REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO DE MARACAY

UN MODELO DIDÁCTICO PARA LA DEMOSTRACIÓN EN ÁLGEBRA ABSTRACTA

Tesis presentada como requisito parcial para optar al Grado de Doctor en Educación Matemática

Autor: Richard Díaz
Tutor: Estiven Méndez

Maracay, Junio de 2018

APROBACIÓN DEL TUTOR

En mi carácter de Tutor de la Tesis presentada por el ciudadano, Richard Gustavo Díaz Fuentes, para optar al Grado de Doctor en Educación Matemática, considero que dicha Tesis reúne los requisitos y méritos suficientes para ser sometida a la presentación pública y evaluación por parte del jurado examinador que se designe.

En la Ciudad de Maracay, a los once días del mes de Junio de 2018

Estiven Méndez
CI: 12928335

ÍNDICE GENERAL

LISTA DE CUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL
LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO DE MARACAY
Doctorado en Educación Matemática

UN MODELO DIDÁCTICO PARA LA DEMOSTRACIÓN EN ÁLGEBRA ABSTRACTA

Autor: Richard Díaz
Tutor: Estiven Méndez
Fecha: Junio 2018

RESUMEN

La investigación que a continuación se presenta surge de la experiencia a lo largo de más de veinte años de servicio como docente universitario en el área de álgebra abstracta, especialmente en lo que concierne a las dificultades presentadas por los futuros licenciados en matemática en la demostración matemática. La finalidad de la misma fue crear un modelo teórico para la demostración matemática en esta asignatura, enriqueciendo así el acervo teórico correspondiente a este objeto matemático. Se asumió la teoría de los campos conceptuales de Gerard Vergnaud, la transposición didáctica de Yves Chevallard, los basamentos teóricos de la psicología cognitiva, el razonamiento lógico matemático y las competencias cognitivas por sus aportes al estudio de objeto de estudio. Se abordó la investigación de tipo cualitativo, desde un paradigma fenomenológico interpretativo y bajo el enfoque del interaccionismo simbólico. Se realizó en el escenario de la Universidad Nacional Abierta, Centro Local Aragua. Se consideró como informantes clave la Unidad 6: Grupos y propiedades, el libro texto de Álgebra I de la UNA, cinco textos de álgebra abstracta sugeridos en el Plan de curso (Ver ANEXO A) de dicha materia y el desarrollo, por parte de un estudiante de la UNA de una prueba especialmente diseñada. Se utilizaron las técnicas mostradas en el Modelo Ontológico Semiótico presentado por Godino (2002) y Godino y Recio (2001) sobre el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática, y Significados instituciones respectivamente.

Descriptores: Álgebra abstracta, demostración, modelo teórico.

INTRODUCCIÓN

Tomando en consideración la razón de ser de la aparición de la Educación Matemática, a finales del siglo diecinueve, de intentar resolver problemas inherentes al quehacer educativo que involucra el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática cobra fuerza la necesidad de realizar investigaciones que, en la medida de lo posible, contribuyan en la construcción de una sólida estructura teórica que sirva de fundamento para tan difícil tarea.

Por su naturaleza, el objeto de estudio que aquí se abordó necesitó, indudablemente, de una indagación exhaustiva que permitiera consolidar un modelo didáctico a seguir ante la incertidumbre que gira en torno a éste. Tal objeto de estudio es la Demostración Matemática particularmente en el área del Álgebra Abstracta, más concretamente lo que concierne a su aprendizaje y enseñanza. Un ambiente lleno de dudas se respira alrededor de este tópico del que muchos no vislumbran una forma factible de enfrentarlo dejando ver por qué debe realizarse tal investigación.

Los distintos significados que aparecen al abordar la Demostración Matemática (DM) obligan a su revisión desde un punto de vista semiótico. Aclarando los significados institucionales y personales que le rodean. La carencia de verdaderas estrategias para su aprendizaje distintas a la de algunos esquemas que a la larga no terminan resolviendo lo relativo a su enseñanza-aprendizaje, motivó a la búsqueda de nuevas formas de conceptualización que mostraran algún camino a seguir. Se manejaron en la presente investigación algunos aspectos interesantes de revisar como lo son las capacidades individuales a nivel cognitivo que pudieran representar condiciones necesarias aunque no suficientes, la conformación didáctica de los campos conceptuales, entre otros que están involucrados en los procesos demostrativos.

Fueron revisados estudios de reconocidos didactas como es el caso de Yves Chevallard, de psicólogos cognitivos como Gérard Vergnaud, Ulric Gustav Neisser relacionados con la Antropología de lo Didáctico, los Campos Conceptuales y las

Competencias Cognitivas que fueron valiosos soportes teóricos en la creación del modelo didáctico constituido. La investigación presentada es de tipo cualitativo, desde un paradigma fenomenológico interpretativo y bajo el enfoque del interaccionismo simbólico.

El desarrollo de esta investigación se organizó en cinco secciones descritas a continuación:

La Sección I, denominada "Un acercamiento a la Realidad" presenta un reconocimiento de la Situación de Interés para esta investigación como elemento enmarcado en la Educación Matemática y que contribuye al cumplimiento de uno de sus principales objetivos y que se localiza en este caso dentro del área del Álgebra Abstracta. Se muestra también en esta Sección la Demostración Matemática como un elemento que cobra fuerza con la formalización del Álgebra como desarrollo axiomático y que juega un papel fundamental en la validación del conocimiento matemático.

La Sección II, nombrada por Escenario Referencial está conformada por los antecedentes o investigaciones relevantes en lo que concierne al objeto aquí estudiado. Contempla, además, los referentes teóricos que dieron soporte a esta investigación y algunos tópicos de importantes relacionados con la demostración matemática como lo son el razonamiento lógico, la demostración matemática, la demostración en álgebra abstracta, didáctica de las matemáticas, el diseño instruccional de la UNA y el álgebra como desarrollo axiomático.

La Sección III, denominada Escenario Metodológico, contempla el área a la cual pertenece la investigación, los fundamentos epistemológicos, el diseño, los informantes clave, las técnicas e instrumentos de recolección de la información y el procedimiento seguido en el análisis de la información.

En la Sección IV, llamada Escenario Crítico, se muestra el análisis realizado a la información recabada empleando el enfoque ontológico semiótico según Godino, Godino y recio, Godino y Batanero relacionados con los "Significados Institucionales y personales de la demostración" y "Problemas basados en el enfoque Ontológico Semiótico de la Cognición Matemática"

Finalmente la Sección V, nombrada Escenario Generativo, se dedica para presentar el Modelo Didáctico para la Demostración en Álgebra Abstracta" como aporte teórico de la presente investigación. En el cual se presenta una nueva conceptualización de la demostración como proceso.

SECCIÓN I

UN ACERCAMIENTO A LA REALIDAD

Reconocimiento de la Situación de Interés

Según Kilpatrick (1995), a finales del siglo diecinueve comienza a germinar, lentamente, la educación matemática como respuesta a la necesidad de dar una mejor preparación a una gran cantidad de profesores. Para ello algunas universidades de varios países comenzaron a incrementar sus programas de formación de profesores. Con el pasar del tiempo, la educación matemática es reconocida en diversos países como un tema de estudio a nivel universitario y de esta manera se contaba con que muchos de los profesionales involucrados con la formación de profesores de matemática dentro de la universidad, aparte de enseñar matemática, hicieran investigación, surgiendo así la actividad investigativa en educación matemática.

Al poco tiempo comienzan a formarse asociaciones de profesores siendo la primera la "Asociación para la mejora de la enseñanza de la geometría" (the Association for the improvement of geometrical teaching-AIGT) la cual promueve el origen de la "Asociación Matemática" (the Mathematical Association). Continua el desarrollo de esta gran iniciativa y para 1912, luego de realizar un estudio, la Comisión Internacional en la Enseñanza de la Matemática, informa sobre el ofrecimiento de conferencias en educación matemática con el fin de complementar los cursos de matemáticas. Vale decir que en la actualidad sigue creciendo este movimiento cuya principal finalidad es intentar resolver problemas relacionados con el quehacer diario de la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Sin perder de vista lo antes comentado una de las áreas cuya enseñanza ha mostrado importantes dificultades es la del álgebra, específicamente, la abstracta, también conocida como álgebra moderna. Desde sus inicios, con los trabajos de Galois a comienzos del siglo diecinueve sobre la condición necesaria y suficiente para que una ecuación algebraica sea resuelta por radicales, el álgebra abstracta comienza a llamar la atención de muchos matemáticos de la época. El trabajo de Galois, realizado en su corta vida, sentó las bases fundamentales para la teoría que hoy lleva su nombre y que constituye una de las bases matemáticas de la modulación CDMA utilizada en comunicaciones, y especialmente en sistemas de navegación satelital, como GPS, Glonass, etc. Este insigne matemático es reconocido como el padre del álgebra abstracta y gracias a él se logró dar solución a un problema abierto mediante el nuevo concepto de grupo, siendo Galois el primero en usar el término "grupo" en un contexto matemático

Algunos años después hace su aparición la prestigiosa matemática alemana Amalie Emmy Noether nacida en 1882 en la ciudad de Erlangen, Baviera, Alemania y quien fue uno de los matemáticos que iniciaron el campo del álgebra abstracta. Una de las importantes innovaciones de las matemáticas en el siglo XX fue el desarrollo del álgebra abstracta y se debió precisamente a esta matemática. En 1920 comenzó la obra fundamental de Noether para el álgebra cuando publica un artículo sobre teoría de ideales en el que define ideales por la izquierda y por la derecha. Un poco después, en 1931 publicó *Moderne Algebra*, un texto central para este campo. Fueron muchas las contribuciones de Emmy Noether al álgebra abstracta pero, según quien escribe, la más importante de dichas contribuciones, para los efectos de este trabajo, fue la de darle al álgebra abstracta un carácter de sistema axiomático. Según Carrasco (2004) "Emmy Noether se identifica con el enfoque axiomático en matemáticas, pero este hecho es particularmente cierto en álgebra…" (p.334).

Un hecho notable es la innegable configuración de los contenidos del álgebra abstracta, así como el de otros contenidos matemáticos, enseñados en la universidad, particularmente, en la Universidad Nacional Abierta (UNA), a estudiantes de la licenciatura en matemática, en forma de desarrollos axiomáticos. Tales contenidos son llamados por Chevallard (1997) “saber sabio” y esto tiene una gran relevancia para el desarrollo de la presente investigación desde el punto de vista de la Didáctica de las Matemáticas. Por lo general tales contenidos son escritos por matemáticos, tales como John B. Fraleigh, I. N. Herstein, entre otros, carentes de una didáctica y centrados en la DM, para ser estudiados por futuros licenciados en matemática, lo que convierte a éstos en continuadores del desarrollo axiomático de tales sistemas. Según Castro (2013) “…El estudio del álgebra moderna en las instituciones de educación superior tiene por objeto ordenar el pensamiento con arreglo al método axiomático, para desarrollar el juicio lógico indispensable en la labor del matemático…” (p.12)

Según se lee en el Plan de Curso en vigencia de la UNA, (Ver ANEXO A), elaborado por Chacón Ch. (2008), en éste se establece:

> En matemática es frecuente considerar algunos conceptos como primitivos; una vez aceptados estos conceptos se formulan algunos axiomas, es decir, aceptamos algunas “reglas” de diversa índole que nos permiten utilizar los axiomas y comenzamos a demostrar teoremas o proposiciones. A medida que se desarrolla el tema, por necesidades que se imponen a partir de ese desarrollo, se introducen nuevos términos (definiciones) y otros axiomas (en caso de ser necesario) y se continúa desarrollando la teoría, esta manera de proceder es lo que se conoce como teoría matemática… (p.2)

Lo anterior evidencia la naturaleza axiomática de los contenidos desarrollados en álgebra abstracta, al menos en la mencionada universidad y en algunas otras en las que el autor ha tenido la oportunidad de trabajar y que es de importancia en la intencionalidad de su investigación. Además se reafirma, como se comentó anteriormente, el papel que juega la DM en esta área y por ende resulta relevante conocer más a fondo sobre este tan controversial tópico.

Según Fiallo, Camargo y Gutierrez (2013) las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la DM han sido desarrolladas desde perspectivas Históricas, Epistemológicas, Cognitiva, Psicológicas, Curriculares y Didácticas. En esta investigación se hace énfasis en el aspecto correspondiente al aprendizaje de la DM más que su enseñanza. Las razones se explican en la sección II.

De acuerdo a Iglesias y Ortiz (2013) la DM se puede estudiar desde una perspectiva Histórica cuando interesa la evolución histórica de la matemática y en particular de la demostración, desde una perspectiva Epistemológica cuando la motivación se centra en los rasgos característicos del conocimiento matemático sus fuentes o procedencia, criterios de validación y relación entre el sujeto que conoce y el objeto matemático, Cognitiva si se desea conocer sobre el desarrollo del pensamiento matemático, dificultades confrontadas, errores cometidos y competencias matemáticas alcanzadas y puestas en práctica y Didáctica si se trata de encontrar estrategias, materiales y recursos didácticos que ayuden al abordaje y la comprensión de la actividad demostrativa.

