Ingeniería de la UNEG y a su vez, realizar sugerencias a las editoriales que publican libros de cálculo I, en relación a los contenidos sobre funciones reales que pudiera concentrar esta unidad temática.

Cuadro 14.

Proporciones del contenido sobre funciones abordados en las aplicaciones de la propuesta didáctica.

N°		PROPORCION APLICACIÓN 2016	PROPORCION APLICACIÓN 2017	PROPORCION APLICACIÓN 2018
C1	Definición de Función	2/2	2/2	2/2
	Prueba de la Recta Vertical			
C2	Dominio	4/10	8/10	9/10
	Rango			
	Paridad e Imparidad de Funciones			
	Función Periódica			
	Función Creciente y Decreciente			
	Clasificación de función: inyectiva, sobreyectiva y/o biyectiva			
	Puntos Críticos			
	Puntos Máximo o Mínimos			
C3	Funciones Polinómicas	8/11	11/11	10/11
	Funciones Racionales			
	Función Valor Absoluto			
	Funciones Irracionales			
	Función Parte Entera			
	Funciones Definidas a Trozos o por Intervalos			
	Gráficas de Funciones Elementales.			
	Cambio de Escala en Gráficas			
	Funciones trigonométricas			
	Función Exponencial			
	Función Logarítmica			

C4	Funciones Paramétricas	6/8	6/8	8/8
	Álgebra de Funciones			
	Composición de Funciones			
	Función Inversa			
	Traslaciones y Reflexiones de Funciones. Parámetros			
	Modelado Matemático de Funciones			
	Graficación de Funciones con Calculadora o Computadora			
	Sistemas de Representación			
C5	Variable Dependiente e Independiente	2/4	3/4	4/4
	Problemas de Aplicación de Funciones			
	Efectos de los Parámetros con algún Software para graficar (Exploraciones con un Software)			
	Simulado de fenómenos que se representan mediante una relación funcional			
	Subtotal de Contenidos	22/35	30/35	33/35

El resultado anterior vendrá a consolidar los 35 contenidos que se han incluido en la propuesta didáctica en esta investigación, la cual adicionó 6 aspectos a considerar dentro de la temática de funciones reales en los programas de Matemática I, de las carreras de ingeniería de la UNEG, aspectos no incorporados actualmente.

Análisis del Contenido Matemático sobre Funciones abordado en las Disertaciones Realizadas por los Estudiantes en Función de las Zonas de Contenidos Construidas.

Se presenta una proporción de existencia de los contenidos sobre funciones reales de variable real en función de los contenidos existentes por zonas construidas de acuerdo a la estructura organizacional de contenidos de esta investigación. La existencia de éstos contenidos fue analizada en base a las disertaciones que realizaron los estudiantes a la hora de exponer sus trabajos finales durante las tres aplicaciones que tuvieron lugar durante los años 2016, 2017 y 2018.

En general, se puede afirmar, una vez estudiada mediante la tabla anterior la existencia de los contenidos matemáticos abordados, que fue bastante aceptable la amplitud de los contenidos matemáticos sobre funciones que desarrollaron los estudiantes por zonas construidas en las disertaciones que presentaron durante las tres aplicaciones didácticas que se realizaron.

A medida que se repetía la experimentación de la propuesta didáctica que se implementó a través de tres años consecutivos, se buscaba precisar cada vez más el número de contenidos abordados al desarrollar la unidad de funciones reales en la asignatura Matemática I, de los proyectos de carreras de ingenierías en la UNEG. Con el trabajo generado en aula, se cubrió este último propósito, donde la estructura de contenidos sobre funciones reales quedó conformada por 35 contenidos, los cuales están organizados por zonas construidas en la propuesta didáctica.

Cuadro 15.

Proporciones establecidas de Contenidos abordados sobre Funciones por zonas construidas en los siguientes recursos.

Contenidos	Textos	Programa	Aplicación 2016	Aplicación 2017	Aplicación 2018
C1	0,94	0,5	1	1	1
C2	0,67	0,63	0,4	0,8	0,91
C3	0,79	1	0,73	1	0,82
C4	0,80	0,5	0,75	0,75	1
C5	0,53	0,5	0,5	0,74	1

Leyenda: Programa: programa de Matemática I de los proyectos de ingenierías de la UNEG, Texto: libros de cálculo analizados, Aplicación 2016, 2017 y 2018: aplicaciones de la Propuesta Didáctica implementada.

Se presentan los registros anteriores, ahora en un diagrama de barras de frecuencia acumulada por cada recurso analizado:

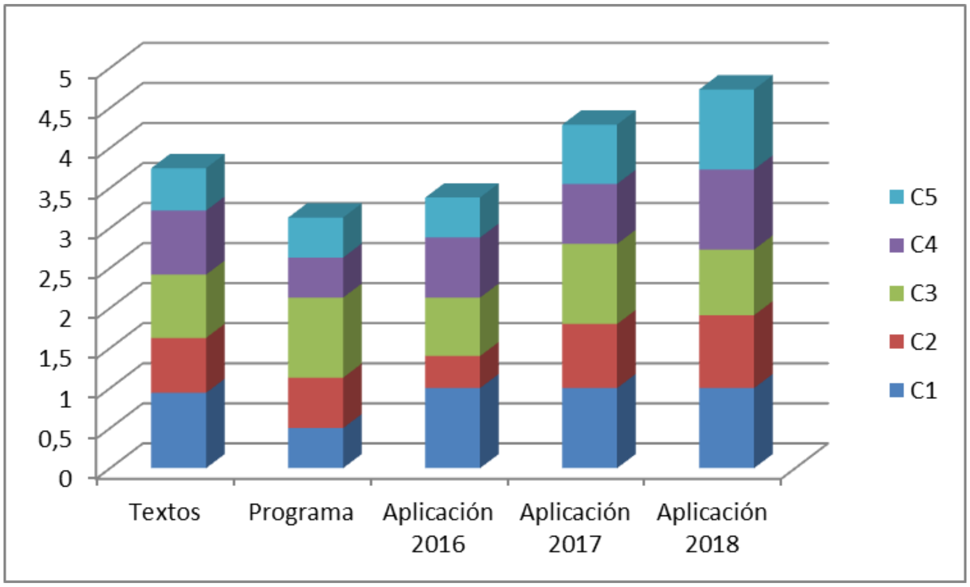


***Gráfico 18*. Contenidos sobre funciones reales en algunos recursos estudiados.**

Se puede deducir del gráfico que, los textos consultados abordan una mayor cantidad de contenidos matemáticos sobre funciones reales que el programa de Matemática I; esto último tomando como patrón de referencia sólo los 35 contenidos establecidos en la propuesta didáctica.

A su vez, se observa desde los resultados anteriores que el número de contenidos sobre funciones reales considerado, tanto en el programa de matemáticas I, como los que desarrollan los textos analizados, fue superado de acuerdo a los resultados que arrojó la última aplicación de la propuesta didáctica implementada.

A su vez, se puede afirmar que la evolución de los contenidos sobre funciones reales, durante la implementación de la propuesta didáctica, ha sido progresiva en el transcurrir del tiempo; ya que el número de contenidos sobre funciones fue aumentando para cada aplicación didáctica subsiguiente. De manera similar, se generó este resultado positivo, en cuanto a la evolución de las competencias de modelización matemática analizadas en este estudio y que se expondrán en el capítulo V.

En general, se puede afirmar, una vez estudiado el gráfico sobre la existencia de los contenidos matemáticos abordados durante las exposiciones que realizaron los estudiantes, se pudo afirmar que fue bastante aceptable la amplitud de los contenidos matemáticos sobre funciones que desarrollaron éstos por zonas construidas en las disertaciones que presentaron durante las tres aplicaciones didácticas que tuvieron lugar.

A medida que se repetía la experimentación de la propuesta didáctica que se implementó a través de tres años consecutivos, se buscaba precisar cada vez más el número de contenidos abordados al desarrollar la unidad de funciones reales en la asignatura Matemática I, de los proyectos de carreras de ingenierías en la UNEG. Con el trabajo generado en aula, se cubrió este último propósito, donde la estructura de contenidos sobre funciones reales quedó conformada por 35 contenidos, los cuales están organizados por zonas construidas en la propuesta didáctica.

Por otra parte, utilizando los registros anteriores en el siguiente diagrama radial, se pudo inferir que los valores referentes a C2, estuvieron más distantes del valor extremo; por lo tanto fueron los contenidos que menos se desarrollaron durante cada una de las tres implementaciones de la propuesta. En efecto, el orden que se estableció, de acuerdo a estas proporciones generadas por zonas (número de contenidos desarrollados por zonas entre la totalidad de contenidos incluidos en esa zona) fue el siguiente:

C1>C3>C4>C5>C2

Tal y como se puede observar en el siguiente diagrama radial:

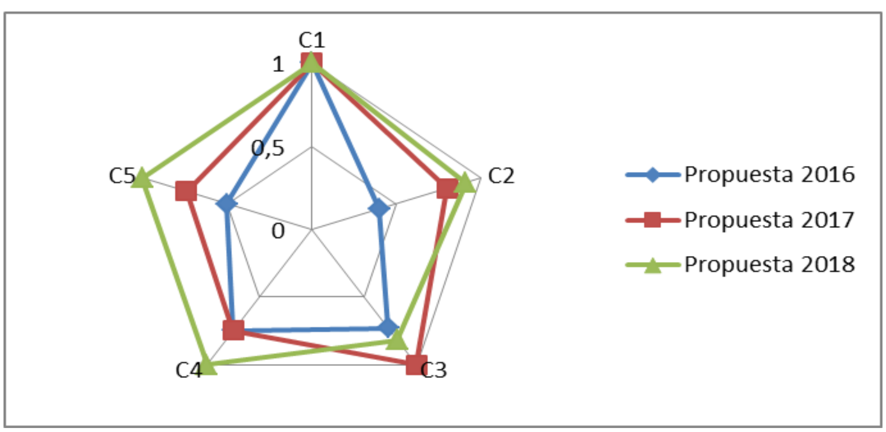


Gráfico 19. **Contenidos sobre funciones reales por zonas construidas en cada implementación de la propuesta didáctica.**

En virtud a estos resultados, se sugiere que los contenidos C2 asociados a esta zona deberían ser tomados en cuenta para su profundización en las tareas de modelización matemáticas que se diseñen para una próxima puesta en marcha de una nueva implementación. Esta leve diferencia por debajo, entre la proporción de contenidos C2 alcanzados en esta zona, en relación a las altas proporciones resultantes para las restantes zonas (C1, C3, C4 y C5), podrían ser susceptibles de mejoras, ya que pudiera afectar la apropiación de algunos de los contenidos matemáticos sobre función incluidos en C2, y por ende la capacitación del alumno sea endeble al considerar ciertos contenidos de C2 sobre las relaciones funcionales. Por ejemplo: la definición de funciones crecientes o decrecientes, la paridad e imparidad de funciones, las funciones periódicas son definiciones importantes a la hora de estudiar fenómenos cuyas variables describan movimientos oscilatorios, o periódicos, de péndulo, o que guarden ciertas simetrías o regularidades con algún objeto de referencia.

A continuación, se presenta otro gráfico donde se visualiza de manera similar los resultados anteriores: los contenidos desarrollados en C2, estuvieron en desventaja con los logrados en las otras zonas de contenidos construidas sobre función durante cada aplicación de la propuesta didáctica implementada.

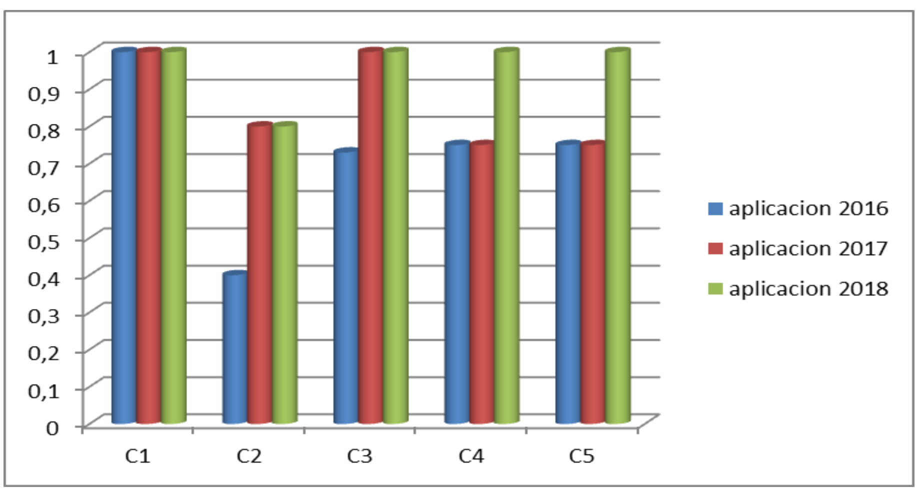


Gráfico 20. **Contenidos sobre funciones reales por zonas construidas durante cada implementación de la propuesta didáctica.**

CAPÍTULO VI

RESULTADOS DE LAS COMPETENCIAS DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA DESARROLLADAS

En este capítulo VI, se muestran los resultados de las competencias de modelización matemática que potenciaron los estudiantes en sus producciones en la búsqueda de resolver las tareas de modelización matemáticas propuestas. Específicamente, se exponen: a) los resultados de la guía de observación utilizada por los docentes involucrados en el estudio, b) los niveles de logros y su evolución alcanzados en cuanto a las competencias de modelización matemática para las aplicaciones didácticas y c) los resultados del análisis de los cuestionarios y las entrevistas realizadas.

Resultados de la Guía de Observación

Este instrumento fue aplicado en la UNEG, en tres momentos: intensivo 2016, intensivo 2017 y Semestre III-2018. La guía de observación concebida inicialmente fue utilizada en la evaluación del trabajo realizado por los estudiantes para la primera aplicación didáctica durante el año 2016; sin embargo, sufrió muchas modificaciones tratando de perfeccionar este instrumento, por lo cual no fueron considerados los resultados recolectados para ese momento en el análisis que se describirá en este capítulo.

Realmente, el instrumento se utilizó en tres oportunidades para evaluar a los participantes del entorno educativo; sin embargo, sólo se han considerado los resultados recolectados para las dos últimas aplicaciones de la propuesta didáctica, tal y como se presentan a continuación:

La segunda aplicación didáctica se implementó en una sección de la asignatura Matemática I, que concentraba alumnos de los proyectos de carrera de: ingeniería en informática, forestal y producción animal. Para la tercera puesta en marcha de la propuesta didáctica, se desarrolló nuevamente en una sección de Matemática I, pero esta vez, durante un semestre regular y sólo con alumnos del proyecto de Ingeniería en Informática.

Consecuentemente, la evaluación de los resultados de las tareas de modelización, toda vez implementada la estrategia didáctica en cada período académico, estuvo a cargo tanto por los pares de docentes especialistas que supervisaban las exposiciones de las tareas, como por parte de la docente investigadora. Específicamente, evaluaron 3 profesores a 15 estudiantes, que conformaron 5 grupos de 3 estudiantes. Mientras que para la implementación siguiente (año 2018), evaluaron 4 docentes a 13 estudiantes, quienes conformaron 6 grupos: 5 grupos con 2 estudiantes cada uno y un grupo constituido por 3 estudiantes. En resumen, evaluaron 5 docentes a un total de 28 estudiantes.

Específicamente, los evaluadores fueron profesores que laboraban en la UNEG y que habían dictado clases de cálculo universitario. Esta evaluación consistió, valga la redundancia, en evaluar la exposición de los grupos que disertaron sobre los resultados de sus tareas de modelización sobre funciones reales, para lo cual disponían de la guía de observación, como recurso disponible en físico de recolección de la información para ese momento.

La guía de observación fue diseñada con los siguientes propósitos:

a) Registrar las competencias logradas por los estudiantes al hacer uso de la modelación matemática, como gestor de cambio y contextualización del futuro ingeniero, profundizando en el pensamiento variacional en sus dimensiones algebraica, geométrica, y numérica.

b) Analizar las dimensiones (competencias de modelización matemática y conocimiento sobre función) que permitían estudiar el nivel del proceso de modelización matemática (etapas del ciclo de modelización) desarrollado por los estudiantes en general, en base a la resolución de las tareas sobre relaciones de IR en IR y funciones reales de variable real propuestas.

Los propósitos establecidos anteriormente tenían el fin de alcanzar el logro del siguiente objetivo específico:

Establecer niveles de logros y su evolución alcanzados por los estudiantes en cuanto a competencias de modelización matemática y capacidades matemáticas en relación al tema de funciones reales.

En base a lo anterior, se presenta a continuación un resumen del porcentaje de competencias "logradas" (L) y "no logradas" (NL) en función de las capacidades desarrolladas por cada competencia, producto de todas las observaciones realizadas por los profesores evaluadores, para los dos momentos (año 2017 y 2018). Estas observaciones incluyeron a todos los estudiantes que realizaron la disertación sobre sus tareas de modelización matemática.

Cuadro 16:

Porcentaje de las competencias de modelización matemática alcanzadas en el Primer paso del nivel Interpretativo.

NIVEL	COMPETENCIA DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA	CAPACIDAD	2017		2018	
			L	NL	L	NL
INTERPRETATIVO	**Primer Paso, (Ortiz 2002): De la situación del mundo real al modelo real:** Consistió en plantearse la resolución de un problema desde la tarea de modelización propuesta, diseñando el modelo real que representaba la situación real del problema. -Competencia para identificar y estructurar situaciones problemas. -Competencia para entender y analizar el problema real. (Procesos Pensar y razonar)	Formulan el problema	67	33	100	0
		Reconocen la variable dependiente e independiente en un problema propuesto.	67	33	100	0
		Elaboran el modelo real de la situación problema planteada.	67	33	100	0
		Hacen representaciones gráficas del modelo real que se genera del enunciado del problema.	67	33	100	0
		Interpretan un problema de funciones del mundo real al contexto matemático, es decir, modelan de la realidad a un posible modelo.	67	33	100	0
		Interpretan las variables del modelo matemático obtenido en función del modelo real.	67	33	100	0

Cuadro 17:

Porcentaje de las competencias de modelización matemática alcanzadas en el Segundo paso del nivel Argumentativo.

<table>
<tr><th rowspan="2">NIVEL</th><th rowspan="2">COMPETENCIA DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA</th><th rowspan="2">CAPACIDAD</th><th colspan="2">2017</th><th colspan="2">2018</th></tr>
<tr><th>L</th><th>NL</th><th>L</th><th>NL</th></tr>
<tr><td rowspan="10">ARGUMENTATIVO</td><td rowspan="10">Segundo Paso, (Ortiz 2002): Construcción del Modelo Matemático. Matematizando: Se tradujo el problema a una representación matemática o modelo matemático, tomando en cuenta las posibles relaciones matemáticas construidas y el conocimiento matemático vinculado.
-Competencia para crear un modelo matemático a partir de términos reales.
(Procesos: Pensar y razonar, argumentar, comunicar, utilizar lenguaje formal y técnico y usar herramientas y recursos).</td><td>Construyen el modelo matemático desde la dimensión algebraica.</td><td>67</td><td>33</td><td>100</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Construyen el modelo matemático desde la dimensión numérica.</td><td>67</td><td>33</td><td>100</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Construyen el modelo matemático desde la dimensión geométrica.</td><td>67</td><td>33</td><td>100</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Explican por qué es o no es una función.</td><td>67</td><td>33</td><td>100</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Identifican las expresiones algebraicas que representan a las funciones reales.</td><td>67</td><td>33</td><td>100</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Justifican la escogencia del modelo analítico que mejor se ajusta a los datos representados geométricamente.</td><td>67</td><td>33</td><td>100</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Realizan varias representaciones de la relación funcional obtenida: algebraica, numérica, geométrica.</td><td>67</td><td>33</td><td>100</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Traducen información entre dimensiones: de la numérica a la geométrica o viceversa, de la geométrica a la algebraica o viceversa, de la algebraica a la numérica o viceversa.</td><td>67</td><td>33</td><td>100</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Elaboran el diagrama de dispersión que surge de los datos dados.</td><td>67</td><td>33</td><td>100</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Utilizan los sistemas de representación gráfica para hacerse entender.</td><td>67</td><td>33</td><td>100</td><td>0</td></tr>
</table>

Cuadro 18:

Porcentaje de las competencias de modelización matemática alcanzadas en el Tercer paso del nivel Argumentativo.

NIVEL	COMPETENCIA DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA	CAPACIDAD	2017		2018	
			L	NL	L	NL
ARGUMENTATIVO	**Tercer Paso, (Ortiz 2002): Elección de los contenidos y métodos matemáticos apropiados. Realizar el trabajo matemático. Gutierrez, Prieto y Ortiz (2017):** -Competencia para trabajar con el modelo matemático. -Competencia para determinar y manejar variables. -Competencia para interpretar el modelo en términos reales. -Competencia para interpretar el modelo en términos del dominio del software GeoGebra. -Competencia para manipular las variables (parámetros) del modelo computacional. -Competencia para comparar alternativas de solución de la situación problema. -Competencias para la toma de decisiones en la elección de la mejor alternativa de solución. -Competencia para comunicar el modelo y sus resultados. -Competencia para usar lenguaje formal y técnico. -Competencia para simular la situación problema mediante el GeoGebra. (Procesos: Argumentar, comunicar y modelar, utilizar lenguaje formal y técnico y usar herramientas y recursos).	Analizan gráficamente el dominio y el rango de una función.	53	47	100	0
		Determinan el dominio y rango algebraicamente de las funciones dadas	67	33	100	0
		Determinan asíntotas verticales y horizontales (si existen).	67	33	85	15
		Determinan traslaciones (horizontales y/o verticales) de las funciones básicas.	27	73	100	0
		Hallan la representación funcional que mejor se asemeje a la sucesión, dada esta sucesión de puntos en el plano cartesiano.	67	33	100	0
		Determinan la mejor alternativa de respuesta al problema planteado.	67	33	100	0
		Argumentan cuándo un punto pertenece a la gráfica de una función.	67	33	100	0
		Justifican sus hallazgos en la aplicación del GeoGebra	67	33	100	0
		Representan cortes del gráfico de la función con los ejes coordenados (si existen).	67	33	85	15
		Representan algún tipo de simetrías del gráfico de la función (en caso de existir).	13	87	58	42
		Reconocen los intervalos de crecimiento o decrecimiento de función de manera gráfica	67	33	100	0
		Determinan amplitud de las curvas dadas	20	80	54	46
		Crean listas de puntos a partir del comportamiento de la función en la vista gráfica y algebraica del GeoGebra.	67	33	100	0
		Utilizan tablas de valores relativas al comportamiento de la función en la vista geométrica del GeoGebra.	67	33	100	0
		Representan los modelos matemáticos obtenidos en el GeoGebra	67	33	100	0
		Reconocen las tasas de cambios implícitas en los modelos construidos (la derivada de una función real)	13	87	62	38
		Analizan el comportamiento de ciertas gráficas y lo discuten con sus compañeros.	67	33	100	0
		Interpretan y expresan el significado de las transformaciones de los parámetros que intervienen en el modelo computacional.	67	33	100	0
		Muestran sus resultados al grupo mediante el uso del GeoGebra.	67	33	100	0
		Expresan a otros sus razonamientos en la solución de un problema.	67	33	100	0

NIVEL	COMPETENCIA DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA	CAPACIDAD	2017		2018	
			L	NL	L	NL
		Encuentran el punto mínimo o el máximo en las funciones dadas, en caso de existir	67	33	49	3
		Concluyen críticamente en base a sus resultados.	67	33	52	0
		Trasladan funciones	67	33	52	0
		Contraen o dilatan funciones	40	60	94	6
		Obtienen el modelo computacional en GeoGebra	67	33	94	6
		Simulan el comportamiento del fenómeno estudiado con apoyo del GeoGebra	67	33	100	0
		Manejan un lenguaje natural y un lenguaje técnico.	67	33	100	0
		Usan propiedades del álgebra de funciones	33	67	100	0
		Recrean realidades de la situación problema en el GeoGebra.	67	33	100	0
		Manejan enunciados de funciones donde se incorpora un lenguaje técnico para representar el modelo	67	33	100	0
		Hacen cálculos usando las variables implícitas en el modelo.	67	33	100	0

Cuadro 19:

Porcentaje de las competencias de modelización matemática alcanzadas en el Cuarto paso del nivel Propositivo.

NIVEL	COMPETENCIA DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA	CAPACIDAD	2017		2018	
			L	NL	L	NL
PROPOSITIVO	**Cuarto Paso, (Ortiz 2002): Interpretación y Validación de los Resultados.** -Competencia para interpretar el resultado en la situación real. -Competencia para validar los modelos obtenidos. -Competencias para predecir en base al modelo obtenido. (Procesos: Argumentar, comunicar y modelar, utilizar lenguaje formal y técnico y usar herramientas y recursos).	Comunican limitaciones o potencialidades del modelo construido	27	73	94	6
		Infieren el comportamiento de la variable independiente al establecer condiciones para la variable dependiente.	67	33	100	0
		Validan el modelo matemático y computacional obtenido.	67	33	100	0
		Evalúan resultados y verifican si el modelo obtenido se ajusta a los requerimientos o condiciones del problema.	67	33	100	0
		Realizan predicciones con el modelo construido.	33	67	100	0
		Reflexionan y disertar en torno a los problemas asociados al fenómeno estudiado, con un tratamiento socio-cultural	67	33	100	0
		Aplican la modelación matemática para el estudio de nuevos fenómenos en otros contextos	67	33	100	0
		Comparan los modelos matemáticos de fenómenos similares.	67	33	100	0
		Realizan análisis crítico de la problemática que abordan los problemas estudiados; bien sea ambiental, cultural, social, entre otros.	67	33	100	0

En general, se pudo deducir de los resultados asentados en este instrumento, que los estudiantes desarrollaron una cantidad sustancial de competencias de modelización matemática en cada nivel del proceso de modelización matemática considerado, al pasearse por las fases establecidas por Houston (1998). El desarrollo de los ciclos de modelización matemática seguidos permitió la profundización de las capacidades logradas y pusieron en evidencia aquellas ínfimas que no lograron desarrollar una minoría circunstancial de los estudiantes. Tal y como se puede observar mediante los siguientes gráficos:

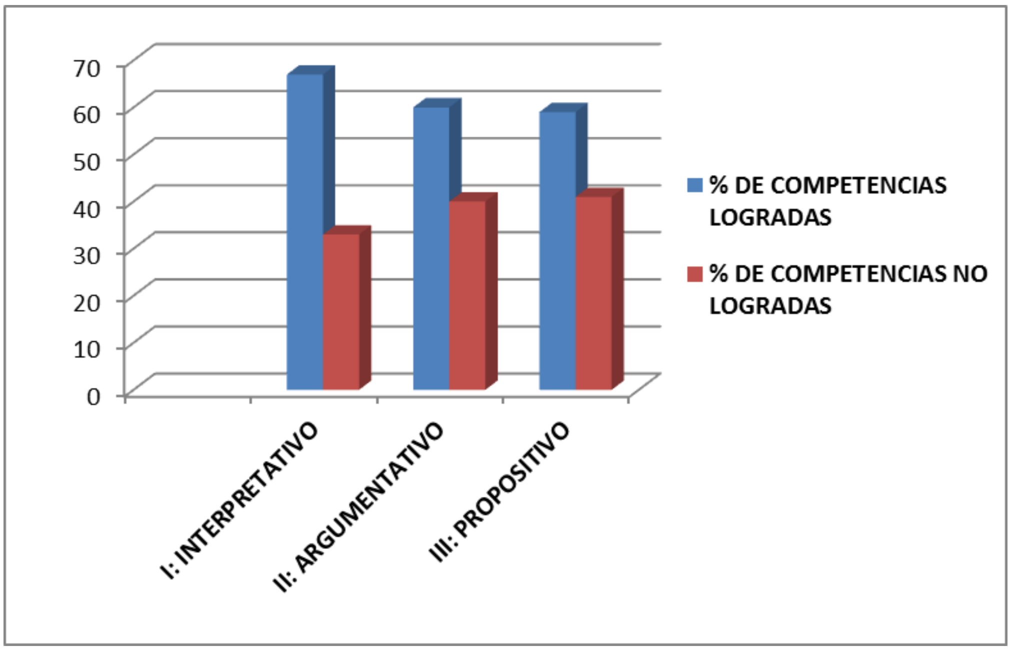


Gráfico 21. **Porcentaje de las competencias de modelización matemáticas “logradas” y “no logradas” por los estudiantes, para la implementación de la propuesta didáctica en el período académico intensivo del año 2017.**

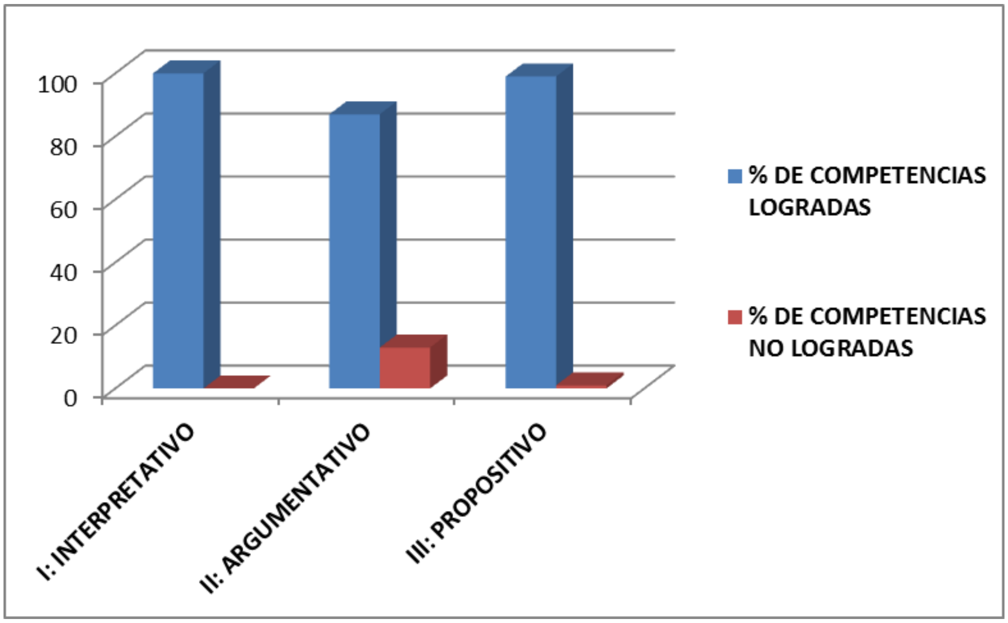


Gráfico 22. **Porcentaje de las competencias de modelización matemáticas "logradas" y "no logradas" por los estudiantes, para la implementación de la propuesta didáctica en el período académico regular III-2018.**

En definitiva, los docentes consultados registraron las competencias de modelización matemática logradas por los estudiantes al hacer uso de la modelación matemática y con apoyo del software GeoGebra, como gestor de cambio y contextualización del futuro ingeniero. Se desarrollaron competencias para: identificar y estructurar situaciones problema, entender, analizar y simular los modelos reales construidos, crear modelos matemáticos a partir de términos reales, trabajar con el modelo matemático, determinar y manejar variables, interpretar el modelo en términos reales, interpretar el modelo en términos del dominio del software GeoGebra, manipular las variables y parámetros del modelo computacional, comparar alternativas de solución de la situación problema, tomar decisiones en la elección de la mejor alternativa de solución, comunicar el modelo y sus resultados, usar lenguaje formal y simular la situación problema estudiada mediante el uso del GeoGebra.

En cuanto a la evolución mostrada a lo largo de las dos últimas aplicaciones de la propuesta didáctica se pudo deducir que los estudiantes aumentaron los porcentajes de logros de manera progresiva en cada capacidad y en función de los niveles de competencias de modelización matemática establecidos por la investigadora (interpretativo, argumentativo y propositivo); los cuales se consolidaron y cobraron auge cada año.

De esta manera, los resultados de la implementación de la propuesta didáctica fue mejorando en el tiempo y esto se evidenció en los porcentajes de logros de las capacidades matemáticas desarrolladas que constituyeron las competencias de modelización matemática, al comparar los años 2017 y 2018. Estos resultados se pueden corroborar mediante el siguiente gráfico:

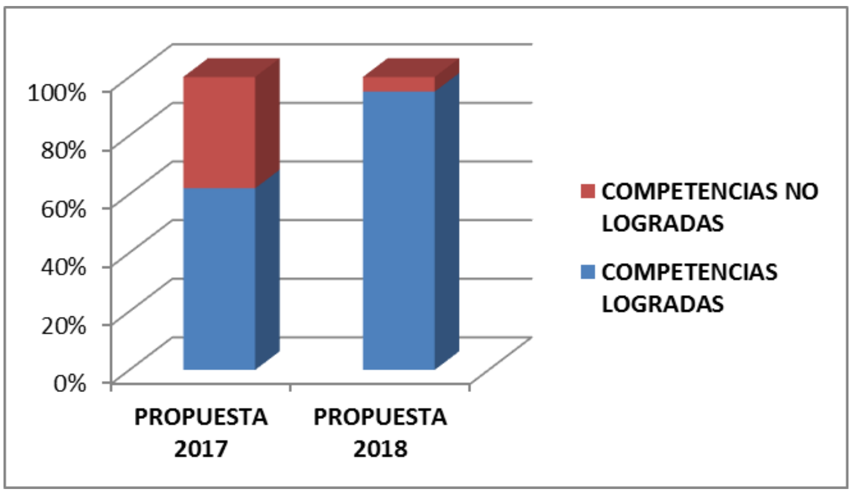


Gráfico 23. **Competencias "logradas" y "no logradas" durante la implementación de la propuesta didáctica aplicada durante un período académico de los años 2017 y 2018.**

A continuación se muestra un cuadro que sintetiza el porcentaje de competencias "logradas" (L) y "no logradas" (NL) en función de las capacidades desarrolladas durante las dos aplicaciones del modelo didáctico implementado en los años 2017 y 2018, contentivo de cada uno de los niveles establecidos en el desarrollo del ciclo de modelización matemática. Finalmente, se totaliza el porcentaje de competencias "logradas" y "no logradas" en general, durante las dos aplicaciones desarrolladas. A su vez, se especifica el número total de capacidades definidas en cada nivel establecido durante la ejecución de cada fase del ciclo de modelización matemática.

Cuadro 20.

Resumen Competencias de Modelización Matemática vs Número de Capacidades por nivel establecido.

NIVELES	COMPETENCIAS				NÚMERO DE CAPACIDADES
	% LOGRADAS		% NO LOGRADAS		
	2017	2018	2017	2018	
I: INTERPRETATIVO	67	100	33	0	5
II: ARGUMENTATIVO	60	87	40	13	43
III: PROPOSITIVO	59	99	41	1	7
SUBTOTAL	62	95	38	5	55

Se puede observar al comparar los resultados de ambas aplicaciones que el porcentaje de competencias logradas mejoraron sustancialmente en el tiempo; lo que es producto de las evaluaciones continuas que se sostenían con los pares de expertos que acompañaron la investigación durante los experimentos de diseño y sus correctivos oportunos para una próxima sesión de clases. Siempre en la búsqueda del perfeccionamiento continuo de la propuesta didáctica diseñada, tratando de mejorar las deficiencias y lograr en una próxima sesión de clases, superar las carencias detectadas en la clase anterior; además de motivar a los estudiantes a trabajar en equipo con ahínco para obtener el desarrollo máximo posible de competencias matemáticas en torno al tema de funciones y el dominio de algunos conocimientos sobre funciones. Todo lo anterior, con el fin último de contribuir desde la propuesta didáctica, en la formación matemática de los futuros ingenieros egresados de la UNEG, con el manejo de un lenguaje técnico-formal adecuado, la profundización de ciertos conocimientos sobre función y la potenciación de competencias de modelización.

En cuanto al logro de cada nivel se ubicó siempre por encima de la media porcentual; incluso mejorando significativamente entre una aplicación didáctica y la del año anterior. Mientras que por el contrario, el porcentaje de competencias "no logradas", fue disminuyendo en el trascurrir del tiempo.

De todo lo antes expuesto, se puede concluir que los niveles establecidos durante el desarrollo del ciclo de modelización matemática en cada práctica, se alcanzaron con un nivel óptimo de alcance y profundización, en cuanto a las competencias matemáticas definidas y capacidades matemáticas desarrolladas.

Niveles de logros y su evolución alcanzados por los estudiantes en cuanto a las competencias de modelización matemática para las aplicaciones didácticas del año 2017 y 2018.

Se presentan a continuación los niveles de logros en cuanto a las competencias de modelización matemática alcanzadas, cuyos registros fueron recolectados mediante las guías de observación utilizadas en las implementaciones didácticas aplicadas durante un período académico del año 2017 y 2018.

Cuadro 21.

Porcentaje de competencias de modelización matemática "logradas" por niveles.

Niveles	Porcentaje de Competencias 2017	Porcentaje de Competencias 2018
Interpretativo	67	100
Argumentativo	60	87
Propositivo	59	99

Los resultados anteriores se exponen mediante el siguiente diagrama radial:

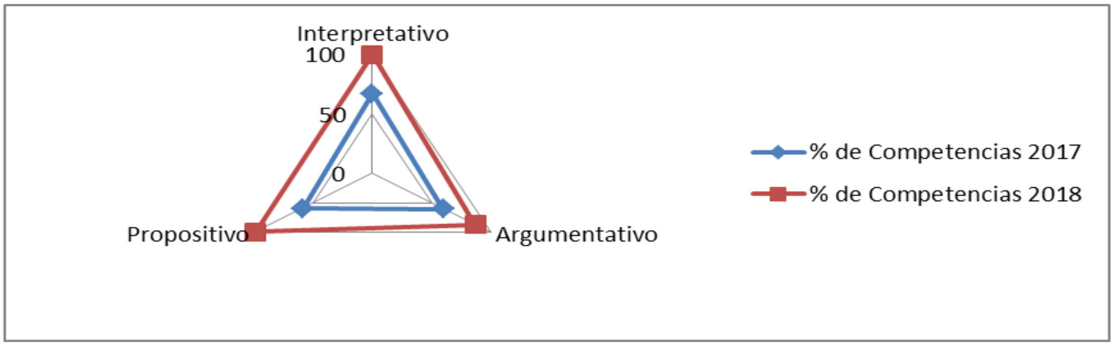


Gráfico 24. **Evolución de los niveles de las competencias de modelización matemática "logradas" en las propuestas didácticas implementadas para los años 2017 y 2018.**

El gráfico anterior refleja la evolución que presentaron los estudiantes en cuanto a las competencias de modelización matemática logradas por nivel, durante las propuestas didácticas aplicadas para los años 2017 y 2018. La información para estudiar esta evolución fue recolectada desde los registros acumulados en las guías de observación, que llenaron los docentes quienes acompañaron el estudio, a lo largo de los dos últimos años de implementación de la propuesta didáctica.

La interpretación de los registros arrojó que para la propuesta didáctica implementada durante el año 2018, se logró el mayor número de competencias de modelización matemática, en relación a la implementación didáctica desarrollada para el año 2017. La afirmación anterior se asume para cada uno de los tres niveles de las competencias de modelización desarrolladas (interpretativo, argumentativo y propositivo), durante el ejecútese de las fases del ciclo de modelización matemática: 5 fases, según Houston, (1998) presentadas en el capítulo II.

En el gráfico radial, mientras los valores se acercaban más a los extremos su frecuencia era más alta. De esta manera, el polígono que se generó con las frecuencias de las competencias de modelización matemática alcanzadas para el año 2018, cubrieron mayor área que el polígono construido con las frecuencias correspondientes para el año 2017. En virtud a ello, se asumió que mientras los valores se acercaban más a los extremos, mayor era el porcentaje de logro de las competencias de modelización alcanzadas; esto se interpreta como mayor fue el número de competencias de modelización desarrolladas en la aplicación didáctica realizada en el año 2018 para cada nivel establecido.

En base a lo anterior, se concluye que la evolución de cada nivel de competencias de modelización matemática alcanzado, durante cada implementación de la propuesta didáctica, fue progresiva en el tiempo; en fin, esto confirma que el diseño de la propuesta didáctica ha sido perfectible en cada período en la cual se desarrolló.

La afirmación anterior, sólo corrobora que la propuesta diseñada para la enseñanza y aprendizaje de las funciones siempre estuvo sujeta a mejoras, con el acompañamiento de los docentes involucrados y anclada en los experimentos de diseños.

Resultados del Análisis de los Cuestionarios y las Entrevistas Realizadas

El análisis de la información que arrojaron las entrevistas y los cuestionarios aplicados a los docentes vinculados al estudio, permitió desde su opinión develar parte del impacto de la implementación de la propuesta didáctica basada en la triada conformada por: la modelación matemática como metodología de acción en la formación matemática de los futuros ingenieros, para activar la resolución de tareas que abordaban las funciones reales de variable real, con apoyo del software dinámico GeoGebra.

Mediante la implementación de la propuesta didáctica diseñada en este estudio se obtuvieron las siguientes afirmaciones, generadas desde el punto de vista de los docentes que acompañaron la investigación como observadores y participantes directos en el estudio:

1. La propuesta didáctica implementada fortaleció el proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones reales de variable real, ya que los estudiantes pudieron apropiarse de todo un conocimiento matemático sobre funciones reales: definiciones, propiedades, gráficos, operaciones con funciones, entre otros.