En opinión de Alvarado (2015) el núcleo principal de la matemática lo constituye la DM y los orígenes de ésta se remontan a los propios orígenes de la matemática. Reforzando esta idea Thurston afirma que la DM es una de las más importantes maneras de revelar la comprensión matemática (Thurston, 1994). Vale agregar que la DM formal es la única aceptada por los matemáticos cuando se les presentan nuevos aportes en este campo.

En este momento es preciso definir el objeto de estudio con el fin de evitar posibles confusiones con otros términos. De acuerdo a las definiciones proporcionadas por Vega (1992), citado por Alvarado (2015), toda demostración es una prueba, en segundo lugar toda *prueba* es una *argumentación*, por supuesto sin que tengan validez sus recíprocos. Pues una argumentación se puede considerar como una interacción lingüística compleja capaz de satisfacer, funciones tales como dar cuenta y razón de algo ante alguien en un cierto discurso. En otras palabras la argumentación es un proceso interactivo y dinámico en el cual tienen lugar distintas formas de comunicación como la inducción y la modificación de mensajes discursivos. En conclusión un argumento se constituye en una serie de proposiciones dispuestas en orden para dar cuenta y razón de algo y que está conformado por tres componentes: una conclusión, un conjunto de premisas y una línea discursiva que las entrelaza. En cuanto a prueba, Vega la considera como un argumento que generalmente se inicia en ciertos conocimientos para concluir otro conocimiento y pretende cognoscitivamente acentuar las dimensiones informativa, explicativa o justificativa de los argumentos.

Otro término que es preciso aclarar es el de *explicar* que según Balacheff (2000) desde una perspectiva Piagetiana es en *el terreno de las ciencias deductivas* despejar las razones para *responder a la pregunta del porqué* y desde el punto de vista de la práctica misma de las matemáticas es dar justificaciones de un teorema, explicarlo y demostrarlo señalando exigencias distintas. La explicación no se deduce, necesariamente, de una cadena deductiva.

Este autor considera que un tipo de prueba dominante, que tiene una forma particular, que consiste de una serie de enunciados organizados obedeciendo a un conjunto ordenado de reglas es lo que se considera una demostración. Y que lo será realmente, después del acto social de ser aceptada como tal por una comunidad matemática. Aunque se debe estar consciente que en dicha comunidad hay doctrinas que se oponen (método axiomático, intuicionismo, formalismo, etc.) pero esto se debe fundamentalmente al modo como se eligen los axiomas lógicos en matemática y no a la demostración en sí. Además se deben considerar las capacidades y habilidades personales de quienes se enfrentan a un problema tan particular como lo es la DM. Es opinión del autor que en una ciencia como la matemática, cuya aplicabilidad en diferentes disciplinas del saber es un hecho ineludible, la herramienta más poderosa para dar confiabilidad a la validez de sus aportes es la demostración matemática.

Considerando lo presentado hasta ahora sobre la DM sale a la luz la necesidad y la importancia de realizar investigaciones que permitan descubrir formas, métodos, estrategias y habilidades cognitivas necesarias para llevar a cabo con éxito semejante tarea y que a su vez faciliten acercarse didácticamente al conocimiento de los procesos involucrados en la DM ya que en los materiales instruccionales (Medio Maestro) no se presentan estrategias orientadas hacia la enseñanza-aprendizaje de la DM. Y la necesidad se incrementa en un área de tal complejidad como lo es el álgebra abstracta. Pero se debe estar consciente de que no es una tarea fácil y da lugar a plantear algunas interrogantes:

1. ¿Cuál es análisis didáctico del curso de Álgebra I impartido en la UNA?
2. ¿Cuáles son las competencias cognitivas necesarias en el futuro licenciado en matemática para enfrentar una demostración en álgebra abstracta?
3. ¿Es necesario crear un modelo didáctico para la enseñanza-aprendizaje de la DM en álgebra abstracta?

Intencionalidad General

Crear un Modelo Didáctico para la DM en álgebra abstracta.

Intencionalidades Específicas

1. Presentar un análisis didáctico del curso de Álgebra I de la UNA.
2. Analizar las competencias cognitivas necesarias en el futuro licenciado en matemática para enfrentar una demostración en álgebra abstracta.
3. Generar un modelo didáctico para la DM en Álgebra Abstracta.

Justificación e Importancia

"La didáctica de la matemática…es el arte de concebir y de crear condiciones que pueden determinar el aprendizaje de un conocimiento matemático por parte del individuo" (D´Amore, (2008), p. 4). Considerar la definición suministrada acerca de la didáctica de la matemática por D´Amore, en opinión del autor, es aceptar, de alguna manera, los rasgos de "artista" que deben poseer quienes se sumerjan en el exigente campo de la didáctica de las matemáticas. Sin embargo, es muy importante reconocer que el intentar crear condiciones que puedan contribuir favorablemente con el aprendizaje requiere de todo un camino de experiencias con el quehacer educativo, que lejos de ser un arte innato es el producto de habilidades adquiridas con la experiencia. Nunca estará demás todo intento por contribuir en la mejora de las condiciones de aprendizaje y enseñanza de los contenidos matemáticos, sobre todo aquellos reconocidos por su complejidad, tal es el caso del álgebra abstracta, impartidos, al menos, en la universidad venezolana, caso particular la UNA.

Vale mencionar, considerando la finalidad de la presente investigación, algunos comentarios aportados por Gascón (1998) en uno de sus trabajos sobre la evolución de la didáctica de la matemática. Gascón tomó como punto de partida la problemática del profesor, (que en el caso de la UNA, el término "profesor" queda sustituido prácticamente por el material impreso denominado *el Medio Maestro*), e inicia su recorrido por el punto de vista clásico en didáctica que sistematiza y generaliza dicha problemática. Asegura que ante las ampliaciones sufridas por esta problemática y por múltiples fenómenos y problemas didácticos sin resolver surge la necesidad de tematizar y modelizar la actividad matemática escolar, dando lugar al surgimiento de la epistemología experimental que a la par con las primeras formulaciones de la teoría de *las situaciones didácticas*, adoptó el nombre de "didáctica fundamental". A partir de la teoría de la transposición didáctica de Chavallard hace su aparición el *enfoque antropológico* que considera el *proceso de estudio* (institucionalizado) de las obras matemáticas como objeto primario de investigación.

La razón de ser de la Educación Matemática desde sus inicios ha sido y será establecer las condiciones idóneas para facilitar la enseñanza y aprendizaje de la matemática y la didáctica de la matemática una de sus mejores herramientas para lograr tal objetivo, pero sobre los educadores matemáticos recae gran parte de semejante responsabilidad. Por ello, en opinión del autor, cualquier intento por fortalecer tan valiosa herramienta será bienvenido.

Según Radford (1994) en los últimos años se han desarrollado investigaciones en el campo de la psicología y de la educación matemática en torno a comprender las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de la demostración. Se ha detectado la insuficiencia de modelos didácticos empleados en el aula.

Revisando las características del material de apoyo empleado en la UNA para el aprendizaje y enseñanza del álgebra abstracta ha sido posible corroborar la ausencia de alguna forma reconocida de intento didáctico que contribuya al fortalecimiento del aprendizaje y enseñanza de la demostración, siendo este objeto matemático el corazón de esta asignatura así como lo es del campo de la matemática, por ello la realización de esta investigación representa un paso fundamental de gran valor para la creación o al menos el fortalecimiento de la herramienta arriba mencionada. Todo lo antes mencionado da lugar a emprender una tarea nada fácil pero que fungirá como un importante paso hacia la construcción de un modelo didáctico para la enseñanza y aprendizaje del álgebra abstracta. La imperiosa necesidad de certidumbre ha movido al ser humano hacia la búsqueda de la verdad, del conocimiento verdadero, la DM ha sido una herramienta de validación de ese conocimiento o al menos de gran parte de éste. Vale recordar algunas palabras de Edgar Morín "….la conciencia de la complejidad nos hace comprender que no podremos escapar jamás de la incertidumbre y que jamás podremos tener un saber total: -la totalidad es la no verdad-" (Morin 2004, p.64)

Un aspecto que no se debe pasar por alto es el concerniente al currículo de la UNA. Según el proyecto de creación de la UNA (1975-1977) la estructura curricular de los programas de estudio para las áreas académicas así como para las carreras profesionales se establece sobre las bases de un *continuum* curricular flexible que permitirá el desarrollo de niveles de formación tecnológica y profesional. La organización modular de la enseñanza y el establecimiento de una red de objetivos curriculares e instruccionales permite entradas y salidas múltiples en los programas de estudio, lo cual posibilita distintos niveles de ingreso y egreso dentro de un continuum profesional. También establece el perfil del egresado en matemática entre otros:

> El licenciado en Matemáticas que egresará de la UNA será un profesional capacitado para trabajar como auxiliar de investigación o miembro de un equipo interdisciplinario de investigadores o consultores en institutos de investigación o empresas. Contribuirá con sus conocimientos matemáticos y sus habilidades heurísticas a resolver problemas de mediano nivel de complejidad… (p.137).

Es importante agregar que la metodología empleada por estos futuros matemáticos en su rol de investigadores es precisamente la DM. Esto conlleva a aclarar la necesidad de comprender el papel y la importancia de la demostración en su quehacer como profesionales.

SECCIÓN II

ESCENARIO REFERENCIAL

Antecedentes

A continuación se realiza una breve descripción de los trabajos de investigación que se han considerados como antecedentes, tal selección se ha hecho tomando en consideración los siguientes criterios: definición del objeto de la investigación, el objeto matemático involucrado, lo concerniente a sus aspectos teóricos presentes que pueden fungir como sustento, los contextos en que desarrollaron sus indagaciones, la metodología que siguen así como por sus resultados tanto en el plano teórico como en el práctico.

Esta revisión se inicia con el trabajo realizado por Mena (2011) presentado en el Instituto Politécnico en la ciudad de México, titulado "Estudio epistemológico del Teorema de Isomorfismo de Grupos" en el cual presenta información importante relacionada con la investigación que quien escribe pretende llevar a cabo, como lo es la descripción de uno de los elementos involucrados en el tema de la demostración: *el teorema y su hábitat* considerando aspectos cognitivos y didácticos. Entre otros aspectos relacionados con el contexto están, el estudio que presenta sobre *la enseñanza del álgebra abstracta, el álgebra casuística y pre-simbólica.* De igual forma revisa aspectos concernientes a *la conceptualización y el lenguaje.* La tesis del trabajo de Mena es proponer una aproximación, diferente de las ya existentes, a la enseñanza del teorema del isomorfismo de grupos. Se utiliza la teoría APOS o APOE por su traducción del inglés sobre acciones, procesos, objetos y esquemas como estrategia. No se observan conclusiones en este trabajo, salvo la indicación de que en su trabajo se examinó el teorema de isomorfismo en sus distintas facetas: la puramente formal, la matemática, el aspecto cognitivo y su desarrollo histórico. Presenta una perspectiva socio-epistemológica con un enfoque distinto. Su contribución a la presente investigación es el estudio de algunos aspectos teóricos del álgebra abstracta tales como el teorema de isomorfismo y las relaciones de equivalencia.

Otro estudio que presenta elementos importantes para esta investigación es el de Alvarado (2015): de la Universidad de Salamanca, España. Esta investigación se desarrolla en torno a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración, como objeto y como proceso, en la educación universitaria. Presenta los siguientes objetivos: (a) Realizar una aproximación socio-epistemológica de la DM y de su lugar en la práctica profesional del matemático, (b) Aproximarnos a la naturaleza cognitiva de la DM, (c) Realizar un estudio exploratorio con estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, (d) Diseñar e implementar una ID para impulsar el desarrollo de competencias demostrativas que respondan a las exigencias del contexto y la construcción del conocimiento base necesario.

Esta investigación gira en torno a la ingeniería didáctica y se presenta con un enfoque socio-constructivista, se caracteriza por el significado de "demostración" como demostraciones de texto y procesos de razonamiento. Se emplea como metodología la ingeniería didáctica y los métodos empleados para recabar los datos, su interpretación, diagnóstico, recomendaciones para la acción y diseño e implementación de secuencias didácticas son de naturaleza cualitativa principalmente, además utiliza el modelo de *Toulmin* como herramienta metodológica para el análisis de argumentos y el método *RBC* ((Recognizing, Building with, Constructing) para documentar la construcción del conocimiento. Finalmente, la autora presenta conclusiones acerca de la ingeniería didáctica resultante. Presenta valiosa información sobre el pensamiento matemático avanzado y su relación con la DM además define distintas dimensiones de la DM como objeto de estudio tales como la epistemológica, la social, la cognitiva y la didáctica.