   Los estudiantes presentaron evidencias del dominio en la construcción de los modelos funcionales estudiados en la asignatura Matemáticas I que relacionaban modelos de la vida real con modelos matemáticos y computacionales. Como prueba de esta afirmación, se muestran evidencias en el sitio web, cuya dirección es: https://www.youtube.com/watch?v=Kp5CiT79Ic4&feature=youtu.be.
2. Los estudiantes pudieron construir modelos matemáticos que se aproximaban al comportamiento de las variables que intervenían en los fenómenos estudiados y por el contrario, pudieron asociar una relación funcional dada inicialmente con el comportamiento de un fenómeno en particular.
3. Las tareas de modelización matemática planteadas a los estudiantes, como metodología de acción en la propuesta didáctica, permitieron la comprensión de las relaciones funcionales que se establecieron en el estudio de ciertos fenómenos del mundo real.
4. La implementación de la Modelización Matemática sugerida mediante la propuesta didáctica, permitió analizar problemas matemáticos contextualizados asociados a fenómenos del mundo de la ingeniería; tales como: el crecimiento poblacional en Venezuela, el crecimiento del nivel del agua del río Orinoco en ciertos períodos del año, el proceso de neutralización del lodo rojo, la exportación e importación de algunos rubros en Venezuela, la construcción de algunas piezas fabricadas de las industrias básicas de la región Guayana, identificación de algunas relaciones matemáticas inmersas en el mecanismo de suspensión de algunos puentes colgantes emblemáticos en

el país, entre otros. De este modo, el estudiante de ingeniería, desde el inicio de su formación matemática universitaria se familiarizó con el planteamiento e interpretación de fenómenos naturales que lo capacitarán de manera integral, para ir consolidando las bases de una formación estratégica y holística, con experiencias previas en su campo laboral como parte de su formación integral.

5. Los estudiantes desarrollaron competencias matemáticas al realizar las tareas de modelización matemática asignadas; tales como: Identificaron los puntos de los datos del fenómeno estudiado, buscaron la función que pasaba por la mayoría de los puntos dados, según el menú del GeoGebra, identificaron los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función que modela el fenómeno, entre otros.
6. La Modelización Matemática consolidó espacios de reflexión para la toma de decisiones en la escogencia del modelo que mejor se ajustaba a los datos presentados y lo más trascendental, que éstas decisiones fueron generadas como resultado de los debates colectivos que se presentaron; de manera que se inducía a los estudiantes a trabajar en conjunto por el logro de un objetivo en común, competencia establecida en el perfil de un ingeniero.
7. Los estudiantes mostraron dominio y eficiencia en la construcción de funciones, en identificar las propiedades características de las funciones reales en cada modelo matemático construido; tales como: el dominio, el rango, las asíntotas, los intervalos de crecimiento o decrecimiento de la función estudiada, puntos de cortes con los ejes, la función inversa, algunas propiedades del álgebra de funciones y/o de la composición de funciones durante las experiencias prácticas desarrolladas en el laboratorio de computación al usar GeoGebra.
8. La incorporación de la modelización matemática para la enseñanza y aprendizaje de las funciones reales, pudo integrar contenidos curriculares de varias asignaturas de los programas de ingenierías, lo que potencia una educación integral de calidad.
9. El uso de la modelización matemática en la propuesta didáctica permitió modelar fenómenos y sobre todo desde las simulaciones, predecir el comportamiento futuro de determinados fenómenos. Por ejemplo, están en boga los estudios de análisis de estructuras en caso de desastres naturales: sismos, tsunami, huracanes, entre otros. En base a las simulaciones realizadas con el modelo construido, el aprendiz de la ingeniería

pudiera predecir hasta cuándo pueden soportar ciertas estructuras altas intensidades de movimiento de las capas tectónicas, o prever ciertas eventualidades ocasionadas por las alertas de emergencias declaradas en mar adentro, al comparar lo que dice la teoría y la experimentación usando el GeoGebra.

10. Mediante el uso de modelización matemática se debe despertar la curiosidad matemática del estudiante en todas las disciplinas que comprende el currículo de los proyectos de ingenierías, incluso se puede extrapolar los ambientes de enseñanza y aprendizaje. Por ejemplo, para un estudiante de la ingeniería en producción animal, puede plantearse problemáticas en torno a fenómenos de fluidos, donde se podría estimar fuera del aula de clases, qué cantidad de sangre hay en un torrente sanguíneo, en caso de presentarse una arterioesclerosis en un bobino, estimar cuándo se pone en riesgo la vida de ese paciente, en qué tiempo se podría intervenir, que cantidad y cuáles alimentos puede ingerir sin afectar el cuadro que presenta y otras consideraciones que se pueden colocar como problemáticas a estudiar en ambientes educativos no habituales regularmente.
11. La formación matemática del futuro ingeniero se robusteció con la incorporación del uso de las tecnologías, desde la aplicación del software interactivo GeoGebra, el cual contribuyó en la visualización geométrica y la interpretación de los registros numéricos dados, necesarios para lograr la construcción de los modelos matemáticos obtenidos. A su vez, los estudiantes de las carreras de ingenierías cursantes del primer semestre en Matemáticas I, manifestaron las bondades y ventajas en cuantos a entornos virtuales se refiere y la facilidad de manejo del software en la construcción de los modelos funcionales obtenidos.
12. El uso del GeoGebra permitió cierta libertad al estudiante en su búsqueda de resolver las problemáticas planteadas, incluso utilizando manuales y tutoriales provistos por la web (Internet), lo cual propició el hecho de formarse como una persona autodidacta.
13. La aplicación del software permitió que los estudiantes comunicaran ideas matemáticas sobre funciones reales mediante varios sistemas de representación, lo cual enriquece su lenguaje técnico formal. Específicamente, los estudiantes pudieron representar funciones en varios registros de representación (el algebraico, el geométrico y el numérico), donde las herramientas del software GeoGebra favorecieron el trabajo

logrado en las distintas dimensiones de representación e impulsaron una comunicación fluida entre los participantes de las clases.

14. El uso del software contribuyó a la comprensión, por parte de los estudiantes, de algunos de los fenómenos estudiados; además de contribuir en la tarea de simular éstos fenómenos; tales como: el crecimiento y decrecimiento del nivel del agua del río Orinoco, las simulaciones de la dinámica poblacional, la construcción de una chimenea industrial, la cual no representaba un fenómeno, sino una pieza de una estructura fabricada en la empresa Vhicoa, empresa estatal ubicada en la región Guayana.
15. La aplicación del software fomentó espacios para que los alumnos realizaran predicciones, con las herramientas que posee, de acuerdo al modelo construido que representaba el fenómeno en estudio.
16. Los profesores consideraron que, a la par de dar la teoría de funciones, se debería usar el GeoGebra para ver gráficamente las propiedades de éstas e ir más allá de lo abstracto y buscar en lo posible, ejemplos de fenómenos ya estudiados para que el estudiante digiera en forma más natural la teoría.
17. El software GeoGebra en los primeros cursos de matemática, le va dando herramientas al futuro ingeniero para su desempeño y a su vez, los integra al trabajo en equipo, a la discusión con argumentos técnicos sobre el tema a tratar y finalmente a sacar conclusiones de lo realizado.

Para los futuros ingenieros es fundamental en su formación matemática el uso de la modelización matemática y de las tecnologías, ya que su mundo profesional estará lleno de fenómenos que se puedan modelar y simular, y la sociedad lo demanda cada día con mayor necesidad para dar respuestas a los cambios tan vertiginosos que sufre actualmente.

CAPITULO VII

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LAS TAREAS DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA DESARROLLADAS

En este capítulo se describirá cómo fue el desarrollo del proceso de modelización matemática seguido en la resolución de los problemas planteados y bajo el método de los experimentos de enseñanzas. Esto último ha sido de motivación personal para la investigadora, la experimentación de una propuesta metodológica con el acompañamiento permanente de un equipo de trabajo, fue edificante el hecho de compartir con otros docentes las vivencias educativas in sitio, aparte de todas las contribuciones que se fueron incorporando al diseño de propuesta didáctica, producto de las retroalimentaciones que se daban después del término de las sesiones de clases.

Análisis de los Resultados de la Tarea 1: Cableado que Sostiene el Puente Angostura.

Se presenta a continuación el análisis de esta tarea de modelización matemática, que planteó un problema relativo a la trayectoria que describe una cuerda del cableado que sostiene el puente Angostura, ubicado en el Estado Bolívar, Venezuela.

El siguiente cuadro presenta información del proceso de modelización matemática seguido para la resolución de este problema, que consistió en: el establecimiento de un modelo matemático, que representara a un sector de la cuerda del cableado que sostiene este puente.

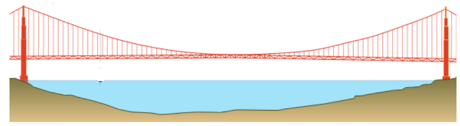
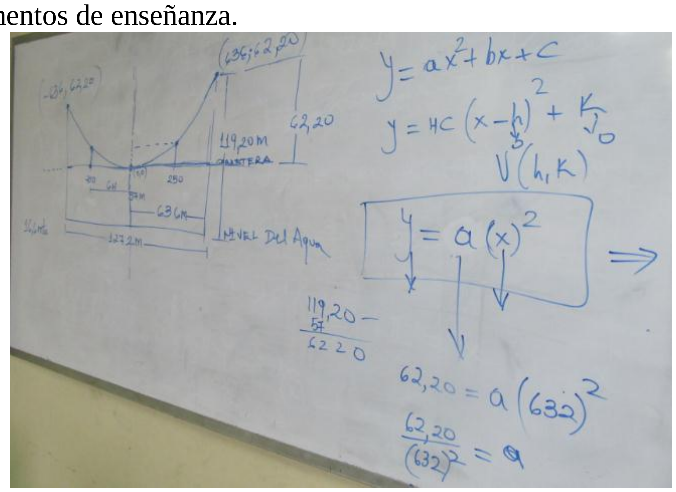
Específicamente, se desarrolló la secuencia de modelización matemática planteada por Maaß (2006): Se simplificó el problema a un modelo real, el cual se matematizó mediante un modelo matemático, lo cual generó una alternativa de solución. Luego, se interpretó el resultado en el contexto del problema y finalmente se validó.

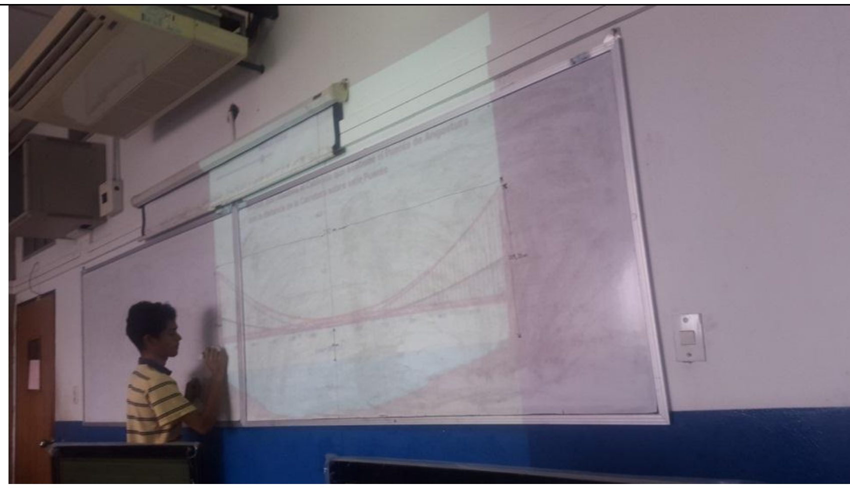
La secuencia de estos procesos no siempre se dio en el orden descrito anteriormente; sin embargo, el desarrollo de todo proceso de modelización matemática siempre describe un ciclo (que no necesariamente siempre describe la misma secuencia de acción). Aquí, se producen continuas transformaciones en la búsqueda permanente del perfeccionamiento progresivo en la calidad de la respuesta obtenida, la interpretación y validación del modelo de acuerdo a las condiciones iniciales, además de las inferencias y predicciones que tienen lugar, en función al modelo que se construye.

Cuadro 22.

Análisis de los Resultados de la Tarea: Cableado que Sostiene el Puente Angostura

ELEMENTO ANALIZADO	**CARACTERIZACIÓN**
Expectativas de Aprendizaje: Problema Desarrollado en la cuarta sesión de clases. **Perspectiva de Modelización: Modelación Realística y Aplicada**	Este problema consistió en la construcción de un modelo que se aproximara a la trayectoria que forma un pedazo de la cuerda que constituye el cableado que sostiene el puente Angostura, ubicado en el Estado Bolívar. Venezuela  Imagen del puente Angostura ubicado en Ciudad Bolívar, Estado Bolívar. Venezuela. Fuente:http://www.arqhys.com/articulos/fotos/articulos/Puente-de-Angostura-Venezuela.jpg
Fases: Fase I. Interpretación de los datos. **Nivel del Proceso de Modelización Matemática exigido: Argumentativo**	Consistió en especificar el problema matemáticamente: interpretar las condiciones iniciales
Dimensión	Afectiva
Análisis Didáctico Desarrollado	De Contenido, Cognitivo y de Instrucción
Perspectiva de Modelización	Curricular e Investigativo
Estructura Conceptual (Perspectiva de Aprendizaje)	C1, C2, C3, C4 y C5
Competencias de	-Competencia para identificar y estructurar la situación real del

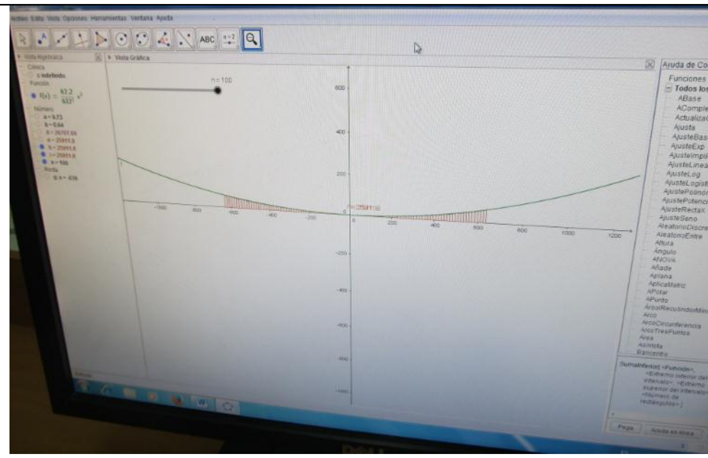
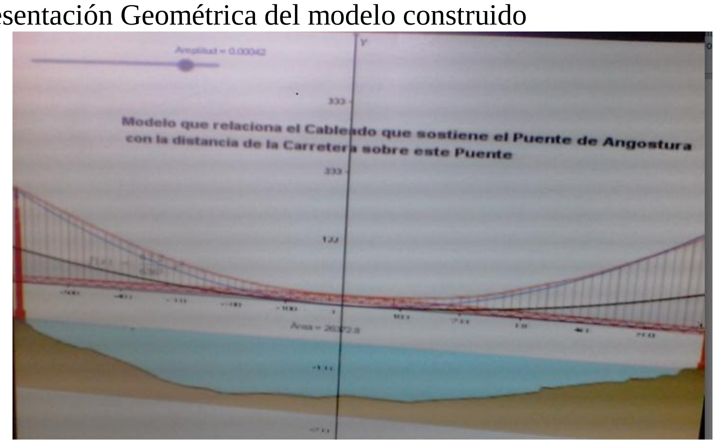
Modelización Matemática Desarrollada en Fase I	problema, una vez presentado el mismo. -Competencia para entender y analizar el problema real.
Nivel en el Proceso de Modelización Matemática	Interpretativo
Representación Real	Modelo Real que representó el puente Angostura 
Registros: Datos Iniciales	Los estudiantes contaron con algunas medidas concretas en el enunciado del problema, completaron otras de manera de construir un modelo matemático que se adecuara a la curva que formaba el cableado en suspensión en este puente colgante. Tales como: la altura de las torres que sostienen el puente equivale a 119,20 m.; la distancia entre las torres es igual a 1,272 m.; el tablero del puente o carretera se encuentra a 57 m. sobre el nivel del agua, se asume que los cables tocan el tablero (carretera) en el centro del puente y se supone que esta carretera es recta.
Fases: Fase II. Creación del Modelo Matemático. **Nivel del Proceso de Modelización Matemática exigido: Argumentativo**	A continuación se evidencia cómo fue evolucionando el nivel de desarrollo de los procesos alcanzados durante el ciclo de modelización matemática, en cuanto a la construcción del modelo matemático durante cada aplicación de la propuesta didáctica a lo largo de los tres años consecutivos que se implementó; siempre en la búsqueda de ese perfeccionamiento continuo de la propuesta didáctica que exigen los experimentos de enseñanza.  Aplicación durante el año 2016: la construcción del modelo se logró con la ayuda de la docente investigadora, utilizando como medio la pizarra acrílica. Aplicación durante el año 2017: la obtención del modelo matemático se logró con la ayuda del docente, pero hubo más intervención de los estudiantes en esta construcción y se utilizó para ello un modelo real cuya representación se proyectó en la pizarra simulando una escena del problema.



Aquí, los alumnos representaron gráficamente el problema. Reconocieron las variables que intervenían en el fenómeno en estudio y encontraron el modelo ($y=ax^2$) que se ajustaba a la curva que describía la trayectoria de los cables al determinar los valores de a, b y c desde el modelo general: $y=ax^2+b\text{x}+c$.
Aplicación durante el año 2017: Los estudiantes construyeron el modelo real, el modelo matemático, simularon una escena del problema real, determinaron características de la relación funcional, evaluaron la función, calcularon áreas bajo curvas, variaron los parámetros presentes en el modelo construido con ayuda del GeoGebra, haciendo la interpretación respectiva de cómo influyen estos cambios en la relación existente entre las variables inmersas en el problema; con esto último, trabajaron el pensamiento variacional.
Para la aplicación del año 2018: Desarrollaron todos los procesos anteriores más la adecuación del modelo que representó la trayectoria del cableado del puente "Angostura" en Ciudad Bolívar, a una situación similar a partir de la que se pudo generar con el cableado que sostiene al puente "Orinoquia" que reposa sobre el mismo Río Orinoco, pero ahora en Ciudad Guayana.

Imagen del puente "Orinoquia", ubicado sobre el río Orinoco en Puerto Ordaz, Estado Bolívar. Venezuela. Puente de hormigón y acero, cuyas piezas fueron fabricadas mayormente en Vhicoa, empresa aledaña a la zona donde reposa este puente.

Perspectiva de Modelización	Educativa
Dimensión	Cognitiva
Análisis Didáctico	Cognitivo, de actuación, de instrucción y evaluativo. Aunque los tres primeros análisis son a priori (antes de la aplicación del diseño instruccional) este necesitó, por la metodología desarrollada en la investigación, del mejoramiento progresivo de cada sesión de trabajo subsiguiente; para ello, se hizo una retrospección continua de la sesión de clases anterior, una nueva revisión y análisis de la guía de instrucción que se implementó, tanto de los objetivos, las estrategias metodológicas, los contenidos y los procesos desarrollados, el uso del software, la presentación de los resultados de las tareas de modelización, la comunicación de los mismos, entre otros aspectos considerados en este estudio.
Nivel en el Proceso de Modelización Matemática exigido	Argumentativo
Competencias	Competencias para crear el modelo matemático y computacional a partir de términos reales.  Imagen que evidencia parte del trabajo matemático desarrollado por los estudiantes en la resolución de éste problema planteado
Fases: Fase III. Trabajo Matemático.	Algunos Modelos Matemáticos y los Modelos Computacionales que se construyeron: $$y = a * x^2$$ Una vez, obtenido el modelo particular $y = \frac{62,20}{(632)^2}x^2$ introdujeron en la barra de entrada del GeoGebra, percibiendo simultáneamente su representación gráfica en el mismo. Luego, simularon el fenómeno, ilustrando mediante una imagen la situación problema y a continuación experimentaron el comportamiento que seguía la función generalizada ($y=ax^2$) al variar el parámetro a, mediante la construcción del deslizador a, el cual representaba la amplitud de la parábola. Establecieron conjeturas: siendo $a>0$, mientras a es más grande la función se ajusta más al eje 0Y y por lo tanto la función f crece más rápido.

Fases: Fase III. Trabajo Matemático. Pensamiento Variacional	 Imagen correspondiente a la vista gráfica del GeoGebra, donde se realizaba la asignación de parámetros correspondientes a la amplitud de la curva para visualizar sus efectos en la representación gráfica. De esta manera, se abordó el pensamiento variacional.
Tipos de Representaciones: Algebraica y Geométrica del modelo construido.	Representación Geométrica del modelo construido  Imagen del trabajo realizado en GeoGebra por un grupo de estudiantes, cuando variaban el parámetro a: $amplitud\ de\ la\ curva$.
	Seguidamente, determinaron la altura de los cables a una distancia de 250 metros del centro del puente, suponiendo que la carretera era plana. Determinaron la altura de los cables, una vez que se habían recorrido 700 metros en un sentido de la trayectoria del puente. Calcularon el área de la carretera asfaltada sobre el puente Angostura. Encontraron el área encerrada bajo la curva que describía el tendido de uno de los cables, las rectas que representaban la altura de las torres y el eje X, representado por la carretera sobre el puente. Tal y como se muestra en la siguiente figura extraída de la pantalla principal del GeoGebra:

Fases: Fase IV. Verificación y validación del modelo.

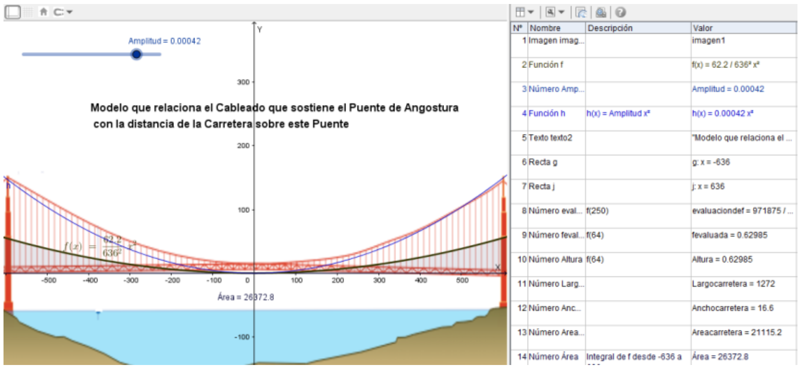


Imagen que presenta el protocolo de construcción de la secuencia de trabajo construida en el GeoGebra.

Se verificó y validó el modelo construido usando comandos del Geogebra. Luego, se establecieron semejanzas entre el problema estudiado y su aplicación en fenómenos similares; por ejemplo, con el cableado que sostiene al puente "Orinoquia", partiendo de los siguientes datos: longitud total= 3.156m.; altura de las torres= 120 m.; altura sobre el río= 40m.; ancho del tablero= 24,7m; ahora no con 2 torres, sino 4 torres construidas, con 4 canales de circulación y 1 ferroviario.

Modelo matemático obtenido para el cableado que sostiene el puente "Orinoquia".

$$y = -\frac{80}{289}x + 80$$

Imagen que refleja el trabajo realizado por los estudiantes

Se dejó propuesta la tarea de investigación, para ubicar los datos en relación al puente sobre el Lago de Maracaibo, conocido como puente "Rafael Urdaneta", el cual tiene 6 torres que lo sostienen.

	 Imagen que proyecta una vista general del puente sobre el Lago de Maracaibo “Rafael Urdaneta” (Fernando Bracho/ Orinoquia). Fuente:http://www.construarte.com.ve/puente-lago-maracaibo-general-rafael-urdaneta/
Sistemas de Representación	Se obtuvieron 2 modelos matemáticos diferentes para cada obra arquitectónica: De manera algébrica: A) $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ tal que, $y = \frac{62,20}{(632)^2}x^2$ B) $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ $y = -\frac{80}{289}\mathrm{x} + 80$ De manera geométrica: La representación gráfica del modelo construido para representar el cableado del puente Angostura es una parábola que abre hacia arriba; mientras que el modelo que representa el cableado para el puente Orinoquia es una función lineal con pendiente negativa. El trabajo numérico que se realizó para estos problemas consistió en evaluaciones en ambas funciones para ciertos valores de sus dominios, de manera de dar respuestas a algunas interrogantes planteadas. No se usó la hoja de cálculo del GeoGebra, porque inicialmente no se contaban con un registro de observaciones o medidas del problema en estudio que describiera una sucesión de puntos y a partir de estos generar una curva.
Algunas dificultades epistemológicas presentes	-Error Tipo 3: Hubo inconvenientes para el establecimiento del origen del eje de coordenadas construido en la escena que recreaba la situación problemática al tratar de simular los fenómenos estudiados con el uso del GeoGebra, la representación de algunos estudiantes no fue congruente

Algunas dificultades epistemológicas presentes	con la realidad. Por ejemplo, no ubicaron en el modelo real creado el origen del sistema de coordenadas de manera adecuada para representar la profundad del río o la altura de las torres. -Error Tipo 1: Omisión de las unidades de medidas relacionadas a la altura de las torres (metros: m.) y al recorrido de la carretera sobre el puente (metros: m.).
Dificultades Cognitivas	Error Tipo 2: Percepción vaga y superficial de definiciones matemáticas. Tales como: Simetrías, rango.
Perspectiva de Modelización	Investigativa
Dimensión	Metacognitiva  Imagen que refleja algunos de los grupos de estudiantes conformados que cursaban la asignatura Matemática I.
Análisis Didáctico	Cognitivo, De Actuación, De Instrucción y Evaluativo
Competencias de Modelización Matemática	Competencias para trabajar el modelo matemático y computacional. Competencias para determinar y manejar variables. Competencias para interpretar los modelos, para manipular variables y parámetros, para comparar alternativas de solución, para comunicar el modelo, para simular el fenómeno.
Nivel del Proceso de Modelización Matemática exigido: Propositivo	 Imagen que proyecta los intercambios sostenidos en el trabajo en colectivo desarrollado por los estudiantes, en la búsqueda del modelo matemático construido.

Exposición de la resolución de la tarea en colectivo	Uso de un lenguaje técnico formal para comunicar las diferencias y semejanzas entre los modelos creados para el cableado que sostiene cada puente.   A la izquierda, imagen del puente "Angostura" con tan sólo dos torres que lo sostienen. A la derecha, imagen del puente "Orinoquia", con mayor recorrido se muestra su diseño formado por cuatro torres construidas. Fuentes: -https://www.todocoleccion.net/postales-america/venezuela-puente-angostura-rio-orinoco-estado-bolivar~x20813518. - https://www.pinterest.com/pin/473863192022849827/.
Perspectivas de Modelización Matemática: **Fase IV:** **De validación e interpretación del modelo construido.**	Ámbito Investigativo  Imagen que evidencia la incorporación de la tecnología en el aula durante el desarrollo del ciclo de modelización matemática seguido. Incorporación del GeoGebra, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones reales, bajo ambiente investigativo y en pleno desarrollo del Ciclo de Modelización Matemática
Dimensión	Metacognoscitiva
Análisis Didáctico	Cognitivo, de actuación, de instrucción y evaluativo.
Competencias	-Verificación de la hipótesis. -Establecimiento de las condiciones para que se lograra un modelo que se aproximara al comportamiento de las variables que interactuaban en la situación problemática. -Validación del modelo matemático y computacional, de acuerdo a las condiciones que se habían determinado. - Simulación del fenómeno y predicciones o inferencias a partir de los modelos construidos. -Adecuación del modelo a otras situaciones similares y/o comparaciones de los modelos construidos como diferentes alternativas de solución, bien sea intergrupo y/o extragrupos.

Análisis evaluativo. Nivel del Proceso de Modelización Matemática: Propositivo	
El método de los experimentos de diseño bajo el perfeccionamiento continúo y progresivo de una guía de instrucción.	 Imagen que muestra la guía de instrucción utilizada en cada sesión de trabajo
Alcance de los niveles de logro obtenidos de acuerdo a las opiniones de los observadores directos.	Interpretativo 100%; Argumentativo 87% y Propositivo 99% resultados de la última aplicación didáctica: año 2018.  Sala de Computación Básica del módulo II, ubicado en la de la UNEG sede Atlántico. Puerto Ordaz. Estado Bolívar. Presentación de instrucciones a seguir durante el proceso de evaluación desarrollado para la aplicación didáctica realizada en el 2017.

Análisis de los Resultados de la Tarea 2: Neutralización del Lodo Rojo.

Se presenta a continuación el análisis de la tarea de modelización matemática, que planteó el estudio de un fenómeno ambiental relativo a la Neutralización del Lodo Rojo:

Cuadro 23.

Análisis de los Resultados de una Tarea de Modelización Matemática Desarrollada durante la Aplicación de la Propuesta Didáctica en el año 2017.

Expectativas de Aprendizaje: Problema Desarrollado durante la Séptima Sesión de clases**.** **Perspectiva de Modelización: Modelización Crítica**	El estudio sobre la neutralización del Lodo Rojo es una propuesta de investigación del Dr. Leonil Gómez cuyo propósito principal es lograr la neutralización del Lodo Rojo, mediante la inducción de reacciones con el coque de petróleo en una mezcla de Lodo Rojo, siguiendo un método sencillo equivalente a la pluviometría, con el fin de desarrollar nuevos materiales híbridos con características adecuadas para el beneficio de la sociedad; lo que ha conllevado a contribuir con la conservación del medio ambiente en zonas intervenidas por la actividad industrial. En este sentido, se buscó interpretar una relación funcional que vincula el porcentaje de hidrógeno con cierta cantidad de coque en una mezcla de lodo rojo, para que alcance su neutralización bajo un rango de temperaturas experimentadas.
Fases : Fase I	Especificar el problema Matemáticamente
Dimensión	Afectiva
Análisis Didáctico	De Contenido
Perspectiva de Modelización	Curricular
Estructura Conceptual (Perspectiva de Aprendizaje)	C1, C2, C3, C4 y C5
Competencias de Modelización Matemática	-Competencia para identificar y estructurar la situación real del problema, una vez presentado el mismo. -Competencia para entender y analizar el problema real.
Nivel en el Proceso de Modelización Matemática	Interpretativo

Representación Real	Representación del Modelo Real  La imagen presenta polvos de lodo rojo mezclados en proporciones de 5, 10, 15, 20, 25 y 50% en peso de coque y Coque de Petróleo. Fuente: Gómez, (2005).
Registros: Datos Iniciales	Los estudiantes contaron con medidas concretas en el enunciado del problema. Estos fueron los siguientes: Temperatura — % Coque Tamb — 70,8 500 — 45,6 750 — 27,4 1000 — 11,3
Fases: Fase II.	Crear el Modelo Matemático
Perspectiva de Modelización	Educativa
Dimensión	Cognitiva
Análisis Didáctico	Cognitivo, de actuación, de instrucción y evaluativo. Aunque los tres primeros análisis son a priori (antes de la aplicación del diseño instruccional) este requiere, por la metodología desarrollada en la investigación, del mejoramiento progresivo de cada sesión de trabajo subsiguiente; por ello, se hace una retrospección continua de la sesión anterior, una nueva revisión y análisis de la guía de instrucción implementada, tanto de los objetivos, las estrategias metodológicas, los contenidos y los procesos desarrollados, el uso del software, la presentación de los resultados de las tareas de modelización, la comunicación de los mismos, entre otros.
Nivel exigido en el Proceso de Modelización	Argumentativo

Tabla de datos iniciales:

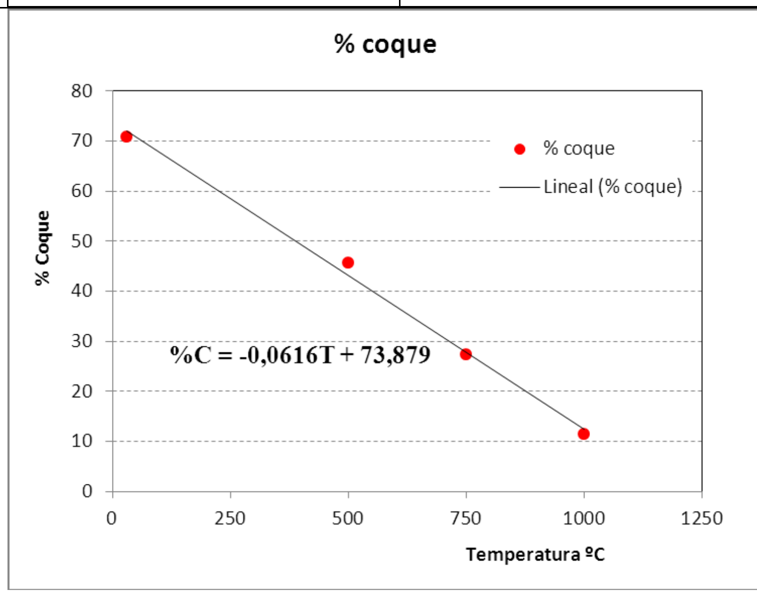
Temperatura	% Coque
Tamb	70,8
500	45,6
750	27,4
1000	11,3

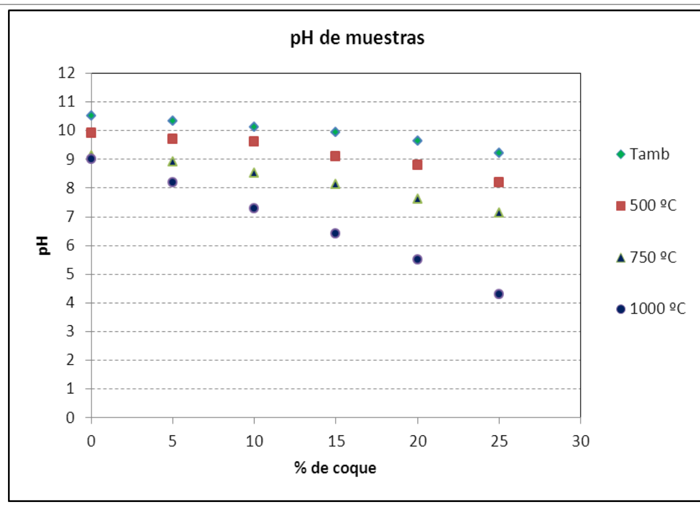
<table>
<tr><td>Competencias</td><td>Competencias para crear el modelo matemático y computacional a partir de términos reales.
</td></tr>
<tr><td>Fases: Fase III.
Interpretación y verificación de la hipótesis establecida por el investigador</td><td>El profesor Gómez, se propuso la siguiente hipótesis en su investigación, donde el coque de petróleo actuara como un agente reductor del pH del Lodo Rojo, bajo ciertas condiciones planteadas:
Hipótesis: Una porción de coque calcinado en el Lodo Rojo, alcanza la neutralización de este último cuando se somete la mezcla a una temperatura de 1000 ºC durante una hora.
Esta propuesta se verificó a través de la relación funcional encontrada en función de los registros obtenidos por el Dr. Gómez, producto de su experimentación en el laboratorio de físico-química de la UNEG. Se encontró a partir de los registros del profesor, la validez de la proposición considerada en la hipótesis, mediante una relación del Ph de la muestra en función del porcentaje de coque calcinado.</td></tr>
<tr><td>Estructura Matemática (Perspectiva de Aprendizaje).
Representación algebraica de los modelos construidos</td><td>Construcción de los Modelos Matemáticos y los Modelos Computacionales que se estudiaron: Relaciones algebraicas
$\%Coque = -0{,}0616 * T + 73{,}879$
$Ph(T) = \begin{cases} 10{,}2631e^{-0{,}0374T}, si\ 950 \leq T \leq 1000 \\ 0{,}015 * T \quad , si\ T \leq 950 \end{cases}$
$Ph = 9e^{-0{,}025*C} + 0{,}015 * C$</td></tr>
</table>

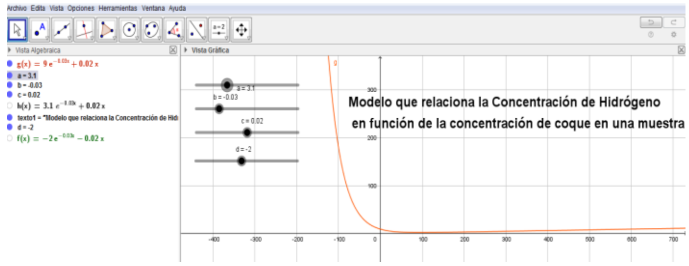
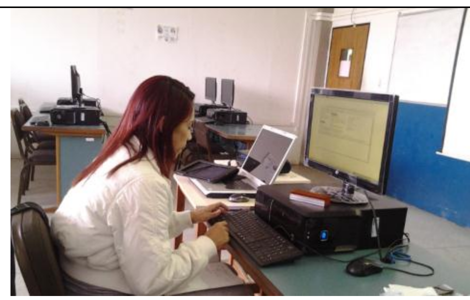
Tipos de Representaciones: Representación Numérica de la función

% Coque	pH
0	9
5	8.3
10	7.4
15	6.5
20	5.6
25	4.3
50	2.9
75	2.6
100	2.3

Tipos de Representaciones: Representación Geométrica de la función

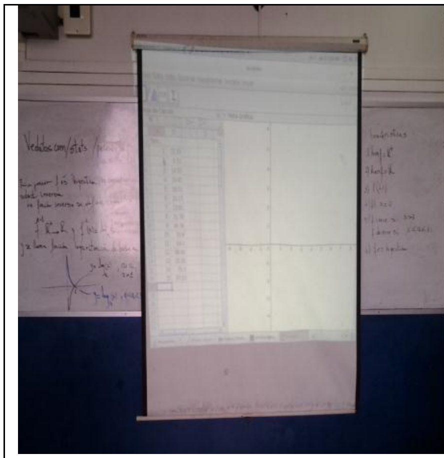


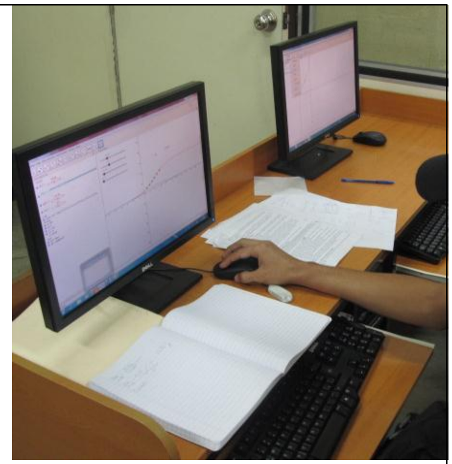


Representación Algebraica y Geométrica del Modelo computacional en el GeoGebra	Modelo que aproxima el potencial de hidrógeno en función de la concentración de coque en el lodo rojo una vez tratado a 1000 ºC: Dimensión Algebraica: $f: R^{+} \rightarrow R^{+}$ tal que, $y = 10{,}2631e^{-0{,}0374x}$ Dimensión Geométrica: 
Uso del software GeoGebra, en versión 5.0 bajo Linux	

<table>
<tr>
<td>Diferentes alternativas de respuestas ante la problemática planteada

Fases: Fase III. Trabajo Matemático.</td>
<td>Se presenta a continuación, otro producto elaborado por un grupo de estudiantes en esta tarea de modelización matemática descrita anteriormente.





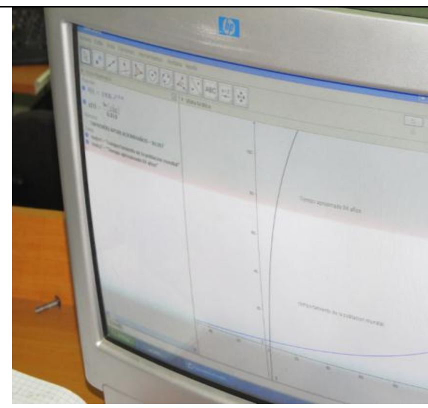
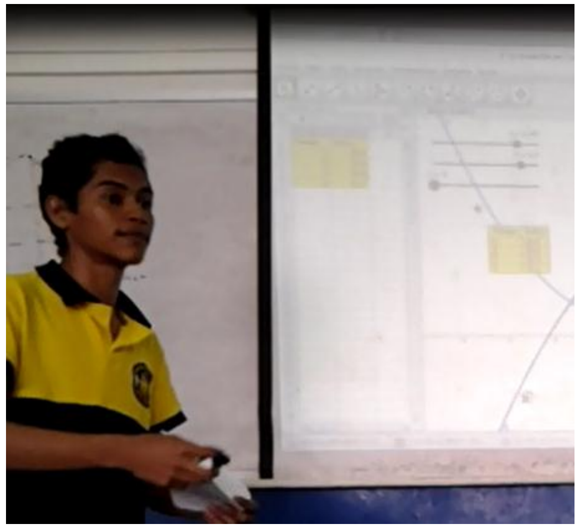
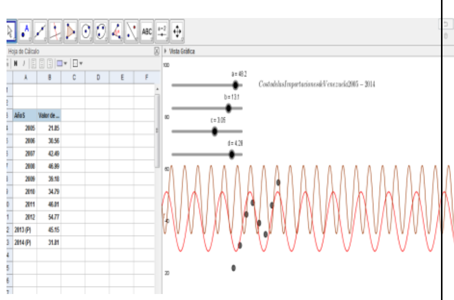


Gráfico que muestra el trabajo de los estudiantes

El trabajo de este nuevo grupo de estudiantes consistió, básicamente, en introducir una serie de datos en la hoja de cálculo del GeoGebra, realizar un diagrama de dispersión usando el comando análisis de regresión de dos variables y luego realizar un ajuste de curvas a esta sucesión de puntos para obtener una relación funcional que se aproximara a los datos iniciales. De esta manera, se obtuvo el modelo computacional que simulaba el comportamiento de este fenómeno.</td>
</tr>
</table>

Fases: Fase IV. Evaluando la validez del modelo matemático y la interpretación de los resultados.	Seguidamente, los estudiantes realizaron un trabajo matemático al variar los parámetros que contenía este modelo exponencial, identificando y definiendo características intrínsecas a la relación y su representación gráfica, en función a los recorridos que podían asumir los parámetros y las variables en base a su significado válido en el problema real.  Imagen que proyecta parte del trabajo matemático realizado por los estudiantes cuando disertaban sus producciones.
Dificultades Epistemológicas presentes	Error tipo 2: Identificaron la variable dependiente porcentaje de Coque *(% Coque*) como la variable independiente, en vez de la Temperatura *(T).* Error Tipo 4: Manejo inapropiado de las fuentes de información. Desconocían cuál es la temperatura ambiente y cómo se obtiene.
Dificultades Cognitivas encontradas	Error Tipo 3: La definición de función exponencial debía ser la misma independientemente del registro de representación que se estaba usando en un determinado momento. Lo único que debía variar de una dimensión a otra, eran los términos mediante los cuales se definía la función. Este mismo sentido, se asumía a la hora de evaluar la función desde los diferentes registros, independientemente de la dimensión en que se estuviera trabajando, la imagen producto de la evaluación de la función en un valor perteneciente a su dominio debía ser el mismo; podría cambiar el método de obtención del resultado, más no el resultado. Error Tipo 4: Incomprensión del significado de las variables *% Coque y Temperatura,* ya que algunos estudiantes establecieron de manera inadecuada los intervalos de recorrido de ambas variables donde tenía sentido lógico de acuerdo a los significados en el mundo extramatemático.
Nivel III: Perspectiva de Modelización	Investigativa

Dimensión	Metacognitiva  Grupos de estudiantes que cursaron Matemática I, cuando se desarrolló la propuesta didáctica. Aquí, se presentó un análisis metacognitivo, los estudiantes se cuestionaban sobre sus capacidades desarrolladas y la resolución del problema alcanzado.
Análisis Didáctico	Cognitivo, de actuación, de instrucción y evaluativo
Competencias de Modelización Matemática	Competencias para trabajar el modelo matemático y computacional. Competencias para determinar y manejar variables. Competencias para interpretar los modelos, para manipular variables y parámetros, para comparar alternativas de solución, para comunicar el modelo, para hallar la función inversa del modelo obtenido y para simular el fenómeno.

Exposición de la resolución de la tarea en colectivo	En estas exposiciones los estudiantes desarrollaron un lenguaje técnico formal para comunicar el trabajo realizado, tanto de manera verbal y por escrito: mediante una presentación oral y un trabajo escrito (virtual), respectivamente. El trabajo escrito se entregó de manera virtual, en documento electrónico producto del uso del software GeoGebra.   A la izquierda, documento virtual producto de las tareas de modelización matemática entregadas. A la derecha, se observa una de las sesiones de clases donde los estudiantes trataban de resolver un problema planteado, orientados por el protocolo de instrucción seguido en cada clase durante el desarrollo los experimentos de enseñanzas, de tal manera de ir consolidando su trabajo final.
Fases: Fase IV. Perspectivas de Modelización Matemática	Ámbito Investigativo 
Dimensión	Metacognoscitiva
Análisis Didáctico	Cognitivo, de actuación, de instrucción y evaluativo.

Competencias	-Verificación de la hipótesis. -Establecimiento de las condiciones para que se lograra un modelo que se aproximara al comportamiento de las variables que interactuaban en la situación problemática. -Evaluación del modelo de manera algebraica, numérica y geométrica -Validación del modelo matemático y computacional, de acuerdo a las condiciones que se habían determinado. - Simulación del fenómeno y predicciones o inferencias a partir de los modelos construidos. -Adecuación del modelo a otras situaciones similares y/o comparaciones de los modelos construidos como diferentes alternativas de solución, bien sea intergrupo y/o extragrupos.
Fases: Fase IV. Nivel del Proceso de Modelización Matemática	Propositivo
Análisis evaluativo. Análisis Crítico	 Imagen que alude el trabajo matemático que pudieron sostener los estudiantes trabajando en colectivo.
El método de los experimentos de enseñanza bajo el perfeccionamiento continúo y progresivo de una guía de instrucción.	 Imagen que muestra la guía de instrucción elaborada por la docente investigadora, la cual orientó todo el trabajo realizado en cada sesión de clases.

Alcance de los niveles de logro obtenidos de acuerdo a las opiniones de los observadores directos.	Resultados de la propuesta didáctica desarrollada para el año 2017. Interpretativo 67%; Argumentativo 60% y Propositivo 59%.  Sala de Computación Básica del módulo II, ubicado en la de la UNEG sede Atlántico. Puerto Ordaz. Estado Bolívar. Acompañamiento de los observadores directos durante una sesión de clases, quienes son docentes de la Universidad Nacional Experimental de Guayana, adscritos al área de matemática.

Análisis de los Resultados de la Tarea 3: Construcción de la Pieza de una Chimenea

Se presenta a continuación el análisis de la tarea de modelización matemática, que planteó el estudio de la construcción de una pieza metalmecánica, correspondiente a una chimenea que se fabricaba en la empresa Vhicoa.

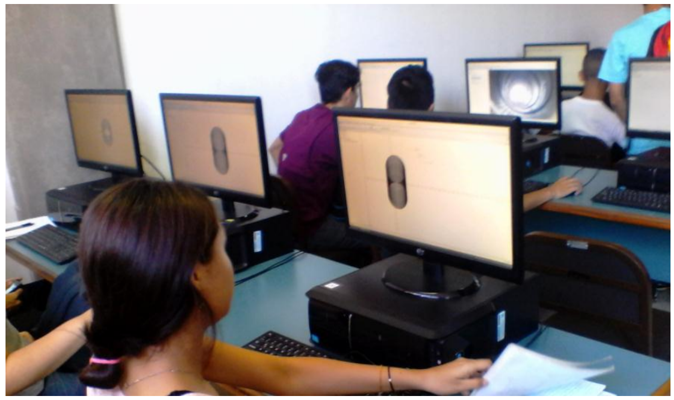
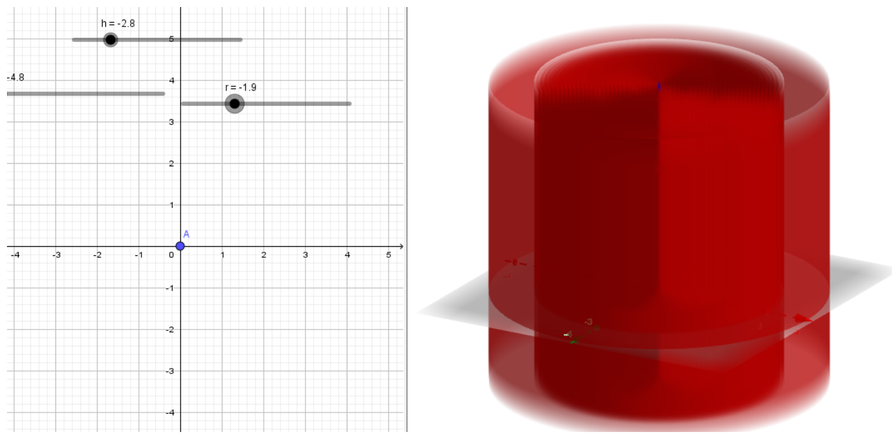
Cuadro 24.

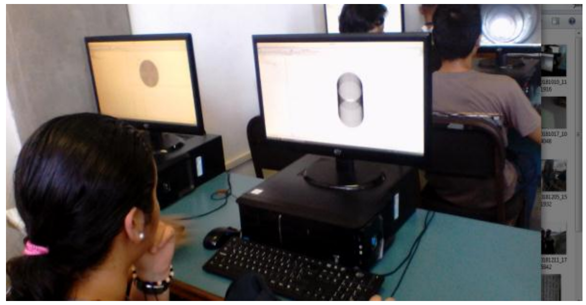
Análisis de los Resultados de una Tarea de Modelización Matemática Desarrollada durante la Aplicación de la Propuesta Didáctica en el año 2018.

Problema desarrollado durante la décima sesión de clases. **Modelización Cognitiva**	Problema que consistió en la simulación de la construcción de la pieza de una chimenea que se fabricaba en la empresa Vhicoa, ubicada en la ciudad de Puerto Ordaz, Venezuela.
Fases: Fase I	Especificar el problema Matemáticamente
Dimensión	Afectiva
Análisis Didáctico	De Contenido

Perspectiva de Modelización	Curricular
Estructura Conceptual (Perspectiva de Aprendizaje)	C1, C2, C3, C4 y C5
Competencias de Modelización Matemática	-Competencia para identificar y estructurar la situación real del problema, una vez presentado el mismo. -Competencia para entender y analizar el problema real.
Nivel en el Proceso de Modelización Matemática	Interpretativo
Representación Real	Representación del Modelo Real  Imagen de la pieza de una chimenea que se fabrica en la empresa Vhicoa. Zona Industrial, Puerto Ordaz. Estado Bolívar. Venezuela.

Registros: Datos Iniciales	Los estudiantes no contaron con medidas concretas en el enunciado del problema, sólo se trataba de adecuar un modelo matemático que mediante su variación iría formando el sólido representado a partir de la imagen expuesta anteriormente, la cual se seleccionó de un grupo de imágenes que se recolectaron en una visita que se realizó a la empresa Vhicoa, donde se tomó fotografías a las piezas que se diseñaban y fabricaban para ese momento en esta empresa. Tal y como se muestran a continuación:       Algunas imágenes de las piezas fabricadas en la empresa Vhicoa

Fases: Fase II.	Crear el Modelo Matemático  Imagen que muestra el trabajo matemático realizado por los estudiantes usando el GeoGebra
Fases: Fase III. Perspectiva de Modelización	Educativa  Imagen que muestra el trabajo matemático realizado por los estudiantes usando el GeoGebra y desarrollando el pensamiento variacional, desde la utilización de parámetros.
Dimensión	Cognitiva
Análisis Didáctico	Cognitivo, de actuación, de instrucción y evaluativo. Aunque los tres primeros análisis son a priori (antes de la aplicación del diseño instruccional), este requiere por la metodología desarrollada en la investigación el mejoramiento progresivo de cada sesión de trabajo subsiguiente; por ello, se hace una retrospección continua de la sesión anterior, una nueva revisión y análisis de la guía de instrucción implementada, tanto de los objetivos, las estrategias metodológicas, contenidos y procesos desarrollados, el uso del software, la presentación de los resultados de las tareas de modelización, la comunicación de los mismos, entre otros.
Nivel en el Proceso de Modelización Matemática exigido	Argumentativo

Competencias	Competencias para crear el modelo matemático y computacional a partir de términos reales. 
Estructura Matemática. (Perspectiva de Aprendizaje).	Algunos Modelos Matemáticos y los Modelos Computacionales que se construyeron: $C: IR^2 \to IR^2$, tal que $C: (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ C: Circunferencia de Centro (h, k) y radio r. Cilindro d: X = (0, 0, 0.79) + (cos(t), sin(t), 0) (en coordenadas polares) Cilindro (C, D, r); donde C: Punto Fijo de coordenadas C(0,0,0); D: Punto móvil sobre el ejeZ, y r: el radio igual a 1. 

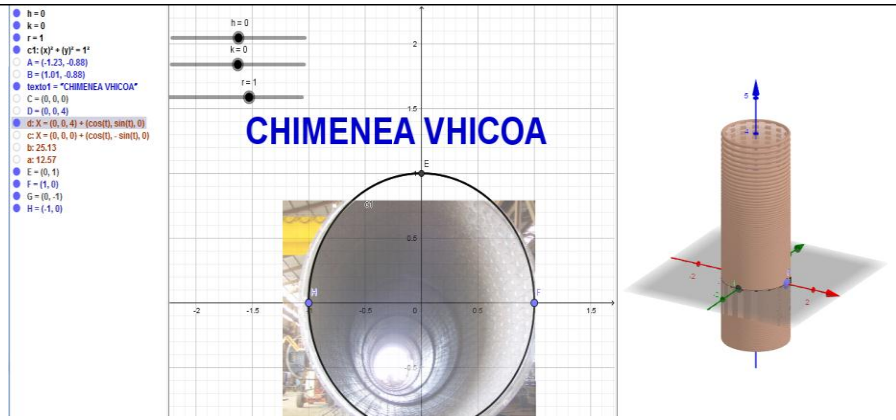
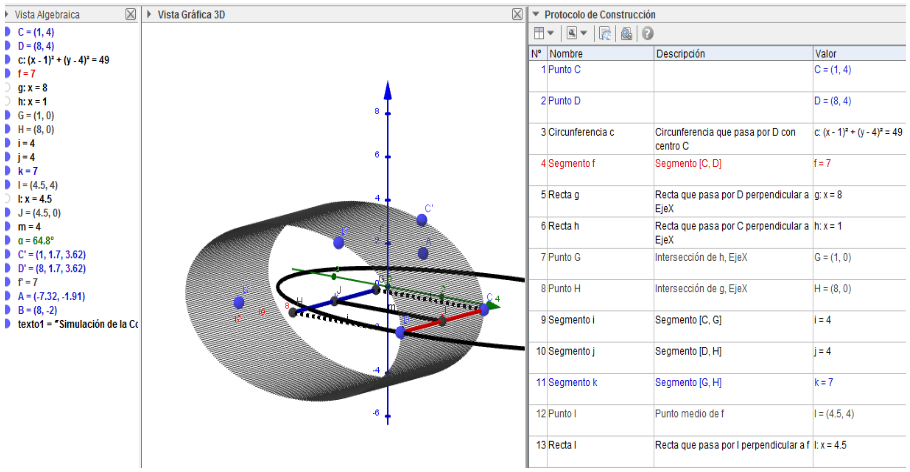
<table>
<tr>
<td>Fases: Fase IV.
Tipos de Representaciones: Algebraica y Geométrica del modelo construido.</td>
<td>

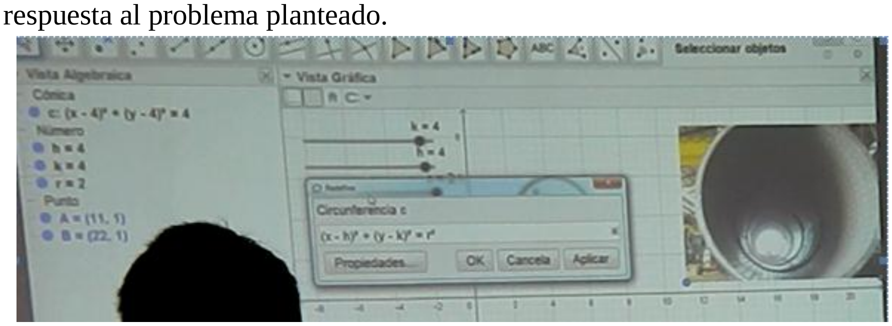
Imagen del trabajo realizado en GeoGebra por un grupo de estudiantes, cuando simulaban la construcción de la chimenea

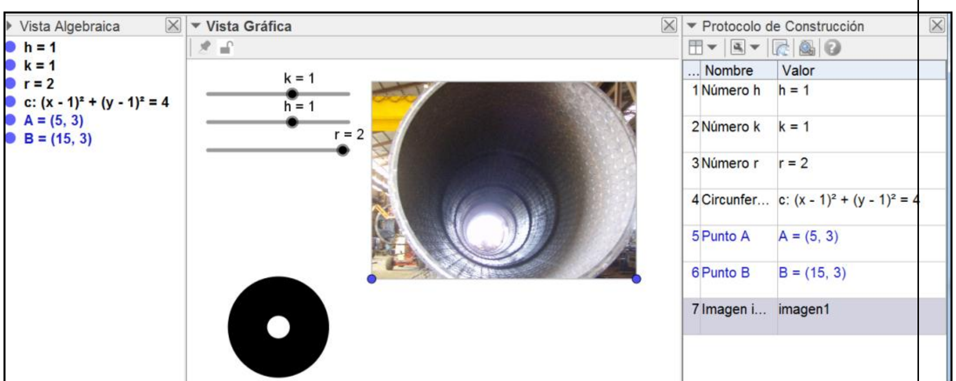
El trabajo realizado por los estudiantes en este proceso de simulación, consistió básicamente en la construcción de una circunferencia unitaria C de centro (0,0), donde crearon el parámetro k, que constituía la traslación vertical de la circunferencia C al variar k, o sea, el valor de la ordenada del centro de esa circunferencia C y simultáneamente dejar fijos el valor de la abscisa h de este centro y su radio r. Para ello, este grupo de estudiantes crearon en GeoGebra el parámetro k, como un deslizador y activaron el rastro de la circunferencia C para lograr la visualización de la construcción del sólido a medida que el deslizador hacia el recorrido que le fue asignado, en función de las propiedades o cualidades que asumieron los estudiantes para su caracterización.
Otro grupo de estudiantes logró simular la construcción de la chimenea que muestra la figura anterior de manera muy diferente: su resolución se basó en crear un cilindro y trasladarlo verticalmente a través del eje Z, dejando ver su rastro al variarlo en la vista gráfica en tres dimensiones que presenta el GeoGebra.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Diferentes alternativas de respuestas ante la problemática planteada</td>
<td>Se presenta a continuación, otro producto elaborado por un grupo de estudiantes en esta tarea de modelización matemática descrita anteriormente.



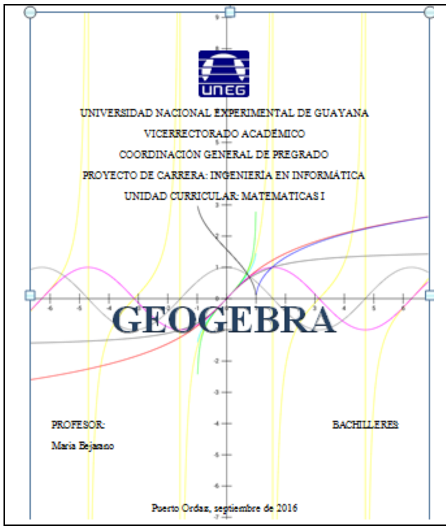
Trabajo en GeoGebra que simula la construcción del cilindro circular que define la pieza de la Chimenea en construcción en Vhicoa.

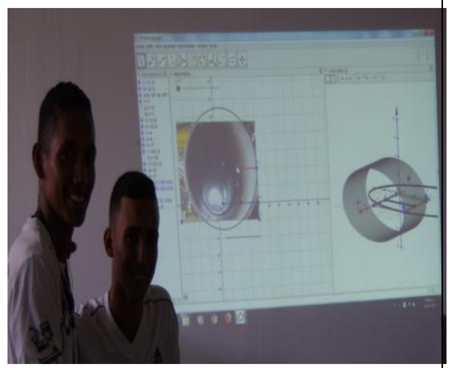
El trabajo de este nuevo grupo de estudiantes consistió, básicamente, en rotar un segmento de recta f', alrededor del eje X con un ángulo de inclinación α; todo esto, con la idea de generar el cilindro que representaba la pieza de la chimenea al variar el segmento f', dejando ver su rastro con esta herramienta que contiene el GeoGebra.</td>
</tr>
<tr>
<td>Dificultades Epistemológicas presentes</td>
<td>Error Tipo 2: En este grupo se evidenció la concepción errónea que prevaleció, del establecimiento de una única alternativa de solución o respuesta al problema planteado.

</td>
</tr>
</table>

Dificultades Cognitivas	1) Error Tipo 2: Percepción vaga y superficial de definiciones matemáticas. Por ejemplo, algunos estudiantes asumieron que: $C: IR^2 \to IR^2$, tal que $C: (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ no era una función. Ellos aseguraban que la función estaría representada sólo por la mitad del trazado de esta curva *C*; sin embargo, aunque asumieron lo correcto sus argumentos eran difusos, no fueron bien definidos. 2) Error Tipo 4: Carencia o deficiencia de la orientación espacial. En este sentido, algunos estudiantes no manejaron correctamente los referentes implícitos en el enunciado del problema. No lograron recrear o proyectar en sí la situación real, sino una representación de ésta. Específicamente, en este problema para simular la construcción de la pieza de la chimenea que constituía un cilindro circular recto, algunos estudiantes reprodujeron con ayuda del GeoGebra, una figura que conformaba la representación del objeto real mediante una circunferencia al variar su radio y su centro y no el sólido como tal, que conformaba la pieza, la cual era un cilindro sin tapas, que fue la exigencia inicial en sí del problema planteado.  Imagen extraída del producto del trabajo generado en el GeoGebra, donde se evidencia que un grupo de estudiantes realizaron la representación real del objeto, que fue una figura y no el sólido, conformado por el cilindro circular recto.
Nivel III: Perspectiva de Modelización	Investigativa

Dimensión	Metacognitiva  Algunos grupos de estudiantes que conformaron las unidades de análisis en esta investigación y que reflexionaron en colectivo sus trabajos.
Análisis Didáctico	Cognitivo, De Actuación, De Instrucción y Evaluativo
Competencias de Modelización Matemática	Competencias para trabajar el modelo matemático y computacional. Competencias para determinar y manejar variables. Competencias para interpretar los modelos, para manipular variables y parámetros, para comparar alternativas de solución, para comunicar el modelo, para simular el fenómeno.
Nivel del Proceso de Modelización Matemática exigido.	Propositivo

<table>
<tr>
<td>Exposición de la resolución de la tarea en colectivo</td>
<td>Uso de un lenguaje técnico formal para comunicar el trabajo realizado, de manera verbal y por escrito: mediante una presentación oral y en físico, con un trabajo escrito manualmente y de manera virtual, en documento electrónico producto del uso del software GeoGebra, disponible en:
https://www.youtube.com/watch?v=Kp5CiT79Ic4&feature=youtu.be





A la izquierda, portada de un trabajo en físico producto de las tareas de modelización matemática entregadas. A la derecha, exposición de los resultados de un problema contextualizado propuesto.</td>
</tr>
<tr>
<td>Fase IV: Perspectivas de Modelización Matemática</td>
<td>Ámbito Investigativo

Imagen que muestra una sesión de clases, donde hubo intervención por parte de uno de los docentes que acompañaron el estudio.</td>
</tr>
<tr>
<td>Dimensión</td>
<td>Metacognoscitiva</td>
</tr>
<tr>
<td>Análisis Didáctico</td>
<td>Cognitivo, de actuación, de instrucción y evaluativo.</td>
</tr>
</table>

Competencias	-Verificación de la hipótesis. -Establecimiento de las condiciones para que se lograra un modelo que se aproximara al comportamiento de las variables que interactuaban en la situación problemática. -Validación del modelo matemático y computacional, de acuerdo a las condiciones que se habían determinado. - Simulación del fenómeno y predicciones o inferencias a partir de los modelos construidos. -Adecuación del modelo a otras situaciones similares y/o comparaciones de los modelos construidos como diferentes alternativas de solución, bien sea intergrupo y/o extragrupos.
Nivel del Proceso de Modelización Matemática	Propositivo
Análisis evaluativo. Análisis Crítico	 La imagen proyecta uno de los intercambios que se sucedieron en clases con la intervención de todos los participantes del hecho educativo
El método de los experimentos de diseño bajo el perfeccionamiento continúo y progresivo de una guía de instrucción.	 Imagen que refleja el proceso de evaluación y supervisión seguido por algunos de los profesores involucrados en la investigación

Alcance de los niveles de logro obtenidos de acuerdo a las opiniones de los observadores directos.	Interpretativo 100%; Argumentativo 90% y Propositivo 90%.  Sala de Computación Básica del módulo II, ubicado en la de la UNEG sede Atlántico. Puerto Ordaz. Estado Bolívar. Acompañamiento de los observadores directos durante una sesión de clases, quienes eran docentes de la Universidad Nacional Experimental de Guayana, adscritos al área de matemática para ese momento.

Simulaciones Realizadas por los Estudiantes sobre el Crecimiento del Río Orinoco e Importaciones de Venezuela en cierto Rubro.

A continuación, se presentan algunas imágenes que dan cuenta de las simulaciones que realizaron los estudiantes para recrear realidades de los problemas referidos anteriormente:

Cuadro 25.

Simulaciones realizadas por los estudiantes a partir de algunas situaciones problemáticas que fueron propuestas en las tareas de modelización matemática.

ELEMENTO ANALIZADO	CARACTERIZACIÓN
Problema sobre el crecimiento del Río Orinoco, en tres puntos de mediciones: Caicara, Ciudad Bolívar y Sector Palúa en cierto período de tiempo. Fase I: Interpretación de los datos	Este problema consistió en la construcción de tres modelos que se aproximaran a las mediciones recogidas en función al crecimiento del Río Orinoco, en cuanto a profundidad se refiere, correspondientes a unos días del mes de Agosto por tres años consecutivos, en base a la información que se expone a continuación:

REPUBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
GOBERNACIÓN DEL ESTADO BOLÍVAR
SECRETARIA DE SEGURIDAD CIUDADANA
DIRECCION DE PROTECCION CIVIL

FECHA EMISION
03/08/2017

NIVELES DEL RIO ORINOCO ULTIMOS 10 DIAS
(m.s.n.m)

FECHA	CAICARA							CIUDAD BOLIVAR							PALUA						
	1943	1951	1976	2015	2016	2017	[illegible]	1943	1951	1976	2015	2016	2017	[illegible]	1943	1951	1976	2015	2016	2017	[illegible]
25-Jul	34.15	34.00	34.99	32.58	34.02	33.75	+5	16.53	16.51	17.08	14.40	15.86	16.28	+14	11.03	11.28	11.83	9.12	10.38	10.98	+19
26-Jul	34.23	34.29	35.09	32.64	34.10	33.83	+8	16.62	16.69	17.17	14.52	15.92	16.44	+16	11.13	11.43	11.88	9.24	10.34	11.62	+64
27-Jul	34.27	34.42	35.18	32.70	34.14	33.91	+8	16.78	16.84	17.27	14.60	16.00	16.58	+14	11.23	11.53	11.97	9.33	10.43	11.68	+6
28-Jul	34.45	34.55	35.25	32.77	34.17	34.02	+11	16.87	16.99	17.36	14.68	16.02	16.66	+8	11.33	11.68	11.99	9.42	10.52	11.00	-68
29-Jul	34.54	34.65	35.33	32.79	34.22	34.11	+9	16.98	17.10	17.46	14.78	16.08	16.76	+10	11.48	11.73	12.04	9.48	10.52	11.15	+15
30-Jul	34.63	34.77	35.41	32.86	34.26	34.19	+8	17.08	17.24	17.58	14.86	16.18	16.86	+10	11.53	11.88	12.11	9.79	10.55	11.19	+4
31-Jul	34.66	34.86	35.49	32.90	34.29	34.26	+7	17.12	17.34	17.74	14.90	16.20	16.96	+10	11.58	11.93	12.27	9.70	10.61	11.28	+9
01-Ago	34.76	34.90	35.56	32.95	34.32	34.33	+7	17.23	17.39	17.85	14.96	16.30	17.02	+6	11.63	11.93	12.43	9.67	10.70	11.31	+3
02-Ago	34.80	34.95	35.58	32.99	34.36	34.40	+7	17.28	17.45	17.95	15.00	16.36	17.10	+8	11.63	11.88	12.55	9.67	10.79	11.37	+6
03-Ago	34.88	34.99	35.59	33.03	34.39	34.44	+4	17.37	17.49	18.00	15.06	16.04	17.16	+6	11.73	11.88	12.58	9.70	10.82	11.49	+12
TUACION ACTUAL	ALERTA AMARILLA							ALERTA AMARILLA							ALERTA VERDE						

ALERTA SITUACIONAL	ESTACION	CAICARA	CIUDAD BOLIVAR	PALUA
	ALERTA VERDE	33.50 (*)	16,50	11,00
	ALERTA AMARILLA	34.00	17,00	11,50
	ALERTA ROJO	35.00	18,00	12,50

EFEMERIDES: UN DIA COMO HOY EN EL AÑO 1976 EL RIO ORINOCO ALCANZO NIVEL DE ALERTA ROJA EN CIUDAD BOLIVAR, PALUA Y CAICARA.

NOTA: LOS DIAS ESPECIFICADOS (28) NIVEL 11,00 Y (29) NIVEL 11,15, EL RIO EN PALUA SE COMENZARON A TOMAR ELECTRONICAMENTE (CON SENSORES) POR PERSONAL ASHO, YA QUE A TRAVES DE LOS ANOS SE TOMABA LAS MEDIDAS VISUALMENTE POR EL PERSONAL.

PREVENIR ES VIVIR

Imagen que presenta los datos iniciales del problema estudiado sobre el comportamiento del Río Orinoco en cierto período de tiempo.
Fuente: Dirección de Protección Civil del Estado Bolívar.

Trabajo Matemático realizado por un grupo de estudiantes en el GeoGebra.

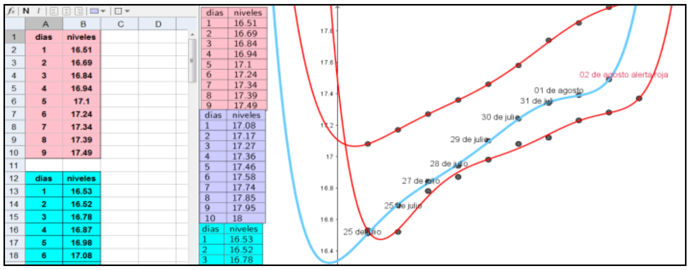


Imagen que refleja el trabajo realizado por los estudiantes

Este trabajo consistió en introducir los datos en la hoja de excell del GeoGebra y analizar los mismos mediante un ajuste de curva, lo cual proporcionó estos 3 modelos matemáticos luego de hacer una selección de las varias opciones que presentaba este software

Representación algebraica de algunos de los modelos obtenidos en el GeoGebra mediante ajuste de curva

Relaciones algebraicas de modelos matemáticos construidos:

- h(x) = 0.0000298x^9.00 - 0.00143x^8.00 + 0.0292x^7.00 - 0.331x^6.00 + 2.28x^5.00 - 9.88x^4.00 + 26.7x^3.00 - 43.4x^2.00 + 38.0x + 4.60
- g(x) = -0.00000474x^9.00 + 0.000233x^8.00 - 0.00492x^7.00 + 0.0583x^6.00 - 0.425x^5.00 + 1.96x^4.00 - 5.66x^3.00 + 9.67x^2.00 - 8.48x + 19.1

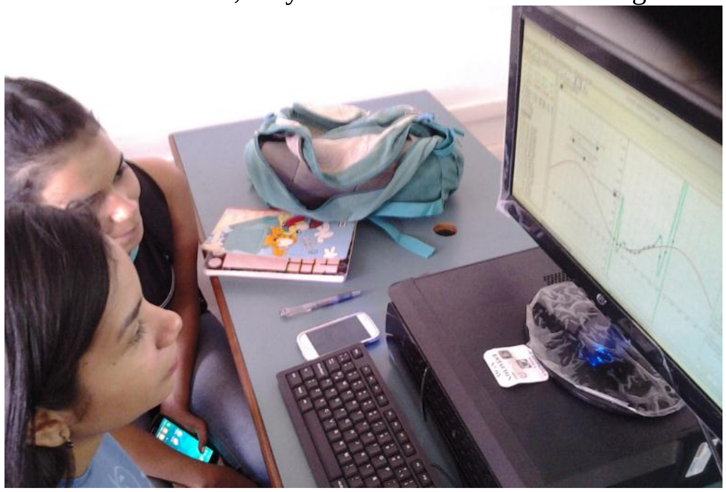
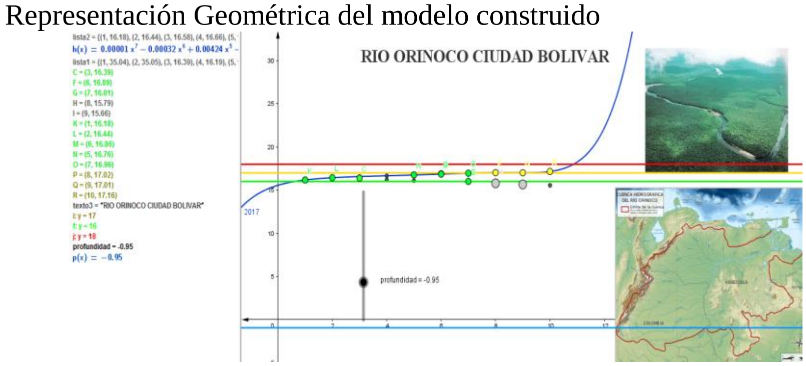
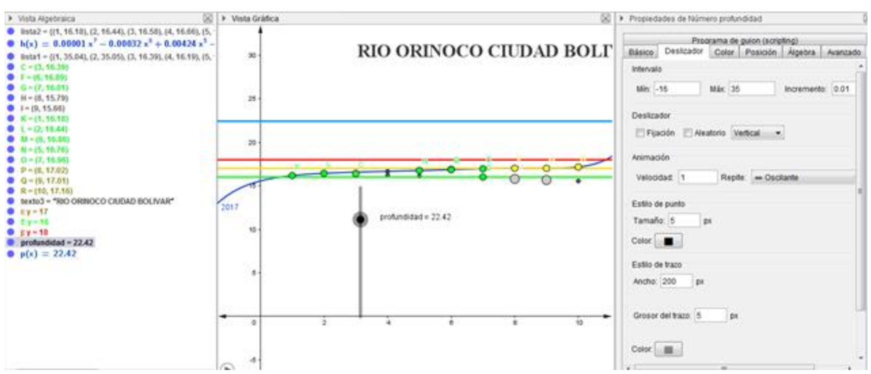
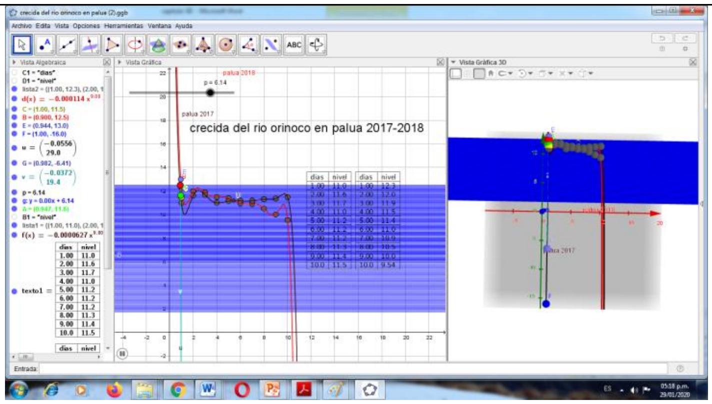
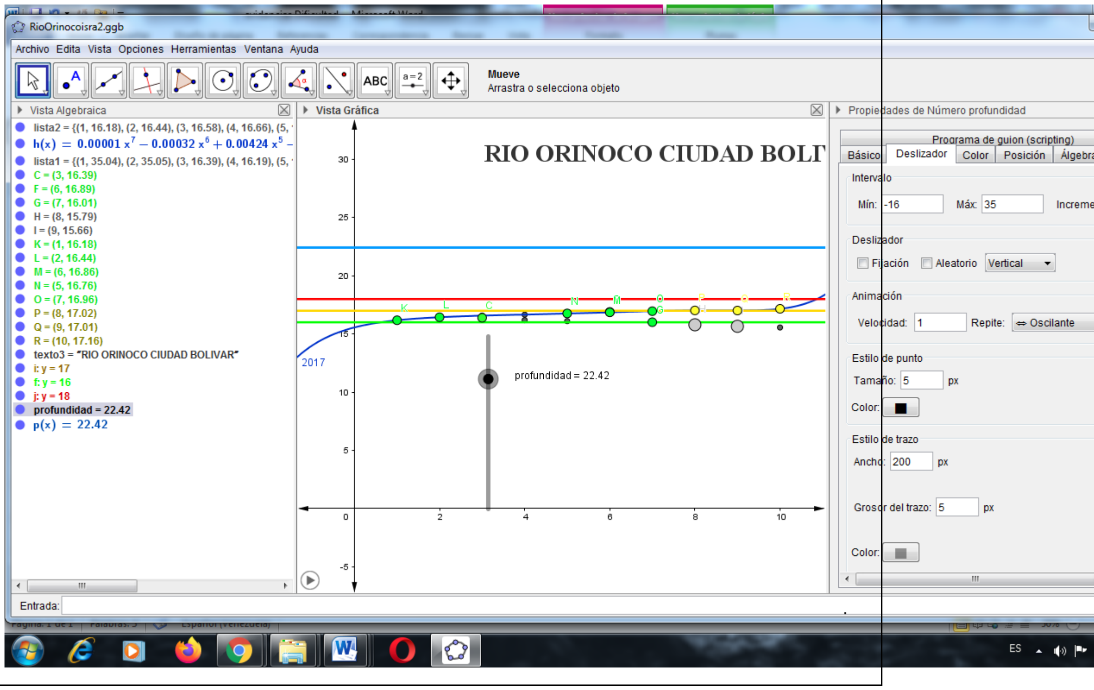
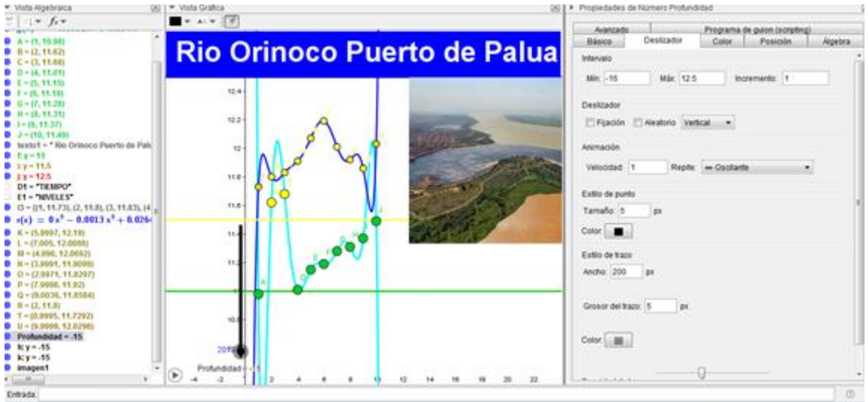
<table>
<tr>
<td>Creación del Modelo Matemático</td>
<td>En virtud a ello, los estudiantes realizaron el trabajo matemático en el software GeoGebra, tal y como se observa desde la siguiente imagen
</td>
</tr>
<tr>
<td>Representación Geométrica de los modelos construidos en el GeoGebra en Ciudad Bolívar</td>
<td>Representación Geométrica del modelo construido


Imagen del trabajo realizado en GeoGebra por un grupo de estudiantes, cuando variaban el parámetro a: $profundidad$.