Otra investigación considerada es la realizada por Iglesias (2014) "*La Demostración en Ambientes de Geometría Dinámica. Un Estudio con Futuros*

Docentes de Matemática" realizada en la UPEL Maracay. El enfoque utilizado es el cualitativo. Se utiliza el análisis didáctico como herramienta para el diseño de unidades didácticas con contenidos geométricos y una *perspectiva investigativa*. Se plantea como objetivo general "*El estudio de las competencias matemáticas puestas en práctica por los futuros docentes…"* y como objetivos específicos: (a) Caracterizar el escenario y las experiencias de aprendizaje que conforman el curso de Resolución de Problemas Geométricos Asistido por Computadora, (b) Describir los usos que le dan los futuros docentes de Matemática a los software de Geometría Dinámica cuando abordan, a partir de la resolución de problemas, las demostraciones en Geometría, (c) Clasificar las justificaciones que dan los futuros docentes de Matemática cuando resuelven problemas y abordan la demostración en un ambiente de Geometría Dinámica, (d) Analizar las competencias matemáticas puestas en práctica por los futuros docentes de Matemática cuando resuelven problemas y abordan la demostración en un ambiente de Geometría Dinámica y (e) Analizar las competencias didácticas puestas en práctica por los futuros docentes de Matemática cuando diseñan actividades de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, dirigidas a estudiantes de Educación Media. Desde el punto de *vista metodológico* es una investigación en la modalidad de *investigación de campo* y *estudio de caso.* Siguió un paradigma *cualitativo interpretativo.*

Se establece, a manera de conclusión, en dicho estudio que existen relaciones entre los dominios de los conocimientos matemáticos para la enseñanza y las competencias didáctico–matemáticas y, además, se logró definir indicadores tanto para las competencias matemáticas como para las didácticas. Estos indicadores han guardado relación con los contenidos y objetivos de aprendizaje previstos para cada uno de los tres talleres que conformaron el curso. Un aporte de este estudio para esta investigación es el concerniente a las competencias matemáticas y didácticas que los futuros docentes lograron poner en práctica al momento de resolver problemas geométricos de geometría dinámica y que a pesar de no haberse realizado en álgebra trata algunos aspectos de la DM. Además la metodología empleado guarda relación con la presente investigación.

Un importante trabajo también revisado es la tesis doctoral de González (2016) *"Procesos de pensamiento algebraico en entornos de aprendizaje mediados tecnológicamente"*. Un trabajo de investigación que tiene su origen en la observación de dificultades que muestran futuros docentes en la comprensión de conceptos y procesos específicos en los cursos de álgebra así como también un uso inadecuado en el manejo de su simbolismo. Dichas anomalías son estudiadas dentro del marco del pensamiento algebraico siendo su objeto de estudio el pensamiento algebraico de estos profesores en su formación inicial en el álgebra universitaria. La investigación se apoya en cinco teorías de las cuales cuatro son inherentes a la Educación Matemática y centradas en la semiótica: Los Registros de Representación Semiótica de Duval, la Objetivación de Radford, la Epistemografía de Drouherd y la teoría Sociocultural de Vygotsky. Se asume en este trabajo desde una perspectiva cualitativa del tipo fenomenológica Interpretativa basada en un estudio de casos, se emplea la técnica de la observación participante y como instrumentos la prueba EVAPAL, los foros y diarios de clase. Siendo algunos de sus hallazgos las evidencias de que bajo la conjunción del lenguaje significativo y la metáfora algebraicamente significativa los estudiantes mostraron comprensión de los conceptos algebraicos y fueron capaces de resolver problemas. Como aporte a la presente investigación están sus estudios sobre los conceptos algebraicos, los elementos de la semiótica empleados y la metodología empleada.

Para finalizar con esta actividad se revisó la tesis doctoral de Calvo (2001) "*Un Estudio sobre el Papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de cálculo diferencial e integral"*. Un aspecto que llamó la atención a quien escribe fue lo referente al *papel de las definiciones y de las demostraciones…* pues de alguna manera puede aportar información de interés. Al parecer no se presenta en este trabajo ninguna interrogante y se percibe lo siguiente como objetivo "*…identificar y estudiar actividades que podrían influir favorablemente en el aprovechamiento por parte del estudiante del período de transición entre las etapas elemental y avanzada de sus estudios de matemática…*"

Desde el punto de vista teórico emplea la *transposición didáctica* y el contrato *didáctico* desde una *perspectiva institucional*. Y en el aspecto metodológico utiliza un perfil exploratorio descriptivo e interpretativo que responde a un modelo emergente en el sentido de que cada instrumento de recolección de datos fue diseñado sobre la base de la información recogida con el instrumento aplicado. En lo que se refiere a las conclusiones lo que presenta la autora pareciera ser un análisis e interpretación de la información recabada. Un aspecto de interés que la autora consideró fue la transposición didáctica, que se empleará en el estudio en curso, y cuya interpretación vale considerar.

Referentes Teóricos

Teoría de los Campos Conceptuales de Gérard Vergnaud

La teoría de los Campos conceptuales fue creada por el Psicólogo Cognitivo francés Gérard Vergnaud y publicada a sus 57 años en 1990. Este renombrado psicólogo más que contribuir con sus investigaciones a la Psicología Cognitiva dio valiosos aportes al campo educativo así como a la Didáctica Profesional y al concepto de competencia, cualidad ésta que es responsable de gran parte del conocimiento que adquiere el ser humano aunque pudiera considerársele como parte de ese conocimiento. Aunque esta teoría se apoya en los conceptos clave *Esquema, Situación e Invariante Operatorio* su eje central es la *Conceptualización.* Considerando y reconociendo la importancia del cuidadoso análisis realizado por Vergnaud en su intento por desenmarañar el complejo proceso cognitivo indispensable para el aprendizaje significativo de los conceptos conviene revisar algunos términos de interés antes de sumergirnos en los detalles de los Campos Conceptuales.

A manera de ejemplo, cuando una persona intenta transmitir a otra o a otros lo que es “silla” pudiera indicar simplemente “es algo que sirve para sentarse” lo que seguramente dará la libertad a imaginarse “silla” como un objeto metálico, o de madera o de plástico; con cuatro, tres o una pata; con o sin espaldar, lo que dará lugar a que cada uno de los instruidos tenga su propia idea de lo que es "silla". De acuerdo a esta situación se puede inferir que un concepto es simplemente una idea, una representación mental de alguna realidad u objeto. En matemática es necesario una mayor precisión y por ello recurre a la definición en la cual se establecen criterios precisos que deben impedir las posibles ambigüedades presentadas por el concepto. Más adelante se precisará el término *concepto* utilizado por Vergnaud en su teoría.

Conceptualización

Puede considerársele como un proceso o actividad mental a través de la cual el ser humano es capaz de abstraer y sintetizar información del medio para formarse una idea global sobre la comprensión de una realidad. En otras palabras es formar conceptos o ideas abstractas a partir de la experiencia o comprensión consciente sobre algún tema. Recordando lo comentado acerca de la diferencia entre concepto y definición alguien pudiera preferir de conceptualización la siguiente: conceptualización es la acción o proceso mediante el cual se desarrollan ideas abstractas o conceptos a partir de la experiencia o comprensión consciente, que no es necesariamente verdadera, sobre un tema.

Intentando realizar un acercamiento a la teoría surge la necesidad de esclarecer su origen. Vergnaud parte de la premisa de que todo conocimiento está organizado en *Campos Conceptuales* entendiéndose éstos, como "…el conjunto informar y heterogéneo de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones del pensamiento conectados unos a otros y, probablemente, entrelazados durante el proceso de adquisición…" (Vergnaud Gérard, 1990, p. 40). Vergnaud no desconoce el legado de Vygotsky y esto se reconoce en "…la importancia atribuida a la interacción social, al lenguaje y a la simbolización en el progresivo dominio de un campo conceptual por los alumnos…" (Moreira Marco, 2002, p. 2). De igual forma la teoría desarrollada por Piaget tiene gran influencia en Vergnaud pues un aporte de gran importancia de éste fue el de los *esquemas*. Vale agregar que esta teoría pretende servir de base para estudiar el desarrollo y aprendizaje de competencias complejas, particularmente las que guardan relación con las ciencias y las técnicas.

La teoría de los Campos Conceptuales, cuya definición fue dada en el párrafo anterior, se apoya en los conceptos clave: *Esquema (heredado de Piaget), Situación* e *Invariante Operatorio* y por supuesto su propia idea de *Concepto.* Sin embargo, Vergnaud también considera que el conjunto de situaciones, consideradas en su definición de Campo Conceptual, requieren del dominio de varios conceptos de naturaleza distinta. Por ejemplo, en el caso de las situaciones que constituyen el Campo Conceptual de las estructuras multiplicativa hay varios conceptos matemáticos involucrados tales como el de función lineal y no lineal, espacio vectorial, fracción, razón, entre otros. Es oportuno aclarar los conceptos clave antes mencionados.

Concepto

para Vergnaud (1990) un concepto no puede verse reducido a su definición y lo considera una estructura conformada por tres conjuntos: C={S, I, R} en la cual S representa un conjunto de situaciones que dan sentido al concepto, I es un conjunto de invariantes (objetos, propiedades y relaciones) sobre las que reposa la operacionalidad del concepto y R contiene las representaciones simbólicas (gráficas, lenguaje natural, sentencias formales, etc.) que se pueden emplear para indicar y representar dichos invariantes y a su vez representar las situaciones y procedimientos para enfrentarlas. Una forma más concreta de comprender esto es la siguiente: (a) S, que es el primer conjunto, el de situaciones, funge como *referente* del concepto. (b) I, *invariantes operatorios* es el significado del concepto y R, de las representaciones simbólicas, es el *significante*.

Esquema

Tomando en consideración la frase de Vergnaud citada al comienzo del desarrollo de esta teoría "el conocimiento es racional operatorio o no es tal conocimiento" es interesante analizar el funcionamiento de un esquema ante situaciones distintas. Considérense las situaciones siguientes presentadas por Vergnaud:

1) Un tipo de situación para la cual el sujeto cuenta con una serie de competencias necesarias para el tratamiento de tal situación.

2) Un tipo de situación para la cual el sujeto no cuenta con las competencias necesarias y se ve obligado a dedicar un tiempo para reflexionar, explorar, enfrentarse a dudas, intentos y reintentos que terminan conduciéndolo al éxito, o al fracaso.

El concepto de "esquema" no funciona igual en ambas situaciones. En la primera se observarán conductas automatizadas, organizadas por un esquema casi único, premeditado. En el segundo caso se notará como se probará con uno u otro esquema sin tener la certeza de cual funcionará, lo que obliga a reconsiderarlos, combinarlos, es decir, acomodarlos y recombinarlos hasta conseguir la solución buscada. Este proceso conducirá, necesariamente a descubrimientos, aunque no siempre ocurrirán.

Lo anterior permite redefinir *esquema* como la organización invariante de la conducta para una clase dada de situaciones. Por ello es en los esquemas donde se debe indagar los conocimientos en acción, en vivo, del sujeto, en otras palabras se deben descubrir los elementos cognitivos que hacen posible a la acción del sujeto ser operatoria. Imagine, a manera de ejemplo, a un sujeto intentando realizar una DM para la cual no posee las competencias necesarias. Si se considera un método de demostración como un esquema es posible que éste cambie de un método a otro al no conseguir respuestas, hasta llegar, posiblemente, a descubrir las relaciones y los conceptos necesarios que le conducen a la solución de tal problema.

Situación

Vergnaud no considera el término "situación" como situación didáctica sino como tarea, y a toda situación compleja como una combinación de tareas que para su estudio es necesario conocer sus naturalezas y dificultades propias. Y aclara que tales dificultades no se deben ni a la suma y al producto de las diferentes subtareas. Como psicólogo que es respalda el concepto de situación dado por los psicólogos que aseguran que los procesos cognitivos y las respuestas del sujeto son función de las situaciones con las cuales es confrontado, esto según el autor se asemeja a la teoría cognitiva del estímulo-respuesta. Como se dijo antes, cuando se presentó la definición de concepto dada por Vergnaud, las situaciones son las que dan sentido al concepto.

La idea de campo conceptual motivó a la revisión del concepto de concepto presentado por Vergnaud como una estructura conformada por tres conjuntos S, I, R formados respectivamente por referentes, significados y significantes pero como las situaciones son las que dan sentido al concepto se llegó al concepto de situación y de éste al de esquema pues son los esquemas evocados por el sujeto los que dan sentido a la situación dada. Ahora el concepto de esquema nos envía al concepto de invariantes operatorios.