Se puede observar este trabajo en la siguiente dirección web:
https://www.youtube.com/watch?v=Kp5CiT79Ic4&feature=youtu.be


El grupo de estudiantes que realizó este trabajo de simulación de la crecida del Río Orinoco en cierto período de tiempo, presentó dificultad en determinar cuál era el recorrido que podía realizar la variable:</td>
</tr>
</table>

	profundidad del río. En su simulación, los estudiantes asociaron el nivel del río con una función constante $(profundidad(t) = p)$, donde p representó un parámetro, el cual a medida que variaba este deslizador proyectaba el desplazamiento vertical de la recta $y = p$ referida a la profundidad del río. Sin embargo, el intervalo de variación asociado a este parámetro fue de -15 hasta 35, donde 35 era la máxima profundidad que alcanzó el río en el período estudiado, y= -15 la mínima. No obstante, el valor mínimo del parámetro debe ser 0 por representar una magnitud.
Simulación de la crecida del Río Orinoco en el sector de Palúa	 Imagen que refleja la simulación realizada por un grupo de estudiantes. Se puede observar este trabajo en la siguiente dirección web: https://www.youtube.com/watch?v=Kp5CiT79Ic4&feature=youtu.be 

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Simulación del crecimiento del Río Orinoco, ahora para el sector Palúa en Ciudad Guayana, tal y como se observa en la siguiente imagen, la cual fue extraída de los productos de las tareas de modelización de los estudiantes:


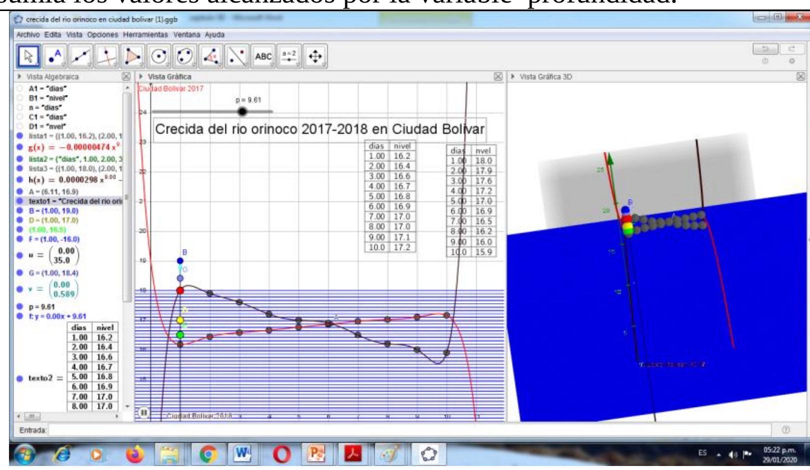
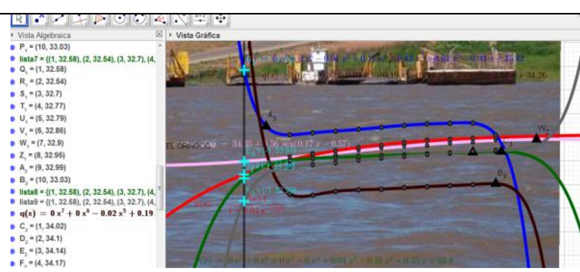
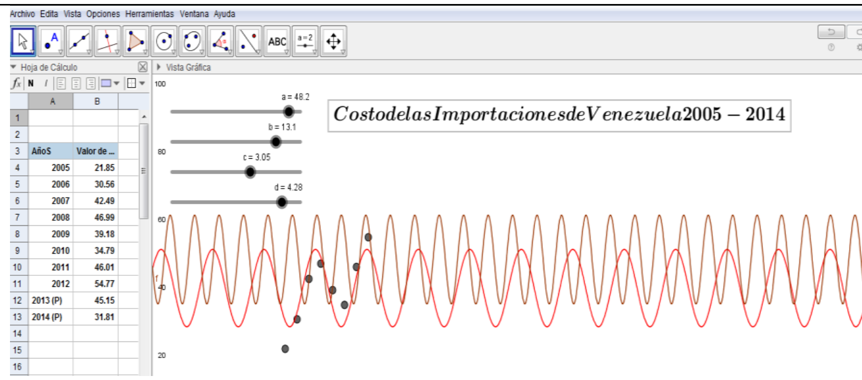
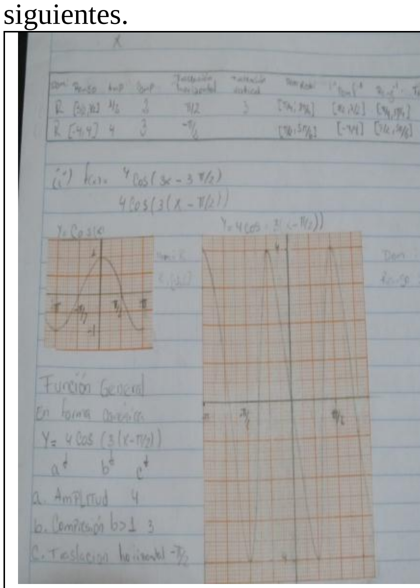
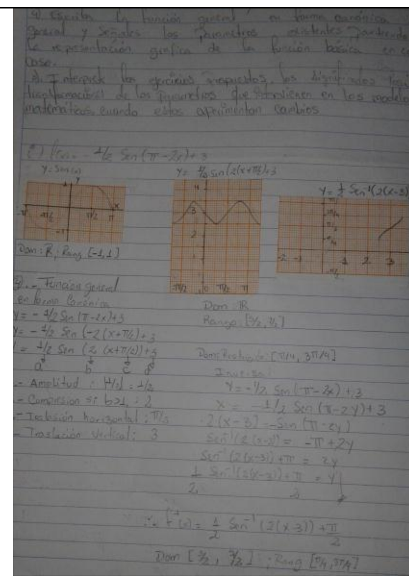
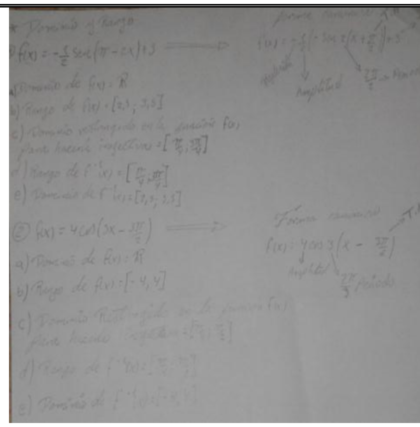
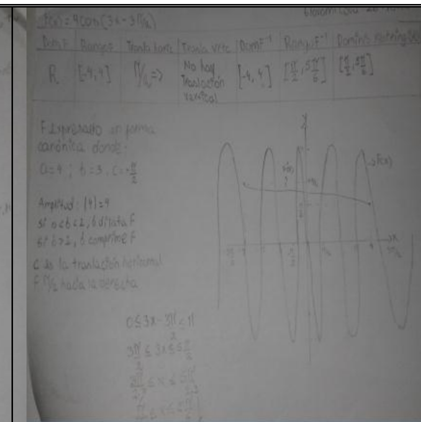
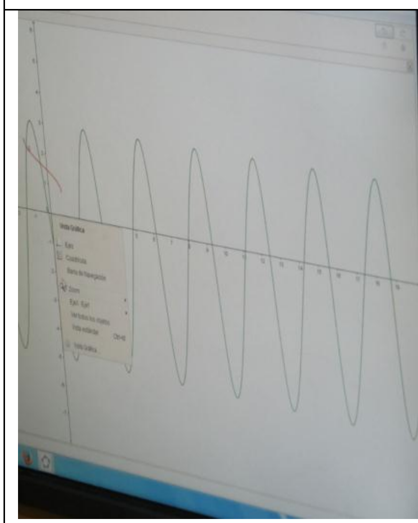
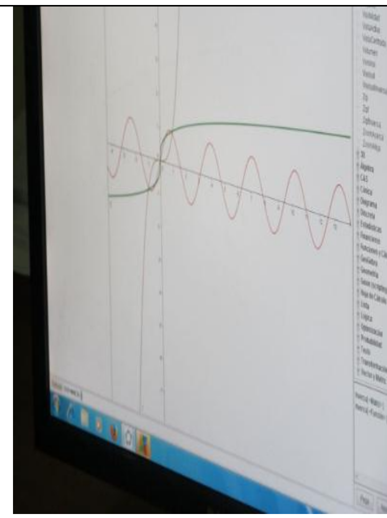
Aquí, según el trabajo de 2 estudiantes el parámetro que representó la profundidad osciló entre -35 y 12,5 m. Ellos debían hacer una argumentación adecuada, al considerar este recorrido del parámetro que asumía los valores alcanzados por la variable profundidad.</td>
</tr>
<tr>
<td>Simulación de la crecida del caudal del Río Orinoco en Ciudad Bolívar</td>
<td>

Imagen que refleja la simulación realizada por un grupo de estudiantes. Se puede observar este trabajo en la siguiente dirección web: https://www.youtube.com/watch?v=Kp5CiT79Ic4&feature=youtu.be</td>
</tr>
<tr>
<td>Trabajo realizado por otro grupo de estudiantes</td>
<td>
Imagen que refleja la simulación realizada por un grupo de estudiantes. Se puede observar este trabajo en la siguiente dirección web:
https://www.youtube.com/watch?v=Kp5CiT79Ic4&feature=youtu.be</td>
</tr>
</table>

Trabajo realizado en GeoGebra de la tarea referida a los Costos de las Importaciones en Venezuela en cierto rubro	 El trabajo consistió una vez obtenido el modelo por un ajuste de curva desde las mediciones iniciales, los estudiantes crearon algunos deslizadores para visualizar los efectos de compresión de la curva, dilatación la curva, traslación vertical y horizontal de la curva. Los estudiantes hallaron funciones inversas, de manera algebraica y determinaron su dominio. Para ello, se muestra el procedimiento seguido de manera manual en los siguientes gráficos. Sin embargo, el uso del comando inversa (f) en el GeoGebra, permitía obtener la función inversa rápidamente, tal y como se puede observar en los gráficos siguientes.  

Parte de este trabajo se puede observar en un artículo presentado en la revista arbitrada *Ciencias de la Educación*, 2017, Julio - Diciembre, Vol. 27, Nro. 50, ISSN: 1316-5917 desde la siguiente dirección web: http://servicio.bc.uc.edu.ve/educacion/revista/50/art22.pdf

CAPÍTULO VIII

ANÁLISIS DE LAS DIFICULTADES PRESENTES EN LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se identifican las dificultades epistemológicas y cognitivas que estuvieron presentes en las producciones de los estudiantes

Se presentan a continuación dos aristas de las dificultades encontradas en esta investigación: una más general, que tuvo que ver con las dificultades que surgieron antes y durante la implementación de la propuesta didáctica y otra más específica, que refiere las dificultades que reflejaron los estudiantes en la resolución de las tareas de modelización.

La primera arista de dificultades abarca: las actitudes de los docentes, especialistas que contribuyeron directamente en el estudio, las acciones de los alumnos ante la propuesta didáctica y los ambientes de aprendizaje creados; mientras que la clasificación de la segunda arista, surge del análisis realizado concretamente al trabajo desarrollado por los alumnos, que se materializa en los productos entregados y presentados al resolver sus tareas de modelización matemática, que han constituido las unidades de análisis.

En la primera arista de dificultades se han considerado los siguientes aspectos:

1) Primer aspecto (actitudes de los docentes): Aquellas dificultades sobre la resistencia al cambio y el trabajo desde los experimentos de enseñanza.
2) Segundo aspecto (acciones de los alumnos ante la propuesta didáctica): Aquellas dificultades que se reflejaron en el lenguaje utilizado durante el uso de los distintos sistemas de representación para comunicar las ideas sobre las funciones reales de variable real. Aquellas dificultades que tuvieron que ver con el abordaje de las tareas de modelización matemática, de los problemas contextualizados y otras dificultades que surgieron para la comprensión del fenómeno estudiado.
3) Tercer aspecto (los ambientes de aprendizaje creados): Aquellas dificultades generadas al implementar la modelización matemática y el uso del GeoGebra para la enseñanza y aprendizaje de las funciones.

Dificultades Generadas en Relación a la Primera Arista: la actitud del docente, las acciones de los estudiantes y los ambientes de aprendizaje

Este tipo de dificultades que comprende la primera arista se describen a continuación:

Las definidas bajo los aspectos mencionados:

1) Primer aspecto: Existió muchas barreras para avanzar en ciertas innovaciones metodológicas en ambientes tecnológicos para la enseñanza y aprendizaje de las funciones. Definitivamente, hay que intentar romper paradigmas en la enseñanza tradicional.
2) Primer aspecto: Los docentes involucrados en el estudio no estaban inicialmente acostumbrados a trabajar en equipo con sus colegas y mucho menos a evaluar una sesión de clases de manera colectiva antes de dar inicio a la siguiente.
3) Primer aspecto: Esta resistencia al cambio fue percibida también a la hora de contestar los instrumentos utilizados: el cuestionario y la entrevista; ya que los docentes no habitúan el hecho de retroalimentar sus clases de manera colectiva.
4) Segundo aspecto: Falta de hábitos y/o motivación por parte de algunos estudiantes para investigar situaciones problemas contextualizadas, que tengan que ver con su proyecto de carrera de ingeniería (en informática, industrial, forestal o producción animal), o futuro desempeño profesional.
5) Segundo aspecto: Falta de innovación en la escogencia y en la selección de problemas autóctonos que tengan relación con la especialización de su carrera profesional.
6) Segundo aspecto: Falta de interpretación real del fenómeno en estudio, en sus diferentes esquemas de representación: modelo real, matemático y computacional.
7) Segundo aspecto: Las tareas de modelización matemática situaron a algunos estudiantes en una situación de desasosiego eventual; esto los llevó a claudicar en cierto momento. Ellos no sabían los caminos que los podrían conducir a resolver los problemas, ni las posibles respuestas. Sin embargo, esto fue superado posteriormente.
8) Tercer aspecto: Poca disponibilidad de uso del laboratorio de computación, fuera del horario de clases, tanto para los estudiantes como para los docentes.

9) Tercer aspecto: Se presentó unas confusiones en el manejo de las herramientas del software, porque se trabajó durante la aplicación del 2017, en dos (2) plataformas: bajo Linux y bajo Windows y consecuentemente en dos versiones diferentes del software GeoGebra.
10) Tercer aspecto: El tiempo de maduración de los contenidos matemáticos sobre funciones reales fue muy limitado porque la propuesta didáctica fue aplicada en dos oportunidades en períodos intensivos. Esto generó en algunas ocasiones un atropello durante la construcción de ciertas definiciones matemáticas.
11) Tercer aspecto: El tiempo en algunas ocasiones fue limitado para que los estudiantes se familiarizaran a plenitud con el manejo del software y tuvieran cierto dominio de sus herramientas y comandos, de tal manera de valerse del carácter utilitario de la matemática y aprovechar las bondades de éste para lograr simular fenómenos, toda vez, lograda la conexión entre el modelo real, matemático y computacional.
12) Tercer aspecto: Existió mucha limitación o acceso restringido al laboratorio.
13) Tercer aspecto: Influyó negativamente el tiempo para los límites temporales establecidos en la investigación. Fueron lapsos muy cortos de 6 o siete semanas durante cada aplicación a lo largo de esos tres años consecutivos. Fue necesario que el estudiante se apropiara de algunos conceptos matemáticos para conjuntamente se dedicara a entender los fenómenos, para luego representarlos y simularlos a través de una relación funcional. En concreto, las sesiones de clases fueron de lapsos muy cortos de trabajo (2 horas); aunado al hecho de un ritmo muy acelerado entre una sesión y otra. Lo ideal sería: períodos de trabajo más largos, con un tiempo más prolongado entre las sesiones de trabajo que ayuden al alumno a reflexionar, revisar, analizar, corregir, subsanar fallas, retomar y madurar el conocimiento matemático y extramatemático adquirido.
14) Tercer aspecto: La planificación se vio afectada por diversas razones que involucraban el uso del laboratorio de computación en ciertas sesiones de clases.

Dificultades Matemáticas Presentes en los Productos de las Tareas de Modelización Matemática Realizadas por los Estudiantes:

En base al análisis y la interpretación de resultados de las tareas de modelización entregadas por los estudiantes (físicas y virtuales), se identificaron cuáles fueron las dificultades y errores que mostraron las unidades de análisis en este estudio, a lo largo de las tres aplicaciones realizadas correspondientes a los años 2016, 2017 y 2018, las cuales han conformado la segunda arista de dificultadas declaradas en esta investigación.

Las dificultades presentes en las producciones de los estudiantes fueron de tipo epistemológicas y cognitivas; estas dificultades los conllevaron muchas veces a incurrir en errores, los cuales se han agrupado de acuerdo a cuatro categorías establecidas.

Dificultades Epistemológicas:

En estas dificultades, los obstáculos que se manejaron fueron subyacentes a las propias dificultades intrínsecas de los conceptos inmersos en las definiciones, lo cual dependía mucho de las implicaciones de: cómo fue evolucionando la conformación del concepto, de su naturaleza histórica, de cómo se legitimó la definición y sus términos a lo largo de la historia.

Dificultades Cognitivas:

Son aquellas que ocurrían cuando los estudiantes presentaban dificultades para procesar información sobre el conocimiento matemático trabajado, incluso los obstáculos que reflejaron en el desarrollo de los procesos internos que desarrollaron o durante la ejecución de capacidades a la hora de resolver los problemas propuestos en las tareas de modelización matemática.

Errores:

Los errores constituyeron el accionar errado del estudiante, producto de sus ideas falsas sobre conocimientos matemáticos, o de la confusión de objetos matemáticos, o de los procesos indefinidos o inadecuados, o de procedimientos incorrectos en su búsqueda de dar respuesta a los problemas planteados. Todos estos errores se pudieron categorizar en 4 grupos específicos a saber, tomando en cuenta la clasificación de Alpizar, Fernández, Morales y Quesada (2018).

En virtud a ello, la conformación de los grupos quedó establecida de la siguiente forma:

1) Errores Tipo 1: Aquellos derivados del mal uso de los símbolos y términos matemáticos.

2) Errores Tipo 2: Todos los originados por deficiencia en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos matemáticos.
3) Errores Tipo 3: Los errores provenientes de la producción de representaciones inadecuadas de situaciones matemáticas.
4) Errores Tipo 4: Aquellos generados por el mal procedimiento o el manejo inadecuado o incorrecto de la información dada inicialmente en los enunciados de los problemas. El manejo incorrecto de la información puede reflejarse bien sea, en la interpretación errada del enunciado del problema, o en el mismo hecho de no seguir correctamente las instrucciones propuestas en las guías de instrucción que orientaban la resolución del problema, o quizás en el mal uso de los datos suministrados, gráficos u otras fuentes de información previas.

Se enumeran a continuación las Dificultades Epistemológicas encontradas, indicando el tipo de error en tal caso de existir:

1) Error Tipo 1: El uso incorrecto u omisión de los conectores lógicos. Por ejemplo, la omisión del conector lógico de la implicación (⇒) como separación de cada proposición matemática, donde la segunda es consecuencia de la primera; así como también, el uso incorrecto del símbolo de igualdad.
2) Error Tipo 2: Algunos estudiantes no concibieron la jerarquización debida de las operaciones inmersas en la composición de funciones. Por ejemplo, al componer las funciones $(f \circ f^{-1})$, un grupo significativo de estudiantes no pudieron discernir el orden establecido en la regla de correspondencia $f(f^{-1}(x))$. Es decir, los estudiantes no establecieron diferencias entre componer $f\left(f^{-1}(x)\right)$ y $f^{-1}(f(x))$: en el primer caso evaluar la función más interna f^{-1} en la más externa f; mientras que para el segundo caso, es la evaluación de la más interna en este caso f, en la más externa f^{-1}. En términos del lenguaje usual, no se respetó el orden estricto de cómo se lee en español: de izquierda a derecha.
3) Confusión entre objetos matemáticos que involucraban conocimientos previos:

   3.1.- Error Tipo 2: Identificaron las variables dependientes como independientes y viceversa en algunos de los fenómenos contextualizados que se trataron. Incluso se dieron casos, donde invirtieron hasta la ubicación de las variables en los ejes coordenados.

3.2.- Error Tipo 1: Imprecisión en el manejo de las variables y omisión de sus unidades de medidas. La mayoría de los estudiantes no expresaban las variables en términos de sus unidades de medidas y a la hora de hacer cambios en los sistemas de medidas les era cuesta arriba, lograr las transformaciones de manera acertada.

3.3.- Error Tipo 2: Falsas creencias. Algunos estudiantes visualizaron la regla de correspondencia que relaciona los elementos de dos conjuntos sobre los cuales se define la relación, como la función misma. Es decir, mezclan o confunden la definición de función con la de su expresión analítica.

3.4.- Error Tipo 1: Un grupo reducido de estudiantes confundieron el eje de las abscisas con el sistema de coordenadas.

4) Error Tipo 3: En la diversidad de representaciones de las funciones reales, al usar los sistemas de representación (bien sea el algebraico, el geométrico, o el numérico), no puede seguir persistiendo el tratamiento errado de visualizar la definición de función real sólo, en su expresión algebraica o cuando es presentada como una relación entre conjuntos discretos. Esto es absurdo, precisamente porque debe tratarse de la misma definición expresada en varios sistemas de representación. Es decir, una definición de función, sea cualesquiera el registro de representación, debe considerar una relación bajo las dos condiciones indispensables, aunque se utilice distintos entes u objeto matemáticos para lograrlo:

4.1.- Que cada elemento de su dominio esté relacionado bajo esa relación de correspondencia.

4.2.- Y que esa relación de correspondencia sea única.

5) Error Tipo 3: Dificultades al hacer transformaciones entre registros de representación de una función. Por ejemplo: Los estudiantes presentaban dudas ante la siguiente interrogante formulada: ¿Si un punto satisface a la función f y se comprueba desde su evaluación en su expresión algebraica, ese punto formará parte del gráfico de f?.

6) Error Tipo 3: Persiste la concepción errada en los estudiantes de la definición conjuntista con que generalmente se aborda la definición de función, lo cual no puede seguir limitando el carácter variacional que posee ésta; y sobre todo cuando las relaciones

funcionales que se estudiaron representaban una aproximación del comportamiento de las variables inmersas en los fenómenos contextualizados estudiados. El trabajo en el GeoGebra, permitió la visualización de traslaciones y reflexiones de funciones de manera dinámica, mediante el uso de los deslizadores. En este sentido, se trabajó a profundidad el carácter variacional de las funciones y el hecho de visualizar tanto la transformación de los valores asignados a las variables, las traslaciones atribuidas a los parámetros implícitos en los modelos construidos en el software, como las familias de funciones creadas con estos cambios.

7) Error Tipo 3: Conflicto interno para realizar la representación gráfica de funciones con dominio de variable discreta. Aunado al hecho de que muchos estudiantes no lograban discernir entre lo que era una función con dominio discreto o continuo. Lograr que los estudiantes diferenciaran la representación de funciones de dominio discreto y continúo fue una ardua labor.

8) Error Tipo 3: Se presentaron errores en el lenguaje utilizado para explicar las transformaciones de una dimensión a otra al representar la misma función, predominando la construcción de relaciones funcionales erradas entre un registro y otro. Por ejemplo, cuando se representaba una función real de dominio discreto en la dimensión numérica o tabular, un grupo significativo de estudiantes no tradujo o representó de manera correcta esta función en la pantalla gráfica del GeoGebra; ya que construyeron una relación funcional de dominio continuo con estos datos que no generaban la función dada inicialmente de dominio discreto. En consecuencia, las funciones reales que describían comportamientos de ajuste de curvas con variables continúas, era para ellos la misma relación funcional puntual inicial entre variables discretas.

   Tal fue el caso, para representar el crecimiento demográfico poblacional de Venezuela calculado por años durante cierto período de tiempo mediante la construcción de una relación funcional. Inicialmente, se representó a partir de una función con dominio discreto; pero más tarde, con un ajuste de regresión en el GeoGebra, se representó una nueva función ahora con dominio continuo que se aproximaba al comportamiento de los valores iniciales, con el objeto de predecir en el tiempo. En este sentido, la precisión en la representación gráfica de esta función generada en el GeoGebra para realizar predicciones fue muy adecuada: se modeló este fenómeno desde una función exponencial cuyo dominio es un subconjunto de IR continuo; al igual que su expresión analítica en el sistema algebraico.

9) Error Tipo 2: La concepción errónea que prevalece del establecimiento de una única alternativa de solución o respuesta al problema planteado. En este caso, generalmente también se hacía una sola inferencia a partir del modelo matemático construido, lo cual es consecuencia directa, del regular proceder del aprendiz. No obstante, los problemas que se propusieron podían ser modelados mediante varias relaciones funcionales, éstas últimas siempre próximas al comportamiento de las variables que interactuaban. Sin embargo, las predicciones que se debían hacer en cada modelo construido para un mismo fenómeno, deberían haber tenido la misma tendencia en cuanto al comportamiento de sus variables en el tiempo, a objeto de preservar la validez de las mismas.

Seguidamente, se expondrán al lector las Dificultades Cognitivas observadas:

1) Error Tipo 2: Percepción vaga y superficial de definiciones matemáticas. Los estudiantes no distinguieron propiedades características de algunos tipos de funciones reales; así como también, omitieron condiciones iniciales a tomar en cuenta en los modelos construidos; lo que les impidió determinar si un tipo de función real u otro era el más apropiado, el más próximo al comportamiento de las variables que intervenían en el fenómeno estudiado, en ese proceso de búsqueda del modelo adecuado que garantizara una acertada selección de la función que simulaba de la mejor manera posible la situación problema. Todo lo anterior, conllevó a un número reducido de estudiantes a no tener precisión en sus respuestas y/o una delimitación mal definida del problema en estudio, debido a la falta de claridad en los conceptos y definiciones manejadas. Por ejemplo:

   1.1.- Error Tipo 3: Un número mínimo de estudiantes no internalizaron las características propias de algunos tipos de funciones reales. Por ejemplo, desde la siguiente expresión analítica de una función exponencial f,

   tal que $f: IR^{+} \rightarrow IR^{+}$

$$y = a.e^{(-0.03x)},$$

donde $a \neq 0$ y $x \neq 0$. Estas condiciones indispensables de $a \neq 0$ y $x \neq 0$, para el caso de una función exponencial, particularmente no fue considerada y se asumió todo lo contrario, restándole importancia a esta condición inicial. Esto significó un error característico en algunos estudiantes, el hecho de no identificar con precisión que la función definida anteriormente con $a = 0$ y/o $x \neq 0$ lo que caracterizaba no era una función exponencial; sino a una función constante en este caso.

1.2.- Error Tipo 2: Algunos estudiantes no comprendían la definición de rango o recorrido de una función real: unos lo asumían simplemente como una imagen bajo la relación y otros como el conjunto de llegada bajo la relación.

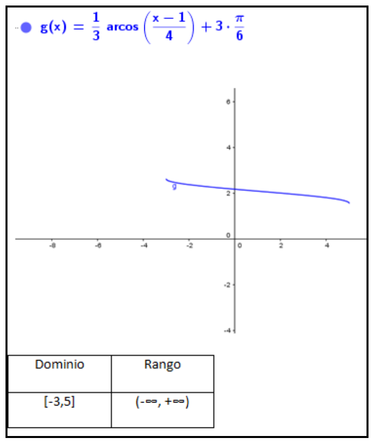


***Gráfico 25*. Imagen que evidencia la incomprensión de la definición de Rango de la función g.**

El gráfico anterior presenta un fragmento tomado de los productos de las tareas de modelización matemática entregadas por los estudiantes. Aquí, se refleja la vaga percepción de la definición de rango, cuando no se específica que es el rango de la función g lo que trata de expresar de manera simbólica.

1.3.- Error Tipo 2: Algunos estudiantes no precisaron cuáles eran las condiciones de existencia de una función inversa. Es decir, cuáles deberían ser las restricciones que habría que asumir para que existiera la función inversa f^{-1} de una función f

1.4.- Error Tipo 1: Hubo mucha dificultad para graduar los ejes en una escala a convenir para una adecuada representación gráfica de la función. Esto es consecuencia, de las falencias que trae el estudiante de bachillerato, ya que una gran mayoría de los estudiantes observados tienen poco manejo de las estructuras matemáticas y de ciertas simbologías; por ejemplo, las escalas que se pueden generar en radianes o en grados como unidades de medidas y sus equivalencias.

2) Error Tipo 4: Carencia o deficiencia de la orientación espacial. En este sentido, algunos estudiantes no manejaron correctamente los referentes implícitos en el enunciado del problema. No lograron recrear o proyectar en sí la situación real, sino alguna representación de ésta. Específicamente, en el problema que consistió en simular la construcción de una pieza de una chimenea, algunos estudiantes simularon mediante el uso del GeoGebra, la representación real del objeto mediante una circunferencia al variar su radio y no lo que fue la construcción de la pieza real como tal, la cual constituía un cilindro circular recto, que fue la exigencia en sí del problema planteado.

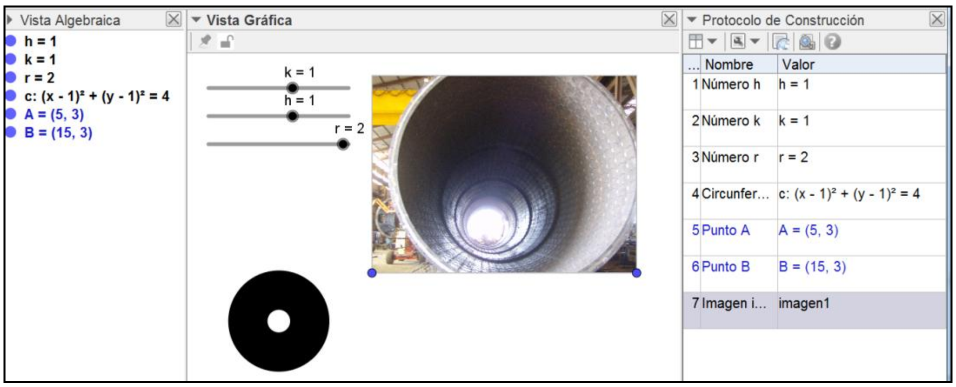
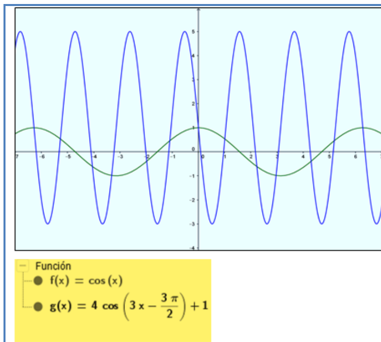


Gráfico 26. **Imagen extraída del producto del trabajo generado en el GeoGebra por un grupo de estudiantes.**

Desde el gráfico anterior, se puede interpretar que este grupo de estudiantes realizó la representación real del objeto, que es una figura y no el sólido, conformado por el cilindro circular recto.

3) Error Tipo 1: Deficiencia en el uso de un lenguaje técnico formal adecuado. Se trató de las limitaciones de vocabulario que presentaron los estudiantes para comunicar sus ideas matemáticas. Existieron dificultades con el manejo del lenguaje matemático y el técnico formal en ambos sentidos. Por ejemplo, algunos estudiantes no manejaron cierta terminología, tales como: las tasas de cambios implícitas en alguno de los modelos matemáticos abordados, la amplitud de curvas, las simetrías, el período de una función, puntos que satisfacían la relación funcional, intervalos de crecimiento o decrecimiento

de una función. Ellos mostraron evidencias de la incomprensión de estas definiciones y por ende, no reconocieron ciertos elementos o entes en el trabajo matemático que se realizó en la resolución de algunos problemas desarrollados.



FUNCIÓN	DOMINIO	RANGO	AMPLITUD
F(X)=4COS(3X-(3Π)/2)	R	[-3,5]	[-3,5]
F(X)=COS(X)	R	[-1,1]	[-1,1]

Gráfico 27. **Fragmento de un trabajo realizado por un estudiante, donde se evidencia que no manejaba la definición de Amplitud de una Curva.**

El gráfico anterior, refleja el trabajo realizado por un estudiante, donde se evidencia a través de este fragmento que desconocía la definición de amplitud de una curva, ya que la amplitud era de 4 unidades. En este sentido, la amplitud es una magnitud y no un intervalo, tal y como se observa en el gráfico según las respuestas dadas por este estudiante. A su vez, se puede observar que a ambas funciones f y g (funciones distintas), las llamó por igual F(x).

4) Error Tipo 4: Establecimiento de comparaciones de fenómenos similares de forma incorrecta. Tal es el caso de la comparación propuesta para estudiar la evolución de las poblaciones de dos Estados de Venezuela (Bolívar y Monagas), donde algunos estudiantes construyeron una relación errónea sólo entre las variables dependientes: número de habitantes de Bolívar y número de habitantes de Monagas; sin estudiar más bien a partir de un gráfico la evolución de cada población por separado y posteriormente establecer una comparación entre la población de ambos Estados durante el mismo tiempo. Esto se traduce como inconvenientes que presentaron los estudiantes en el entendimiento de situaciones problemáticas planteadas.

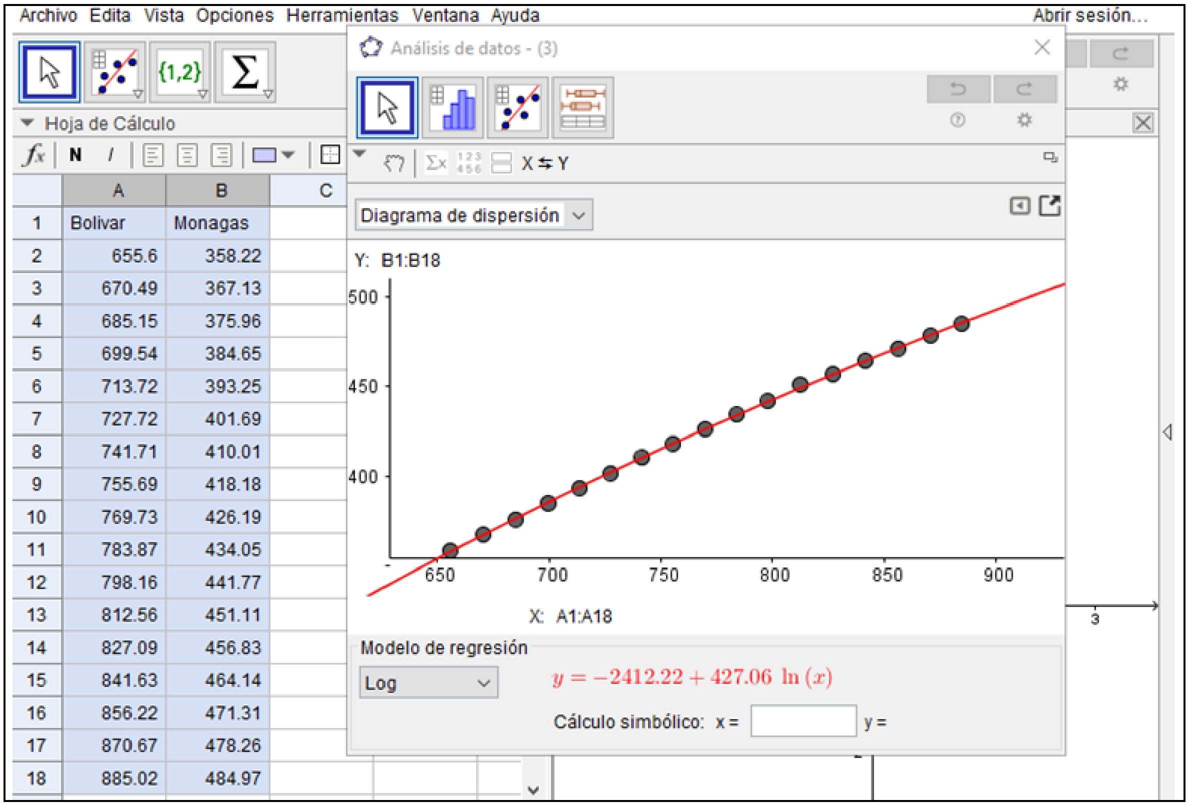


Gráfico 28. **Resolución Errónea en el GeoGebra, al buscar establecer una comparación del comportamiento demográfico de los Estados Monagas y Bolívar en Venezuela durante el mismo tiempo**.

Se evidencia en este trabajo una construcción errada del modelo funcional establecido, donde sólo se ha generado una relación entre las variables dependientes: número de habitantes de cada Estado.

5) Error Tipo 4: Discernimiento equivocado en la escogencia del modelo más adecuado. Aquel modelo matemático y/o computacional que se aproximara más al comportamiento del fenómeno estudiado. Por ejemplo, hubo un grupo significativo de estudiantes que escogieron funciones polinómicas de grado n y realmente la función que más se ajustaba era una función polinómica de un grado menor ($n-1$).

6) Error Tipo 2: Confusión de objetos matemáticos en la asimilación de nuevos conocimientos matemáticos: El sólido que representaba un cono truncado lo confundieron con la figura de un círculo con un orificio en el centro. Esto se originó como consecuencia del poco manejo de los estudiantes de éstos objetos matemáticos.

7) Error Tipo 3: Al tratar de simular los fenómenos estudiados con el uso del GeoGebra, la representación de algunos estudiantes no fue congruente con la realidad. Por ejemplo, no ubicaron en su representación gráfica el origen del sistema de coordenadas de manera adecuada. Específicamente, en la simulación de la crecida del río Orinoco para representar los niveles de profundidad alcanzados durante cierto período de tiempo, hubo muchas dudas en relación a la ubicación del origen del sistema de coordenadas en la relación profundidad versus tiempo.

8) Error Tipo 4: Incomprensión del significado de las variables que intervenían en el fenómeno estudiado. Los estudiantes debían analizar mejor los intervalos de recorrido, donde hacían variar las variables y los parámetros. Ya que en ocasiones las variables asumían valores negativos, lo cual no tenía sentido para las magnitudes que se estudiaban; por ejemplo: el porcentaje de coque en la muestra. Para subsanar esta dificultad, se exigía al estudiante, que la simulación debería ser siempre lo más próxima al comportamiento de las variables que interactúan en el problema real.

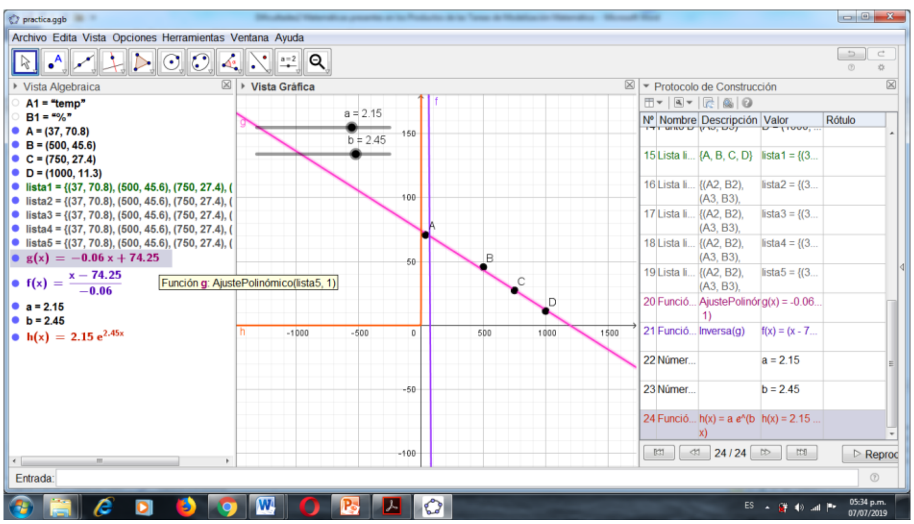


***Gráfico 29*: Fragmento de la resolución del problema que consistió en la neutralización del lodo rojo en una muestra de coque.**

A partir del gráfico se observa que varió en este modelo lineal la temperatura en función del porcentaje de coque en la muestra. En virtud a ello, la temperatura sólo puede variar entre 0°C y 1.238 °C. En consecuencia, se requiere de altas temperaturas para que tenga sentido la hipótesis: Cierto porcentaje de Coque en la muestra de lodo rojo alcanza su Ph cercano a 7, con temperaturas cercanas a los 1000 °C. En este sentido, en este problema la temperatura no puede asumir valores por debajo de 0 °C.

En definitiva, los estudios de López y Sosa (2008), sustentan algunas dificultades encontradas en esta investigación, por parte del estudiante en relación al concepto de función. Tales como: la falta de capacidad para: definir de manera correcta el concepto de función, interpretar el lenguaje matemático, diferenciar entre variable y parámetro, enunciar fenómenos o situaciones que involucren una relación funcional entre variables, utilizar diferentes representaciones de funciones y analizar e interpretar el comportamiento de la gráfica de una función, entre otros.

En síntesis, las dificultades presentes en el estudio, fueron estructuradas de la siguiente manera:

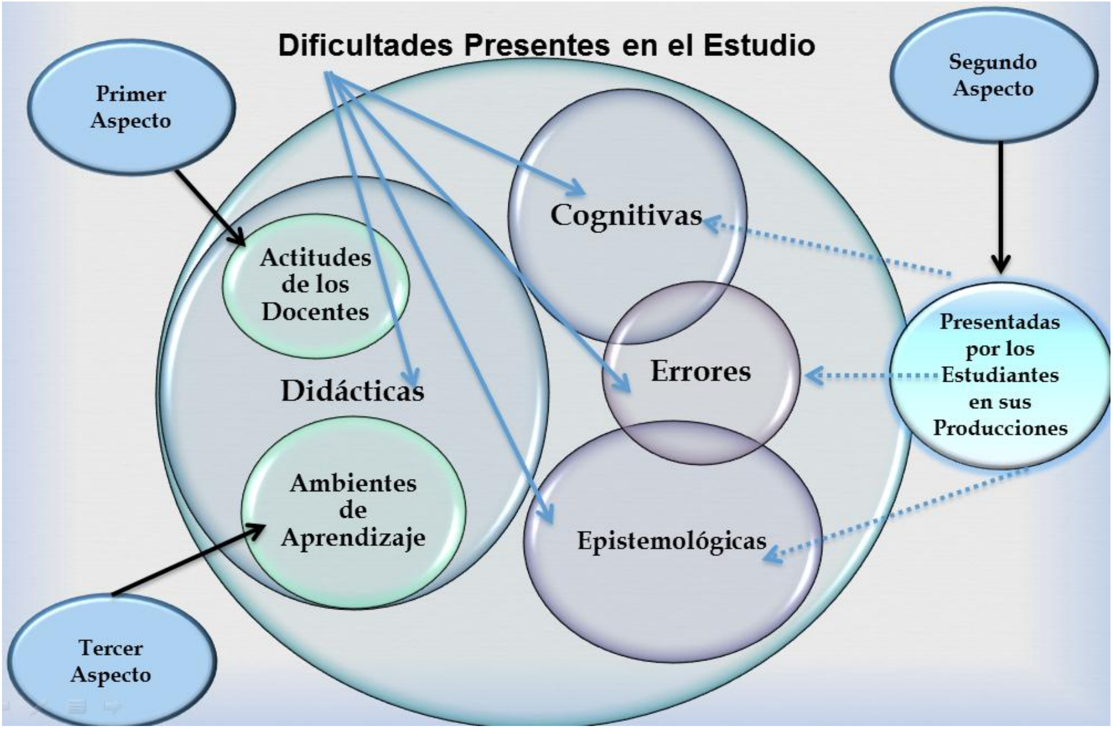


Gráfico 30. **Dificultades presentes en la investigación.**

En definitiva, las dificultades presentes en el estudio fueron de origen Epistemológico, Cognitivo y surgieron las llamadas ahora de tipo Didáctico; éstas últimas, producto de los obstáculos que enfrentó la docente investigadora en la planificación de las clases y en la aplicación de la propuesta didáctica. Específicamente, aquellas dificultades en torno a los ambientes de aprendizaje creados y las relativas a la actitud de los docentes que intervinieron frente a esta genuina propuesta para la enseñanza de funciones reales.

CAPÍTULO IX

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Propuesta Didáctica para la Enseñanza de las Funciones Reales

La propuesta didáctica implementada en este estudio para la enseñanza y aprendizaje de las funciones reales de variable real está vinculada con la asignatura Matemática I, de los proyectos de carreras de ingenierías que se ofertan en la Universidad Nacional Experimental de Guayana (UNEG). Dicha propuesta ha sido producto del trabajo investigativo que se ha realizado a la largo de tres años consecutivos en esta casa de estudios universitarios, en los proyectos de carreras de ingenierías que se ofrecen actualmente: Ingeniería Industrial, Ingeniería en Informática, Ingeniería en Producción Animal e Ingeniería Forestal.

El carácter de transferibilidad de esta investigación le permite, como propuesta metodológica para la enseñanza de este tema, ser considerada para su réplica en cualesquiera de los Institutos de Educación Universitaria donde se oferte una cátedra que aborde el tema de funciones reales de variable real, llámese escuela, facultad o proyectos de carreras de ingenierías, donde la evaluación sea por competencias y esté en plena correspondencia con los planes curriculares institucionalmente establecidos para esa asignatura.

En cuanto al logro del objetivo general de la investigación, se afirma lo siguiente:

La implementación de esta propuesta didáctica ha impactado positivamente en la formación matemática de los estudiantes de ingenierías que han participado en esta investigación, porque la construcción del conocimiento matemático ha sido profunda y teórica-práctica, comprendiendo toda una serie de definiciones, propiedades, operaciones, axiomas y teoremas sobre funciones reales, mediante el desarrollo de competencias de modelización matemática, a través del uso práctico de la matemática al resolver problemas contextualizados y en ambientes mediados por las tecnologías de la información.

En el proceso de enseñanza y aprendizaje desarrollado mediante la implementación de la propuesta didáctica, se logró que los estudiantes internalizaran una gran cantidad de conocimientos sobre funciones reales de variable real, mediante la resolución de problemas contextualizados, donde con apoyo del software GeoGebra y del ciclo de modelización matemática planteado por Blum & Leiβ (2007), se ha logrado potenciar una serie de competencias de modelización matemática que se proyectan en líneas generales como competencias dentro del perfil del ingeniero y que los capacita, en base a su preparación como resolutores de problemas, desde su creatividad e ingenio para dar respuestas óptimas ante las demandas y exigencias que tendrán como futuros profesionales en este ramo de la ciencias aplicadas.

En este orden de ideas, el impacto positivo que se atribuye a la propuesta didáctica implementada, en la formación matemática de los futuros ingenieros, se ha valorado en función de las capacidades y competencias de modelización matemática logradas por los estudiantes y los conocimientos sobre función construidos.

En este sentido, se listan a continuación algunos logros de los estudiantes en pro de su formación matemática, (generados como producto del diseño didáctico elaborado):

- Desarrollaron habilidades para resolver problemas contextualizados.
- Proyectaron autonomía intelectual en la resolución de los problemas planteados.
- Asumieron una visión integral, estratégica e interdisciplinaria.
- Predijeron comportamientos de fenómenos asociados a sus futuras prácticas como profesionales de la ingeniería.
- Potenciaron la capacidad analítica e investigativa.
- Activaron la capacidad de trabajar en grupos.
- Estatuyeron el modelado y el simulado de fenómenos estimulando la creatividad.
- Fomentaron la capacidad de pensamiento divergente, al considerar varias alternativas de respuestas en diversos sistemas de representación; además de comparar fenómenos similares.
- Afianzaron la formación humanística con sensibilidad social.
- Consolidaron espacios de reflexión para la toma de decisiones.
- Manejaron las tecnologías de la información.
- Desarrollaron capacidad de comunicación, incluso en varios registros de

representación.

A continuación, se presenta un esquema que refleja en qué consistió la propuesta didáctica que se diseñó para la enseñanza y el aprendizaje de las funciones reales de variable real:

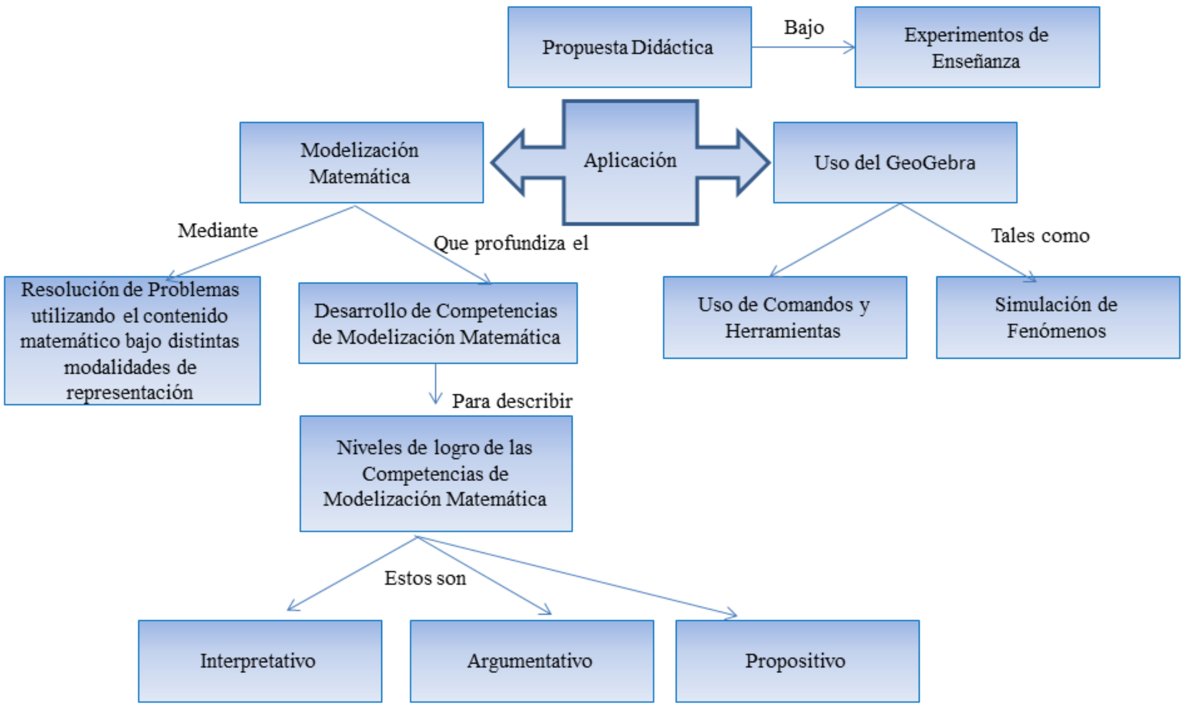


Gráfico 31. **Esquema de la Propuesta Didáctica Diseñada para la Enseñanza de las Funciones Reales de Variable Real.**

A partir de la experiencia que surge de la implementación de esta propuesta didáctica, se sugiere como eje transversal en la enseñanza de las funciones reales, el uso de la modelización matemática para profundizar el desarrollo de competencias de modelización, competencias que han sido descritas por Maaβ (2006). Estas competencias son esenciales para fortalecer la formación matemática de los futuros ingenieros, ya que se han potenciado capacidades, mediante la resolución de las tareas de modelización, que les serán útil en su prospectiva estratégica como profesionales de la ingeniería.

Esta propuesta didáctica para la enseñanza de funciones reales de variable real, goza de un carácter genuino y centra su atención en el uso de la modelización matemática en los programas de ingenierías de la UNEG, aplicándola en concreto en la asignatura Matemática I, adscrita al área de matemáticas. La metodología empleada en esta propuesta didáctica, en vista de todos los satisfactorios resultados que se han obtenido mediante su desarrollo, se debería proponer como estrategia metodológica para la enseñanza de las funciones reales en los proyectos de carreras de ingenierías en la UNEG.

Los resultados positivos referidos anteriormente, estuvieron en orden a: la cantidad sustancial de contenidos matemáticos que se desarrollaron, la gran cantidad de competencias de modelización matemática potenciadas desde las capacidades logradas y el uso adecuado de las tecnologías en el aula para resolver los problemas contextualizados desde distintos sistemas de representación. En consecuencia, se ha concebido una visión alternativa en la UNEG, para desarrollar la unidad temática sobre funciones reales, que presenta el programa curricular de Matemática I de los proyectos de carreras de ingenierías en esta Universidad; donde se cuenta con un sólo plan programático actualmente para orientar todos los cursos de Matemática I, en cualesquiera de los cuatro (4) proyectos de ingenierías que se ofertan en esta casa de estudios.

La propuesta didáctica, plantea una temática particular en torno a las funciones reales de variable real, una estrategia ajustada a los nuevos tiempos tecnológicos, de construcción del conocimiento matemático en base al trabajo colectivo, al consolidar equipos de trabajos multidisciplinarios (entre docentes y alumnos) y tratando de generar una comunicación abierta y fluida mediante el uso de un lenguaje técnico formal, rico en una diversidad de sistemas de representación de los objetos matemáticos, su traducción y su variabilidad entre ellos. Todo lo anterior se ha conseguido siempre en la búsqueda de resolver problemas contextualizados que se describan mediante relaciones funcionales y teniendo la modelización matemática como metodología de acción, en los términos planteados por Mendible y Ortiz (2007) y Bejarano y Ortiz (2018).

Algunas de las consideraciones generales que apoyaron la incorporación del GeoGebra en la propuesta didáctica fueron: (a) su impacto motivacional en los estudiantes, (b) la posibilidad de manejar con rapidez y precisión relativa grandes cantidades de información, (c) liberación de tiempo de ejecución en las tareas de modelización que exigían largos cálculos, (d) variabilidad en la representación de situaciones y la disposición de herramientas para recrear realidades (simular comportamiento de fenómenos), (e) exploración experimental de conjeturas en tiempos breves, (f) la disponibilidad simultánea de las pantallas de visualización del modelo matemático en varios sistemas de representación: el algebraico, el numérico y el geométrico y (g) la posibilidad de corroborar predicciones en tiempo mínimo relativo.

Desde este punto de vista, en la modelización matemática, el uso de las nuevas tecnologías ayudó de manera directa en tareas; tales como: (a) se sometió los modelos a “pruebas” de coherencia con respecto a lo contextual, (b) se obtuvo diferentes modalidades de representación y experimentación, (c) se establecieron interpolaciones y extrapolaciones que lo contextual no proveía, (d) se confrontó diferentes opciones propuestas por individuos o por colectivos de estudiantes en busca del establecimiento de criterios de efectividad y eficiencia.

En virtud a todo lo anterior, se contempló la necesidad de garantizar el uso de la modelización matemática con apoyo de la tecnología como un proceso orientador, mediante el cual se impulsó todas las acciones listadas anteriormente y siempre en la búsqueda del desarrollo de las competencias de modelización matemática en las carreras de ingenierías de la UNEG, que consolida la formación matemática del futuro ingeniero.

A su vez, las tareas de modelización matemática integraron componentes motivacionales y contenidos de otras disciplinas; sin embargo, los problemas contextualizados se seleccionaron tratando de estudiar situaciones o fenómenos concretos de la rama de la ingeniería que pertenecía el estudiante (Industrial, Forestal, en Producción Animal o en Informática), en ambientes de aprendizajes flexibles, colaborativos e interactivos mediados con la tecnología.

Diseño y Análisis de las Tareas de Modelización Matemática:

Se elaboraron en este estudio una serie de tareas de modelización matemática (Watson y Ohtani, 2015). Estas tareas fueron diseñadas con el objetivo de impulsar e inducir al desafío colectivo planteado por López (2012), de resolver problemas contextualizados durante el desarrollo de las sesiones de clases planificadas para que, desde la modelización matemática, los estudiantes pudieran analizar las funciones y sus elementos característicos desde el planteamiento y la reflexión de problemas reales.

La modelación matemática se enmarcó en dos tipos de actividades, según López (2012):

Actividades Piensa y Actúa: "Se le presentaban al estudiante todos los datos o elementos para que lograra obtener un modelo matemático el cual, reprodujera de la mejor manera la situación planteada" (p. 657).

Actividades de Ajuste de Curvas: "Fueron las actividades en donde al alumno se le presentaba una serie de datos obtenidos a partir de una medición, con el propósito de que los manipulara y obtuviera un modelo matemático que representaba de la mejor manera la gráfica de la situación planteada" (p. 657).

En cuanto a la estructura de estas tareas de modelización, se propusieron de 3 tipos en base a las ideas de Rico (2005):

1. *Tareas de Reproducción*: que consistían en realizar operaciones matemáticas básicas y uso de fórmulas simples y algoritmos ya conocidos.
2. *Tareas de Conexión*: con el propósito de relacionar ideas para resolver los problemas propuestos. Para ello, se indujo a los estudiantes a buscar y usar nuevas estrategias o formas para intentar resolver situaciones problemáticas de los fenómenos estudiados.
3. *Tareas de Reflexión*: cuando describían demandas de tareas que requerían comprensión y reflexión, creatividad e innovación. En estas se relacionaban conocimientos previos para resolver problemas más complejos, donde se buscaba generalizar y justificar los resultados.

Resolución de los Problemas Contextualizados y Simulación de Fenómenos

Las tareas de modelización matemática plantearon la resolución de problemas reales y no de ejercicios habituales que se tratan regularmente para la enseñanza de las funciones. En este sentido, se estudiaron y simularon fenómenos autóctonos relativos a: problemas que trataron la economía del país, en relación a las importaciones y exportaciones de ciertos rubros; problemas químicos que abordaron el porcentaje de concentración de materiales residuales en ciertas muestras; problemas ambientales que tenían que ver con la crecida del caudal del Río Orinoco (ubicado en territorio venezolano) en períodos con cierta regularidad cada año, crecimientos demográficos. Un problema en torno al cableado que sostiene el puente Angostura, ubicado en Ciudad Bolívar y otro deferido a la construcción de una pieza mecánica, que se construyó en una empresa básica de la zona, llamada:

Vhicoa. A su vez, están los problemas donde se trataron los movimientos de oscilación del péndulo, el comportamiento de las mareas, el encendido y apagado de un sistema eléctrico, entre otros

En el capítulo II, se presentó al lector exhaustivamente, cómo fue el diseño y el análisis de las tareas de modelización matemática propuestas desde las guías de instrucción que se elaboraron; todo lo cual da respuesta al objetivo específico número uno en esta investigación. En este apartado se analizó, una a una, todas las tareas de modelización desarrolladas. Concretamente se estudiaron qué contenidos, competencias de modelización matemática y objetivos se alcanzaron mediante el ejecútese de estas tareas. Se indicaron los errores que los alumnos cometieron y que se buscaron evitar, además de resaltar los materiales y recursos que se utilizaron y cómo se agrupó el alumnado durante el ejecútese de cada tarea de modelización desarrollada en el laboratorio de computación.

De todo el análisis de las tareas de modelización matemática surge el siguiente modelo real de la propuesta didáctica construida: Durante el proceso de diseño de esta propuesta, se trabajaron al inicio con 16 competencias de modelización matemática que desarrollaron 21 capacidades y luego se desarrollaron 18 competencias de modelización matemáticas que se ampliaron a 55 capacidades, las cuales han potenciado el modelo de propuesta diseñada para la enseñanza de la unidad de funciones.

Estas competencias y capacidades se listan en los Cuadros 16, 17, 18 y 19 contenidos en el capítulo VII, y se representan en el siguiente gráfico (modelo real de propuesta didáctica), que ha surgido en esta investigación, producto de todo un proceso de análisis y experimentación a partir de las tareas de modelización matemática planteadas.

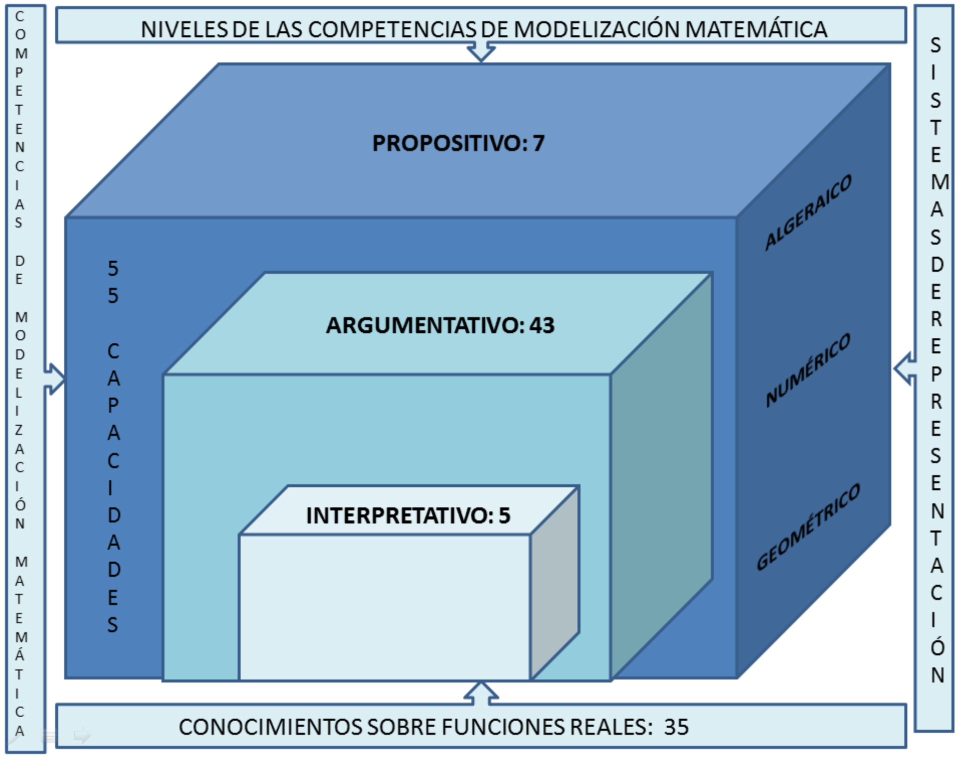


***Gráfico 32*. Modelo Real de la propuesta didáctica diseñada.**

El número establecido hasta ahora para cada categoría definida, puede variar dependiendo del trabajo que se realice, en función de la motivación del estudiante y otros aspectos, lo que siempre debería conservarse es la metodología seguida para afianzar la propuesta didáctica en los ambientes de formación de los futuros ingenieros para promover su ingenio, valga de redundancia, socavando las bases de una educación tradicional, sólo de transmisión de conocimientos y pasando a una educación asistida por las tecnologías digitales, basada en construcción de procesos, desarrollo de competencias de modelización matemática y conocimientos multidisciplinarios de manera integral.

En base a los resultados logrados desde la implementación de la propuesta didáctica por tres años consecutivos, se sugiere un ajuste del plan programático actual en la UNEG, de Matemática I de los proyectos de ingenierías, para la unidad de funciones reales. En concreto, se plantea que la enseñanza de las funciones reales se adecue a lo que se ha establecido mediante la propuesta diseñada. Es decir, se propone que en la unidad de funciones del plan programático se incorpore los elementos estudiados en la propuesta didáctica: contenidos matemáticos sobre funciones reales a desarrollar, competencias de modelización matemáticas a potenciar en estrecha relación con el perfil profesional del ingeniero, capacidades a lograr en la formación matemática del futuro profesional de la ingeniería, el uso de algún software dinámico que incorpore las tecnologías en los ambientes de aula de manera colectiva y la resolución de problemas contextualizados bajo cada sistema de representación posible.

En virtud de ello, se presenta seguidamente la sugerencia de la adecuación del plan programático de Matemática I en la UNEG, tomando en cuenta los elementos incorporados en la propuesta didáctica diseñada.

Propuesta del Plan Programático Sobre la Unidad de Funciones Reales:

Se presenta a continuación la propuesta del plan programático:

Cuadro 26.

PLAN PROGRAMÁTICO DE MATEMÁTICA I, PARA LOS PROYECTOS DE INGENIERÍAS EN LA UNEG

Universidad Nacional Experimental de Guayana
Vicerrectorado Académico
Coordinación de Currículo

I. DATOS DE IDENTIFICACIÓN: 01_MATEMATICA I_A

Proyecto de Carrera:	INGENIERIAS							
Programa de Estudio:			Licenciado		Ingeniero	X	Diplomado	
Unidad Curricular:	MATEMÁTICA I							

Semestre	**Código**	**Unidad Crédito**	**Horas Semanales**	**Horas Semestre**
I		5	6	96

Componente de Formación:	General		Profesional Básica	X	Profesional Especializada	
	Práctica Profesional:		Pasantía:			

Carácter de la Unidad Curricular:	Obligatoria	X	Electiva	
Requisitos para Cursar la Unidad Curricular (Prelaciones):				

Elaborado por: María Bejarano		**Fecha:** MARZO 2020
VºBº Responsable del Área de Matemática		
Nombre	María Bejarano	Firma
VºBº Coordinador (a) del Proyecto de Carrera:		
Nombre:		Firma:
VºBºCoordinador (a) de Currículo:		
Nombre:		Firma:

II. PROPÓSITO:

Esta unidad curricular contribuye a la formación profesional básica del Ingeniero, y le prepara para aplicar fundamentos matemáticos en la resolución de problemas que se presentan en su ejercicio profesional. Los objetivos fundamentales de la matemática en la formación de ingenieros de forma general se han concretado en:

1. Proporcionar los conocimientos sobre funciones reales para desarrollar competencias de modelización matemática, habilidades y destrezas que permitan plantear y resolver problemas prácticos y teóricos, mediante la formulación e interpretación de modelos en términos matemáticos.
2. Desarrollar un pensamiento objetivo, dando mayor importancia al razonamiento y a la reflexión, antes que a la mecanización y memorización.
3. Desarrollar capacidades para simular, estructurar y razonar lógicamente, usando las tecnologías de la información.
4. Apropiar el lenguaje y simbolismos, que permiten al futuro ingeniero comunicarse con claridad y precisión, hacer cálculos con seguridad, manejar instrumentos de medidas, de cálculo y representaciones gráficas para comprender el mundo en que vive, atendiendo a los estándares que rigen la simbología matemática.

III. COMPETENCIAS GENÉRICAS:

Exhibidas por cualquier profesional universitario. Validadas y comunes para todos los proyectos de carrera.

- Identificación, planteamiento y resolución de problemas a través de diferentes métodos.
- Capacidad crítica.
- Comunicación escrita y verbal en su idioma nativo y en otro idioma.
- Comprensión, decodificación e interpretación del lenguaje formal y simbólico, para entender su relación con el lenguaje natural.
- Manejo de los recursos instrumentales y metodológicos de la investigación.
- Aplicación de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación.

IV. COMPETENCIAS PROFESIONALES:

- Exhibidas por los profesionales de una misma profesión.
- Validadas por cada proyecto de carrera.
- Aplicación de fundamentos matemáticos básicos del ingeniero.

V. COMPETENCIAS DE LA UNIDAD CURRICULAR:

Lo que el estudiante podrá hacer cuando obtenga los conocimientos de esta unidad curricular y desarrolle alguna de las competencias de modelización matemática que se enumeran a continuación para cada nivel:

NIVEL INTERPRETATIVO:

- Competencia para identificar y estructurar situaciones problemas.
- Competencia para entender y analizar el problema real.

NIVEL ARGUMENTATIVO:

- Competencia para crear un modelo matemático a partir de términos reales.
- Competencia para trabajar con el modelo matemático.
- Competencia para determinar y manejar variables.
- Competencia para interpretar el modelo en términos reales.
- Competencia para interpretar el modelo en términos del dominio de algún software.
- Competencia para manipular las variables (parámetros) del modelo computacional.
- Competencia para comparar alternativas de solución de la situación problema.
- Competencias para la toma de decisiones en la elección de la mejor alternativa de solución.
- Competencia para comunicar el modelo y sus resultados.
- Competencia para usar lenguaje formal y técnico.
- Competencia para simular la situación problema mediante el uso de algún software.

NIVEL PROPOSITIVO:

- Competencia para interpretar el resultado en la situación real.
- Competencia para validar los modelos obtenidos.

- Competencias para predecir en base al modelo obtenido.
- Competencia para comparar modelos de situaciones similares

2. CAPACIDADES GENERALES: Consistirán en:

- Formular el problema
- Reconocer la variable dependiente e independiente en un problema propuesto.
- Elaborar un modelo real de la situación problema planteada.
- Hacer representaciones gráficas del modelo real que se genera del enunciado del problema.
- Interpretar un problema de funciones del mundo real al contexto matemático, es decir, modelar de la realidad a un posible modelo matemático.
- Interpretar las variables del modelo matemático obtenido en función del modelo real.
- Construir el modelo matemático desde la dimensión algebraica.
- Construir el modelo matemático desde la dimensión numérica.
- Construir el modelo matemático desde la dimensión geométrica.
- Explicar por qué es o no es una función una relación dada.
- Identificar las expresiones algebraicas que representan a las funciones reales.
- Justificar la escogencia del modelo analítico que mejor se ajusta a los datos representados geométricamente.
- Realizar varias representaciones de la relación funcional obtenida: algebraica, numérica, geométrica.
- Traducir información entre dimensiones: de la numérica a la geométrica o viceversa, de la geométrica a la algebraica o viceversa, de la algebraica a la numérica o viceversa.
- Elaborar el diagrama de dispersión que surge de los datos dados.
- Utilizar los sistemas de representación gráfica para hacerse entender.
- Analizar gráficamente el dominio y el rango de una función.
- Determinar el dominio y rango algebraicamente de las funciones dadas
- Determinar asíntotas verticales y horizontales (si existen).
- Determinar traslaciones (horizontales y/o verticales) de las funciones básicas.
- Hallar la representación funcional que mejor se asemeje a la sucesión, dada esta sucesión de puntos en el plano cartesiano.
- Determinar la mejor alternativa de respuesta al problema planteado.
- Argumentar cuándo un punto pertenece a la gráfica de una función e interpretación del punto en función al fenómeno en estudio.
- Justificar hallazgos en la aplicación de un software dinámico en particular.
- Representar cortes del gráfico de la función con los ejes coordenados (si existen).
- Representar algún tipo de simetrías del gráfico de la función (en caso de existir).
- Reconocer los intervalos de crecimiento o decrecimiento de la función en estudio de manera gráfica.
- Determinar amplitud de las curvas dadas.
- Crear listas de puntos a partir del comportamiento de la función en la vista gráfica de algún software.
- Utilizar tablas de valores relativas al comportamiento de la función en la vista geométrica de

algún software.

- Representar los modelos matemáticos obtenidos en algún software.
- Reconocer las tasas de cambios implícitas en los modelos construidos (la derivada de una función real)
- Analizar el comportamiento de ciertas gráficas y debatir con sus compañeros.
- Interpretar y expresar el significado de las transformaciones de los parámetros que intervienen en el modelo computacional.
- Mostrar sus resultados al grupo mediante el uso de la tecnología.
- Expresar a otros sus razonamientos en la solución de un problema.
- Encontrar el punto mínimo o el máximo en las funciones dadas, en caso de existir.
- Realizar análisis crítico en base a los resultados.
- Trasladar funciones.
- Contraer o dilatar funciones.
- Obtener el modelo computacional en algún software.
- Simular el comportamiento del fenómeno estudiado con apoyo de las tecnologías.
- Manejar un lenguaje natural y un lenguaje técnico.
- Usar propiedades del álgebra de funciones.
- Realizar composición de funciones.
- Hallar funciones inversas.
- Recrear realidades de la situación problema en algún software en particular.
- Manejar enunciados de funciones donde se incorpora un lenguaje técnico para representar el modelo.
- Hacer cálculos usando las variables implícitas en el modelo.

VI. VALORES Y ACTITUDES:

En paralelo, la educación debe formar al ser humano y propiciar su convivencia con los otros y practicar los siguientes valores:

- Responsabilidad.
- Respeto.
- Tolerancia.
- Solidaridad.
- Participación.

VII. TEMARIO:

UNIDAD DE FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

1. Definición de Funciones Reales de Variable Real:

1.1. Definición de Función.

1.2. Definición de Funciones usando los sistemas de representación: Algebraico, Numérico y Geométrico.

1.3. Variable Dependiente e Independiente. Identificación e interpretación.
1.4. Prueba de la Recta Vertical.

2. Propiedades. Características:
2.1. Dominio.
2.2. Rango.
2.3. Clasificación de función: inyectiva, sobreyectiva y/o biyectiva.
2.4. Paridad e Imparidad de Funciones.
2.5. Función Periódica.
2.6. Función Creciente y Decreciente.
2.7. Gráficos de Funciones Elementales.
2.8. Puntos Críticos.
2.9. Puntos Máximo o Mínimos.

3. Tipos de Funciones
3.1. Funciones Polinómicas.
3.2. Funciones Racionales.
3.3. Funciones Irracionales.
3.4. Función Valor Absoluto.
3.5. Funciones Definidas a Trozos o por Intervalos.
3.6. Función Parte Entera.
3.7. Funciones Logarítmicas.
3.8. Funciones Exponenciales.
3.9. Funciones Trigonométricas y sus inversas.

4. Operaciones con Funciones:
4.1. Álgebra de Funciones.
4.2. Función Inversa.
4.3. Composición de Funciones.
4.4. Funciones Paramétricas.
4.5. Traslaciones y Reflexiones de Funciones. Parámetros.
4.6. Graficación de Funciones con calculadora o computadora.
4.7. Efectos de los parámetros con algún software para graficar.

5. Problemas de Funciones:
5.1. Modelado de Funciones en problemas contextualizados bajo un enfoque ingenieril.
5.2. Asociación de modelos matemáticos a fenómenos autóctonos, bajo un enfoque ingenieril.
5.3. Graficación de Funciones Reales con Calculadora o Computadora.
5.4. Simulación de fenómenos contextualizados que se representen mediante relaciones funcionales con apoyo de un software dinámico.

VIII. ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS:

Concebida como un conjunto de acciones u operaciones que se planifican, ejecutan, controlan, evalúan y rectifican para permitir a los estudiantes de manera individual y grupal la apropiación consciente de conocimientos y habilidades, y el desarrollo de las competencias de modelización matemática de la unidad curricular, contando siempre con una guía de instrucción, coordinación y orientación del profesor. La estrategia didáctica se instrumenta en cuatro momentos:

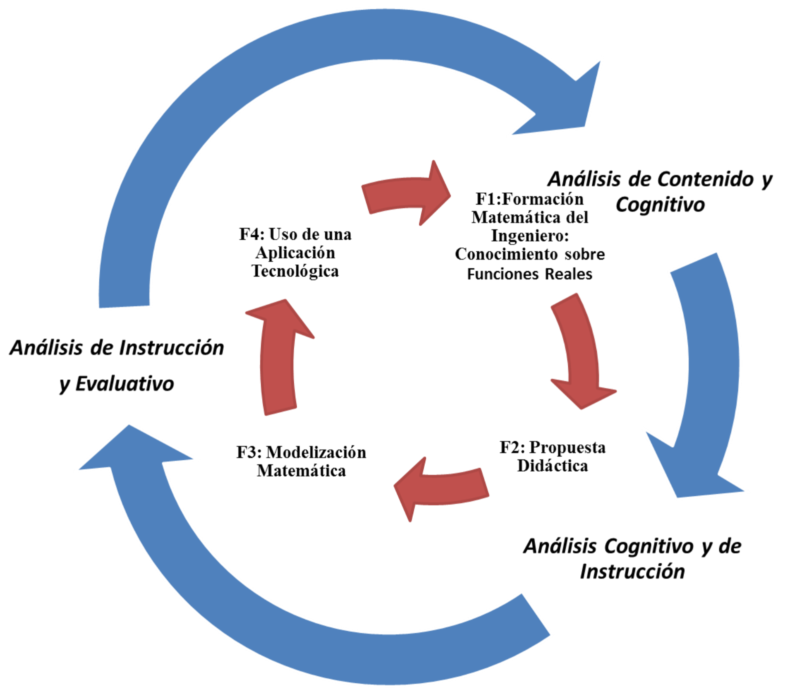
1. Establecimiento de las condiciones de realización de la tarea de modelización matemática que contiene los objetivos, las acciones y la metodología a desarrollar: los alumnos y el profesor reflexionan sobre el conjunto de problemas contextualizados para el diseño de modelos que describan relaciones funcionales, donde se busquen alternativas de solución a la situación problema, se seleccione un modelo matemático que la represente, se evalúe la opción de respuesta y se simule tal situación problema. Aquí se deben se aplicar los conocimientos matemáticas propuestos en el temario de esta unidad y utilizar herramientas tecnológicas que coadyuven a alcanzar los propósitos de esta unidad curricular.
2. La construcción correcta y racional de las posibles secuencias (acciones en clase) que el estudiante (o grupo) debe cumplir en el proceso de apropiación del contenido matemático, y su relación histórica y lógica con la estructura de las matemáticas y su valoración en el mundo de las aplicaciones bajo un enfoque ingenieril.
3. Ejecución de la actividad: los alumnos, en forma grupal e individual, realizan acciones u operaciones sobre la base de la tarea de modelización con ayuda de la tecnología. Luego, la presentan y explican para permitir en el grupo de clase el debate, la reflexión, el reanálisis, el control, la valoración, la evaluación, entre otros aspectos, que promuevan la autonomía, la independencia, la asimilación y la toma de conciencia, con significado y sentido, acerca del proceso de apropiación del qué, cómo y para qué del contenido matemático. El docente, oportunamente, guía, orienta, coordina, controla, aclara, esclarece, explica, da ayuda y evalúa el nivel de logro de las competencias de modelización matemática y las capacidades en desarrollo. De ser necesario, el docente ajusta, complementa o rectifica el proceso de enseñanza y aprendizaje, con el objeto de garantizar la ejecución adecuada de la acción por parte del estudiante-grupo.

   La propuesta didáctica plantea la resolución de problemas reales y no de ejercicios habituales que se abordan regularmente para la enseñanza de las funciones. En este sentido, se abordarán y simularan; por ejemplo, fenómenos autóctonos relativos a: problemas que tratan la economía del país, en relación a las importaciones y exportaciones de ciertos rubros; problemas químicos que abordan el porcentaje de concentración de materiales residuales en ciertas muestras; problemas ambientales que tienen que ver con la crecida del caudal de ríos de la zona en períodos con cierta irregularidad cada año, crecimientos demográficos, crecimiento de bacterias. Un problema en torno a construcciones de una pieza mecánica, de calidad de servicios, de producción, entre otros.
4. Reconstrucción retrospectiva y proyección: los alumnos y el profesor concluyen con significado y sentido (en cada clase) el proceso histórico-lógico vivido de elaboración del qué del contenido matemático de manera precisa, señalando los aspectos esenciales y formales del tema tratado. El profesor, sugiere a los estudiantes el conjunto de actividades previas a la siguiente clase: estudio de los contenidos temáticos a partir de las referencias bibliográficas seleccionadas, y/o confección (diseño, elaboración) de modelos y algoritmos que permitan comprender el significado de las definiciones u operaciones del cálculo. De igual manera, informa acerca de los nuevos problemas propuestos o los asignados para ser investigados, afianzando el proceso de aprendizaje. De surgir dudas, dificultades u obstáculos, los estudiantes acuden a la preparaduría o tutoría para la correcta realización de los mismos.

En fin, se promueve como estrategia de acción del estudiante la modelización matemática y el uso de las tecnologías de la información que propician el abordaje de situaciones problemas contextualizados, donde el estudiante se familiarice con el estudio de fenómenos del entorno y logre recrear y comparar esas realidades en ambientes educativos, para lo cual debe estudiar situaciones reales, de manera individual y colectiva, que deben ser analizadas, representadas y comunicadas mediante varios sistemas de representación, utilizando los conocimientos matemáticos en la praxis de la búsqueda de alternativas de respuestas ante esas realidades.
A su vez, el método que se ha propuesto para el desarrollo de las clases y su supervisión, será desde los experimentos de diseño.

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS:

Ciclo para accionar e implementar la Unidad Didáctica.



IX. PLAN DE EVALUACIÓN:

La evaluación de esta unidad curricular se hará mediante:
1. EVALUACIONES DOCENTES DE COMPETENCIAS (EDC):

- 3 Exposiciones en colectivo de estudiantes, donde la valoración de cada una sea de 15% para un total de 45 %. Se usará para ello, una guía de observación previa elaboración del docente.
- 1 Trabajo en físico en grupos de estudiantes, en torno a problemas que aborden el estudio de relaciones funcionales incluidas en el temario. Tendrá una ponderación de 15%.
- 1 Tarea de modelización matemática que incluya el trabajo sobre funciones reales realizado en algún software. Tendrá una ponderación de 30%.

2. EVALUACIÓN DOCENTE DE VALORES Y ACTITUDES (EDVA):

- Evaluación de los valores y actitudes evidenciados por los estudiantes durante el proceso formativo, los cuales aparecen indicados en el apartado VI. Tendrá una ponderación del 5%.
- Evaluación de la evolución del desarrollo de las competencias de modelización matemáticas, en conjunto con las capacidades matemáticas logradas. Se usará para ello, una guía de observación previa elaboración del docente. Tendrá una ponderación del 5%.

Las calificaciones definitivas se expresarán en una escala del 1 al 10, de conformidad con el Reglamento de Evaluación del Desempeño Estudiantil.

X. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

PRINCIPAL:

- Guerreiro, C. *Cálculo I*. (1998). Ediciones Innovación Tecnológica. Primera Edición. Venezuela. p 39-79.
- Minton, R. y Smith, R. (2000). *Cálculo*. Tomo I. McGraw Hill. Colombia, p 1-87.
- Stewart, J. *Cálculo. Conceptos y contextos*. Editorial Progreso, S.A. de C.V. Tercera Edición. México. p 10-91.
- Sáenz, J (2005). *Cálculo diferencial con funciones tempranas para ciencia e ingeniería*. Inversión Hipotenusa. Segunda Edición. Venezuela. p 4-61.

RECOMENDADAS:

- Thomas, G. B. (2006) *Cálculo. Una variable*. Pearson Educación. Undécima Edición. México, p.1-74, y p. 466-532.
- Leithold, L. (1998). *El Cálculo con Geometría Analítica*. Harla. Séptima Edición, p. 1-28.
- Cualquier otro texto de Cálculo donde se aborde el temario de esta unidad, bajo la consideración del docente.

La propuesta de plan programático expuesta anteriormente, recoge todos los resultados asumidos en función a los análisis realizados productos de la experimentación de la propuesta didáctica que se realizó durante tres años consecutivos, en cuanto a: los contenidos matemáticos sobre función, las competencias de la unidad curricular, las capacidades generales, la metodología didáctica y el plan de evaluación, que incluye los métodos de evaluación y sus valoraciones.

En virtud a lo anterior, la valoración en los métodos de evaluación propuestos en el plan programático, se ha establecido en función a los resultados que arrojó las experimentaciones de la aplicación de la propuesta didáctica.

En este sentido, de las dos formas de evaluar seguidas durante la aplicación de la propuesta didáctica (exposiciones de los productos de las tareas de modelización y trabajos en físico de los mismos), las exposiciones proyectaron mejores resultados. El trabajo presentado por los estudiantes fue más completo durante sus disertaciones, ya que ellos pudieron retroalimentar sus interpretaciones y el análisis en vivo, en virtud a que los docentes preguntaban inmediatamente la información que no pudieron completar los estudiantes en el momento de sus presentaciones y a su vez, evidenciar en primer plano las capacidades desarrolladas in sitio; mientras que el trabajo en físico comprendió un lenguaje matemático escrito más pobre, con menos contenidos matemáticos y la interpretación docente, en cuanto a los procesos de modelización matemática desarrollados en función de los resultados, fue más cuesta arriba elucidarlos en los trabajos.

En lo que respecta a los contenidos matemáticos sobre función, primero se evidenciaron los productos correspondientes a las tareas en físico y luego en las disertaciones del año 2017 respectivamente. Al comparar los resultados del Cuadro 10 y el Cuadro 11: las proporciones de contenidos matemáticos desarrollados sobre funciones reales en las tareas en físico, fueron equivalentes a $\frac{68}{180} \approx 0{,}38$ y $\frac{28}{34} \approx 0{,}82$, para las exposiciones. En este sentido, se observó una proporción mayor de contenidos desarrollados para el caso de las disertaciones.

En consecuencia, las ponderaciones establecidas en el plan de evaluación de la propuesta de plan programático sugerido para la enseñanza de las funciones en la UNEG, tienen mayor valoración las exposiciones que los trabajos en físico de las tareas de modelización matemática: 45% y 15% respectivamente.

Por otro lado, las estrategias metodológicas establecen, el desarrollo de guías de instrucción, que plantean la resolución de las tareas de modelización matemática, para lo cual los alumnos y los profesores participantes han reflexionado sobre un conjunto de problemas contextualizados para el diseño de modelos que describían relaciones funcionales funcionales, donde: se buscaban alternativas de solución a la situación problema, se seleccionaba un modelo matemático que lo representara, se evaluara la mejor opción de respuesta y se simulara tal situación problema. Aquí se aplicaron los conocimientos matemáticas propuestos en el temario de esta unidad y se utilizaron herramientas tecnológicas que coadyuvaron a alcanzar los propósitos de esta unidad curricular.

En este sentido, Bejarano (2018) sostiene que las tareas de modelización matemática asignadas han motivado a los estudiantes a regularizar en su proceso de construcción del conocimiento matemático, la creación de conjeturas, su verificación o rechazo, la toma de decisiones, entre otros procesos de diseño planteados por Krick (1995), Cruz (2010) y más en general, las competencias de modelización matemática establecidas por Maaß (2006); que no son más que familiarizarse desde los primeros semestres, con algunas de las competencias profesionales y laborales que exige el perfil de los ingenieros.

En resumen, en esta investigación con el diseño de la propuesta didáctica para la enseñanza y aprendizaje de la unidad de funciones reales, en conjunto con los ajustes realizados en esta unidad al plan programático de Matemática I de los proyectos de ingenierías en la UNEG, se han aportado sugerencias en relación a la necesidad que impera en los proyectos de ingenierías, de promover el desarrollo de competencias que potencian la formación matemática del futuro ingeniero.

Ambas propuestas plantean bajo la orientación guiada de los experimentos de diseño y la supervisión permanente del desarrollo de las guías de instrucción, la implementación de tareas de modelización matemática, que integren saberes de varias ciencias en la resolución de problemas contextualizados del mundo del ingeniero, bajo los criterios de un trabajo en colectivo y con la creación de ambientes de aprendizajes flexibles mediados con la tecnología; específicamente, aprovechando las bondades del software de matemática dinámica GeoGebra.

Caracterización de los Niveles de Logros y Evolución de las Competencias de Modelización Matemática durante la Implementación de la Propuesta Didáctica

Los niveles de logros de competencias de modelización matemática alcanzados mediante la propuesta didáctica diseñada, se describen a continuación en respuesta al objetivo específico número tres que se ha planteado en esta investigación.

Los niveles consistieron en: Nivel Interpretativo, Nivel Argumentativo y Nivel Propositivo.

Nivel Interpretativo: Las competencias en este nivel implicaron el dar sentido al enunciado del problema, esto pasó por comprender la información inicial en cualquiera de los sistemas de representación. Aquí se desarrollaron las siguientes capacidades: interpretación de enunciados de problemas, comprensión de proposiciones, identificación de argumentos, ejemplos, contraejemplos, comprender fenómenos, situaciones problemáticas contextualizadas, interpretación de cuadros, gráficos, tablas, dibujos, esquemas e incluso de los modelos reales, establecimiento de relaciones entre las variables inmersas en los fenómenos estudiados. Este nivel comprendió el trabajo del primer paso que plantea Ortiz (2002), que el estudiante logre ante la presentación del enunciado de una situación problema de “pasar de la situación del mundo real al modelo real”.

Nivel Argumentativo: Las competencias a nivel argumentativo comprendieron las capacidades de dar explicaciones, argumentos, del por qué afirmaciones o propuestas de solución ante las problemáticas planteadas, tomando en cuenta la teoría, experiencia previa y los fundamentos matemáticos. En este nivel se desarrollaron las siguientes capacidades, conteniendo incluso las del nivel interpretativo: explicación de la situación problema, causas, origen del problema, se plantearon hipótesis, construcción de definiciones matemáticas sobre funciones, sustentación de procedimientos a seguir en la búsqueda de respuestas o en la toma de decisiones o en la construcción de los modelos, selección y aplicación de teorías matemáticas que sustentaban el trabajo matemático realizado.