Invariantes operatorios

Según lo antes revisado son los esquemas los protagonistas de la acción que se produce cuando el sujeto se enfrenta a situaciones específicas. Tales acciones están regidas por reglas o anticipaciones que a su vez suscitan nuevas acciones en procura de lograr algún objetivo, constituidos de conceptos-en-acción, teoremas-en-acción, conocimientos-en-acción e inferencias, es decir de invariantes operatorias. Según Vergnaud (1990) estos invariantes operatorios de un esquema se muestran en tres tipos lógicos:

1. *Invariantes del tipo "proposiciones"* susceptibles de ser verdaderos o falsos, las teorías –en-acto son invariantes de este tipo.

Por ejemplo: entre 5 y 7 años, los niños descubren que no es necesario contar el todo para encontrar el cardinal de $A \cup B$ si ya se ha contado A y B. Se puede expresar este conocimiento por un teorema-en-acto: $\text{Card}\ (A \cup B) = \text{card}\ (A) + \text{Card}\ (B)$ siempre que $(A \cap B) = \emptyset$.

La ausencia de cuantificador deja entender que este teorema no tiene una validez universal para los niños, sino un alcance solamente local, para pequeñas colecciones.

2. *Invariantes del tipo "función proposicional"* éstos no son susceptibles de ser verdaderos o falsos, sin embargo, son piezas indispensables para la construcción de proposiciones. Por ejemplo, los conceptos de cardinal y de colección, los de estado inicial, transformación y de relación cuantificada, son indispensables para la conceptualización de las estructuras aditivas. Estos invariantes no son proposiciones.

3. *Invariantes de tipo "argumento"*. En matemáticas, los argumentos pueden ser objetos materiales: el auto está delante del camión, pueden ser personajes: María es más delgada que Juan, pueden ser relaciones: "mayor que" es una relación de orden e inclusive proposiciones: 9 divide a 36 si y sólo si 36 es múltiplo de 9. Los invariantes operatorios juegan un papel importante en la conceptualización pero no lo son todo.

Es importante tener presente que el papel que juegan los significantes en el pensamiento hacen considerar las funciones del lenguaje así como de los demás significantes pues el lenguaje favorece la designación e identificación de los invariantes, bien sean objetos, propiedades, relaciones o teoremas. El lenguaje permite la comunicación y la representación ayudando al pensamiento a descubrir las relaciones y a prever las acciones a realizar.

En conclusión la teoría de los campos conceptuales presentado por Vergnaud con sus distintos componentes nos muestra la conceptualización como columna vertebral en la difícil tarea de la adquisición de conocimientos. Para el autor de esta investigación en lo concerniente al papel que juega el dominio del campo conceptual puede no resultar de tal complejidad si se realizan transformaciones didácticas que favorezcan la no fácil tarea de su comprensión.

Teoría de la Transposición Didáctica de Yves Chevallard

Según Gómez (2005) muchos investigadores han estado de acuerdo en reconocer a Michel (1975) como el padre del concepto de Transposición Didáctica quien en 1974 tuvo por objeto de estudio, en su tesis doctoral en Sociología, la distribución temporal de las actividades de los estudiantes y en el capítulo III de su trabajo define la didáctica como "la transmisión de aquellos que saben a aquellos que no saben. De aquellos que han aprendido a aquellos que aprenden" (1975, p. 135).

Más adelante, Yves Chevallard retoma por su cuenta la idea de transposición didáctica, en su obra, editada por primera vez en 1985 y que lleva ese mismo nombre. Seguidamente dicho autor desarrolla una aproximación antropológica de los saberes como una ampliación a esta problemática inicial considerando algunas críticas a las que fue sometida la transposición didáctica.

Chevallard afirma que el sistema didáctico está conformado por una triada, docente, alumno y saber. En dicho sistema se presta más atención al docente y al alumno pero muy poco al saber que se enseña. Sin embargo, el contenido que se transmite es de hecho una selección del conocimiento científico.

En el proceso el conocimiento sabio es transformado por los especialistas responsables de producir los diseños curriculares, los cuales determinan los contenidos de conocimiento matemático a enseñar en el sistema educativo. De igual manera los autores de libros se guían por el diseño curricular para determinar, de acuerdo a su óptica, los contenidos que consideran adecuado para sus libros de texto y otros materiales reorganizando de alguna manera el conocimiento a enseñar. Los profesores ponen también su granito de arena contribuyendo en la selección del conocimiento a enseñar a través de los manuales institucionales, libros y materiales que elegimos.

Pero de qué se trata todo eso del *saber sabio*, *saber a enseñar*. Qué es lo que según el sistema didáctica se da el nombre de *saber.* Chevallard considera que todo contenido que ha sido designado como saber a enseñar sufre una serie de transformaciones adaptativas que supuestamente lo convertirán en apto para ser un objeto de enseñanza. Precisamente a ese trabajo que permite transformar un objeto del saber a enseñar en un objeto de enseñanza es llamado *Transposición didáctica.* La transformación de un contenido específico del saber en una versión didáctica de ese objeto de saber se denomina, más precisamente, *transposición didáctica stricto sensu (en sentido estricto).* Pero el estudio científico de la transposición didáctica supone tener presente la *transposición didáctica sensu lato* (sentido amplio) dado por el esquema: Objeto de saber - Objeto a enseñar - Objeto de enseñanza

En este esquema el primer eslabón marca el paso de lo implícito a lo explícito, de la práctica a la teoría, de lo pre-construido a lo construido. Otro aspecto fundamental es que el proceso de transposición didáctica no se da de manera arbitraria, existe por lo tanto una *Mediación* la cual presenta al menos dos niveles:

1. Entre el conocimiento científico (conocimiento sabio) y el conocimiento a enseñar.
2. Entre el conocimiento a enseñar y el efectivamente enseñado.

Un aspecto al que se deberá prestar especial atención es que, según Chevallard, existen ciertos niveles de explicitación en el discurso didáctico como los mostrados a continuación:

1. *Nociones protomatemáticas*: son aquellas propiedades empleadas en la práctica para resolver determinados problemas pero que no son reconocidas como objetos de estudio ni tampoco como instrumentos de utilidad para estudiar otros objetos. Un ejemplo de ello es la noción de simplicidad o patrón que aparece en algunas tareas algebraicas como la factorización o simplificación de expresiones algebraicas.
2. *Nociones paramatemáticas*: son aquellas utilizadas conscientemente como herramientas para describir otros objetos matemáticos pero no se les considera como objetos de estudio por sí mismas por lo que no se les considera objetos de evaluación directa. Presenta como ejemplo la demostración pues se pide al alumno demostrar aunque ésta no haya sido considerada como objeto de enseñanza. En otras palabras son nociones-herramientas no enseñables. Es importante agregar que actualmente, según Chevallard, la noción demostración es considera un objeto matemático en lógica matemática, por lo que debe remitirse a una práctica precisa de enseñanza, es decir, nivel en el currículo, sector de las matemáticas, etc.
3. *Nociones matemáticas*: son consideradas como objetos de los conocimientos construidos, susceptibles de ser enseñados y utilizables en aplicaciones prácticas.

Es opinión de quien realiza esta investigación que considerar la demostración como una noción paramatemática, no enseñable, ni evaluable, sugiere una revisión de este objeto de estudio y de su presencia en el currículo, pues en los planes de estudio, al menos en el de la Universidad Nacional Abierta, aparece como un elemento fundamental en el desarrollo de la Teoría Matemática, así como eje central en la evaluación, al menos en asignaturas como álgebra abstracta. Lo que no se puede negar es que no se presenta en el desarrollo del campo conceptual ningún elemento didáctico que favorezca su aprendizaje. Más adelante, en la sección V se presentará una concepción completa acerca de este objeto matemático que permitirá aclarar su realidad como elemento clave en la formación del futuro licenciado en matemática. De acuerdo a lo expuesto antes no es posible aplicar la transposición didáctica a la noción de demostración sin referirla al campo de la lógica matemática. Además considera Chevallard a las nociones paramatemáticas como objetos del saber que deben ser aprendidos mas no enseñados, un ejemplo de éstas son la factorización, la simplificación y naturalmente la demostración.

A pesar de la postura asumida por Chevallard vale mencionar un artículo presentado por Radford (1994) que lleva por título "La enseñanza de la demostración: aspectos teóricos prácticos". Por su puesto esta visión obligaría a ubicarse en el contexto de la lógica matemática.

Para finalizar esta idea se puede agregar tomando en consideración lo mencionado respecto a las nociones matemáticas, paramatemáticas y protomatemáticas que "existen saberes (en el sentido amplio: saberes y procedimientos) que son aprendidos sin ser nunca específicamente enseñados (si se define el acto de enseñanza como comprensión reflexiva de sus fines y la explicitación de su intención didáctica)" (Chevallard Yves, 2005, p.67)

Antes de dejar atrás esta teoría, al menos por el momento, es un compromiso considerar algunas críticas realizadas a la misma. Según Petitjean (1998) citado por Gómez M. (2005) en su artículo "Transposición Didáctica: Historia de un concepto" sus críticas se refieren a la cuestión de los *saberes* pues de acuerdo a didactas de otras disciplinas distintas a las matemáticas existen saberes relacionados especialmente con las prácticas sociales, incluso con las prácticas sociales del lenguaje que no pertenecen necesariamente al saber académico elaborado por la comunidad científica. Es decir, lo que se cuestiona es que el saber *sabio* no sería la última referencia del saber a enseñar. Por otro lado, según. Caillot (1996) es Chevallard quien con su concepción general del saber sabio deja sobrentender dos cosas, por un lado la existencia de un saber y por otro que éste es único, lo que reduce las perspectivas para campos diferentes al de las matemáticas.

Según Halte (1998), también citado por Miguel Ángel Gómez Mendoza:

> que se quiera o no (…) el término mismo de 'transposición' tiene la idea que se toma de aquí para pasar allá, sacando o arrancando (recontextualización) el saber de su contexto, se cambia el sentido y el valor del saber. La teoría de la transposición confirma, esto, se agrava esta impresión: planteando que el saber realmente enseñado no es el saber sabio de partida, peor, no puede ser, ello da, el desagradable sentimiento de una deformación, de degradación ineluctable, cuya enseñanza sería la victima inconsciente, porque el saber toma también en herramientas-instrucciones oficiales, manuales, documentos de formación (…) basadas ya sobre la transposición, y ésta aparece como la responsable de todo el proceso, porque, en últimas en el fin de la cadena, el alumno participa necesariamente en la transposición. (halté, 1998, p. 173)

De acuerdo a las apreciaciones de los autores de estas críticas ponen de manifiesto que la teoría de la transposición didáctica es válida y potente para las matemáticas origen de su nacimiento. De igual forma es válida en disciplinas "cercanas" a ésta como la física, al contrario de otras disciplinas como la química, las lenguas vivas e inclusive para el francés las cuales no pueden ser consideradas por el hecho de sus finalidades muy diferentes.

Psicología Cognitiva

Analizando con algo de profundidad el objeto de estudio que es foco de interés en esta investigación es obligante echar mano a las bondades que pudiera ofrecer la psicología cognitiva. De la cual se acepta la definición siguiente: "Psicología cognitiva es el análisis científico de los procesos mentales y estructuras de memoria humanos con el fin de comprender la conducta humana." (Mayer E. Richard, 1980, p. 17). A manera comprender mejor esta definición se debe conocer que el término *análisis científico* alude al "cómo" de la psicología cognitiva e implica que sólo puede utilizar los métodos de la ciencia. En cuanto al "proceso y estructuras mentales" se refiere al "que" de la psicología cognitiva y su objeto de estudio es la actividad mental humana, más específicamente intenta saber lo que ocurre dentro de la cabeza humana cuando se enfrenta a una tarea determinada. Finalmente el término “comprender la conducta humana” se refiere al “por qué” de la psicología cognitiva. Un aspecto de interés en esta investigación

Realmente se puede hablar de tres psicologías o enfoques a saber: el enfoque conductista representado por Skinner, el enfoque psicoanalítico representado por Freud y el enfoque cognitivo de Neisser el cual es utilizado en la presente investigación.

La psicología cognitiva nace a mediados del siglo pasado reconociéndose como su padre al psicólogo, iniciado como psicólogo Gestalista, alemán Ulric Gustav Neisser el cual muere en 2012 en Nueva York. Tal alumbramiento es favorecido por el invento del ordenador, realizado en la década de los cuarenta por Alan Turing, descifrador inglés de los códigos alemanes durante la segunda guerra mundial. Neisser considera al cerebro como un sistema que procesaba información y que podía describirse en términos computacionales. Con esto se aleja del empirismo de Freud y de sus seguidores que empleaban la introspección como herramienta fundamental para entender los procesos mentales. Más tarde el propio Neisser critica su propio trabajo argumentando que la psicología cognitiva lo había sumergido tanto en el laboratorio que había olvidado la única realidad existente que era la del mundo exterior. Ante la comparación de la mente humana con el ordenador este enfoque se presenta incompleto al no considerar la parte afectiva del ser humano.