Este nivel abarcó el desarrollo de competencias de modelización matemática que definen el segundo y el tercer paso que plantea Ortiz (2002), donde el estudiante debe lograr la construcción de un modelo matemático que represente el fenómeno estudiado y para ello, ejecute el trabajo matemático que soporte la construcción y selección de este modelo matemático y computacional.

Nivel Propositivo: Las competencias a nivel propositivo abarcaron las capacidades de producción y creación de respuestas concretas a las problemáticas planteadas mediante las relaciones funcionales construidas. En este nivel se desarrollaron las siguientes capacidades, conteniendo incluso las anteriormente listadas en el nivel interpretativo y argumentativo: descubrimiento de regularidades, comparación de fenómenos similares, comprobación de hipótesis, realización de inferencias, justificación de predicciones en base a los modelos construidos sustentados en los conocimientos matemáticos, validación de los modelos obtenidos en el trascurrir del tiempo, selección de la mejor alternativa de solución, simulación de los fenómenos o recreación de los ambientes donde se generaban los mismos.

Este nivel propositivo, abarcó el desarrollo de competencias de modelización matemática que definen el cuarto y último paso que plantea Ortiz (2002): de interpretación y validación de los resultados.

En esta investigación, la evolución de los niveles de competencias de modelización matemática antes descritos, fue sustancialmente progresiva para cada aplicación de la propuesta didáctica en el trascurrir del tiempo. En cuanto a las competencias iniciales previstas eran 10 para la implementación del año 2016, luego pasaron a 16 para la segunda aplicación del año 2017 y finalmente fueron 18, para la implementación durante el año 2018.

En cuanto a los porcentajes por niveles de competencias definidos, se hizo la comparación sólo para los años 2017 y 2018, que fue cuando se logró definir y establecer esta caracterización por nivel, en cuando al desarrollo de las competencias de modelización matemática.

Cuadro 27.

Evolución de los niveles de logros de las competencias de modelización matemática alcanzadas.

NIVELES	COMPETENCIAS				NÚMERO DE CAPACIDADES
	% LOGRADAS		% NO LOGRADAS		
	2017	2018	2017	2018	
I: INTERPRETATIVO	67	100	33	0	5
II: ARGUMENTATIVO	60	87	40	13	43
III: PROPOSITIVO	59	99	41	1	7
SUBTOTAL	62	95	38	5	55

Se puede observar al comparar los resultados de ambas aplicaciones que el porcentaje de competencias logradas por nivel mejoraron sustancialmente en el tiempo; lo que fue producto en parte, de las evaluaciones continuas que se sostenían con los pares de expertos que acompañaron la investigación durante los experimentos de diseño y sus correctivos oportunos para una próxima sesión de clases.

El agregado (producto del elemento metodológico en la propuesta de enseñanza para las funciones reales), representado por los experimentos de enseñanza o experimentos de diseños, fue significativo en cuanto a la búsqueda permanente del perfeccionamiento continuo de la propuesta didáctica diseñada, tratando de mejorar con el acompañamiento de un grupo de debates, las deficiencias y lograr en una siguiente sesión de clases, las carencias detectadas para obtener el desarrollo máximo posible de competencias matemáticas en torno al tema de funciones y los conocimientos matemáticos inmersos. Todas las innovaciones anteriores ofertadas en la propuesta didáctica, fueron estratégicamente incorporadas con el fin último de contribuir a la formación matemática de los futuros ingenieros egresados de la UNEG, mediante la planificación y el diseño de esta unidad didáctica.

En cuanto al logro de cada nivel se ubicó siempre por encima de la media porcentual; incluso mejorando significativamente entre una aplicación didáctica y otra la del año subsiguiente. Mientras que por el contrario, el porcentaje de competencias "no logradas", fue disminuyendo en el trascurrir del tiempo.

De todo lo antes expuesto, se puede concluir que los niveles establecidos durante el desarrollo del ciclo de modelización matemática en cada práctica, se alcanzaron con un nivel óptimo de alcance y profundización, en cuanto a las competencias de modelización matemáticas definidas y las capacidades matemáticas desarrolladas; las cuales se solapan para robustecer la formación matemática de los futuros ingenieros, atendiendo a las exigencias que establece su perfil profesional.

Para la investigadora de este trabajo, los tiempos que vivimos en la actualidad irán a representar en la historia de la Educación Matemática Latinoamericana, la época del florecimiento del uso de la modelización matemática en el aula. En este sentido, se considera de suma importancia continuar consolidando esta propuesta educativa a través del tiempo y para ello, es fundamental la integración de todo un equipo de investigadores motivados, con una dedicación permanente y un trabajo arduo, cónsono con los tiempos modernos, que garanticen la eficiencia y eficacia del proyecto metodológico consecuente y racionalmente.

Aportes de la Modelización Matemática en el Aula de Clases de Matemáticas

Esta propuesta plantea un replanteamiento de la enseñanza de las funciones reales, donde el docente legisle en el aula para impulsar el desarrollo cognitivo, metacognitivo y afectivo del alumno y éste último haga un hábito el resolver problemas contextualizados, guiados por el ciclo de modelización que plantea Blum & Leiβ (2007) y siguiendo las fases de Houston (1997).

El siguiente esquema orienta en líneas generales, el replanteamiento didáctico que se ha asumido en esta investigación para la enseñanza y aprendizaje de las funciones reales de variable real:

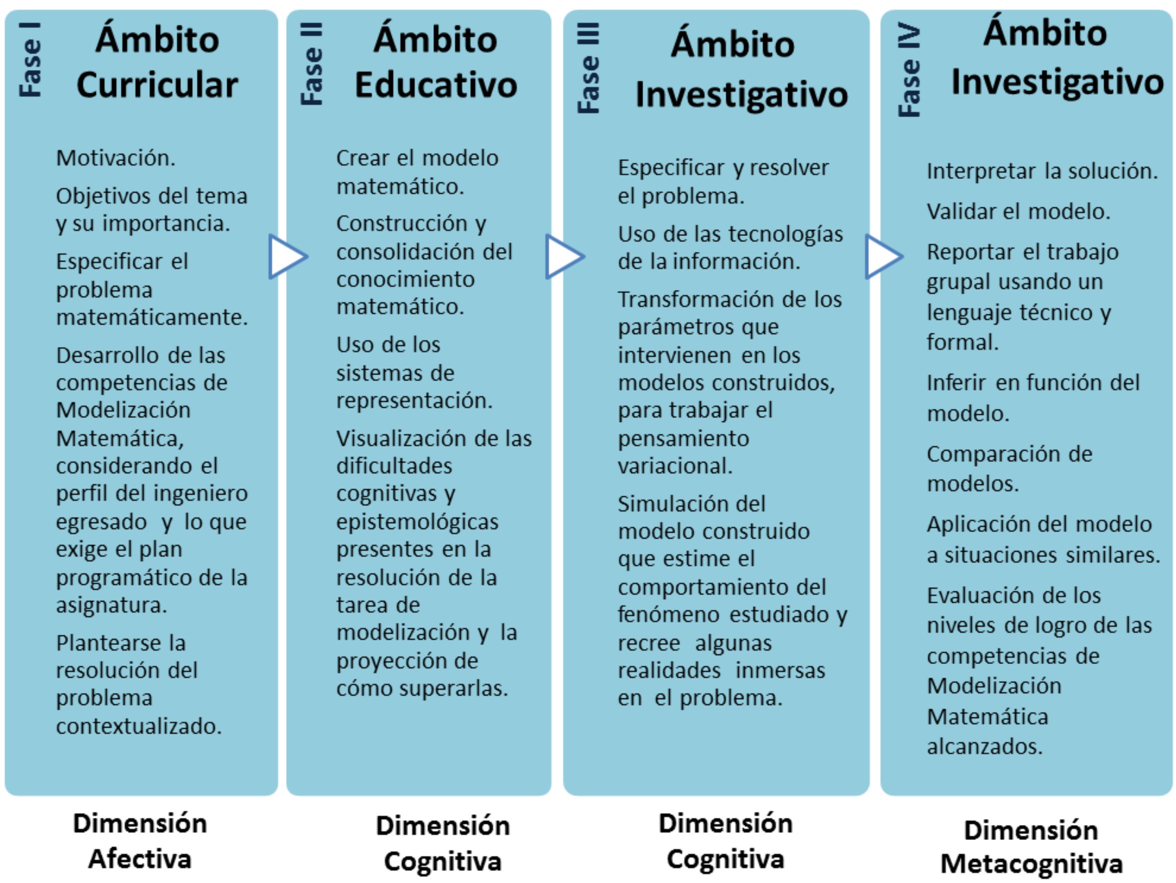


***Gráfico 33*. Esquema de los ámbitos de la investigación vs dimensiones abordadas.**

En base al esquema anterior, el docente debe gerenciar el accionar investigativo del alumno, el cual debe ser continuo y progresivo, siempre en la búsqueda de la construcción y asimilación de conocimientos matemáticos y conocimientos de otras disciplinas, donde se integren los saberes durante el proceso de modelización matemática a partir del establecimiento de las tareas de modelización matemática propuestas.

En definitiva, la modelización matemática fue la metodología utilizada para el estudio de las funciones reales, donde se integraron saberes de otras disciplinas en la búsqueda de resolver los problemas contextualizados propuestos de manera colectiva, y garantizando el alcance del perfil de estos profesionales de la ingeniería, tanto en su formación matemática como en su formación integral.

En concreto, el proceso de modelización matemática seguido en este estudio ha servido para motivar a los estudiantes en la búsqueda de representaciones (algebraicas, numéricas o geométricas) del comportamiento de fenómenos autóctonos de la región Guayana; utilizando los saberes matemáticos y de otras ciencias. Esto último ha constituido toda una metodología de acción, para acercar a los estudiantes con su posible desempeño profesional en las distintas ramas de la ingeniería, partiendo desde las experiencias de laboratorio con GeoGebra, o desde las investigaciones de registros de información de fenómenos en la web; así como también de la interpretación de gráficos, de tablas contentivas de mediciones de procesos que involucran variables discretas, o del mismo modelo algebraico dado que representaba la relación funcional entre las variables que intervenían en la situación problema, ya que los modelos utilizados no siempre fueron creados por el estudiante, algunos se tomaron de la literatura revisada y se estudiaron en búsqueda de su comprensión, interpretación y perfeccionamiento.

Otra de la importancia que revistió la puesta en marcha del proceso de modelización matemática, consistió en potenciar en los estudiantes competencias fundamentales en su mundo profesional; por ejemplo, la capacidad para relacionar un modelo matemático y a su vez ser capaz de llevarlo a contextos similares al comparar, buscando regularidades y estableciendo patrones de comportamientos frecuentes.

La modelización matemática permitió el trabajo en colectivo, tanto de los estudiantes a la hora de resolver sus tareas, como para los docentes involucrados en la planificación, ejecución y evaluación, tanto de la propuesta didáctica mediante los experimentos de diseños como de las producciones de los estudiantes a partir de los instrumentos elaborados para tal fin.

La investigación se fundamentó en la teoría de la Matemática en Contexto, donde las matemáticas deben aprenderse desde una visión contextualizada y utilitaria (Béltron, 2019), donde el desarrollo completo del ciclo de modelización matemática planteado por Blum & Leiβ (2007), desde el planteamiento de un problema contextual, contribuyó a lograr en los estudiante, la consolidación de conocimientos sobre funciones reales y la potenciación de las competencias de modelización matemática, ambos alcances fortalecen la formación matemática de los profesionales de la ingeniería y dan respuesta al objetivo específico número dos de esta investigación.

En definitiva, el desarrollo de la competencia resolución de problemas en carreras de ingeniería, tiene un elevado nivel utilitario y formativo, lo que hizo esencial que los estudiantes lograran adecuados niveles de competencia y satisfacción en su desempeño en este ámbito para transferirlos al entendimiento, interpretación y análisis de diversas y complejas situaciones que tenían lugar en el mundo químico, social, cultural y educativo que conformaban su entorno.

Aportes del Proceso de Modelización Matemática a la Formación Matemática de los Ingenieros en base a la implementación de la Propuesta Didáctica

El uso de la modelización matemática permitió todo un proceso continuo de acciones, aptitudes y estados emocionales del aprendiz de la matemática durante el desarrollo de las sesiones de clases que comprendió la investigación. El proceso de modelización no siguió un camino único cuando los estudiantes buscaban dar alternativas de respuestas ante las problemáticas de fenómenos planteados, apoyándose en los basamentos matemáticos que poseían.

Estos basamentos fueron profundizándose y consolidándose con el uso de los mismos en su praxis educativa, a través del estudio de problemas contextuales. A su vez, nuevos conocimientos matemáticos se fueron construyendo con el trabajo matemático desarrollado en el ciclo de modelización matemática y el manejo de las relaciones funcionales que representaban el fenómeno estudiado, mediante la descripción de las características de los modelos obtenidos.

Para dar respuesta al objetivo específico número dos, se asume que: el proceso que se desarrolló al aplicar modelización matemática contribuyó a que el estudiante respondiera al calor de las exigencias que se planteaban durante el abordaje y estudio de los problemas matemáticos extraídos de la realidad. Esto último, visto como una actividad intelectual propia del accionar del ingeniero, de preparación para su buen desempeño laboral. Por ejemplo, el trabajo grupal desarrollado, fue fundamental a la hora de la interpretación de un problema y éste constituye una acción rutinaria del profesional de la ingeniería: la interpretación de un problema de manera colectiva, bajo la supervisión de otros observadores especialistas que participaron de la dinámica de grupo con mayor cúmulo de experiencia previa, se considera un trabajo habitual en el desempeño del futuro ingeniero, lo cual formará parte de las experiencias acumuladas en su proceso de formación académica.

Aunado a lo anterior, cabe resaltar en este estudio que se potenciaron desde el proceso de modelización desarrollado, algunas de las competencias generales que requiere desarrollar un profesional en su proceso de formación integral mínima; estas fueron: las indispensables capacidades que se profundizaron a la hora de establecer una buena comunicación, tanto verbal como escrita, al usar un lenguaje técnico formal adecuado; el alto grado de aceptación del trabajo grupal y de los resultados logrados durante la construcción de los modelos fueron fuentes de inspiración para el trabajo interdisciplinario y a su vez, fueron socavando las bases para la conformación de equipos de trabajo para realizar un trabajo de manera efectiva y eficiente.

En este mismo orden de ideas, se han compartido las ideas de Houston y Jiang (2003), quienes afirman que las habilidades de una buena comunicación y trabajar en grupo de una manera efectiva son atributos deseables en un ingeniero y por lo tanto ayudaron a hacer de la modelización matemática utilizada en la propuesta didáctica, una excelente herramienta curricular para preparar a los estudiantes para el empleo, al capacitarse en las competencias que requieren desde su perfil como profesionales de la ingeniería para desempeñarse más tarde en su campo laboral.

A su vez, los futuros ingenieros deben emplear técnicas avanzadas de la matemática que le permitan modelar y solucionar problemas complejos. De manera que, los avances de la tecnología y la recopilación cada vez más creciente de datos (de manera natural o por procesos que usa la estadística inferencial), puedan viabilizarse. Por ejemplo, para el empleo de cámaras y sensores, en las compras por la banca online, en las aplicaciones en líneas móviles, en las variaciones de registros ambientales, en los acelerados crecimientos demográficos, entre muchos otros que se podrían mencionar y lograr una gran diversificación de las áreas de servicios que puede tocar el ingeniero, con el uso de la modelización matemática en contexto, sustentándose en sus conocimientos matemáticos y en los de otras ciencias del saber, para identificar comportamientos, tendencias y estadísticas , donde aparezcan los modelos predictivos y es aquí donde debe surgir la teoría matemática que sustente éstos modelos construidos. De aquí, la importancia de valorar la modelización matemática en la formación matemática del ingeniero.

Concretamente, se mencionan algunas de las capacidades de modelización matemática que trabajaron los estudiantes en sus producciones. Estás capacidades, realizadas por los estudiantes que cursaban la asignatura Matemática I, fueron: Realizaron suposiciones simplificadas, aclararon la meta, formularon el problema, asignaron variables, parámetros y constantes, formularon enunciados matemáticos, seleccionaron un modelo real, matemático y computacional, interpretaron representaciones gráficas y tabulares, retroalimentaron sus resultados, realizaron pronósticos, infirieron y compararon comportamientos de fenómenos similares, relacionaron la situación real con la situación simulada por los modelos construidos, entre otros.

También, al final de la aplicación de la modelización, se percibió que los estudiantes se apropiaron de un lenguaje técnico formal que les permitirá**,** como futuros ingenieros, comunicarse con claridad y precisión, hacer cálculos con seguridad, manejar instrumentos de medidas, de cálculo y representaciones gráficas para comprender el mundo en que viven, atendiendo a los estándares que rigen la simbología matemática.

Durante la aplicación de la modelización, se realizaron adecuados procesamientos y análisis de grandes cantidades de datos que se trabajaron a partir de la información de los enunciados de los problemas estudiados e investigados y que fueron bien interpretados por los estudiantes, lo que generó información estratégica para una mejor toma de decisiones dentro de las alternativas de solución propuestas en cada actividad.

La aplicación de la modelización, incorporó grandes cantidades de datos numéricos, los cuales fueron introducidos en la hoja de cálculo que contiene el GeoGebra, generando información cuantitativa acerca del fenómeno para su posterior análisis y la generación de modelos matemáticos en base al análisis de dos variables que estableció, curvas aproximadas a sucesiones de puntos originados desde los datos; además de una adecuada toma de decisiones y predicciones acertadas en base a los modelos matemáticos construidos.

En definitiva, el desarrollo de la propuesta didáctica no se limitó a la mera transmisión de información, sino por el contrario, a orientar los procesos de modelización matemática para el desarrollo de capacidades, al cambio de actitudes, al aprendizaje de formas de aprender de manera diferente, a la contextualización de los conocimientos y a la transferencia de estas mismas alternativas a otros escenarios y de esta manera, dar mayor importancia al razonamiento lógico, la reflexión, la generación de hipótesis o premisas, la toma de decisiones y el establecimiento de previsiones y conjeturas, antes que a la mecanización y memorización de contenidos y la regularidad de procesos rutinarios.

Todas las competencias referidas anteriormente, han contribuido en la formación matemática de los futuros profesionales de la ingeniería y se han promovido desde la aplicación de la modelización matemática que planteó la propuesta didáctica. Estas competencias de modelización son fundamentales para la formación matemática del futuro ingeniero, ya que los habitúa a realizar todas estas acciones y ante cualquier escenario posterior, gozar de experiencia previa en la búsqueda de alternativas de respuestas ante los problemas planteados y de esta manera, explotar todo su ingenio como futuros profesionales en esta rama.

En base a todo lo anterior, se sostiene que la modelización matemática promueve el abordaje de situaciones problemas contextualizados, donde el estudiante se familiariza con el estudio de fenómenos del entorno, para lo cual confronta situaciones reales, de manera individual y colectiva, que deben ser estudiadas, representadas y comunicadas mediante varios sistemas de representación, utilizando los conocimientos matemáticos en la praxis de la búsqueda de alternativas de respuestas ante esas realidades.

En el estudio de estas realidades, el estudiante ordenó datos, interpretó gráficos, tablas, realizó mediciones, distinguió constantes, variables, parámetros, formuló hipótesis, planteó alternativas de solución, escogió alternativas de procedimientos y métodos para resolver el problema, seleccionó respuestas aceptables, infirió en base a los modelos construidos, validó propuestas, estableció comparaciones entre los modelos construidos y fenómenos con comportamientos similares a los estudiados, entre otros.

Todas las capacidades desarrolladas anteriormente, desde la implementación del proceso de modelización matemática en la propuesta didáctica, garantizó una buena capacitación referida a los contenidos matemáticos que se abordaron a la hora de aplicar conocimiento matemático en la construcción de representaciones que recrearon realidades del contexto. Asimismo, la aplicación de la modelización, se muestra como generadora del desarrollo de capacidades para simular, estructurar modelos y hacer deducciones y construcciones lógicamente que formarán parte de la experiencia previa del ingeniero y que más tarde, se consolidarán como basamentos teóricos matemáticos más robustos que sustenten estás construcciones y deducciones y que permitan el fortalecimiento de la formación matemática del ingeniero.

Todas las contribuciones que alude la propuesta didáctica diseñada para la enseñanza de la funciones reales de variable real, sobre todo las referidas a las competencias de modelización matemática fundamentales en la formación matemática del futuro ingeniero, han surgido producto de toda la experimentación realizada en base a los experimentos de enseñanzas desarrollados durante tres años consecutivos; además de un estudio bibliográfico profundo en permanente actualización y con todo el rigor científico que ameritó un estudio de este alcance.

En conclusión, los conocimientos matemáticos deben ser vistos como una base sólida que sustente el desarrollo y el desempeño profesional de todo ingeniero y la modelización matemática ha sido la estrategia fundamental en este estudio para lograr la profundización de conocimientos matemáticos sobre función de manera utilitaria, aparte de lograr potenciar ciertas competencias de modelización matemática que contribuyen en el accionar del ingeniero.

Aportes del Software GeoGebra en la Formación Matemática del Ingeniero en base a la implementación de la Propuesta Didáctica

El Geogebra fue utilizado en esta investigación tomando en cuenta la perspectiva de Hohenwarter y Fuchs (2004), en torno a las contribuciones de este software en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Específicamente, fue considerado como:

1.- Una herramienta de visualización e identificación, que proporcionaba desde sus simultáneas ventanas de visualización (algebraica, geométrica y numérica o tabular) la representación formal de todos los tipos de funciones que se estudiaron de manera dinámica. Así como también, el uso de algunos comandos corroboraron de manera rápida y fácil, propiedades cualitativas de las funciones; tales como: puntos de cortes, simetrías, funciones inversas, reflexiones, máximos o mínimos relativos o absolutos, rotaciones y traslaciones de funciones, entre otras.

El Geogebra ofreció la ventaja que las modificaciones que se realizaban a los modelos matemáticos en un sistema de representación, se observaban inmediatamente en otra dimensión. Es decir, un objeto matemático se mostraba en simultáneo en las múltiples ventanas de visualización que proporcionaba este software en una sola pantalla desde varias vistas.

En este sentido, los arrastres que se hacían de los objetos matemáticos, la variación en los parámetros, la asignación de los deslizadores a las posibles traslaciones y reflexiones de las funciones, todo ello permitió en tiempo real la exploración y estudio de algunas propiedades características de los tipos de funciones que fueron analizadas desde las ventanas expuestas en paralelo. Todo lo anterior, facilitó la interpretación de la relación entre las variables dependiente e independiente que intervenían en cada fenómeno estudiado.

2.- Una herramienta de construcción, ya que a través de él, se pudieron construir modelos matemáticos, conformar y recrear realidades que presentaban los enunciados de los problemas estudiados. Por ejemplo, la construcción de la chimenea que se fabricó en la empresa Vhicoa, la crecida del río Orinoco en cuanto a sus niveles de profundidad, el crecimiento poblacional de Venezuela, entre otros.

Todas las construcciones que se hicieron en el software, fueron edificando la creación de las originales simulaciones que surgieron para los fenómenos estudiados: el modelo computacional, sus traslaciones, reflexiones, crecimiento, decrecimiento, simetrías, puntos de cortes, dominio, rango, deslizadores, entre otros conjuntamente con algunos comandos, operaciones y todas las herramientas de construcción dispuestas al desplegar sus menús (de arrastre, de crear rastro, de animación, protocolo de construcción, copia y pega); todo esto, contribuyó a recrear parte de la realidad de los problemas contextualizados abordados, o quizás se lograron ciertas representaciones dinámicas de las relaciones funcionales que aproximaban los comportamientos de las variables en juego.

3.- Una herramienta de descubrimiento, el uso del GeoGebra favoreció el descubrimiento de patrones, regularidades o invariantes matemáticas; por ejemplo, algunos estudiantes pudieron establecer las condiciones para que una función dada admitiera inversa, en consecuencia las restricciones en el dominio de la función dada fueron definidas con el apoyo del Geogebra.

A su vez, el uso de este organizador del currículo contribuyó a la identificación de los diferentes tipos de función, su determinación y la asociación del comportamiento de un fenómeno específico con algún tipo de función en particular y el análisis y selección del mejor ajuste a la sucesión de puntos que registraba cada fenómeno estudiado. Este análisis y selección de una alternativa de respuesta, ante una variedad, representó un genuino método de descubrimiento para asociar un tipo de función con el comportamiento de dos variables que interactúan para generar un fenómeno. El software GeoGebra ha sido una herramienta para la representación de objetos matemáticos en 2D y en 3D y la comunicación del conocimiento matemático. Mediante la aplicación del GeoGebra se pudo evidenciar un proceso creativo de modelización matemática para la enseñanza y aprendizaje de las funciones reales en un entorno amigable durante la resolución de los problemas abordados en cada una de las tareas de modelización planteadas, tanto en el laboratorio de computación, o en las asignaciones resueltas fuera del aula.

Los estudiantes pudieron comunicar en colectivo sus producciones dinámicas, en la interfaz de este software, ante sus compañeros de clases y los docentes que participaron en los experimentos de enseñanzas que se dieron. Todo lo expresado anteriormente, sustenta los aportes del GeoGebra, usado desde la propuesta didáctica, en pro de la formación matemática del futuro ingeniero, lo cual da respuesta al objetivo específico número dos de esta investigación.

Por otra parte, la aplicación del GeoGebra permitió a la docente investigadora ordenarse en su planificación y ejecución, en cuanto a los contenidos que desarrolló y el ritmo de abordaje de todos los contenidos matemáticos estudiados. A su vez, el hecho de que los estudiantes usaron el GeoGebra como herramienta de apoyo para la resolución de los problemas planteados y durante la disertación de sus trabajos, permitió a los docentes que acompañaron el estudio, evidenciar directamente todas las bondades que ofrece este software dinámico, como herramienta de visualización simultánea, de construcción interactiva, de fácil manejo y de libre adquisición, sea cual fuera la plataforma donde se trabajó (Linux o Windows) y el medio: PC de oficina, laptop, tablet e inclusive calculadora gráfica.

Por otro lado, el uso del GeoGebra facilitó a los profesores la evaluación del trabajo realizado por los estudiantes y les permitió dar garantías en consenso de los logros y avances alcanzados en el tema abordado y en cuanto a las capacidades desarrolladas. El tipo de evaluación desarrollada en vivo, a consecuencia del uso del software, permitió que el estudiante retroalimentara sus respuestas y se replanteara nuevas situaciones problemas similares a la estudiada, en respuesta de las posibles innovaciones o nuevos elementos que sugerían los docentes in sitio.

Dificultades Caracterizadas en este Estudio y Presentadas por los Estudiantes Durante el Desarrollo de sus Tareas de Modelización Matemática:

Se presentan a continuación un resumen de los tipos de las dificultades encontradas en esta investigación, en respuesta al objetivo número cuatro de la misma: una más general, que tuvo que ver con las dificultades que surgieron antes y durante la implementación de la propuesta didáctica y otra más específica, que está referida a las dificultades que reflejaron los estudiantes en la resolución de las tareas de modelización.

La primera arista de dificultades abarcó: las actitudes de los docentes, especialistas que contribuyeron directamente en el estudio, las acciones de los alumnos ante la propuesta didáctica y los ambientes de aprendizaje creados; mientras que la clasificación de la segunda arista, surgió del análisis realizado concretamente al trabajo desarrollado por los alumnos, que se materializó en los productos entregados y presentados al resolver las tareas de modelización matemática, que constituyeron las unidades de análisis en este estudio.

En la primera arista de dificultades se han considerado los siguientes aspectos:

- **Primer aspecto**: Aquellas dificultades sobre la resistencia al cambio y el trabajo desde los experimentos de enseñanza. Existe muchas barreras para avanzar en ciertas innovaciones metodológicas en ambientes mediados por la tecnología para la enseñanza y aprendizaje de las funciones. Definitivamente, se intentó romper paradigmas en la enseñanza tradicional.

Aunado a lo anterior, se afirma que los docentes involucrados en el estudio no estaban inicialmente acostumbrados a trabajar en equipo con sus colegas directamente en el aula y mucho menos a evaluar una sesión de clases de manera colectiva antes de dar inicio a la siguiente. Sin embargo, esto ha constituido uno de los logros más reconfortantes en este estudio, cuando finalmente los docentes lograron compenetrarse en el trabajo compartido de supervisión continua y evaluación permanente que exigen la aplicación de los experimentos de enseñanzas. Además, fue un éxito lograr reuniones extracátedras para revisar el desarrollo de las sesiones de clases y hacer propuestas de perfeccionamiento para el desarrollo de la siguiente, lo cual fue muy beneficioso para los aportes que se han dado a la Educación Matemática en esta investigación.

- **Segundo aspecto**: Aquellas dificultades que se reflejaron en el lenguaje utilizado durante el uso de los distintos sistemas de representación para comunicar las ideas sobre las funciones reales de variable real, sumado a las que surgieron a la hora de comprender el fenómeno estudiado. Otras dificultades que tuvieron que ver con el abordaje e identificación de problemas contextualizados. Por ejemplo: la falta de hábitos y/o motivación por parte de algunos estudiantes para investigar situaciones problemas que tenían que ver con su proyecto de carrera de ingeniería (en informática, industrial, forestal o producción animal) o con su futuro desempeño profesional.
- **Tercer aspecto**: Aquellas dificultades generadas al implementar la modelización matemática y el uso del GeoGebra para la enseñanza y aprendizaje de las funciones.

En la segunda arista se consideraron los siguientes tipos de dificultades:

Dificultades Epistemológicas: Tal y como su origen lo establece, los obstáculos que se manejaron fueron subyacentes a las propias dificultades intrínsecas de los conceptos inmersos en las definiciones, lo cual dependía mucho de las implicaciones de: cómo evolucionó la conformación del concepto, de su naturaleza histórica, de cómo se legitimó la definición y sus términos a lo largo de la historia. Dentro de estas se pueden mencionar las siguientes, de todas las descritas en el capítulo VIII:

- Algunos estudiantes no concibieron la jerarquización debida de las operaciones inmersas en la composición de funciones.
- Existió mucha confusión entre objetos matemáticos que involucraban conocimientos previos.
- Hubo imprecisiones en el manejo de las variables y omisión de sus unidades de medidas.

Dificultades Cognitivas: Fueron aquellas que ocurrían cuando los estudiantes presentaban dificultades para procesar información sobre el conocimiento matemático trabajado, incluso los obstáculos que reflejaron en el desarrollo de los procesos internos que desarrollaron o durante la ejecución de capacidades a la hora de resolver los problemas propuestos en las tareas de modelización matemática. Dentro de éstas podemos referir algunas de todas las listadas en el capítulo VIII:

- Percepción vaga y superficial de definiciones matemáticas.
- Algunos estudiantes no comprendían la definición de rango o recorrido de una función real: unos lo asumían simplemente como una imagen bajo la relación y otros como el conjunto de llegada.
- Hubo carencia o deficiencia de la orientación espacial.
- Se dio un discernimiento equivocado en la escogencia del modelo más adecuado.
- Al tratar de simular los fenómenos estudiados con el uso del GeoGebra, la representación de algunos estudiantes no fue congruente con la realidad.
- Existió incomprensión del significado de algunas variables que intervenían en el fenómeno estudiado.

Dificultades Didácticas: Aquellas dificultades producto de los obstáculos que enfrentó la docente investigadora en la planificación de las clases y en la aplicación de la propuesta didáctica diseñada. Específicamente, aquellas dificultades en torno a los ambientes de aprendizaje creados y las relativas a la actitud de los docentes que intervinieron frente a esta nueva propuesta para la enseñanza de funciones reales.

Por otra parte, se definieron los **errores** presentados en este estudio: Los errores constituyeron el accionar errado de los estudiantes, producto de sus ideas falsas sobre conocimientos matemáticos, de la confusión de objetos matemáticos, de los procesos indefinidos o inadecuados, o de procedimientos incorrectos en su búsqueda de dar respuesta a los problemas planteados. Todos estos errores se pudieron categorizar en 4 grupos específicos a saber, tomando en cuenta la clasificación de Alpizar, Fernández, Morales y Quesada (2018):

- **Errores Tipo 1**: Aquellos derivados del mal uso de los símbolos y términos matemáticos.
- **Errores Tipo 2**: Todos los originados por deficiencia en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos matemáticos.
- **Errores Tipo 3**: Los errores provenientes de la producción de representaciones inadecuadas de situaciones matemáticas.
- **Errores Tipo 4**: Aquellos generados por el mal procedimiento o el manejo inadecuado o incorrecto de la información dada inicialmente en los enunciados de los problemas. El manejo incorrecto de la información se pudo reflejar, en la interpretación errada del enunciado del problema, en el mismo hecho de no seguir correctamente las instrucciones propuestas en las guías de instrucción que orientaban la resolución de los problemas, o quizás en el mal uso de los datos suministrados, gráficos u otras fuentes de información previas.

A Grosso modo se mencionará un caso para cada tipo de error encontrado, los cuales se han especificado con mayor detalle en el Capítulo VIII:

- **Error Tipo 1**: El uso incorrecto u omisión de los conectores lógicos. Por ejemplo, la omisión del conector lógico de la implicación ($\Rightarrow$) como separación de cada proposición matemática, donde la segunda es consecuencia de la primera; así como también, el uso incorrecto del símbolo de igualdad.
- **Error Tipo 2**: La concepción errónea que prevalece del establecimiento de una única alternativa de solución o respuesta al problema planteado. En este caso, generalmente también se hacía una sola inferencia a partir del modelo matemático construido, lo cual es consecuencia directa, del regular proceder del aprendiz.
- **Error Tipo 3**: Conflicto interno para realizar la representación gráfica de funciones con dominio de variable discreta. Aunado al hecho de que muchos estudiantes no lograban discernir entre lo que era una función con dominio discreto o continuo.

Lograr que los estudiantes diferenciaran la representación de funciones de dominio discreto y continúo fue una ardua labor.

- **Error Tipo 4**: Carencia o deficiencia de la orientación espacial. En este sentido, algunos estudiantes no manejaron correctamente los referentes implícitos en el enunciado del problema. No lograron recrear o proyectar en sí la situación real, sino alguna representación de ésta.

En definitiva, los estudios de López y Sosa (2008), sustentaron algunas dificultades encontradas en esta investigación, por parte del estudiante en relación al concepto de función. Tales como: la falta de capacidad para: definir de manera correcta el concepto de función, interpretar el lenguaje matemático, diferenciar entre variable y parámetro, enunciar fenómenos o situaciones que involucren una relación funcional entre variables, utilizar diferentes representaciones de funciones y analizar e interpretar el comportamiento de la gráfica de una función, entre otros.

Todos los errores y dificultades anteriormente referidos, se trataron de subsanar a lo largo del desarrollo de las sesiones de clases, en cada una de las aplicaciones didácticas que tuvieron lugar. En virtud a ello, estas dificultades y errores se superaron en su mayoría, siendo testigos, de estos cambios que se sucedieron, los profesores que participaron directamente en la investigación y que a su vez, se reflejan estos logros en las producciones finales realizadas por los estudiantes.

Realmente la consecución de la implementación de la propuesta didáctica diseñada para la enseñanza de funciones reales, contribuyó a superar el logro de todos los focos o dimensiones que se habían considerado como deficientes o regulares inicialmente, de acuerdo al análisis realizado al Programa de Matemática I. Entre éstos estaban: las competencias de modelización matemática (F4.1), la resolución de problemas contextualizados (F4.2), el uso de los sistemas de representación (F3.2), las dificultades matemáticas epistemológicas y cognitivas (F3.3), el uso de los comandos y herramientas del software GeoGebra (F2.1), la simulación de fenómenos (F2.2) y los niveles de logro de las competencias de modelización alcanzados durante el ejecútese del ciclo de modelización matemática (F1.1).

En este sentido, el foco Modelización Matemática (F3), en sus dimensiones de Competencias de Modelización Matemática (F4.1) y Resolución de Problemas

Contextualizados (F4.2), conformaron la metodología de trabajo en esta investigación, por lo cual representaron los fundamentos esenciales para el desarrollo de la implementación de la propuesta didáctica diseñada para la enseñanza de las funciones reales de variable real. Esta afirmación constituye una aseveración de la primera hipótesis H_1 construida en esta investigación

En relación al foco representado por la Formación Matemática del Ingeniero (F1), se nutrió esta formación mediante la implementación de la propuesta didáctica, ya que los estudiante se apropiaron de la definición de función y sus tipos en sus diferentes sistemas de representación; además los estudiantes en su mayoría pudieron superar muchas de las dificultades observadas a la hora de resolver sus tareas de modelización matemáticas. Estas afirmaciones, aseguran el alcance de la proposición o hipótesis H_2, establecida por la investigadora.

La propuesta didáctica (F2) suscitó a innovaciones en las problemáticas contextualizadas estudiadas, que deberían proyectarse como prolíferas en los contextos educativos y con el uso del software GeoGebra (F4), mediante el trabajo de sus comandos y herramientas (F2.1), proponerse la simulación de fenómenos autóctonos (F2.2) como una rutina de trabajo para el futuro profesional de la ingeniería.

En esta investigación, se logró que los estudiantes alcanzarán los tres niveles de competencias de modelización matemática (F1.1) que se establecieron en el estudio: Interpretativo, Argumentativo y Propositivo. Estas afirmaciones, constatan la proposición o hipótesis H_3, establecida por la investigadora.

Finalmente, el impacto de la implementación de la propuesta didáctica, basada en la triada modelización matemática-software de matemática dinámica-funciones reales; en la formación matemática de futuros ingenieros, resultó favorable a la utilización de estos componentes en la formación de ingenieros, lo cual contribuye teóricamente con el hacer y el ser de un ingeniero en formación y en el desempeño en su futuro trabajo profesional. Asimismo, este trabajo de investigación confirma el aporte metodológico de los experimentos de enseñanzas para el abordaje de estudios de Educación Matemática en la formación de ingenieros.

REFERENCIAS

Aiken, L. (1980). Content Validity and Reliability of Single Items or Questionnaires. *Educational and Psychological Measurement*, 40, 955-959.

Alpízar, M., Fernández, H., Morales, J. y Quesada, S. (2018). Dificultades y errores presentes en estudiantes de educación secundaria en el aprendizaje de la función lineal. *Revista de Investigación y Divulgación en Matemática Educativa.* 9. Mayo, 6-19.

Aravena, M., Caamaño, C. y Gimenéz, J. (2008). Modelos matemáticos a través de proyectos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(1), 49-92.

Arrieta, J., y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socio epistemología, doi: 10.12802/relime.13.1811, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(1), 19-48.

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1990). Funciones y gráficas. *Colección: matemáticas, cultura y aprendizaje*. Madrid: Síntesis.

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1996). Funciones y gráficas. Madrid: Síntesis.

Barbosa, J. C. (2003). What is mathematical modelling? In S. J. Lamon, W. A. Parker, & S. K. Houston (Eds.), *Mathematical modelling: a way of life*. ICTMA11 (pp. 227-234). Chichester, UK: Horwood Publishing.

Banco Mundial sobre estadísticas del comportamiento de la población mundial. (2018, 02 17). Crecimiento de la población mundial. [Documento en línea]. Disponible: http://datos.bancomundial.org/indicador/SP.POP.TOTL.[Consulta: 2017, Agosto 12].

Bejarano, M., (2008). *Estudio del pensamiento matemático vinculado a la noción de límite*. [Resumen en línea]. Trabajo de grado de Maestría no publicado, Universidad Nacional Experimental de Guayana. Disponible: http://uneg.edu.ve.fondoeditorial. Producciones UNEG. [Consulta: 2016, Febrero 15].

Bejarano, M. y Ortiz, J. (2018). Modelización matemática y geogebra en el estudio de funciones. Una experiencia con estudiantes de ingeniería. *Revista Ciencias de la Educación*, 27(50). Julio-Diciembre, 348-379.

Beltrón, J., Hernández L. y Carrasco, T., (2019).Competencia modelación matemática: concepciones y situación diagnóstica en carreras de Ingeniería. *Revista Cubana de Educación Superior*, 38(2). La Habana, Mayo-Agosto. 2019.[Documento en línea]: http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0257-43142019000200005.

Benedicto, C. (2000). *Estudio de funciones con geogebra*. Universidad de Valencia. [Documento en línea]: Disponible:

https://acgeogebra.cat/5jornades/clara_benedicto.pdf. [Consulta: 2015, Febrero 15].

Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa*. Barcelona: CEAC. [Consulta: 2019, Septiembre 18].

Blomhoj, M. and Jensen, T.H.. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications*, 22, **3**, 123-139.

Blum, W.et al. (2002). ICMI Study 14: Application and modelling in mathematics education – Disscussion document. *Educational Studies in Matematics* 51(1-2), 149-171.

Blum, W., Galbraith, P. and Niss, M. (Eds.) (2007). *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study*. New York: Springer.

Blum, W., & Leiβ, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics. Teaching of Mathematical Modelling and Applications* (pp. 222-231). Chichester, UK: Horwood Publishing.

Blum, W. and Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37-68.

Camarena, P. (1984). El currículo de las matemáticas en ingeniería. En *Memorias de las Mesas redondas sobre definición de líneas de investigación en el IPN*, México.

Camarena, P. (2000). *Etapas de la matemática en el contexto de la ingeniería*.[Documento en línea].Disponible:www.funes.uniandes.edu.co/6243/1/CamarenaLamatem%C3%A1ticaALME2003.pdf México: ESIME–IPN. . [Consulta: 2017, Septiembre 20].

Camarena, P. (2010a). *Aportaciones de investigación al aprendizaje y enseñanza de la matemática en ingeniería* [Documento en línea]. Disponible: www.ai.org.mx/eventos/coloquios/ingreso/10/camarena.html. [Consulta: 2016, Julio 2].

Camarena, P. (2010). *La modelación matemática en la formación del ingeniero* [Documento en línea]. Disponible: www.m2real.org/IMG/pdf_Patricia_Camarena_Gallardo-II.pdf

Chih-Hsien Huang, (2011).*World Transactions on Engineering and Technology Education*, 9(3), 172-177.