La psicología cognitiva, según Mayer (1980) cuenta con una serie de instrumentos que pudieran facilitar el estudio de los procesos mentales, algunos de los considerados por este autor son: 1. Análisis del sistema de procesamiento de información, 2. Análisis de procesos cognitivos, 3. Análisis de estructuras cognitivas y 4. Análisis de estrategias.

1. Análisis del sistema de procesamiento de información: Del acto que involucra la DM, particularmente en álgebra abstracta, según la óptica de quien escribe, es de interés conocer acerca del modo cómo quien lo enfrenta procesa la información que recibe *explícita* o *implícitamente*, sobre todo si se considera a dicho acto como un problema. Tal procesamiento se da a nivel del cerebro y naturalmente no es fácil visualizar cómo ocurre y por tanto resulta imperativo indagar este aspecto que

algunos autores, tales como Flavell, lo presentan como un enfoque, más específicamente *enfoque del procesamiento de la información* como elemento del desarrollo cognitivo.

Este instrumento, considerado ya como un enfoque se apoya en la idea de que los humanos somos procesadores de información, se supone que la información ingresa a través de nuestros sentidos; gracias a una operación en nuestra mente que modifica esta información, luego nuestro cerebro aplica una nueva operación que vuelve a modificarla; y así sucesivamente hasta llegar a un resultado disponible para ser almacenado en la memoria o para generar una conducta específica. Pero antes de continuar con los instrumentos se presenta un breve recorrido por ese elemento esencial manejado aquí como lo es la información.

¿Pero cuáles son los orígenes de eso que se ha dado por llamar información? Un breve recorrido por la historia de la información ubica sus orígenes en la prehistoria del ser humano, es decir, en las comunidades primitivas pues se debe considerar los gestos más simples de comunicación, aquella que la caracteriza como la transmisión de información entre los seres humanos. Para Cortez (2003), la articulación de los sonidos dio origen al surgimiento de la palabra y ésta generó el lenguaje. De este modo se crea una forma de comunicación que permaneció por miles de años siendo el medio fundamental para transmitir la información: La oralidad. Más adelante en la era esclavista se establece una nueva forma de comunicación: La escrita, debido a la necesidad de preservar la información en el tiempo y la de llevarla a grandes distancias.

Un poco más adelante, en el siglo V hace su aparición el libro manuscrito con la circulación del libro de Grecia, aparecen así librerías y talleres cuyos dueños vendían, confeccionaban e importaban manuscritos a otros países. Ya para finales del siglo XVI, en Europa, donde había prosperado la artesanía de la imprenta surgen los primeros intentos de publicaciones periódicas. Culminando el siglo XVIII surgen las revistas científicas dirigidas a un público más especializado. La invención de la máquina de vapor y la aparición del ferrocarril impulsó el desarrollo de la comunicación y con ello la expansión de la información. Ya terminando el siglo XIX, con el teléfono inventado por Bell (aunque el 11 de Junio de 2002 el Congreso de los Estados Unidos aprobó la resolución 269 en la que se reconocía que el inventor del teléfono fue Antonio Meucci, quien lo llamó teletrófono, y no Bell) se posibilitó la transmisión de sonido directo permitiendo a cada ser humano comunicarse con cualquier individuo a cualquier distancia.

De igual forma el telégrafo, la radio y la televisión se extendieron por todo el mundo casi de la mano con la palabra impresa ampliando significativamente la noción de comunicación. En 1946 hace su aparición la primera computadora y con la aparición, en la década de los 70, de los microprocesadores se desmonta el monopolio de la información y surge la llamada *era de la información* casi inmediatamente a finales de los 80 y principio de los 90 la conectividad y las redes computacionales irrumpen impetuosamente en el escenario informacional.

Según Siegler (1983b) citado por Flavell, en la actualidad se puede considerar "*el enfoque del procesamiento de la información como la principal estrategia para el estudio del desarrollo cognitivo"* p.129. De acuerdo a este enfoque la mente humana es considerada como un sistema cognitivo complejo comparable de alguna forma con un computador digital pues al igual que el computador la mente humana procesa información que proviene del entorno o que se encuentra almacenada en la memoria utilizando diversas formas: codificación, recodificación, o decodificación comparándola o combinándola con otra información guardada en la memoria, quitándola o poniéndola en el foco de atención o de la conciencia.

Considera, además, este autor, que la información manipulada por estas vías es de distintos tipos y es organizada en unidades de diferentes tamaños y niveles de complejidad o abstracción. Es también importante conocer que parte de la información que se procesa es de naturaleza *declarativa* referida al conocimiento del significado de las palabras, hechos etc. La otra parte es más del tipo *procedural* que tiene que ver con el conocimiento acerca de cómo hacer diversas cosas. Con respecto a los tamaños y niveles de las unidades de información algunas son pequeñas y elementales como por ejemplo un rasgo diferencial codificado perceptivamente que ayuda al individuo a reconocer un estímulo como una letra determinada del alfabeto en lugar de otra. Además de las unidades también se encuentran los compuestos constituidos por unidades elementales y niveles de abstracción superiores como los esquemas, guiones etc. Así como los planes, estrategias y reglas empleadas en el pensamiento y la resolución de problemas.

De lo anterior se infiere que una situación de procesamiento de información puede significar recuperar o reunir un plan o estrategia complejos para resolver un problema, intentar ejecutar dicho plan o estrategia, revisar si resulta inadecuado, etc. Hay otras características del enfoque del procesamiento de la información que lo hacen merecedor de atención, al menos para quien realiza esta investigación, en primer lugar el hecho de proporcionar una comprensión explícita y detallada de qué *hace* realmente el sistema cognitivo del sujeto cuando se enfrenta a alguna tarea o problema, en este caso una demostración, aquí y ahora. En segundo lugar trata de responder preguntas tales como ¿qué hace el sistema en primer lugar, al inicio del episodio del procesamiento de la información? ¿Qué hace en segundo lugar, y en tercero? ¿Algunos de estos pasos del procesamiento se realizan de forma simultánea (procesamiento en paralelo) en lugar de sucesiva (procesamiento en serie). Y quedan muchas otras interrogantes, por ejemplo, ¿A dónde va en primer lugar la información y qué le sucede allí? ¿Cuáles son su destino y aventura siguientes?

Lo esperado del enfoque de procesamiento de la información es lograr un modelo del proceso cognitivo en tiempo real, o sea explícito, especificado de forma tan precisa que sea posible su utilización realmente con éxito tal como un programa que funcione en el computador. Quizás sería mucho esperar pero debería tal modelo poder hacer predicciones específicas sobre cómo se debería comportar el sujeto bajo ciertas condiciones o restricciones específicas de la tarea, y en respuesta a estímulos específicos. A pesar de que este enfoque presentado por Siegler va dirigido principalmente a la tercera infancia y la adolescencia, no deja de ser interesante para los fines de esta investigación pues todo lo que se pueda conocer sobre el procesamiento de la información es vital cuando se pretende conocer las capacidades de un sujeto al momento de hacerle frente a la realización de una DM.

Es de notar que la presente investigación sigue un enfoque cognitivo, lo cual trae a colación el considerar los conceptos fundamentales sobre los cuales se ha construido la psicología cognitiva. Tales conceptos son el de *representación* y el de procesamiento. Particularmente lo concerniente a la DM puede considerarse como un fenómeno cognitivo el cual se describe en términos de operaciones (procesamientos) que se realizan sobre representaciones mentales que se localizan entre los estímulos y respuestas observables. Desde esta perspectiva cognitiva se asume que la información es recogida del medio, representada internamente y manipulada para transformarla en representaciones.

¿Pero qué puede entenderse por *representación*? "la representación es, en su sentido más simple, información almacenada por un sistema mental y dispuesta para ser utilizada por ese sistema" (Mandler, J. M. 1998, p.247). Según esta misma autora *representación* y conocimiento se confunden en su significado haciendo énfasis en el término *representación* más como el formato concreto en el que se almacena el conocimiento. Por otro lado, Martí y Pozo (2000) consideran que sólo existe conocimiento cuando se tiene una actitud proposicional respecto a la representación, en otras palabras, cuando se pueda acceder de manera consciente a ésta. Quien escribe asume este último criterio. Pero es oportuno aclarar lo del *conocimiento* que de acuerdo a Mayor y González (1995) consideran que es:

> …el conjunto de representaciones de la realidad que tiene un sujeto, almacenadas en la memoria a través de diferentes sistemas, códigos o formatos de representación y es adquirido, manipulado y utilizado para diferentes fines por el entero sistema cognitivo que incluye, además del subsistema de la memoria, otros subsistemas que procesan, transforman, combinan y construyen esas representaciones del conocimiento (Mayor, 1995: 13).

Estos autores reconocen tres tipos de conocimiento: el conocimiento científico o disciplinar, que puede considerarse como un conjunto de información en un área más o menos extensa. El conocimiento representacional, que viene a ser un conjunto de representaciones de la realidad guardadas en la memoria y el conocimiento construido, o sea compartido por diversos sujetos especialistas en un campo determinado o por la mayoría de los componentes de una comunidad, por lo que el conocimiento es producto de una construcción social. Siendo el representacional el conocimiento que se ha convertid en eje central de la ciencia cognitiva.

Continuando con Martí y Pozo (2000) estos autores consideran que para que exista representación es natural afirmar, que se debe haber aplicado sobre la información recabada un primer procesamiento, una transformación. La información representada y manipulada por el sistema cognitivo puede presentar una variedad de características:

Puede adoptar diversos tipos o formatos. La psicología cognitiva, da la impresión, haberse movido mediante contraposiciones entre tipos de representación (o entre tipos de procesamiento), determinando diferencias entre lo proposicional y la imagen, entre lo declarativo y lo procedimental, lo implícito y lo explícito, etc.

En cuanto a las representaciones (el conocimiento) presentan niveles dispares de abstracción y organización desde unidades elementales relacionadas con la entrada perceptiva (se pueden mencionar, a manera de ejemplo, la codificación de elementos perceptivos que contribuyen al reconocimiento de letras) hasta otras organizadas como totalidades y con un alto nivel de elaboración (los esquemas de conocimiento acerca de una determinada situación, las estrategias, conceptos, estrategias para resolver determinados problemas, pueden ser considerados como ejemplos).

Lo antes mencionado refleja, desde un punto de vista cognitivo clásico como trabaja o procesa la mente de diversas maneras y con diversos materiales para lograr en diferentes casos un rendimiento lo más sofisticado o elevado posible y lo más adaptado posible a los requerimientos de la tarea.

Es oportuno tratar lo referente a los distintos tipos de representación. De acuerdo con lo presentado por Martí y Pozo (2000) así como por Mandler algunas alternativas que permiten describir el enfoque cognitivo son: (a) El conocimiento proposicional y el conocimiento en imágenes. (b) El conocimiento procedimental y el conocimiento declarativo y (c) El conocimiento explícito y el conocimiento implícito.

Con respecto a la primera de las alternativas han sido las proposiciones el formato representacional tradicional 'por defecto' del sistema cognitivo. Éstas son representaciones abstractas que reflejan conceptos y relaciones entre conceptos.

Además, se representan formalmente como redes con nodos (conceptos) e interrelacionados y organizados.

En cuanto a las imágenes, estas pudieran emplearse como una forma de representación de una relación espacial entre objetos, sin embargo, lo que se almacena en la memoria a largo plazo no es una imagen sino una descripción proposicional de los objetos y de sus relaciones. Otras características de los sistemas de imágenes, en contraste con las representaciones proposicionales son, entre otras, presentar similitud funcional y estructural con la percepción. Se considera a las imágenes como réplicas de percepciones mientras que las representaciones proposicionales guardan una relación más estrecha con los códigos lingüísticos. Las imágenes suelen ser procesadas en paralelo mientras que las proposiciones se procesan en serie. Las imágenes mentales tienen un carácter dinámico, es decir, pueden modificarse o transformarse rápidamente, mientras que las proposiciones, por el contrario son más rígidas.

En lo concerniente a la segunda alternativa, según Anderson (1995), la referida al conocimiento procedimental y al declarativo la diferencia esencial se encuentra en el *saber cómo* y el *saber qué.* O más específicamente, las representaciones declarativas guardan conocimientos descriptivos del entorno (*saber qué*), las procedimentales almacenan conocimientos referidos a secuencias de acciones, (*saber cómo)* habilidades, etc. Para luego actuar sobre este entorno. El conocimiento procedimental es inaccesible a la conciencia y muy difícil de ser representado mediante el lenguaje. Por lo general su aprendizaje es lento y sólo se produce a partir del ensayo repetitivo, naturalmente, según quien escribe, es una habilidad y requiere entrenamiento por lo que difícilmente explicitable, verbalizable.

Por otro lado el conocimiento declarativo es susceptible de ser representado mediante proposiciones verbales o mediante imágenes mentales accesible a la conciencia. A diferencia del procedimental podemos aprenderlo, es decir, almacenarlo y reproducirlo.