Conatel Comunicaciones Nacionales de telecomunicaciones. (año, mes dia). Suscriptores del servicio de telefonía móvil de 2 compañías a nivel nacional. [Datos en línea]. En Conatel: Servicios de telefonía móvil. Disponible: www.conatel.org.ve. [Consulta: 2016, Agosto 2].

Cruz, C. (2010). La enseñanza de la modelación matemática en ingeniería. *Revista de la Facultad de Ingeniería Universidad Central de Venezuela*, 25(3), 39-46.

Díaz, (2013). *El Concepto de Función: Ideas pedagógicas a partir de su historia e* *investigaciones*. *Mosaicos Matemáticos*, 27, Marzo 2008, 35-40. Memorias de la XVIII semana regional de investigación y docencia en matemáticas. Universidad de Sonora. México.[Documento en línea]: https://www.researchgate.net/publication/268217474_El_Concepto_de_Funcion_Ideas_pedagogicas_a_partir_de_su_historia_e_investigaciones.

Dirección de Protección Civil del Estado Bolívar. (2017, Agosto 8). Crecimiento de los Niveles del Río Orinoco en Palúa, del 25/07/2017 al 03/08/2017. [Datos en línea]. En Protección Civil de la Gobernación del Estado Bolívar. Disponible: http://datos.proteccioncivil.com [Consulta: 2017, Agosto 10].

Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duarte, A. y eds. (2012). Naturaleza Matemática. Matemática 4 año de Educación Media. Ministerio del Poder Popular para la Educación. Colección Bicentenario. Venezuela.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En: Hitt, F. (Ed.), *Investigación en matemáticas educativa II* (pp. 173-202). México: CINVESTAV.

Escurra, L (1988). Cuantificación de la validez de contenido por criterio de jueces. *Revista de psicología*. Vol. 6, p 103-111. [Documento en línea]. Disponible en: https://ayudacontextos.files.wordpress.com/2018/04/jacqueline-hurtado-de-barrera-metodologia-de-investigacion-holistica.pdf. [Consulta: 2016, Diciembre 11].

Galbraith, P., Renshaw, P, Goos, M. y Geiger, V. (2003). Technology-enriched classrooms: some implications for teaching applications and modelling. En Blum, W., Houston, K. & Qi-Jiang (Eds.). *Mathematical Modelling in education and culture (ICTMA 10).* Chichester, UK: Horwood Publishing.

García, A. (s/f). Evolución del concepto de función hasta el Siglo XX. [Documento en línea]. En monografías. Disponible en: https://www.monografias.com/trabajos88/evolucion-del-concepto-funcion-inicios-del-siglo-xx/evolucion-del-concepto-funcion-inicios-del-siglo-xx.shtml. [Consulta: 2016, Agosto 1].

García, J. (2013). La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. *Revista Educación,* enero-junio, 2013, 37(1), 29-42.

García, J., Ortiz, J. (2007). Representaciones y modelización matemática en la resolución de problemas. Universidad de Michoacán y Universidad de Carabobo, México y Venezuela.

García, M. (2011). *Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir GeoGebra en el aula*. Tesis Doctoral. Almería. [Documento en línea]:
http://funes.uniandes.edu.co/1768/2/Garcia2011Evolucion.pdf.

Goatache, Y. (2009*). El hipervídeo en los entornos de aprendizaje. Una propuesta para la enseñanza del cálculo en el ámbito universitario*. [Documento en línea]. Trabajo de tesis doctoral. Universidad de Salamanca. Disponible: https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=91370. [Consulta: 2016, Febrero 18].

Gómez, E., Hernández, H. y Chaucanés, A. (2015). Dificultades en el aprendizaje y el trabajo inicial con funciones en estudiantes de educación media. *Revista Scientia et Technica*, Año XX, 20, (3), Septiembre de 2015. Universidad Tecnológica de Pereira. Colombia.

Gómez, L (2016). *Aplicaciones del lodo rojo. Trabajo de ascenso*. Universidad Nacional Experimental de Guayana. Ciudad Guayana. Venezuela.

Gómez, M. (2005). La transposición didáctica: historia de un concepto*; Revista Latinoamericana de Estudios Educativos 1*, 85-115.

Gómez, P. (2018). *Análisis didáctico en la práctica de la formación de profesores de matemáticas.* En Gómez, Pedro (Ed.), Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares (pp. 1-9). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.

Grech, P. (2001). Introducción a la ingeniería. Un enfoque a través del diseño. Prentice Hall. Colombia. p 70-101.

Guba, E. (1989). Criterios de credibilidad en la investigación naturalista. En J. Gimeno Sacristán y A. Pérez Gómez (Eds.), *La enseñanza: su teoría y su* práctica. 3ª ed., pp. 148-165. Madrid: Aka.

Guerreiro, C. Cálculo I. (1998). Ediciones Innovación Tecnológica. Primera Edición. Venezuela. p 39-79.

Guerrero, J. (2017). Análisis didáctico y unidad didáctica: funciones 4 Eso. Trabajo de Máster en formación matemática. Universidad de Almeria. [Documento en línea]. Disponible en . [Consultado: 2016, febrero 15].

Gutiérrez, R., y Prieto, J. (2016). Modelación y tecnologías. Un análisis del proceso de matematización en la simulación con GeoGebra. *Memorias del IX Congreso Venezolano de Educación Matemática* (pp.210-218). Barquisimeto: Asovemat.

Haines, C. and Crouch, R. (2007). Mathematical modeling and applications: Ability and competence frameworks. In W. Blum, P. L, Galbraith, H, W. Henn, and M. Niss (Eds). Modeling and Applications in Mathematics Education (pp. 417-424). New York, Springer.

Haines, C., Galbraith, P., Blum, W. and Khan, S. (2007). *Mathematics Modelling: Education, Engineering and Economics*. ICTMA 12. Horwood Publishing. Chichester, UK.

Hernández, S.; Fernández, C. y Baptista, P (2014). *Metodología de la Investigación* (6ª Ed.). México: McGraw-Hill/Interamericana.

Houston, y Jiang, Q. (2003). *Mathematical modelling in education and culture*. ICTMA 10 (pp.16-30). Chichester, England: Horwood.

Hall, J. y Lingefjârd, T. (2017). *Mathematical Modeling: Applications with GeoGebra.* New Jersey: John Wiley & Sons.

Hohenwarter, M., & Fuchs, K. (2004). Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. En C. S_arv_ari (Ed.). *Proceedings of Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference* (pp. 128-133). Pecs, Hungria: Universidad de Pecs.

Hurtado, J. (2012). *Metodología de la investigación: guía para una comprensión holística de la cienci*a. Cooperativa Editorial Magisterio, Bogotá-Caracas: Ciea-Sypal y Quirón, 4a. ed.

Instituto Nacional de Estadística. (2014). Comparación de los Costos de las Importaciones de Venezuela. [Datos en línea]. En INE: Costos de las Importaciones de Rubros del Capítulo 4, durante el primer semestre del año 1998. Disponible: http://www.ine.gov.ve/index.php?option=com_content&view=category&id=48&Itemid=33#. [Consulta: 2016, Agosto 2].

Instituto Nacional de Estadística. (s/f). Crecimiento poblacional de los habitantes de 2 Estados del país, a partir del año 2000. [Datos en línea]. En INE: Proyecciones de Poblaciones. Disponible: http://www.ine.gov.ve/index.php?option=com_content&view=category&id=98&Itemid=51. [Consulta: 2016, Julio 28].

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2005). *PISA para docentes. La evaluación como oportunidad de aprendizaje*. Secretaría de Educación Pública. México.

Izard, J., Haines, C., Crouch, R., Houston, K. and Neill, N., (2003). Assessing the Impact of Teachings Mathematical Modelling: Some Implications. In: Lamon, S.J., Parker, W.A. and Houston, S.K. (Eds), *Mathematical Modelling: A Way of Life*. ICTMA 11. Chichester: Horwood Publishing 165-177

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of internatonal perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, 38 (3), 302- 310.

Leithould, L. (1998). *El Cálculo*. Oxford University Press. Séptima Edición. México. p 1-28.

Lesh, R. A. and Doerr, H. (eds) (2002), *Beyond Constructivism: A Models and Modelling Perspective on Teaching, Learning, and Problem Solving in Mathematics Education,* Mahwah: Lawrence Erlaum.

Lesh, R., Galbraith, P. Haines, C. and Hurford, A. Editors.(2010). *Modeling students' mathematical modeling competencies*. ICTMA 13. Springer. New York.

Lomas, C. (1999). Evaluación de proyectos, centros y profesores. Disponible en:

https://es.slideshare.net/arantxacarrasco/concepto-de-evaluacin-grupal-6851466.

López, J. (2012). *Modelación matemática en la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales*. Tesis de Grado. Universidad de Veracruzana. Disponible en: https://issuu.com/gbu15/docs/matematicas.

López, J. y Flores, A. (2012). Modelación matemática en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. En Flores, Rebeca (Ed.), Acta latinoamericana de matemática educativa. (pp. 653-660). DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/4331/1/LopezModelaci%C3%B3nALME2012.pdf.

López, J. y Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. En P, Lestón (Ed.). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21 (pp. 308318). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/4946/1/L%C3% B3pezDificultadesALME2008.pdf.

Lozano, M., Haye, E., Montenegro, F. y Córdoba, L. (2015). Montenegro, F. Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. 41, Marzo 2015, 20-38.

Lupiáñez, J. (2013). Análisis Didáctico y Metodología de Investigación. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática: Metodología en investigación, formación de profesores e invención curricular* (pp. 1-22). Granada, España: Editorial Comares, S.L.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38, (**2**), 113-142.

Mendible, A. y Ortiz, J. (2007). Modelización Matemática en la Formación de Ingenieros. La Importancia del Contexto. *Enseñanza de la Matemática.* Número Extraordinario, 12(16), 133-150.

Mendible, A. y Ortiz J. (2010). Conceptualización de Ideas matemáticas en Ingeniería. En: *Acta Latinoamericana de Matemática educativa*. Vol. 23, pp. 561-568. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME). Disponible: http://funes.uniandes.edu.co.pdf.

Medina, J. Ortiz , J. (2013). Competencias matemáticas y uso de calculadora gráfica en un contexto de resolución de problemas aplicados. *Revista Uni-pluridiversidad.* 13(3), 16-28.

Minton, R. y Smith, R. (2000). *Cálculo*. Tomo I. McGraw Hill. Colombia, p 1-87.

Molina, M., Castro, E., Molina, J.L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75–88.

Mora, A. y Ortiz, J. (2014). Capacidades didácticas en el diseño de tareas con modelación matemática en la formación inicial de profesores. *Perspectiva Educacional*. *Formación de Profesores*. Enero 2015, 54(1), pp. 110-130.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. En A. Maz, B. Gómez & M. Torralbo (Eds.), *IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 81–96). Córdoba, España: Universidad de Córdoba.

Ortiz, J. (2002). *Modelización y calculadora gráfica en la enseñanza del álgebra*. *Estudio evaluativo de un programa de formación*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Ortiz, J., Iglesias, M. y Paredes, Z. (2013). El análisis didáctico y el diseño de actividades didácticas en matemáticas. En L.Rico, J. Lupiáñez, M. Molina (Eds.). *Análisis didáctico en educación matemática*. *Metodología de investigación formación de profesores e innovación curricular*. pp 293-308. Comares S. L. Granada.

Parra de Chópite, B. (1995). *Estudio de caso cualitativo*. Caracas: Impresión Alex Breack Collazo R.

Penney, E. Cálculo con Trascendentes Tempranas. (2008). Séptima Edición. Prentice Hall. México. p 15-52.

Pérez, G. (1994). Investigación cualitativa: Retos e Interrogantes. Madrid: La Muralla.

Planchart Márquez, Orlando (2001). *La visualización y la modelación en la adquisición del concepto de función.* Tesis Doctorado. Instituto de Ciencias de la Educación, 2002.

Plaza, Luis (2016). *Obstáculos presentes en modelación matemática. Caso ecuaciones diferenciales en la formación de ingenieros. Revista Científica.* 2(25). (2016): Mayo-Agosto.

Plaza, Luis (2017). *Modelación matemática en ingeniería. Revista de la investigación educativa de la Rediech.* Año 7, N°13. Octubre, 2016-Marzo 2017, pp. 47-57.

Porta, L y Silva, M. (2003). *La investigación cualitativa: El Análisis de Contenido en la investigación Educativa.* [Documento en línea]. Disponible: http://www.uccor.edu.ar/paginas/REDUC/porta.pdf- [Consulta: 2016, Septiembre 10].

Prieto, J.; Araujo, Y. y Gutierrez, R. (2012). Una secuencia para analizar los efectos geométricos relacionados con la función cuadrática utilizando GeoGebra. *Acta de la Conferencia Latinoamericana de GeoGebra* (pp. 511-519). Uruguay.

Purcell, E. y Varberg, D. (1992). Cálculo con geometría analítica. Prentice Hall. Sexta Edición. México. p 41-61.

Rico, L. (2005). La competencia matemática en PISA. En: Fundación Santillana (Ed.), *La* *enseñanza de las matemáticas y el informe PISA* (pp. 21-40). Madrid: Santillana.

Rico, L., Lupiáñez, J. y Molina, M. (Eds) (2013). Análisis didáctico en educación matemática. Granada. Editorial Comares, S.L.

Rodríguez, R. (2015). Enseñanza y aprendizaje de matemáticas a través de la modelación desde y para la formación de ingenieros. En J. Arrieta y L. Díaz (Coords.), *Investigaciones latinoamericanas en modelación matemática*. (pp. 163-194). México: Gedisa.

Rojas de Escalona (2014). *Investigación Cualitativa. Fundamentos y praxis*. Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Tercera Edición. Caracas, pp 170-177.

Romo, A. (2014). La modelización matemática en la formación de ingenieros. *Revista Educación Matemática*, *25*(e), 314-338. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/405/40540854016.

Sáenz, J (2005). *Cálculo diferencial con funciones tempranas para ciencia e ingeniería*. Inversión Hipotenusa. Segunda Edición. Venezuela, p 4-61.

Salett, M; Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Revista Educación Matemática*, vol. 16, núm. 2, agosto, 2004, Grupo Santillana México. México. 105-125. Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516206.

Sandín, M. P. (2003). *Investigación cualitativa en Educación: Fundamentos y tradiciones*. Madrid: Mc Graw HILL/Interamericana.

Santa Cruz, M, Thomsen, M., Beas, J. y Rodríguez, C. (s/f). Análisis de las clases de errores que cometen los alumnos y propuesta de andamiaje para aquellos errores que requieren cambio conceptual. Facultad de Educación, Pontificia Universidad Católica de Chile.

Santos, M. (1995). Entre bastidores. El lado oculto de organización escolar. Ediciones aljibe. Biblioteca de Educación, p 164-175.

Santos, M. (1993). La evaluación: un proceso de diálogo, comprensión y mejora. *Investigación en la escuela* (20), 1993. Universidad de Málaga. *Investigación en la escuela* (30), 1996. Universidad de Málaga, p. 23-35. Disponible en: https://idus.us.es/bitstream/handle/11441/59547/La%20evaluaci%c3%b3n%20un%20proceso%20de%20di%c3%a1logo%2c%20comprensi%c3%b3n%20y%20mejora.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

Santos, M. (1996). Evaluar es comprender: de la concepción técnica a la dimensión crítica. *Investigación en la escuela* (30), 1996. Universidad de Málaga, p. 5-13. Disponible en: https://revistascientificas.us.es/index.php/IE/article/view/8059/7125.

Stewart, J. Cálculo. Conceptos y contextos. Tercera Edición. Editorial Progreso, S.A. de C.V. México. p 10-91.

Stufflebeam, D. and Coryn, C.(2014). Evaluation Theory, Models, and Applications, 2nd Edition. ISBN: 978-1-118-07405-3. Documento en línea. Disponible en: https://www.wiley.com/enus/Evaluation+Theory%2C+Models%2C+and+Applications%2C+2nd+Edition-p-9781118074053.

Telesur. (s/f). Estiman un 33% de crecimiento de la población mundial para 2050". [Datos en línea]. En telesur: Comportamiento demográfico de las poblaciones de China e India en cierto período. Disponible: http://www.telesurtv.net/news/Estiman-un-33-de-crecimiento-de-la poblacion-mundial-para-2050-20160830-0039.html. [Consulta: 2017, Agosto 10].

Thomas, G. (2006). Cálculo en una variable. Pearson Educación. Undécima Edición. México. p 19-72.

UNESCO, Cresalc (1996). Declaración sobre la Educación Superior en América Latina y el Caribe. La Habana. En UNESCO, Cresalc (1996). [Documento en línea]. Disponible: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000149330. [Consulta: 2016, Enero 28].

Universidad Nacional Experimental de Guayana. (2003). Comisión para la Creación del Proyecto de la Carrera de Ingeniería Industrial. (1988, Enero). Informe*: Proyecto para creación de la carrera de Ingeniería Industrial.* Venezuela: Autor.

Universidad Nacional Experimental de Guayana (s/f). *Perfiles y competencias de los proyectos de carrera de ingeniería de la UNEG* [Documento en línea]. Disponible: http://www.uneg.edu.ve. [Consulta: 2015, Septiembre 18].

Universidad Nacional Experimental de Guayana. (2011). *Plan Programático de Matemática I del proyecto de Ingeniería Industrial, Ingeniería Forestal, Ingeniería en Informática e Ingeniería en Producción Animal.* [Documento en línea]. Disponible: www.uneg.edu.ve. [Consultado: 2015, Enero 20].

Valverde, G. (2014). Experimentos de enseñanza: una alternativa metodológica para investigar en el contexto de la formación inicial de docentes. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación,* 14(3), 1-20.

Vedatos. (2016, 08, 11). Producción de Petróleo en Venezuela y Colombia en los últimos 20 años. [Datos en línea]. En Vedatos: Proyecciones de Producción de Crudos. Disponible: http://vedatos.com/stats/petroleo. [Consulta: 2016, Agosto 2].

Vera, J. y Moreno, L ed. (2016). Investigaciones latinoamericanas en modelación matemática educativa. Gedisa. México.

Villa, J. (2014). Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea en Matemáticas. *Formación Universitaria*. Vol. 11(2), pp. 25-34. Documento en línea. Disponible en: https://scielo.conicyt.cl/pdf/formuniv/v11n2/0718-5006-formuniv-11-02-00025.pdf.

Watson, A. y Ohtani, M. (2015). Themes and Issues in Mathematics Education Concerning Task Design: Editorial Introduction. En A. Watson y M. Ohtani (Eds.), *ICMI Study*

22: Task Design in Mathematics Education. New York: Springer.

Yanagimoto, A. (2003). Environmental Problems and Mathematical Modelling. En S. Lamon, W. Parker, K. Houston, *Mathematical modellin: way of life*. Osaka Kyoiku University Japan. (pp. 53-60). UK: Horwood Publishing.

Zawojewski, J., Diefes-Dux, H., Bowman, K, (Eds.) (2008). *Models and Modeling in Engineering Education: Designing Experiences for All Students*. Sense Publishers. Mayo 15, 2008.

Zuluaga, A. (2015). Investigaciones en educación matemática. Aportes desde una unidad de investigación, 2-13. [Documento en línea]. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/8352/1/Cap%C3%ADtulo_1__Modelaci%C3%B3n_Matem%C3%A1tica_AMZ.pdf. [Consultado: 2018, Marzo 20].

Zuluaga, A y Ortiz, J. (2015). Capacidades didácticas en el diseño de tareas con modelización matemática en la formación inicial de profesores. *Perspectiva Educacional. Formación de Profesores*. Enero 2015, Vol. 54(1), 110-130.

Zuñiga, L. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*. 10(1), 145-175.

ANEXO A

TAREAS DE MODELIZACIÓN PROPUESTAS

Universidad Nacional Experimental de Guayana
Vicerrectorado Académico
Departamento de Ciencia y Tecnología
Área de Matemática

Tareas
Resolución de Problemas de Fenómenos Asociados a la Ingeniería. Región Guayana

Modelización Matemática con GeoGebra en la Enseñanza del Cálculo Para Ingenieros

Objetivo General:
Estudiar funciones reales de variable real como modelos matemáticos, al resolver problemas asociados a la ingeniería, con apoyo de la tecnología.

Metodología: Concebida como un conjunto de acciones u operaciones que se planifican, ejecutan, controlan, evalúan y rectifican para permitir a los estudiantes de manera individual y grupal la apropiación consciente de conocimientos matemáticos sobre función y habilidades generales y el desarrollo de las competencias de la unidad curricular, contando siempre con la guía, coordinación y orientación del profesor. La estrategia didáctica se instrumentará en tres momentos:

1. Establecimiento de las condiciones de realización de las tareas y el modelo de acciones a ejecutar: los alumnos y el profesor reflexionarán sobre el conjunto de tareas concretas y necesarias para cerrar cada ciclo del proceso de Modelización Matemática que se pretende desarrollar para trabajar en la búsqueda de la apropiación del contenido matemático a trabajar, sobre la base del Cronograma de las Tareas de Modelización planteadas.
2. Ejecución de la actividad: los alumnos, en forma grupal e individual, realizarán acciones u operaciones sobre la base de las Tareas de Modelización Matemática propuestas. Luego, la presentan y explican para permitir en el grupo de clase el debate, la reflexión, el análisis, el control, la valoración, la evaluación, entre otros aspectos, que promuevan la autonomía, la independencia, la asimilación y la toma de conciencia, con significado y sentido, acerca del proceso de apropiación del qué, cómo y para qué del contenido matemático. El docente, oportunamente, guiará, orientará, coordinará, controlará, aclarará, esclarecerá, explicará, dará ayuda y evaluará el nivel de logro de las competencias matemáticas y los procesos que establece el Programa PISA. De ser necesario, el docente ajustará, complementará o rectificará el proceso de enseñanza, con el objeto de garantizar la ejecución correcta de la acción por parte del estudiante-grupo.
3. Reconstrucción retrospectiva y proyección: los alumnos y el profesor tratarán de concluir con significado y sentido (en cada clase), aspectos del proceso desarrollado en la ejecución del ciclo de Modelización Matemática, al abordar relaciones funcionales que describen comportamiento de fenómenos físicos, químicos, de economía, de procesos industriales; pero con contenido matemático. El profesor, en función del Cronograma de las Actividades, recomendará a los estudiantes un conjunto de actividades previas a la siguiente clase: estudio de los contenidos temáticos a partir de las referencias bibliográficas seleccionadas, y/o confección (diseño,

elaboración) de modelos matemáticos que representen fenómenos en GeoGebra; que permitan comprender el significado de las definiciones matemáticas a ser abordadas y operaciones del cálculo, además de representar y estudiar situaciones problemas del mundo del ingeniero. De igual manera, se informará acerca de los nuevos ejercicios y sobre todo de los problemas propuestos, para afianzar el proceso de aprendizaje. Para aclarar dudas, dificultades u obstáculos a partir de las tareas propuestas, los estudiantes acudirán a la preparaduría o tutoría para la realización de las mismas; incluso se realizarán sesiones prácticas en el laboratorio de computación que incluyan el uso de la tecnología aprovechando sus bondades.

Estrategia Metodológica:
Revisar el conocimiento matemático, los procesos y las competencias matemáticas que desarrollará el estudiante.
Evaluar la resolución de los problemas planteados sobre fenómenos del contexto del ingeniero: analizar la representación del modelo real, el modelo matemático y el modelo computacional.
Valorar los procesos de modelización matemática desarrollados por los estudiantes entorno a las relaciones funcionales construidas.
Visualizar los sistemas de representación desarrollados por los estudiantes al comunicar sus ideas matemáticas entorno a las funciones reales. Valorar la simulación del comportamiento del fenómeno estudiado en GeoGebra, mediante las relaciones funcionales que se han de construir.

Evaluación:

Exposición de las tareas asignadas y Trabajo Grupal presentado en físico y en documento electrónico.
En ambas actividades se han de tomar en cuenta los siguientes criterios:
Conocimiento matemático. Procesos planteados según proyecto PISA y Competencias Matemáticas que presenta el estudiante durante el discurso oral a emitir cuando expongan sus producciones en función de los problemas desarrollados.
Representación del modelo Real, el Modelo Matemático y el Modelo Computacional.
Procesos de modelización matemática desarrollados por los estudiantes entorno a las relaciones funcionales construidas.
Sistemas de representación que registraron los estudiantes para comunicar sus ideas matemáticas entorno a las funciones reales.
Habilidades de manejo del GeoGebra.
Simulación del comportamiento de fenómenos en GeoGebra mediante las relaciones funcionales construidas.
Por todo lo antes listado objeto de evaluación, se realizará análisis de contenido y cognitivo

Actividades a ser Desarrolladas en Clases:
Problemas contextualizados a estudiar:

A) **Crecimiento de los Niveles del Río Orinoco en Palúa o Ciudad Bolívar, durante los años 2017 y 2018:**
Según información de la Dirección de Protección Civil del Estado Bolívar, expuesta en la página web: http://datos.proteccioncivil.com

En base a los datos registrados por esta Dirección en relación a los recientes niveles alcanzados por el Río Orinoco en el puente de Palúa, ubicado en Ciudad Guayana, en el Estado Bolívar; los cuales dan una alerta amarilla en la región:

a) Elabore un diagrama de dispersión en GeoGebra con los datos investigados en cuanto al comportamiento del nivel de agua del Río Orinoco en lo que ha transcurrido para las fechas señaladas.
b) Ajuste los modelos de regresión más apropiados, de acuerdo a cada uno de los diagramas de dispersión construidos. Para ello, seleccione líneas de tendencias que mejor se ajuste de acuerdo a cada uno de los diagramas obtenidos.
c) Traslade a la hoja algebraica del GeoGebra la relación funcional que aproxime el comportamiento de este fenómeno hidrológico.
d) Según el modelo seleccionado, estime la fecha cuando se dará la alerta roja a la población.
e) Utilice los deslizadores del programa, para visualizar la variación de la gráfica, al modificar los parámetros que contiene el modelo. Interprete estos cambios al contextualizar las variables del fenómeno estudiado y escriba las conclusiones de su análisis realizado.
f) Simule en GeoGebra, el comportamiento de los modelos del fenómeno estudiado.
g) Determine la expresión de la función obtenida (modelo matemático) en forma canónica.
h) Señale los parámetros existentes y exprese su significado en función del fenómeno estudiado.
i) Interprete de acuerdo al contexto del problema en estudio, los significados de las posibles transformaciones de los parámetros que intervienen en los modelos construidos, cuando éstos experimentan cambios. Sugerencia: use los deslizadores que proporciona GeoGebra.
j) Compare los niveles del Río Oricono en Palúa con los presentados en Ciudad Bolívar y el Delta.

B) La evolución de la población en Venezuela:

La población de Venezuela durante los años del 1960 al 2010, viene dado a partir de la siguiente tabla de datos en millones de habitantes durante los siguientes años:

Año	Población
1960	7.58
1970	10.72
1980	15.10
1990	19.74
2000	24.41
2010	29.04

Actividades:

a) Escriba un modelo de transición demográfica que mejor se ajuste de acuerdo a los datos subministrados.
b) Infiera las previsiones del número de habitantes de Venezuela, siguiendo el modelo construido para el año 2050, sin que varíen las condiciones iniciales del comportamiento de la población.
c) Opine sobre la tasa de crecimiento de este modelo de transición demográfica con respecto al tiempo.

d) Opine sobre el comportamiento de la población cuando t se hace suficientemente grande.

C) Producción de Acero en SIDOR:

A partir del gráfico de un artículo ubicado en la página web: https://www.lapatilla.com/site/2015/07/23/produccion-de-acero-en-venezuela-se-desp, se muestran datos sobre cómo ha sido la Producción de Acero en la Siderúrgica del Orinoco (SIDOR)", durante el período de 1980 hasta 2014. En base a los datos expuestos sobre la producción que ha presentado esta industria básica en la Región Guayana, realice las siguientes demandas de tareas:

a) Encuentre un modelo que se ajuste al comportamiento que ha seguido esta producción a lo largo de este período estudiado. Puede considerarlo por escalas de tiempo.

b) Reflexiones en cada modelo obtenido en el apartado a) que ha pasado con la producción de acero en SIDOR.

c) ¿Podría (según el modelo obtenido que) el comportamiento de la producción, llegar a ser cero para un tiempo determinado. Explique e interprete esta situación problema en el mundo real, llámese extramatemático.

Actividades Propuestas:

Problemas contextualizados a estudiar aplicando modelación matemática:

A.- Comparación de los Costos de las Importaciones de Venezuela desde el año 1998 al primer trimestre del año 2014, en cualquiera de 2 de los capítulos del 1 al 15, según data del Servicio Nacional Integrado de Administración Aduanera y Tributaria, SENIAT, procesada por el Instituto Nacional de Estadística, INE en su página web: http://www.ine.gov.ve/index.php?option=com_content&view=category&id=48&Itemid=33

B.- Producción de Petróleo en Venezuela y Colombia en los últimos 20 años, en miles de barriles por día, según Vedatos (2006) en data ubicada en la página web: http://vedatos.com/stats/petroleo.

C.- Suscriptores del servicio de telefonía móvil de 2 compañías a nivel nacional, durante los años de 1998 al 2015, según data de la fuente del Observatorio Estadístico Conatel, dispuesta en la página web: www.conatel.org.ve.

D.- Compare el crecimiento poblacional de los habitantes de 2 Estados del país, a partir del año 2000, según data del Instituto Nacional de Estadística (INE) dispuesta en línea en:http://www.ine.gov.ve/index.php?option=com_content&view=category&id=98&Itemid

E.- Construcción de modelos matemáticos para simular fenómenos y representarlos. Por ejemplo: la construcción de un túnel, la construcción de chimeneas, calderas, silos, puentes colgantes, entre otros

Muchos Éxitos y Gracias por Compartir esta Experiencia de Aprendizaje

ANEXO B

GUÍA DE OSERVACIÓN

Universidad Nacional Experimental de Guayana
Vicerrectorado Académico
Departamento de Ciencia y Tecnología
Área de Matemática

Guía de Observación

Semestre III-2018. UNEG. Asignatura: Matemática I.

Proyecto de Ingeniería en Informática.

Evaluadores: profesores del Área de Matemática.

Instrumento aplicado a todos los estudiantes cursantes de la asignatura, quienes han presentado el producto de las tareas de modelización propuestas en grupos conformados por 2 personas.

El presente instrumento ha sido diseñado para desarrollar las siguientes actividades:

a) Registrar las competencias logradas por los estudiantes al hacer uso de la modelación matemática, como gestor de cambio y contextualización del futuro ingeniero, profundizando en el pensamiento variacional en sus dimensiones algebraica, geométrica, y numérica.

b) Analizar las dimensiones (competencias matemáticas y conocimiento sobre función) que permitirán estudiar el nivel del proceso de modelización matemática (etapas del ciclo de modelización) desarrollado por los estudiantes en general, en base a la resolución de las tareas de modelización sobre relaciones de IR en IR y funciones reales de variable real propuestas.

Todas las actividades anteriores han de desarrollarse con el único propósito de alcanzar el logro de los siguientes objetivos: General y específicos:

Objetivo General:

Analizar el impacto de la implementación de una propuesta didáctica basada en la triada modelización matemática-software de matemática dinámica-funciones reales, en la formación matemática de futuros ingenieros.

Objetivos específicos:

1. Realizar el diseño y el análisis de tareas de modelización matemática para que los estudiantes construyan relaciones funcionales y simulen en GeoGebra fenómenos en ingeniería que se modelen mediante funciones reales.
2. Estudiar los aportes a la formación matemática de futuros ingenieros industriales sobre funciones reales, al integrar los organizadores del currículo, modelización matemática y uso del software dinámico GeoGebra, luego del diseño e implementación de una propuesta didáctica.
3. Establecer niveles de logros y su evolución alcanzados por los estudiantes en cuanto a competencias matemáticas y conocimiento sobre función, ambos indicadores incluidos en los objetivos a proponer en cada tarea de modelización.

De esta manera, el instrumento ha de utilizarse durante el desarrollo de las sesiones de clases para evaluar a los participantes del entorno educativo. Esta evaluación sobre los resultados de las tareas de modelización propuestas, una vez aplicada la estrategia didáctica que se implementará, estará a cargo tanto por los pares de especialistas que supervisarán las exposiciones de las tareas resueltas, como por la docente investigadora.

Instrucciones:

Escriba “SI” en la casilla que corresponde a las observaciones, las competencias que usted considere han sido bien desarrolladas por los estudiantes de acuerdo a su presentación en clases. En caso de no existir escriba “NO”, o en el caso de ser incorrecta deje la casilla en blanco.

COMPETENCIA DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA	CAPACIDAD	OBS G1	OBS G2	OBS G3	OBS G4
Primer Paso, (Ortiz 2002): **De la situación del mundo real al modelo real:** Consiste en plantearse la resolución de un problema desde la tarea de modelización propuesta, diseñando el modelo real que represente la situación real del problema. -Competencia para identificar y estructurar situaciones problema. -Competencia para entender y analizar el problema real. (Procesos Pensar y razonar)	Formulan el problema				
	Reconocen la variable dependiente e independiente en un problema propuesto.				
	Elaboran el modelo real de la situación problema planteado.				
	Hacen representaciones gráficas del modelo real que se genera del enunciado del problema.				
	Trasladan un problema de funciones del mundo real al contexto matemático, es decir, modelan de la realidad hacia el modelo.				
Segundo Paso, (Ortiz 2002): Construcción del Modelo Matemático. Matematizando: traducir el problema a una representación matemática o modelo matemático, tomando en cuenta las posibles relaciones matemáticas incluidas y el conocimiento matemático vinculado. -Competencia para crear un modelo matemático a partir de términos reales. (Procesos: Pensar y razonar, argumentar)	Construyen el modelo matemático desde la dimensión algebraica.				
	Construyen el modelo matemático desde la dimensión numérica.				
	Construyen el modelo matemático desde la dimensión geométrica.				
	Explican por qué es o no es una función.				
	Interpretan las variables del modelo matemático obtenido en función del modelo real.				
	Identifican las expresiones algebraicas que representan a las funciones reales.				
	Justifican la escogencia del modelo analítico que mejor se ajusta a los datos representados geométricamente.				
	Realizan varias representaciones de la relación funcional obtenida: algebraica, numérica, geométrica.				
	Traducen información entre dimensiones: de la numérica a la geométrica o viceversa, de la geométrica a la algebraica o viceversa, de la algebraica a la numérica o viceversa.				
	Elaboran el diagrama de dispersión que surge de los datos dados.				
	Utilizan los sistemas de representación gráfica para hacerse entender.				
Tercer Paso, (Ortiz 2002): Elección de los contenidos y métodos matemáticos apropiados. Realizar el trabajo matemático que plantea Gutiérrez,	Analizan gráficamente el dominio y el rango de una función.				
	Determinan el dominio y rango algebraicamente de las funciones dadas				

Prieto y Ortiz (2017): -Competencia para trabajar con el modelo matemático. -Competencia para determinar y manejar variables. -Competencia para interpretar el modelo en términos reales. -Competencia para interpretar el modelo en términos del dominio del software GeoGebra. -Competencia para manipular las variables (parámetros) del modelo computacional. -Competencia para comparar alternativas de solución de la situación problema. -Competencias para la toma de decisiones en la elección de la mejor alternativa de solución. -Competencia para comunicar el modelo y sus resultados. -Competencia para usar lenguaje formal y técnico. -Competencia para simular la situación problema mediante el GeoGebra. (Procesos: Argumentar. Comunicar y Modelar. Utilizar lenguaje formal y técnico. Usar herramientas y recursos).	Determinan asíntotas verticales y horizontales (si existen).				
	Determinan traslaciones (horizontales y/o verticales) de las funciones básicas.				
	Hallan la representación funcional que mejor se asemeje a la sucesión, dada esta sucesión de puntos en el plano cartesiano.				
	Determinan la mejor alternativa de respuesta al problema planteado.				
	Argumentan cuándo un punto pertenece a la gráfica de una función.				
	Justifican sus hallazgos en la aplicación del GeoGebra.				
	Representan cortes del gráfico de la función con los ejes coordenados (si existen).				
	Representan algún tipo de simetrías del gráfico de la función (en caso de existir).				
	Reconocen los intervalos de crecimiento o decrecimiento de función de manera gráfica				
	Determinan amplitud de las curvas dadas				
	Crean listas de puntos a partir del comportamiento de la función en la vista gráfica y algebraica del GeoGebra.				
	Utilizan tablas de valores relativas al comportamiento de la función en la vista geométrica del GeoGebra.				
	Representan los modelos matemáticos obtenidos en el GeoGebra				
	Interpretan las tasas de cambios implícitas en los modelos construidos (la derivada de una función real)				
	Interpretan el comportamiento de ciertas gráficas y lo discuten con sus compañeros.				
	Interpretan y expresan el significado de las transformaciones de los parámetros que intervienen en el modelo computacional.				
	Muestran sus resultados al grupo mediante el uso del GeoGebra.				
	Expresan a otros sus razonamientos en la solución de un problema.				
	Encuentran el punto mínimo o el máximo en las funciones dadas, en caso de existir				
	Reflexionan y disertar en torno a los problemas asociados al fenómeno estudiado, con un tratamiento socio-cultural.				
	Concluyen críticamente en base a sus resultados.				
	Trasladan funciones				

	Contraen o dilatan funciones				
	Obtienen el modelo computacional en GeoGebra				
	Simulan el comportamiento del fenómeno estudiado con apoyo del GeoGebra				
	Manejan un lenguaje natural y un lenguaje técnico.				
	Usan propiedades del álgebra de funciones				
	Recrean realidades de la situación problema en el GeoGebra.				
	Manejan enunciados de funciones donde se incorpora un lenguaje técnico para representar el modelo				
	Hacen cálculos usando las variables implícitas en el modelo.				
Cuarto Paso, (Ortiz 2002): Interpretación y Validación de los Resultados. - Competencia para interpretar el resultado en la situación real. -Competencia para validar los modelos obtenidos. -Competencias para predecir en base al modelo obtenido. -Competencia para adaptar el modelo a nuevas situaciones. -Competencias para realizar análisis sociocrítico de la situación problema. (Procesos: Validar y Evaluar)	Comunican limitaciones o potencialidades del modelo construido				
	Infieren el comportamiento de la variable independiente al establecer condiciones para la variable dependiente.				
	Validan el modelo matemático y computacional obtenido.				
	Evalúan resultados y verifican si el modelo obtenido se ajusta a los requerimientos o condiciones del problema.				
	Aplican la modelación matemática para el estudio de nuevos fenómenos en otros contextos				
	Comparan los modelos matemáticos de fenómenos similares.				
	Realizan análisis crítico de la problemática que abordan los problemas estudiados; bien sea ambiental, cultural, social, entre otros.				

ANEXO C

GUIÓN DE LA ENTREVISTA

Universidad Nacional Experimental de Guayana
Vicerrectorado Académico
Departamento de Ciencia y Tecnología
Área de Matemática

Entrevista Aplicada a los Docentes Vinculados al Estudio.

Guión de la Entrevista

La presente entrevista forma parte de una investigación sobre "Modelización matemática y GeoGebra en la enseñanza de funciones para ingenieros", que se desarrolla en la Universidad Nacional Experimental de Guayana (UNEG), en la asignatura de Matemática I, de los proyectos de carrera de ingeniería: Industrial, Informática, Forestal y Producción Animal durante el curso intensivo 2017.

Su opinión es de suma importancia, ya que servirá de evidencia para contribuir en el análisis de los resultados y conclusiones de este estudio que usa la modelación matemática apoyándose en el software dinámico Geogebra en la enseñanza de funciones reales de variable real.

La presente entrevista, vista como un instrumento de valoración, persigue los siguientes propósitos:

Toda vez aplicada la propuesta didáctica diseñada, que consiste en integrar en la enseñanza de funciones reales, la modelización matemática y uso del software GeoGebra; estudiar los aportes a la formación matemática de futuros ingenieros que brinda esta metodología de acción.

Los ítems de la entrevista están estructurados en función del análisis de instrucción seguido por la investigadora.

Específicamente, las demandas de tareas solicitadas:

a) Reflexionar sobre la utilidad de la construcción de modelos matemáticos que simulan ciertos fenómenos de la vida real.
b) Evaluar la Modelización Matemática, como metodología didáctica en la enseñanza de las funciones para estudiantes de ingeniería en formación.
c) Exponer las competencias de modelización matemática a desarrollar en la formación matemática que debemos potenciar en los futuros ingenieros.
d) Exponer las potencialidades que tiene el software GeoGebra como recurso didáctico.
e) Considerar los aportes del GeoGebra en la profundización de las competencias de Modelización Matemática.
f) Enunciar el estudio de posibles fenómenos a considerar en las tareas de modelización matemática propuestas.
g) Considerar la fiabilidad de la propuesta didáctica implementada, su replicabilidad, su capacidad de generación y su utilidad en la enseñanza de funciones.
h) Considerar la factibilidad de replicar este estudio en otros cursos de cálculo u otras asignaturas del pensum de estudio. En caso afirmativo, ¿cuáles?

La información que se obtenga sólo ha de usarse para los fines de esta investigación. La autora se compromete a garantizar el carácter confidencial, al aplicar y ejecutar este instrumento.

Gracias por su colaboración.

Nombre y Apellido ____

C.I.________________ Universidad____

ANEXO D

CUESTIONARIO

Universidad Nacional Experimental de Guayana
Vicerrectorado Académico
Departamento de Ciencia y Tecnología
Área de Matemática

Cuestionario

Nombre _____________________________________ Universidad_________________________

Este instrumento tiene como propósito recabar información sobre la opinión de los profesores vinculados al estudio, que conforman el grupo de especialistas que acompañan a la docente investigadora con la finalidad de develar el impacto de la implementación de la propuesta didáctica basada en la triada conformada por: **la modelación matemática** como metodología de acción en la formación matemática de los futuros ingenieros, para activar la resolución de tareas que aborden **las funciones reales de variable real** con apoyo del u**so del software dinámico GeoGebra**.

1.-¿Considera usted, que la resolución de las tareas de modelización matemática propuestas a los estudiantes permitieron la identificación de las relaciones funcionales que se establecieron en el estudio de ciertos fenómenos del mundo real abordados?. Argumente.

2.- ¿La implementación de la Modelización Matemática permitió resolver problemas matemáticos asociados a fenómenos del mundo de la ingeniería. ¿Cuáles?.

3.- ¿Cree usted que los estudiantes representaron las funciones reales estudiadas en varios registros?.

4.-¿Observó usted, que los estudiantes trabajaron propiedades del álgebra de funciones y/o de la composición de funciones durante estas experiencias prácticas desarrolladas?. Especifique cuáles, en caso afirmativo.

5.- ¿Considera usted, que los estudiantes determinaron los elementos característicos de cada una de las funciones estudiadas?. Argumente su respuesta.

6.- ¿Considera usted que la aplicación del software GeoGebra contribuyó en el proceso de construcción del modelo matemático estudiado?.

7.- ¿Cuáles son los aportes al desarrollar el ciclo de modelización matemática en el análisis de los fenómenos contextualizados?.

8.- ¿Considera usted que la aplicación del software permitió que los estudiantes comunicaran ideas matemáticas sobre funciones reales mediante el uso de un lenguaje técnico formal en varios sistemas de representación?. Dé un ejemplo.

9.- ¿Considera usted que el uso del software contribuyó en la tarea de simular algunos de los fenómenos estudiados?. Explique.

10.-¿Cuáles de éstas competencias matemáticas cree usted que los estudiantes desarrollaron al realizar las tareas de modelización matemática asignadas?. Marque con una "X" y evidencie su existencia:

______Analizó estrategias durante la resolución del problema.	
_______ Realizó Actividades que permitieron inferir comportamientos variacionales.	
_______ Argumentó y comunicó la obtención de resultados o propuestas.	
_____ Usó herramientas y recursos de manera colectiva.	
_______ Evaluó Resultados.	
______Verificó si el modelo obtenido se ajusta a las condiciones del problema.	
______Usó herramientas y recursos tecnológicos.	

11.- ¿La Modelización Matemática fomenta espacios para la toma de decisiones en la selección de un modelo óptimo? Argumente.

12.- ¿Considera usted, que la propuesta didáctica implementada fortalece el proceso de enseñanza de las funciones reales de variable real?. Argumente.

13.- Describa alguno de los errores que presentaron los estudiantes cuando resolvieron los problemas propuestos.

Errores de tipo Cognitivo

Errores de tipo Epistémico

14.- Escribe sugerencias para corregir debilidades observadas durante la implementación de la propuesta didáctica.

15.- ¿Cree usted, que la modelización matemática podría ser útil en el proceso de enseñanza y aprendizaje de otras asignaturas del currículo?. En caso afirmativo, mencione cuáles.

16.- ¿Sugiere usted, la incorporación de la modelización matemática para integrar contenidos curriculares de varias asignaturas en los programas de ingeniería?. Argumente.

17- Exprese sus comentarios finales, en virtud de esta experiencia investigativa.

Gracias por su colaboración.

ANEXO E

INSTRUMENTO PARA VALIDAR EL CUESTIONARIO

Validación del Cuestionario

El presente instrumento se ha diseñado con el propósito de alcanzar la validación de este instrumento a partir de una validación por experto, mediante la validación de constructo, validación de contenido y validación aparente.

Factores	Criterios
Modelización Matemática: Esta presenta características para ser consideradas en la aplicación de la enseñanza al desarrollar el ciclo de modelización matemática; por ejemplo, los modelos matemáticos son indispensables para comprender fenómenos, se puede observar y practicar el conocimiento matemático, ayuda a la resolución de problemas, da un mejor entendimiento del fenómeno del modelado, puede ser aplicado en diversos campos del conocimiento y ayuda al desarrollo de capacidades en el uso de la tecnología (López 2012 y Flores, p. 653). La enseñanza de la matemática que se imparte a los ingenieros en formación debe ser contextualizada y basada en la resolución de problemas de la vida real; donde la modelación matemática juega un rol importante, al permitir hacer de la matemática una herramienta para vincular la matemática con la realidad además de exigir, el desarrollo de un trabajo cognitivo del estudiante, quien debe sustentar con argumentos aceptables la creación de modelos que simulen el comportamiento de los fenómenos que se estudien al completar el ciclo de modelización matemática que caracteriza Blum & Leiß (2007). **Uso del Software GeoGebra**: Comprende el uso de los comandos del software, la construcción de los modelos matemáticos en varios sistemas de representación y la simulación de los fenómenos estudiados. **Formación Matemática del Estudiante de Ingeniería:** la formación profesional en el campo de la ingeniería abarca tanto el conocimiento matemático como condiciones especiales que se traducen en competencias de modelización matemática, que se desarrollan cuando los ingenieros en formación se enfrentan a resolver problemas contextualizados en la búsqueda de alternativas de solución óptima con un alto contenido social y crítico y que se comunican con el uso de un lenguaje técnico-formal cónsono con las nuevas tecnologías de la información: software educativos e interactivos. Este factor sustenta e identifica algunas aristas a ser consideradas en esta investigación: la resolución de problemas, el desarrollo de competencias de modelización matemática del ingeniero desde una perspectiva de *Modelación Socio-Crítica* (Kaiser & Sriraman, 2006), con fines pedagógicos, donde se busca el entendimiento crítico del mundo que rodea al futuro profesional.	**Diseño:** Se refiere a la manera en que está estructurado el medio didáctico, tomando en cuenta aspectos gráficos, tipográficos; lo cual permite pasearse por cada uno de los factores que comprende el estudio para analizar y así hacer viable la perspectiva del autor y del lector (Contreras, 2015). **Coherencia:** Uso de la gramática y precisión semántica en las ideas que encierra cada ítem. **Redacción:** Interpretación unívoca del enunciado de la pregunta a través de la claridad y precisión en el uso del vocabulario técnico. **Pertinencia**: Relación estrecha entre la pregunta, los objetivos a lograr en este instrumento y los objetivos de la investigación.

Instrumento para Validación del Cuestionario

Instrucción para el uso del presente instrumento: Marque con una X la existencia de la dimensión a la cual usted considera que satisface cada ítem. Observación: si la casilla está en blanco se asume inexistencia del criterio en el ítem correspondiente.

A: Diseño **B: Coherencia** **C: Redacción** **D: Pertinencia**

Ítem	A	B	C	D	Observación
1	X	X	X	X	
2	X	X	X	X	
3	X	X	X	X	
4	X	X	X	X	Se mejoró la redacción del ítem
5	X	X	X	X	Se mejoró la redacción del ítem
6	X	X	X	X	
7	X			X	Se mejoró la redacción del ítem por falta de coherencia
8	X	X	X	X	
9					Se eliminó por duplicidad del ítem.
10	X	X		X	Se mejoró la redacción
11	X	X		X	Se mejoró la redacción
12	X	X	X	X	
13	X	X	X	X	
14	X		X	X	Se mejoró la gramática
15	X	X	X	X	
16	X	X	X	X	
17	X	X	X	X	
18	X	X	X	X	

Modificaciones Realizadas como resultado de la validación:

En cuanto al diseño inicial, se eliminaron todos los cuadros inicialmente expuestos para escribir la respuesta de cada ítem. Así mismo, se eliminó un cuadro borde principal que enmarcaba todo el texto, con el propósito de dejar más espacio y optimizar el mismo a la hora de escribir la respuesta por ítem.

Se eliminó el ítem 9 por considerarse que estaba repetido, quedando de esta manera 17 ítems en total para ser desarrollados en este cuestionario.

Gracias por su Colaboración

ANEXO F

CONSTANCIA DE VALIDACIÓN DEL CUESTIONARIO

Yo____, CI_______________________, de profesión ___________________________, y ejerciendo actualmente como______________________ en la institución__________________, hago constar que he revisado, con fines de validación el instrumento "Cuestionario", diseñado por la investigadora _____________________________, a los fines de ser utilizado como registro de información en la Tesis Doctoral intitulada: "Modelización Matemática y GeoGebra en la Enseñanza de Funciones para Ingenieros". Luego de hacer las observaciones pertinentes, puedo formular las siguientes apreciaciones:

	Deficiente	Aceptable	Excelente
Congruencia ítem-dimensión			
Amplitud de contenidos			
Redacción de los ítems			
Ortografía			
Presentación			

En Ciudad Guayana, a los _____ días del mes de _______________ de _______.

____
Firma del validador

ANEXO G

GUÍA DE INSTRUCCIÓN

Universidad Nacional Experimental de Guayana
Vicerrectorado Académico
Departamento de Ciencia y Tecnología
Área de Matemática

Guía de Instrucción

Modelización Matemática con GeoGebra en la Enseñanza del Cálculo Para Ingenieros

Sesión 3: Resolución de Problemas usando el Sotfware GeoGebra, como medio para Enseñar Matemática

Protocolo de Instrucción:

1. Bienvenida y motivación. Repaso de la sesión anterior.
2. Objetivos del taller y su importancia.
3. Presentación del problema matemático contextualizado propuesto.
4. Desarrollo de la Modelización Matemática como estrategia didáctica.
5. Simulación del modelo construido en Geogebra que estime el comportamiento del fenómeno a estudiar.
6. Transformación del parámetro que interviene en el modelo.
7. Validación e interpretación del modelo alcanzado.
8. Diversificación del modelo matemático logrado a otros contextos.
9. Evaluación del modelo.
10. Estudio de las posibles limitaciones del modelo en función de su contextualización.
11. Discusión y retroalimentación del diseño de la propuesta didáctica implementada.

Objetivo General:

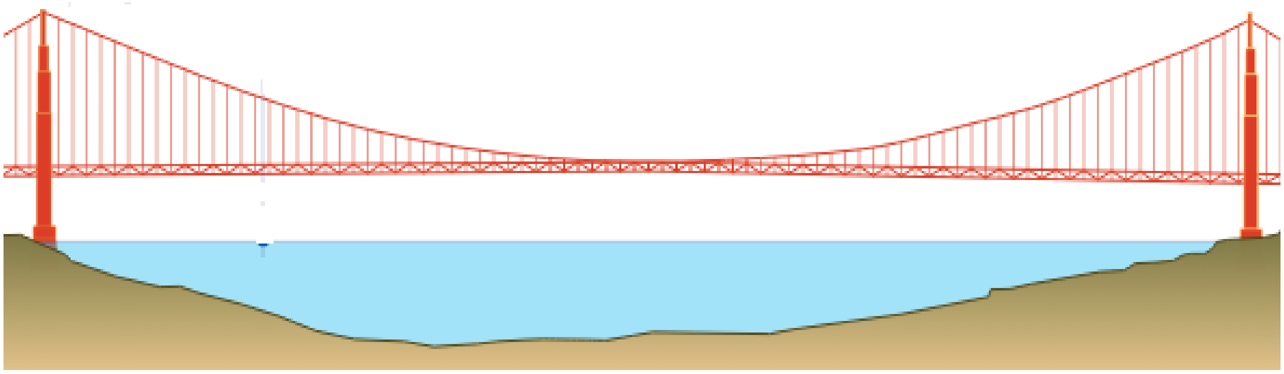
Aplicar Modelización Implícita de fenómenos contextualizados del mundo real, asociados a la ingeniería, que usen relaciones de funciones reales: Funciones Cuadráticas.

Problema a estudiar: El puente de Angostura
Actividad: **Problema de Simulación Ímplícita**

El puente de Angostura ubicado sobre el río Orinoco en la región de Guayana, Venezuela, fue inaugurado el 6 de enero de 1967 por el presidente Raúl Leoni. Es un diseño del prestigioso ingeniero

Paul Lustgarten, el cual es oriundo de la región (http://www.arqhys.com/articulos/puente-angostura-venezuela.html.) En el momento de su construcción constituyó el noveno puente del mundo y el primero de América Latina en su clase. Sus **torres principales de** 119,20 metros están separadas por una distancia de 1.272 metros El puente está suspendido por dos enormes cables; el ancho del tablero es de 16,6 metros y ésta se encuentra aproximadamente a 57 metros del nivel del agua. Los cables tocan el tablero (carretera) en el centro del puente. (Fuente de los datos: http://www.precomprimido.com/)

Puente de Angostura.
Fuente: http://www.arqhys.com/articulos/fotos/articulos/Puente-de-Angostura-Venezuela.jpg.



Representación Gráfica del Puente de Angostura

Demanda de Tareas Cognitivas y de Contenido (Análisis de la estructura conceptual del tema y de la organización de los aprendizajes sugeridos):

1. Argumente el problema propuesto. Represéntelo gráficamente. Diga las variables que intervienen en el fenómeno estudiado.
2. Encuentre un modelo que se ajuste a la curva que describe la trayectoria de los cables.
3. Determine la altura de los cables a una distancia de 250 metros del centro del puente. (Supón que la carretera es plana).
4. Visualice en GeoGebra el problema.
5. Determine la altura de los cables una vez recorrido de 700 metros en un sentido de la trayectoria del puente. Interprete el significado de las variables de acuerdo al problema estudiado.
6. Interprete de acuerdo al contexto del problema en estudio, los significados de las posibles transformaciones del parámetro que interviene en el modelo construido, cuando éste experimenta cambios. Sugerencia: use los deslizadores que proporciona GeoGebra.
7. Calcule el área de la carretera asfaltada sobre el puente Angostura.
8. Encuentre el área encerrada bajo la curva que describe el tendido de uno de los cables, las rectas que representan la altura de las torres y el eje X que constituye la carretera.

Demanda de Tareas de Instrucción: Tareas de Conexión y de Reflexión (Análisis del diseño de la propuesta de investigación):

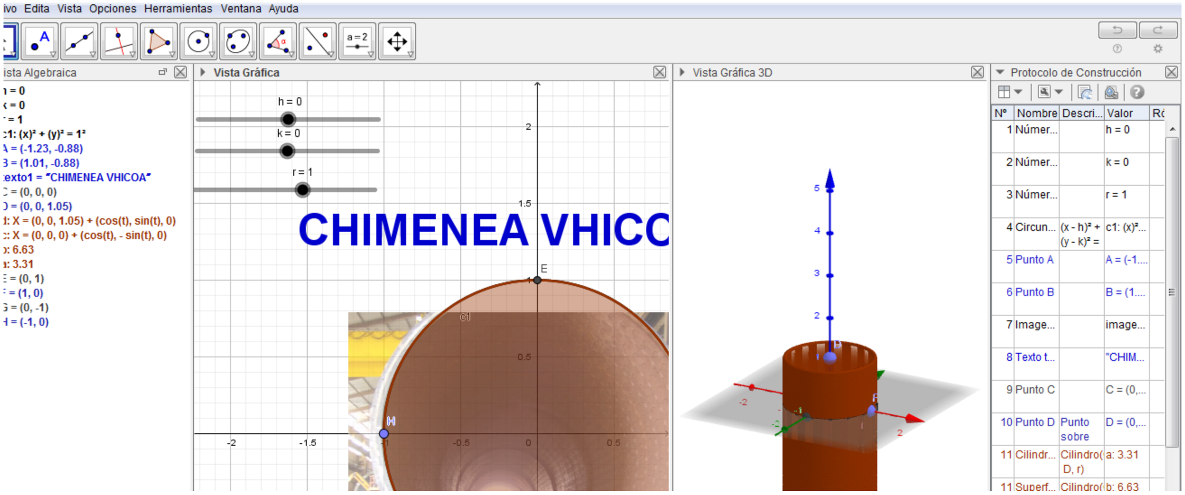
1. Introduzca el modelo construido en la vista algebraica.
2. Renombre la función original, en la barra de entrada, utilizando el parámetro a. Establecer el intervalo y el incremento del deslizador, posicionándose sobre éste: presione clip derecho y seleccione la opción propiedades.
3. Ajuste el parámetro teniendo en cuenta el modelo original.
4. Realice las interpretaciones que tengan a bien lugar, una vez que simule el fenómeno en estudio.
5. Analice las posibles limitaciones que presenta el modelo construido, considerando lo realizado en el punto 5.
6. Investigue otros modelos referidos por ejemplo al Puente Orinoquia o al ubicado sobre el Lago de Maracaibo.

Demanda de Tareas de Actuación: Tareas de Reflexión (Análisis del rediseño de la propuesta didáctica de la investigación):

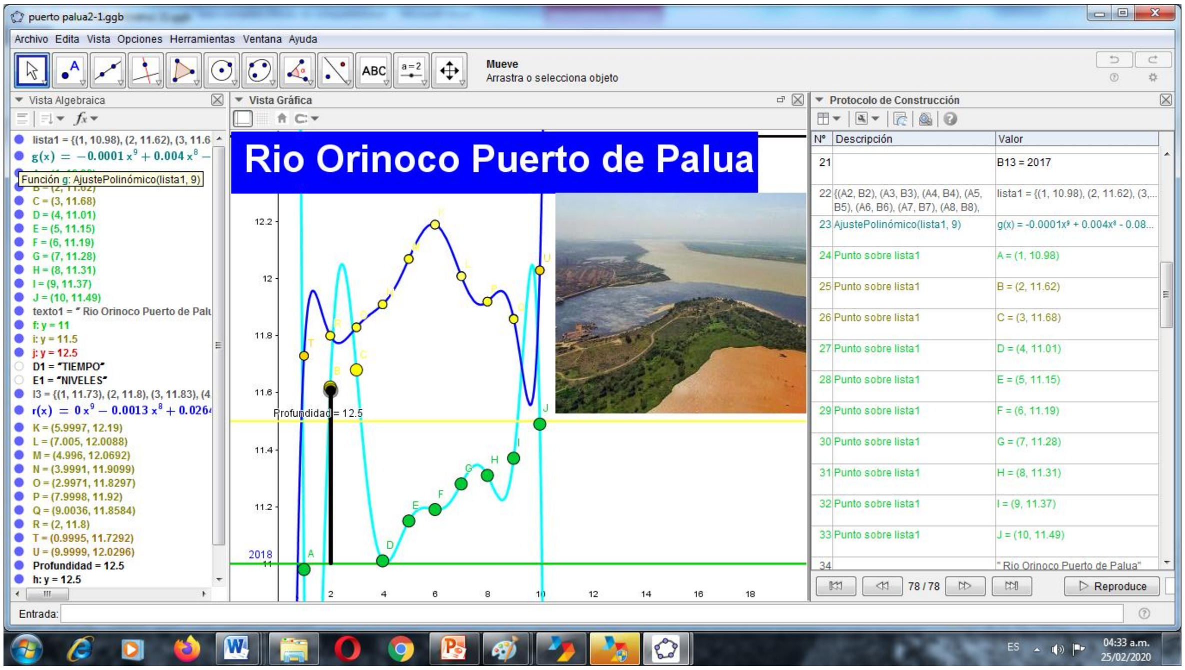
1. ¿Qué puede afirmar para el caso de otros puentes en relación al modelo construido?.

ANEXO H

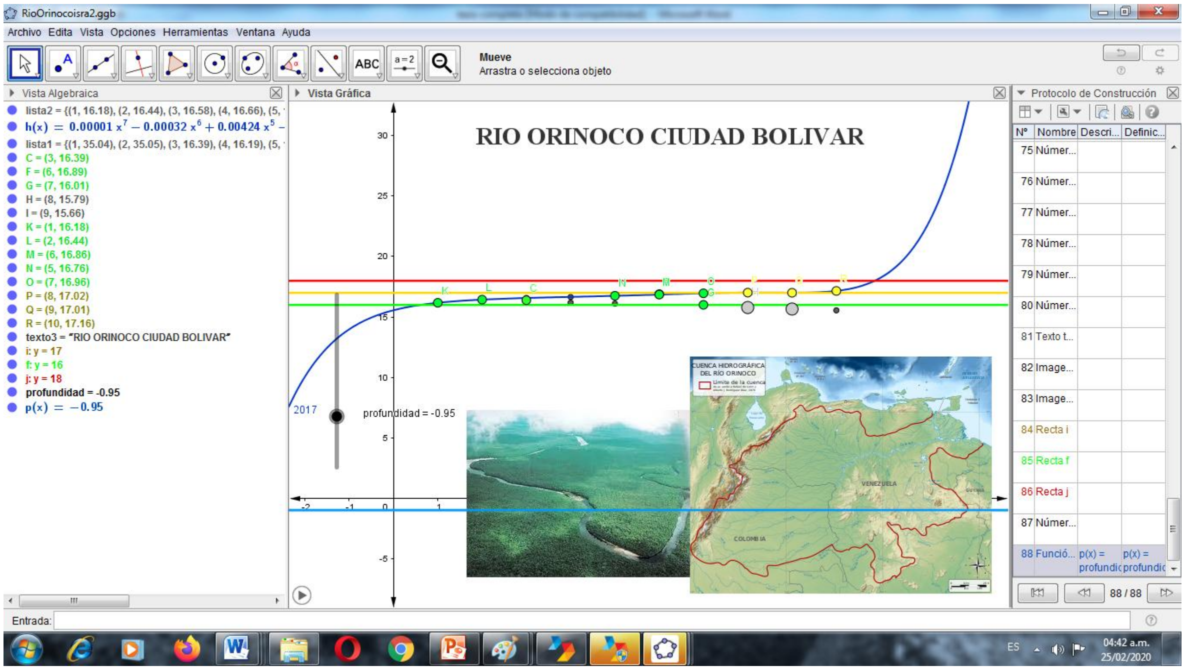
ALGUNAS PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES EN EL GEOGEBRA



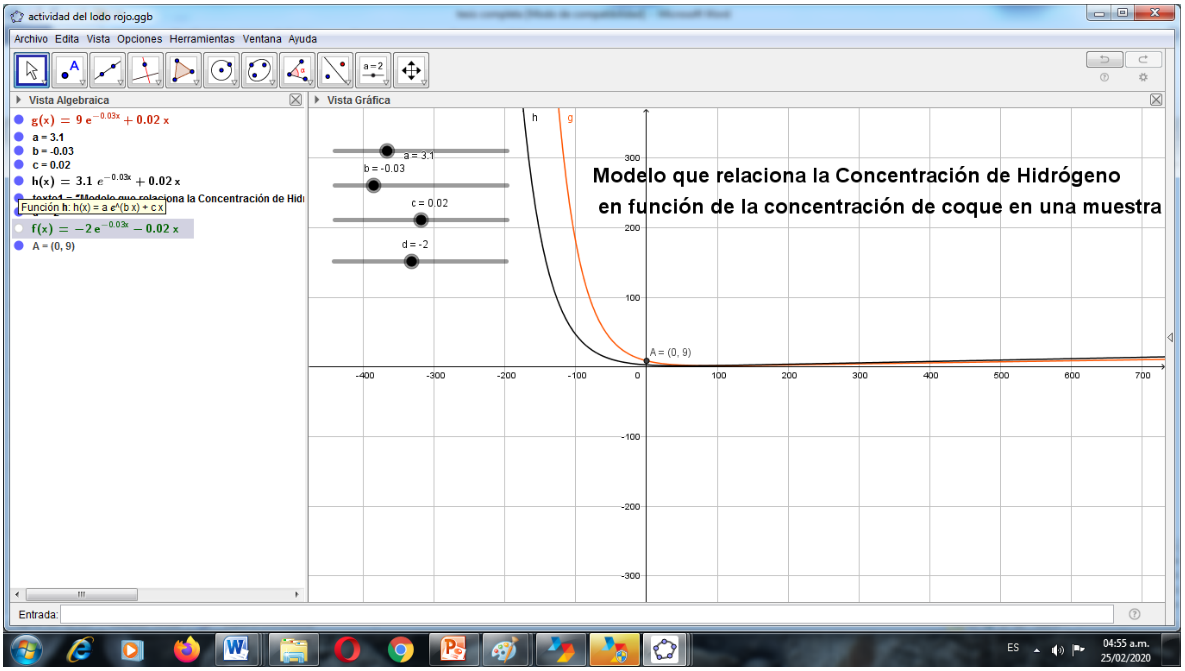
Tarea de Modelización Matemática: Construcción de la pieza de una chimenea. Disponible en dirección web al usar intranet de la UNEG y en: https://www.youtube.com/watch?v=Kp5CiT79Ic4&feature=youtu.be



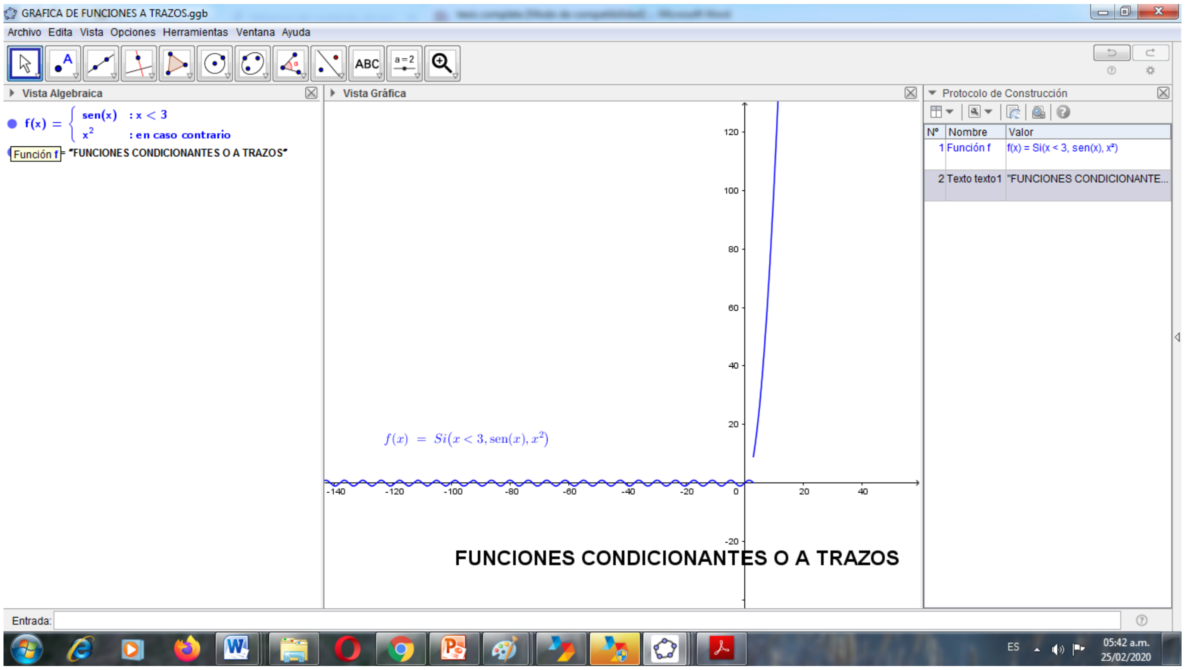
Tarea de Modelización Matemática: Crecimiento del Río Orinoco en el Puente de Palúa, Ciudad Guayana, Estado Bolívar. Disponible en dirección web al usar intranet de la UNEG y en: https://www.youtube.com/watch?v=Kp5CiT79Ic4&feature=youtu.be



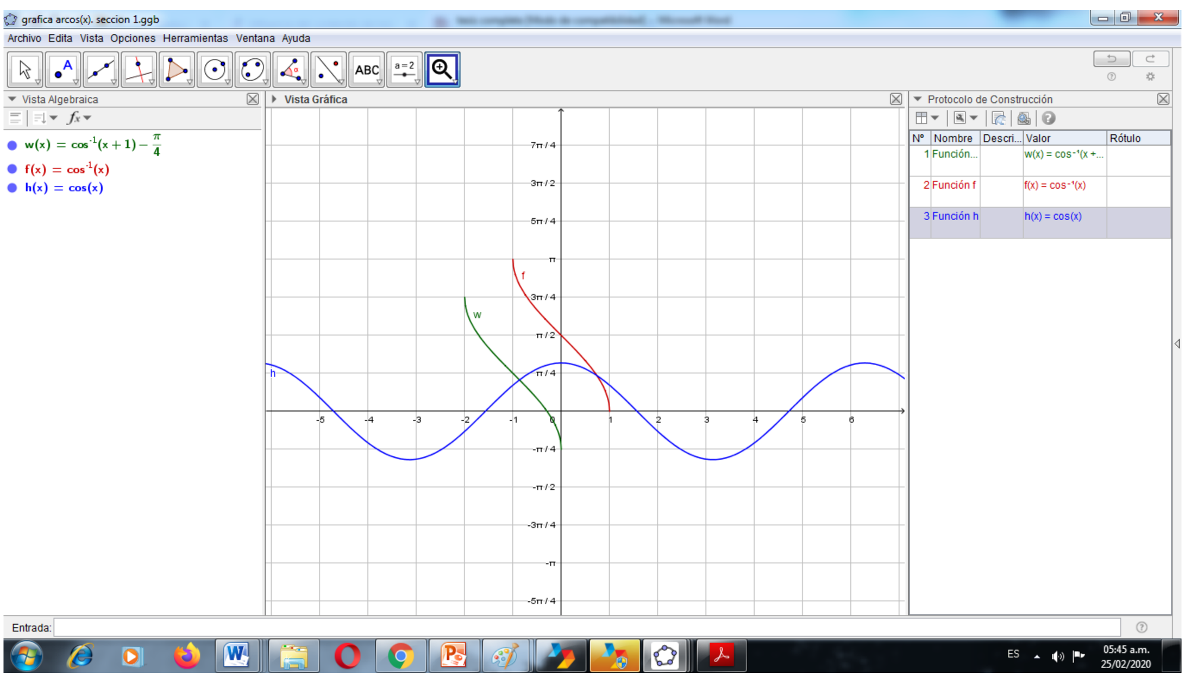
Tarea de Modelización Matemática: Crecimiento del Río Orinoco en Ciudad Bolívar, Estado Bolívar Disponible en dirección web: https://www.youtube.com/watch?v=Kp5CiT79Ic4&feature=youtu.be**; próximamente disponible al usar intranet de la UNEG.**



Tarea de Modelización Matemática: Neutralización del Lodo Rojo en una muestra de Coque, según Gómez, (2016). *Aplicaciones del lodo rojo.* **Disponible en dirección web:** https://www.youtube.com/watch?v=Kp5CiT79Ic4&feature=youtu.be**; próximamente disponible al usar intranet de la UNEG.**



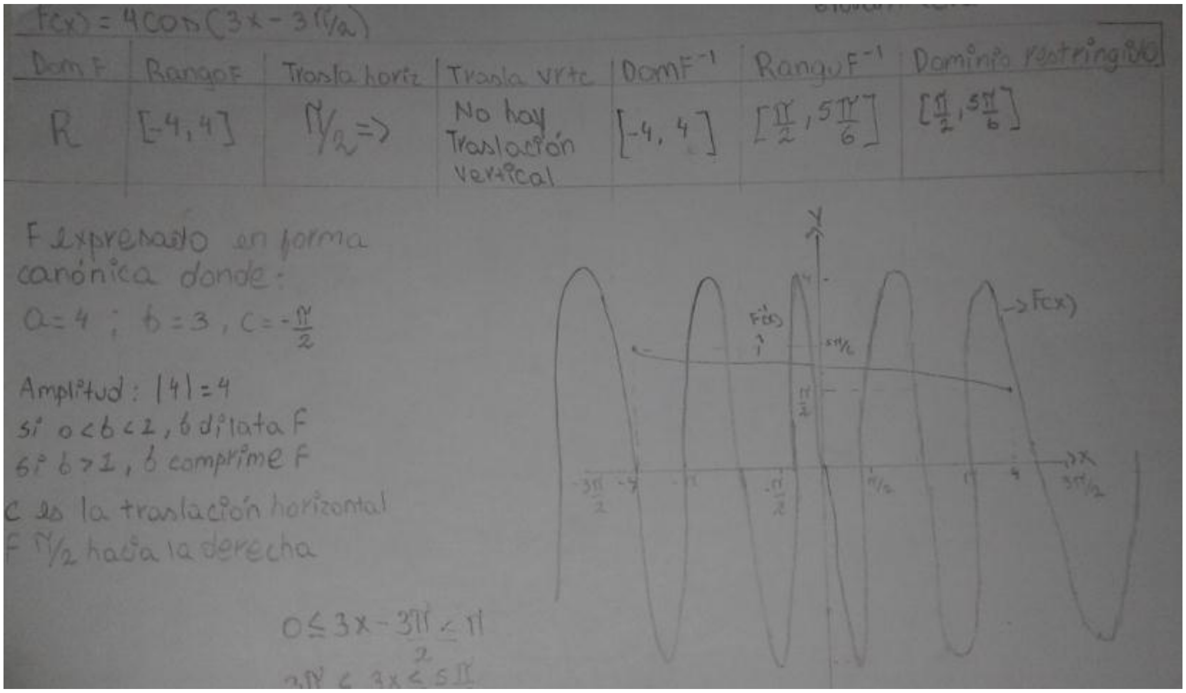
Tarea de Modelización Matemática: Funciones Condicionantes o a Trazos. Próximamente disponible al usar intranet de la UNEG.



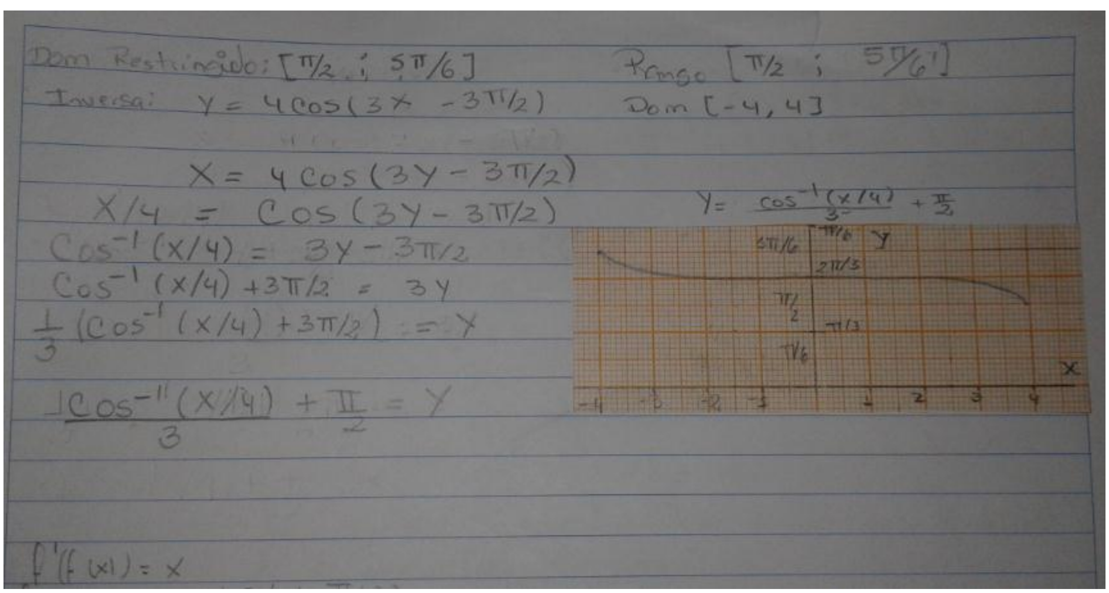
Tarea de Modelización Matemática: Funciones Trigonométricas y sus Inversas. Próximamente disponible al usar intranet de la UNEG.

ANEXO I

ALGUNAS PRODUCCIONES MANUALES DE LOS ESTUDIANTES



Tarea de Modelización Matemática que consistió en hallar y representar la Función Inversa de una Función Trigonométrica.



Tarea de Modelización que consistió en encontrar la función inversa de una función.

ANEXO J

CAPACIDADES MATEMÁTICAS SUGERIDAS DESDE LA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES REALES

	CAPACIDADES MATEMÁTICAS
INTERPRETATIVO	1. Formular el problema
	2. Reconocer la variable dependiente e independiente en un problema propuesto.
	3. Elaborar el modelo real de la situación problema planteada.
	4. Hacer representaciones gráficas del modelo real que se genera del enunciado del problema.
	5. Interpretar un problema de funciones del mundo real al contexto matemático, es decir, modelan de la realidad a un posible modelo.
	6. Interpretar las variables del modelo matemático obtenido en función del modelo real.
ARGUMENTATIVO	7. Construir el modelo matemático desde la dimensión algebraica.
	8. Construir el modelo matemático desde la dimensión numérica.
	9. Construir el modelo matemático desde la dimensión geométrica.
	10. Explicar por qué es o no es una función.
	11. Identificar las expresiones algebraicas que representan a las funciones reales.
	12. Justificar la escogencia del modelo analítico que mejor se ajusta a los datos representados geométricamente.
	13. Realizar varias representaciones de la relación funcional obtenida algebraica, numérica, geométrica.
	14. Traducir información entre dimensiones: de la numérica a la geométrica o viceversa, de la geométrica a la algebraica o viceversa, de la algebraica a la numérica o viceversa.
	15. Elaborar el diagrama de dispersión que surge de los datos dados.
	16. Utilizar los sistemas de representación gráfica para hacerse entender.
	17. Analizar gráficamente el dominio y el rango de una función.
	18. Determinar el dominio y rango algebraicamente de las funciones dadas
	19. Determinar asíntotas verticales y horizontales (si existen).
	20. Determinar traslaciones (horizontales, verticales) de las funciones básicas.
	21. Hallar la representación funcional que mejor se asemeje a la sucesión, dada esta sucesión de puntos en el plano cartesiano.
	22. Determinar la mejor alternativa de respuesta al problema planteado.
	23. Argumentar cuándo un punto pertenece a la gráfica de una función.
	24. Justificar sus hallazgos en la aplicación del GeoGebra
	25. Representar cortes del gráfico de la función con los ejes coordenados (si existen).
	26. Representar algún tipo de simetrías del gráfico de la función (en caso de existir).
	27. Reconocer los intervalos de crecimiento o decrecimiento de función de

	CAPACIDADES MATEMÁTICAS
ARGUMENTATIVO	28. Determinar amplitud de las curvas dadas
	29. Crear listas de puntos a partir del comportamiento de la función en la vista gráfica y algebraica del GeoGebra.
	30. Utilizar tablas de valores relativas al comportamiento de la función en la vista geométrica del GeoGebra.
	31. Representar los modelos matemáticos obtenidos en el GeoGebra
	32. Reconocer las tasas de cambios implícitas en los modelos construidos (la derivada de una función real)
	33. Analizar el comportamiento de ciertas gráficas y lo discutir en grupos.
	34. Interpretar y expresan el significado de las transformaciones de los parámetros que intervienen en el modelo computacional.
	35. Mostrar sus resultados al grupo mediante el uso del GeoGebra.
	36. Expresar a otros sus razonamientos en la solución de un problema.
	37. Encontrar el punto mínimo o máximo en las funciones dadas, en caso de existir
	38. Concluir críticamente en base a sus resultados.
	39. Trasladar funciones
	40. Contraer o dilatan funciones
	41. Obtener el modelo computacional en GeoGebra
	42. Simular el comportamiento del fenómeno estudiado con apoyo del GeoGebra
	43. Manejar un lenguaje natural y un lenguaje técnico.
	44. Usar propiedades del álgebra de funciones
	45. Recrear realidades de la situación problema en el GeoGebra.
	46. Manejar enunciados para representar el modelo matemático.
PROPOSITIVO	47. Hacer cálculos usando las variables implícitas en el modelo.
	48. Comunicar limitaciones o potencialidades del modelo construido
	49. Inferir el comportamiento de la variable independiente al establecer condiciones para la variable dependiente.
	50. Validar el modelo matemático y computacional obtenido.
	51. Evaluar resultados y verifican si el modelo obtenido se ajusta a los requerimientos o condiciones del problema.
	52. Realizar predicciones con el modelo construido.
	53. Reflexionar y disertar en torno a los problemas asociados al fenómeno estudiado, con un tratamiento socio-cultural
	54. Aplicar la modelación para el estudio de nuevos fenómenos en otros contextos
	55. Comparar los modelos matemáticos de fenómenos similares.
	56. Realizar análisis crítico de la problemática que abordan los problemas estudiados; bien sea ambiental, cultural, social, entre otros.

ANEXO K

CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS SUGERIDOS DESDE LA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES REALES

CONTENIDOS SOBRE FUNCIÓN REAL	CONTENIDOS SOBRE FUNCIÓN REAL
1. Definición de Función	28. Traslaciones y Reflexiones de Funciones. Parámetros
2. Prueba de la Recta Vertical	29. Modelado Matemático de Funciones
3. Dominio	30. Graficación de Funciones con Calculadora o Computadora
4. Rango	31. Sistemas de Representación
5. Paridad e Imparidad de Funciones	32. Variable Dependiente e Independiente
6. Función Periódica	33. Problemas de Aplicación de Funciones
7. Función Creciente y Decreciente	34. Efectos de los Parámetros con algún Software para graficar
8. Clasificación de función: inyectiva	35. Simulado de fenómenos que se representan mediante una relación
9. Clasificación de función: sobreyectiva	
10. Clasificación de función: biyectiva	
11. Puntos Críticos	LEYENDA:
12. Puntos Máximo o Mínimos	C1
13. Funciones Polinómicas	C2
14. Funciones Racionales	C3
15. Función Valor Absoluto	C4
16. Funciones Irracionales	C5
17. Función Parte Entera	
18. Funciones Definidas a Trozos o por Intervalos	
19. Gráficas de Funciones Elementales.	
20. Cambio de Escala en Gráficas	
21. Funciones trigonométricas	
22. Función Exponencial	
23. Función Logarítmica	
24. Funciones Paramétricas	
25. Álgebra de Funciones	
26. Composición de Funciones	
27. Función Inversa	

Leyenda: C1; C2, C3, C4 y C5: Zonas de Contenidos de la Unidad de Funciones Reales. Específicamente, C1: Definición sobre Función Real; C2: Características y Propiedades de las Funciones; C3: Tipos de Funciones; C4: Operaciones con Funciones y C5: Problemas de Funciones.