Para finalizar, la tercera alternativa sobre el contraste entre el conocimiento explícito y el implícito, se tiene que sus diferencias se localizan, más que en formato, en el grado de accesibilidad, que tiene la información representada, a la conciencia. Por su parte Mandler sostiene que sus diferencias tienen que ver más con el tipo de procesamiento y por ello es más común encontrarse en la literatura con el contraste entre procesamiento explícito y procesamiento implícito. Otra diferencia importante entre lo explícito y lo implícito es la intervención en menor o mayor grado de los recursos atencionales y de la conciencia. Es el conocimiento implícito menos elaborado, requiriendo de muy poca atención por ser producto de un procesamiento automático.

Antes de cerrar este apartado es interesante e importante ahondar un poco más en ese término que está involucrado íntimamente con esta investigación como lo es el conocimiento y que de acuerdo a Palmer y Kimchi (1986), Rumelhart y Norman (1988) y Mayor y moñivas (1992) existen cinco sistemas para representar el conocimiento: (a) El sistema proposicional, cuya unidad básica es la proposición, es decir, un enunciado que se puede evaluar como verdadero o falso. (b) El sistema analógico, constituido fundamentalmente por la imagen mental y (c) El sistema procedimental, que consiste en un conjunto de procesos cognitivos para llevar a cabo alguna acción y que se caracteriza por tener estructura jerárquica; se ejecuta en cascada, es decir, algunos de los pasos producen resultados intermedios necesarios para pasos posteriores; la memoria activa controla, al mismo tiempo, los datos exteriores y los procesos de la memoria a largo plazo y finalmente si el criterio de ejecución es el correcto finalización de la tarea.

Las revisiones realizadas hasta este punto muestran, aunque brevemente, la importancia del procesamiento de la información y la categorización de ésta cuando se estudian comportamientos inherentes al proceso que involucra una demostración. Es una apreciación muy personal de quien escribe, basada en su experiencia a lo largo de más de veinte años, que cuando un individuo se enfrenta a la realización de una demostración, al menos en álgebra abstracta, la forma como procesa la información es de importancia capital, sin dejar de reconocer que tal proceso es altamente complejo y exige gran dominio del campo conceptual y gran capacidad para descubrir relaciones, elementos estos que se vinculan con su desarrollo cognitivo.

Continuando con los instrumentos empleados por la psicología cognitiva, tratado antes, se presenta el segundo de éstos:

2. Análisis de los procesos cognitivos: es otro instrumento utilizado para representar lo que ocurre en la cabeza de alguien cuando ejecuta una tarea determinada. El uso de este instrumento conste en elegir una tarea intelectual, observar como una persona resuelva la tarea y hacerle preguntas sobre lo que hace analizando luego el proceso en pequeñas partes consistentes en procesos Manipulación de cosas) y toma de decisiones (comprobación de algo). De este modo el modelo procesal de la tarea podrá escribirse en forma de programa de ordenador o como un diagrama de flujo o en cualquiera otra forma.

El cerebro humano funciona tanto de una forma lineal como asociativa, compara, integra y sintetiza los datos. En este esquema, tipo mapa mental, la asociación representa un papel predominante en la mayoría de las funciones mentales. Las palabras o ideas poseen numerosas conexiones que conectan a otras ideas y conceptos, por ello el esquema de tipo mapa mental representan un método efectivo para tomar notas y emplearlas para generar nuevas ideas por asociación. Entre los elementos involucrados está el pensamiento considerado como un proceso a través del cual se planifican las acciones que ayudan a superar obstáculos que puedan interponerse entre la información que se tiene y el objetivo que se persigue lograr. El saber reconocer cuándo y cómo aplicar estos procesos intelectuales es fundamental si se pretende pensar con efectividad, resolver problemas y tener éxito en lo que emprendemos.

Procesos complejos, inconscientes, rápidos y fugaces intervienen en el pensamiento el cual forma parte del concepto de cognición, el cual se puede entender como un proceso de conocimiento que comprende los procesos de observación, definición, memorización, análisis, síntesis, comparación, clasificación, inferencia y seguir instrucciones.

3. Análisis de estructuras cognitivas: con este instrumento se pretende la construcción de un modelo procesal con la finalidad de presentar el conocimiento que un individuo tiene sobre procedimientos, es decir, el conocimiento que tiene una

persona sobre cómo hacer algo, por ejemplo, realizar una determinada demostración. También se puede representar el conocimiento verbal sobre algún tema en concreto que se le puede suministrar y pedirle, por ejemplo, recordarlo. Lo siguiente sería confrontar este modelo estructural con la actuación real del sujeto.

4. Análisis de estrategias: este instrumento permitirá investigar sobre las técnicas que emplean las personas para controlar los distintos fragmentos de información que poseen.

Competencias Cognitivas en Educación Universitaria

Tardif (2008) citado por Córdoba define el concepto de competencia como "un saber actuar complejo que se apoya sobre la movilización y la utilización eficaz de una variedad de recursos". Este autor asegura que la idea de *saber actuar* es clave y no debe ser confundida con la de *saber hacer*. Además, el significado de *movilización y utilización de recursos* es fundamental y significa que el profesional debe saber aprovechar y utilizar los recursos disponibles para un fin determinado.

Al inicio del siglo XXI, en el contexto amplio de una profunda reflexión por parte de las sociedades europeas acerca de la educación superior y particularmente en qué medida los sistemas de educación superior forman adecuadamente a los futuros profesionales entregándoles las herramientas necesarias para enfrentar el mundo laboral, se inició el desarrollo del *Proyecto Tuning* como un acuerdo entre las instituciones de educación superior y cuyo nombre original fue *Tuning Educational Structures in Europe*, que se traduce por "Ajuste de las Estructuras Educativas de Europa". El objetivo de este proyecto fue lograr un avance en la convergencia de las universidades europeas en sus planes formativos y el currículo, con la intención de facilitar la inserción laboral de los profesionales europeos y su movilidad dentro del espacio continental. El Proyecto Tuning fue replicado posteriormente para su implementación en los países de América Latina entre los años 2004-2006.

Durante el desarrollo del mencionado proyecto se clasificaron las competencias como *básicas, genéricas y específicas* y mediante un acuerdo entre la autoridades de educación superior se decidió que serían las *competencias genéricas* las que los profesionales deberían poseer, siendo algunas de éstas: (a) capacidad de abstracción, análisis y síntesis; (b) capacidad de aplicar conocimientos en la práctica; (c) capacidad de organizar y planificar el tiempo, entre otras. Entre las competencias genéricas se encuentran las competencias cognitivas que pueden entenderse como las habilidades que las personas deben poseer al desarrollar procedimientos tales como la abstracción, el análisis, la síntesis, la comprensión o evaluación de información de diversos tipos

Algunos Tópicos Importantes

Razonamiento Lógico Matemático

En otro orden de ideas, en el ámbito de la investigación que aquí se realiza son muchos los elementos involucrados y hay uno en particular que es preciso analizar: el razonamiento lógico matemático. Si se asume que la DM como objeto de estudio ha sido considerada, por quien escribe, como la forma de evaluar la comprensión de un desarrollo axiomático, teniendo como base de sustentación la lógica matemática, para así considerarla como una noción matemática, se vuelve imperativo revisar lo concerniente al proceso lógico que involucra su desarrollo por parte del alumno así como de las capacidades individuales necesarias para llevar a cabo con éxito tal tarea.

Es oportuno aclarar que se asume en esta investigación la *conceptualización deductiva* de la DM presentada por Radford (1994) contra las *conceptualizaciones fenomenológica* y *dinámica intuitiva* también presentadas por este autor, por cuanto en álgebra abstracta "el razonamiento rebasa a la figura. La deducción se hace a partir de propiedades, relaciones o ambas, entre objetos explícitamente aceptados como ciertos" (p. 27).

Según Codina y Lupiáñez (1999) en su artículo *El Razonamiento Matemático: Argumentación y Demostración*, "…un razonamiento matemático es un esquema organizado de proposiciones que se orienta hacia un enunciado-objetivo con miras a modificar el valor epistémico, y que por lo tanto, altera el valor de verdad bajo el cumplimiento de ciertas condiciones" (p. 3). También estos autores caracterizan un razonamiento matemático cuando afirman que éste debe:

1. Estar orientado hacia el enunciado-objetivo, es decir, hacia la proposición a justificar.
2. Estar centrado en el valor lógico o epistémico de esta proposición, y no sobre su contenido.

Esta última característica diferencia al razonamiento de la *explicación*, ya que la explicación da una o más razones con la finalidad de hacer comprensible un dato, posee un valor descriptivo pero no epistémico. Aunque el razonamiento también da razones, su papel es fundamentalmente el de comunicar la fuerza del argumento a las afirmaciones que se desean justificar. En cuanto a la DM esta es la única aceptada por los matemáticos. Por su parte Balacheff. (2000) considera que una prueba es una explicación aceptada por una comunidad en un momento dado, y si al enunciado involucrado, se le conoce como verdadero y bien definido entonces a dicha prueba se le llama demostración.

Dos aspectos de indudable importancia para el desarrollo de esta investigación son: la Demostración en Matemática y la Demostración en Álgebra Abstracta.

La Demostración en Matemática

"La única característica que diferencia a la matemática de otras ciencias, desde la filosofía, y de hecho de todas las otras formas de discurso intelectual, es el uso de demostraciones rigurosas" (Krantz Steven, 2007, p.1). Pero es necesario familiarizarse con el concepto de demostración. Bien pudiera aceptarse como una cadena de razonamientos estrechamente unida que sigue reglas lógicas estrictas, que conducirán inevitablemente a una conclusión particular. Es un dispositivo que busca demostrar que algo nuevo por conocer es verdadero, a partir de algo viejo conocido. Esta idea puede despertar la inquietud de dónde comienza esta cadena de razonamientos que pareciera no tener un inicio lo cual genera un problema de fundamento. Pero, para quien escribe, tanto la hipótesis como la tesis son "cosas" conocidas lo que realmente se trata de establecer o descubrir es la relación existente entre ambos entes.

También pudiera interpretarse como un dispositivo retórico para convencer a alguien más de que una declaración matemática es verdadera. Esto da lugar al surgimiento del concepto de derivar un nuevo resultado a partir de un resultado anterior. Se puede decir, de manera muy simple, que demostrar consiste simplemente en la aplicación de elementales reglas de lógica, sin embargo, desde el punto de vista operativo es mucho más complejo. Existen muchas técnicas empleadas desde hace más de dos siglos para llevar a cabo una demostración como por ejemplo: demostración por inducción matemática, por contradicción, por agotamiento, por enumeración, entre muchas otras. Pero en general todos están construidos mediante una simple regla: modus ponendo ponens la cual asegura que si conocemos que A implica B, y si conocemos la certeza de A podemos concluir B. En resumen una demostración es una cadena de pasos unidos por modus ponendo ponens.

Es importante tener presente que la DM presenta característica que varían dependiendo el contexto dentro del cual se encuentran pues una demostración en el área del análisis matemático presenta características algo distintas a una demostración en geometría así como en el área del álgebra abstracta. A propósito de esta peculiaridad sobre la demostración Radford (1994) presenta tres conceptualizaciones que muestran lo en este párrafo. La primera de éstas es la llamada *conceptualización fenomenológica* entendiéndose el término "*fenomenológico"* en su más simple sentido como referente a los fenómenos observados por los sentidos. Radford presenta la siguiente. La segunda es la *conceptualización dinámica intuitiva* y la tercera *conceptualización deductiva*, cuyas características se presentan a continuación:

1. Conceptualización fenomenológica: en ésta el aspecto conceptual está delimitado por el aspecto figurativo donde la figura se reduce a una imagen concreta inmóvil. Esta conceptualización va de la mano con la demostración en geometría.

2. Conceptualización dinámica intuitiva: en este caso el aspecto conceptual se desliga del aspecto figurativo apareciendo las representaciones y la figura adquiere movilidad.

3. Conceptualización deductiva: aquí el razonamiento sobrepasa la figura. Tal deducción se realiza a partir de propiedades, relaciones o de ambas entre objetos explícitamente aceptados como ciertos. Ahora es la demostración en álgebra abstracta la que se identifica con esta conceptualización. El modo como funciona la demostración deductiva en matemática tiene como soporte un riguroso encadenamiento de proposiciones que hay que buscar, establecer o ambas cosas previamente.

En otro orden de ideas, es pertinente realizar un breve análisis acerca de la demostración en lo que concierne a su significado institucional y personal como objeto matemático siguiendo los lineamientos planteados por Godino y Batanero (1994) en su artículo "Significado institucional y personal de los objetos matemáticos" y de Godino y Recio (2001) "Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la Educación Matemática."

Como se ha comentado un poco antes en esta investigación el término *demostración* se ha utilizado con diversos sentidos en diversos contextos. De hecho se lee y oye hablar de términos como tales como *prueba, explicación, argumentación, etc* los cuales fueron aclarados un poco antes en esta misma sección. Y a pesar de que en todos ellos se pone de manifiesto la idea de validar, justificar una afirmación dando razones o argumentos no se pueden negar las diferencias en los tipos de situaciones en donde se emplean. Tales diferencias en las situaciones y prácticas argumentativas muestran sentidos diferentes del concepto de *demostración* o según el modelo ontosemiótico adoptado distintos objetos *demostración.*

Según Wilder (1981), citado por Godino y Recio (2001), si se considera el aspecto cultural no se debe olvidar que el significado de "demostración" puede variar de una cultura a otro e inclusive de una época a otra. Esta relatividad de significados también está presente en diferentes contextos institucionales lo cual es de relevante importancia por sus efectos psicológicos y didácticos en quienes se involucran en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la demostración.

Se Asumirá que el contexto institución representa un punto de vista local sobre una problemática determinada que se caracteriza por la utilización de recursos expresivos e instrumentales propios o por hábitos propios de comportamiento. Por esta razón se intentará hacer notar la diversidad de *demostración* en los contextos instituciones a: lógica y fundamentos matemáticos, matemática profesional, vida cotidiana, ciencias experimentales y enseñanza de las matemáticas elementales.

La noción de *demostración* está estrechamente ligada a la noción de *deducción* y de *sistema axiomático* pues el argumento deductivo es el principal objeto de la lógica formal. Y es que los argumentos deductivos se dan en el seno de un lenguaje simbólico que se construye a partir de una serie de símbolos elementales y de una serie de reglas de formación de fórmulas, expresiones precisas, perfectamente definidas y que parten de dichos símbolos. Este lenguaje formal se puede considerar como la base de un sistema axiomático en el cual se realizan las deducciones.

Lo fundamental de un sistema axiomático es poder contar con un conjunto de afirmaciones cuya veracidad no requiera de ninguna validación y es esta suposición la que recibió más críticas cuando se habla de los fundamentos de la matemática pues es precisamente a partir de estos enunciados que se obtienen todos los demás enunciados que conforman la teoría. Por otro lado la validez de los teoremas tiene por soporte la validez de las reglas lógicas empleadas en el proceso de la demostración. Esto se debe a que el teorema surge como consecuencia lógica y necesaria de las premisas de las cuales parte, Esto sugiere que la posibilidad de realizar demostraciones dependerá de la habilidad para descubrir consecuencias lógicas inherentes a las premisas establecidas.

Pero volviendo sobre el objeto *demostración* en los contextos institucionales se le puede describir sintéticamente como emergente del sistema de *prácticas argumentativas analíticas formales* y sus significados vendrán dados por los rasgos extensionales, intensionales y representacionales descritos.

Continuando con lo concerniente a los sistemas axiomático es interesante aclarar la necesidad de los teoremas matemáticos. Según Wittgenstein (1978) la necesidad lógica de cualquier enunciado siempre será una expresión directa de una convención lingüística. Wittgenstein asegura que un teorema matemático no expresa una propiedad universal e intemporal de ciertas entidades ideales y que más bién se trata de una expresión camuflada de una regla aceptada que indica lo que se debe esperar cuando los procesos de cálculo correspondientes se realizan en forma correcta.

Desde el punto de vista de la *matemática profesional* existe una gran diferencia entre la noción de *demostración* apoyada en la lógica formal y los estudios fundacionales matemáticos y práctica matemática real. Desde esta concepción *demostración* se convierte en una gramática formal, es decir, se convierte en un procedimiento puramente lógico materializable mediante ordenadores. Sin embargo, en opinión de quien escribió esta investigación es la lógica formal y el desarrollo axiomático los elementos que brindan un camino bastante viable a la hora de demostrar.

En el ámbito familiar se acostumbra utilizar una argumentación informal la cual es situacional y que depende del contexto y de la propia situación emocional del sujeto. Cuando un sujeto razona de manera informal en sus inferencias cotidianas toma un importante papel el razonamiento por analogía, pues toda inferencia analógica se sustenta en la similitud de dos o más cosas en uno o más aspectos que le permitirán llegar a concluir sobre la similitud de esas cosas en algún otro aspecto.

En cuanto al significado personal de la demostración matemática se evidenció la enorme dificultad que presentan los estudiantes, en los distintos niveles educativos con la demostración matemática y algo similar ocurre con sus formas específicas de razonamiento. De acuerdo a Harel y Sowder (1996) citados por Godino y Recio (2001) y que han estudiado la dimensión subjetiva o personal de la demostración ésta no es más que el proceso utilizado por un sujeto para eliminar dudas acerca de la verdad de una conjetura. Constituyéndose esto en un esquema individual que dicha persona emplea para persuadir y asegurar algo. En resumen se pueden interpretar estos esquemas como lo que significa demostrar para el sujeto, es decir, el significado personal del objeto demostración tal como lo proponen Godino y Batanero (1994).

Entre los distintos esquemas reconocidos por Harel y Sowder y que representan un estadio cognitivo, una habilidad intelectual en el desarrollo matemático de los estudiantes, distinguen tres categorías principales de esquemas de demostración apoyados en "convicciones externas" (ritual, autoritario y simbólico), empíricos (inductivos y perceptuales) y analíticos (transformacionales y axiomáticos). Además para estos autores la elevada incidencia de estos tres subtipos de esquemas apoyados en "convicciones externas" así como el esquema de demostración empírico-inductivo tiene su explicación en los hábitos escolares en contraste con los tipos de prácticas argumentativas.

Indudablemente que se observan rasgos comunes en los distintos usos del término *demostración* en los distintos contextos institucionales mencionados hasta aquí. Todo esto puede conducir a generalizar el significado de *demostración* con el riesgo de perder la compleja variedad de sentidos que adquiere el concepto de *demostración* para los miembros de tales instituciones.

La Demostración en Álgebra Abstracta

Indudablemente que la estructura subyacente de una demostración determina el esquema o esquemas a seguir (demostraciones por reducción al absurdo, por disyunción de casos, directas, etc.) y la naturaleza compleja del contexto, (análisis matemático, geometría, álgebra, etc.) exigirá menores o mayores recursos cuando se presenta la necesidad de realizar una demostración.

En los inicios del álgebra se observaron indicios de demostraciones relativas al álgebra que por carecer, posiblemente, de ciertos recursos algebraicos se abordaban empleando la herramienta más conocida para la época: la geometría. Un ejemplo de ello es la demostración de la proposición 4 del libro II de los "Elementos" de

Euclides: $(a+b)^2 = a^2 + 2a.b + b^2$ para lo cual se consideró la imagen mostrada en el gráfico 1:

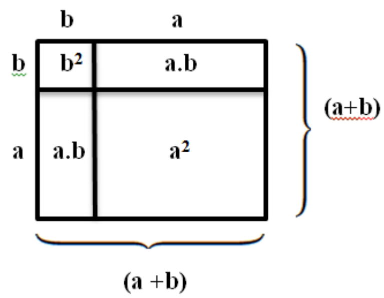


***Gráfico 1.* Demostración gráfica del cuadrado de la suma de dos números reales.** Tomado de **"**Historia del algebra en la educación secundaria: resolución de problemas «histórico»" por Bouzas P., 1996**,** Suma 22. Pp. 83-90.

En el gráfico anterior se evidencia "visualmente" que $(a + b)^2 = a^2 + 2a.b + b^2$ y representa una demostración geométrica de una propiedad del álgebra. Según Dávila (2003) hasta el siglo XVI el álgebra era más de tipo verbal, inclusive tenía más en común con el álgebra de los árabes que con el álgebra moderna simbólica. De hecho en ese tiempo el álgebra estaba bastante conectada con la geometría de manera que para demostrar que algún número era solución de algún problema algebraico se necesitaba una demostración geométrica. Las incógnitas de muchos problemas eran pensados en términos de longitudes de segmentos de recta y por ello el álgebra era considerada como un conjunto de reglas para resolver ecuaciones particulares. Para finales del siglo XVI el álgebra se enriqueció de un mayor simbolismo constituyéndose en una poderosa herramienta.

Retomando la idea planteada en párrafos anteriores acerca de entender la demostración como un dispositivo que busca demostrar que algo nuevo por conocer es verdadero, a partir de algo viejo conocido. Y con el peligro que esto representa para quien realiza demostraciones de involucrase en un retorno infinito buscando el inicio de una cadena de razonamientos que pareciera no existir. Surge con la axiomatización un intento por desprenderse de esta contrariedad, considerado éste, el mayor aporte dado por los griegos a la ciencia en general y que en el caso particular del álgebra abstracta inició la matemática alemana mencionada al comienzo: Emmy

Noether al dotar a esta área del conocimiento de un desarrollo axiomático. La demostración en el álgebra abstracta, debido a su naturaleza, exige mayores competencias que en la geometría y en algunas otras disciplinas, no queriendo decir con ello que no haya dificultades considerables en estas últimas.

La Didáctica de las Matemáticas

Según Contreras (2012) el concepto de didáctica ha evolucionado a través de la historia. Inicialmente es considerada como un arte con lo cual el docente debe ser un artista para modelar artificialmente a los alumnos. En la actualidad el saber didáctico se ha transformado en un saber técnico por su aplicación a otros saberes más fundamentales de gran importancia para otras ciencias, por esta razón la didáctica de la matemática se puede aceptar como un conjunto de conocimientos normativos aunque no explicativos cuyo objetivo principal es el de ofrecer al docente un conjunto de recursos técnicos que le permitan llevar a cabo su labor de mejor manera posible.

Aunque la didáctica hace referencia al aprendizaje y a la enseñanza su significado se ha enfocado específicamente hacia lo matemático, hacia las nociones matemáticas a pesar de que éstas sean consideradas como algo que está totalmente. La incorporación del saber matemático como objeto de estudio de la didáctica de las matemáticas ha inducido una gran cantidad de cambios de importancia y la ampliación de su problemática ha conducido a Chevallard a proponer la didáctica de la matemática como la ciencia que considera *el proceso de estudio* como objeto primario de la investigación didáctica dejando en segundo lugar a los procesos de *enseñanza* y *aprendizaje* como objetos secundarios, pero de igual importancia.

Debido a la necesidad de realizar en esta investigación un análisis didáctico se empleó la teoría planteada por Godino (2002) en su artículo "*Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática"* en la *"Teoría de los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos*" (Godino y Batanero, 1994).

Las ideas básicas de estas teorías según las presenta Chacón (2006) en su trabajo "Análisis del proceso de instrucción del Álgebra abstracta en la Universidad Nacional Abierta, desde una perspectiva semiótica-Didáctica son las siguientes:

1. *Teoría del significado institucional y personal de los objetos matemáticos*: esta teoría plantea dos niveles de significados para los contenidos matemáticos. El primero de ellos institucional, el cual es el asumido por la institución y obtenido mediante la transformación didáctica del saber sabio en saber enseñable. En cuanto al segundo, el personal, es el dado por el estudiante al contenido matemático institucionalmente enseñado. Se emplea la siguiente terminología

Definiciones preliminares básicas

Objetos matemáticos: De acuerdo a Godino (2002), siendo cónsono con el interaccionismo simbólico, se puede considerar como objeto o entidad Matemática "todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a lo cual puede hacerse referencia", cuando se pretende comunicar o aprender matemática. Pueden considerarse entre estos objetos tomando en cuenta las categorías y las funciones específicas de cada categoría los siguientes.

Lenguaje: Términos, notaciones, gráficos, expresiones.

Situaciones: Problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios. Éstas son las que inducen la actividad matemática.

Acciones: Las que realiza el sujeto ante las tareas matemáticas tales como operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos.

Conceptos: Que están dados mediante definiciones o descripciones tales como recta, punto, conmutativo, simétrico, etc.

Propiedades o atributos de los objetos mencionados: Aquellos dados como enunciados o proposiciones como por ejemplo: Si un grupo es cíclico, entonces es abeliano.

Argumentaciones: Que son las razones utilizadas para validar o demostrar las proposiciones bien sean de carácter deductivo o de otro tipo.

Los objetos antes mencionados participan en la actividad matemática y pueden considerarse como formadores primarios de otros objetos matemáticos de mayor complejidad tales como los sistemas conceptuales o campos conceptuales como los llama Vergnaud, teorías, etc. Un elemento de vital importancia que debe agregarse son las relaciones de interdependencia fundamentales en todo desarrollo axiomático.

Estos objetos se pueden clasificar como institucionales y personales. Siendo los primeros los que surgen de un sistema de prácticas asociadas a un campo de problemas matemáticos tales como conceptos, proposiciones, teorías asumidas por alguna institución. Mientras que los segundos provienen de un sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas. Bien pudiera considerarse la demostración matemática dentro de estas dos visiones. Entrando en el tema en profundidad es el momento de revisar:

En cuanto a los significados institucional y personal, el primero puede entenderse como el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas del que procede el objeto institucional. Mientras que el segundo se considera un sistema de prácticas personales de que realiza una persona para resolver el campo de problemas del que proviene el objeto en un momento dado. En resumen se asume que un sujeto ha “comprendido” el significado de un objeto si es capaz identificar sus propiedades, representaciones y relaciones con otros objetos matemáticos y aplicar este conocimiento a una variedad de situaciones dentro de una institución determinada.

2. *Teoría de las funciones semióticas:* Con esta teoría se articulan temas sobre el estudio del ser humano, de su conocimiento y de los procesos que se dan en su mente cuando se ve involucrado en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática desde una perspectiva semiótica. Con tal fin, según Godino (2002) designa los objetos matemáticos usados en las acciones matemáticas como “Entidades” dadas a continuación:

Ostensivas: Entendida como todo tipo de representaciones materiales empleadas en la actividad matemática como expresiones, fenómenos, términos, símbolos, gráficos, etc.

Extensivas: Problemas, fenómenos, tareas, aplicaciones y cualquier situación que conduzca a actividades matemáticas.

Intensivas: Entre las que se mencionan las ideas, las generalizaciones, las abstracciones como conceptos, procedimientos, teorías. Y

Actuativas: Que son las acciones que el sujeto realiza cuando se enfrenta a situaciones o tareas48tales como describir, operar, argumentar, generalizar.

Es importante aclarar que los objetos matemáticos, según las circunstancias contextuales en que intervienen pueden considerarse desde las siguientes dimensiones duales:

1. Personal- institucional: en este caso dependiendo de las circunstancias contextuales una misma expresión puede hacer el papel de objeto personal o institucional. Por ejemplo, la respuesta a una actividad de evaluación, o la realización de una tarea por parte de un estudiante son objetos personales pero si se trata de explicaciones de un profesor en clase, libros de texto, entonces son objetos institucionales.

2. Expresión-Contenido: es decir, Significante-significado: esta es la faceta semiótica en la que cada entidad puede intervenir como medio de expresión (significante) o puede ser el contenido (significado) referido a la expresión. Esta importante distinción expresión-contenido permite tener en cuenta el carácter relacional de la actividad matemática.

3. Elemental y sistémica: Las unidades pueden ser algo unitario o compuesto.

4. Obtensiva o no obtensiva: las entidades pueden ser perceptible o no perceptible.

5. Ejemplar-tipo: que se utiliza para proponer una interpretación lingüística de la distinción concreto-abstracto, ideal en el campo de las matemáticas y aplicable no sólo a objetos conceptuales sino a cualquier tipo de entidad primaria y secundaria y pueden ser llamadas extensivas o intensivas. El siguiente gráfico (Gráfico 2) muestra los componentes y facetas de la cognición matemática.

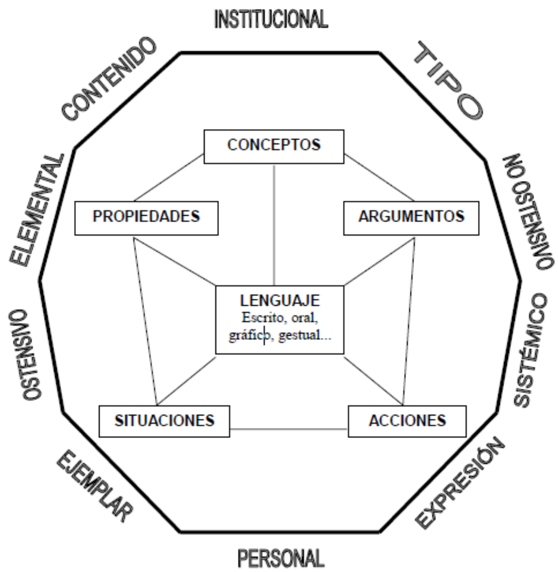


Grafico 2. **Componentes y facetas de la cognición matemática.** Tomado de "Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática" por Godino J., 2002 *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 22, nº 2.3, pp.237-284*.

Funciones semióticas: Se puede entender como una "correspondencia entre conjuntos" que comprende tres componentes:

-Un plano de expresión. Considerado como el objeto inicial, el signo.

-Un plano de contenido: que considera como el objeto final, el significado del signo, es decir, lo representado, lo que se quiere decir.

-Un criterio o regla de correspondencia: que consiste en un código interpretativo que se encarga de regular la correlación entre los planos de expresión y contenido.

El papel de expresión o de contenido en las funciones semióticas puede ser desempeñado por las entidades primarias Ostensivas, extensivas, intensivas y Actuativas dando origen a distintos tipos de funciones que pueden ser interpretadas, algunas de ellas, como procesos cognitivos específicos como son la generalización, la simbolización, etc. Por otro lado las representaciones pueden ser de tipo:

-Representacional: donde un objeto se pone en lugar de otro.

-Instrumental u operatoria: en el que un objeto usa a otros u otros objetos como instrumento.

-Componencial o cooperativa: Cuando dos o más objetos componen un sistema emergiendo nuevos objetos.

Tomando en consideración al plano del contenido se puede hablar de:

1. Significado ostensivo: se refiere a la función semiótica en la cual el objeto o contenido de la misma es un objeto ostensivo (perceptible). Es decir, cuando se usan los signos para nombrar objetos, para indicar que hay algo y que ese algo está hecho de determinada forma.
2. Significado extensivo: En este caso el objeto final es una situación-problema.
3. Significado intensivo: en este tipo de función semiótica el contenido es un objeto intensivo.
4. Significado actuativo: este tipo de función se identifica cuando el contenido es una acción del sujeto.

Además es importante considerar:

Las funciones semióticas elementales y sistémicas:

1. Significado elemental: el cual es concebido como el acto semiótico (interpretación) que tiene lugar en condiciones espacio-temporales establecidas y que correlaciona una expresión con un contenido específico, esto es, el contenido al que se refiere el emisor de dicha expresión o el que interpreta el receptor, más coloquialmente, lo que quiere decir uno, o lo que entiende el otro.

2. Significado sistémico: En este caso se trata de procesos semióticos para la formación de conceptos matemáticos, que permiten establecer y validar las proposiciones matemáticas y en general los procesos de resolución de problemas. En este caso la función semiótica hace corresponder a un objeto matemático, el sistema de prácticas de procedencia de tal objeto. Este significado se considera como una entidad compuesta y organizada, es decir, como un sistema en el cual los elementos que lo conforman son notaciones matemáticas (ostensivos) mientras que las situaciones problemas son los elementos extensivos. Por otro lado las definiciones y

enunciados de propiedades características son los elementos intensivos y finalmente las acciones que el sujeto debe realizar ante las tareas correspondientes son los elementos actuativos. Las relaciones que pueden establecerse entre estos elementos son las funciones semióticas.

Pretendiendo ser suficientemente explícito se puede decir que el significado semiótico puede considerarse como una organización intencional de funciones semióticas elementales, es decir, cualquier cadena de interpretaciones interconectadas con la intención de entender un objeto de la forma más completa posible en las circunstancias dadas.

En cuanto a los significados personales son los construidos por los sujetos acerca de un objeto matemático, o de lo que aprenden y que no dependen sólo de factores cognitivos sino del complejo semiótico-antropológico en que se desarrolla dicha relación. Algo verdaderamente importante para el análisis que se pretende hacer en esta investigación es que la teoría de las funciones semióticas permite hacer una revisión muy de cerca o microscópica a priori del material instruccional para detectar algunos conflictos semióticos importantes. Para tal análisis, Font (2000), citado por Chacón (2006), propone una técnica que considera como contenido o expresión a las entidades extensiva, intensiva y notacional del lenguaje matemático. Mediante esta técnica se deja en evidencia los posibles conflictos semióticos mediante las discrepancias que ocurren entre los significados dados a una misma expresión por dos sujetos, persona o institución interactuando comunicativamente.

Un ejemplo de estos conflictos son los producidos por los libros de texto cuando es el alumno el responsable de ejecutar ciertas funciones semióticas que son fundamentales para la correcta interpretación del contenido. A través de esta técnica mostrada a continuación se plantean las siguientes funciones:

Cuadro 1
Interacción de funciones semióticas

	Extensionales	Intensionales	Notacionales
Extensionales	EE1	EI2	EN3
Intensionales	IE4	II5	IN6
Notacionales	NE7	NI8	NN9

Siendo:

EE1: Es la función semiótica que relaciona una entidad extensional con otra entidad extensional. De la que se derivan:

EE1.1: La cual relaciona un objeto con otro de la misma clase.

EE1.2: La cual relaciona un objeto con otro de otra clase.

EI2: Es la función semiótica que relaciona una entidad extensional con una intensional. De las cuales se tiene:

EI2.1 Relaciona un objeto con la clase a la que pertenece.

EI2.2 Relaciona un objeto con una clase a la que no pertenece.

EN3: Esta función relaciona una entidad extensional con una notacional. Y de aquí:

EN3.1 Relaciona un objeto con una entidad notacional.

EN3.2 Relaciona una entidad extensional con un símbolo que no la representa.

IE4: Esta función semiótica que relaciona una entidad intensional con una entidad extensional.

IE4.1 Función semiótica que relaciona una clase con un ejemplo de la clase.

IE4.2 Función semiótica que relaciona una clase con un objeto que no es de la clase.

IE5: Esta función semiótica relaciona una entidad intensional con otra entidad intensional. Y dentro de esta:

IE5.1 Función semiótica que define una clase de objetos de manera diferente.

IE5.2 Función que relaciona una entidad intensional con otra entidad intensional diferente.

IE6: Esta función semiótica relaciona una entidad intensional con un símbolo.

IE6.1 Relaciona una clase con la notación que la representa.

IE6.2 Relaciona una clase con un símbolo que no la representa.

NE7: Esta función semiótica que relaciona un símbolo con una entidad extensional.

NE7.1 Función semiótica que relaciona el notacional con el objeto que representa.

NE7.2 Función que relaciona el símbolo con un objeto que no representa.

NI8 Esta función semiótica que relaciona el símbolo con una entidad intensional.

NI8.1 Función que relaciona el notacional con la clase que representa.

NI8.2 Función que relaciona el símbolo con una clase que no representa.

NN9: Esta función semiótica que relaciona una notación con otra notación.

NN9.1 Esta función cambia la notación de un objeto/clase por otra equivalente.

NN9.2 Esta función relaciona una notación con otra que no es equivalente.

Análisis Semiótico y didáctico de los procesos de Instrucción Matemática

Según Godino (2002) se considera que el análisis semiótico de un texto matemático es su descomposición en unidades, la identificación de las entidades puestas en juego y las funciones semióticas que se establecen entre los mismos por parte de los distintos sujetos.

Además existe una metodología que permite analizar los componentes cognitivos, epistemológicos y didácticos involucrados en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas que están fundamentadas en el enfoque de investigación para la didáctica de las matemáticas que se conoce con el nombre de "Semiótico-Antropológico y que tiene por propósito ayudar a:

1. Identificar los elementos del significado institucional de los contenidos matemáticos esperados en un proceso de enseñanza.
2. Caracterizar los significados personales construidos por los estudiantes.
3. Evaluar el nivel de complejidad semiótica del proceso de enseñanza y asimismo determinar los aspectos críticos que necesitan negociar los significados. Y
4. Evaluar la eficacia del proceso instruccional y afinar los criterios para su optimización.

Con la idea de operacionalizar la metodología se establecen como elementos constituyentes de los significados pragmáticos-sistemáticos de un objeto matemático los ya mencionados antes y que son:

1. Lenguaje (Escrito, oral, gráfico)
2. Situaciones-problemas
3. Acciones (Operaciones, algoritmos, procedimientos, técnicas)
4. Conceptos (Definiciones)
5. Propiedades (Proposiciones)
6. Argumentos (Justificaciones, validaciones)

Las mismas pueden ser consideradas de acuerdo a las siguientes facetas:

1. Personal-Institucional (Individual-social)
2. Ostensiva-no ostensiva (Perceptible.-mental/gramatical)
3. Extensiva-intensiva (Ejemplar-Tipo, concreta, abstracta)
4. Elemental- sistémica (Unitaria-compuesta)
5. Expresión-contenido (Significado-significante)

Con esta metodología se caracterizaron los significados (sistémicos) institucionales y personales que participan en los procesos instruccionales en matemática. Dicha metodología se fundamenta en la utilización sistemática de la noción de función semiótica. Tiene como punto de partida que tanto los significados sistémicos como los elementales pueden ser determinados a priori en la fase de planificación del proceso de instrucción o al finalizar tal proceso. Otro elemento importante a considerar es:

Componente y estructura de un proceso instruccional

Continuando con la metodología antes mencionada, ésta establece que en un proceso de instrucción de algún contenido u objeto matemático participan los elementos siguientes:

1. El contenido matemático involucrado.
2. Un "Agente discente": representado por estudiantes o personas que se disponen a estudiar el contenido matemático.
3. Un "Agente docente" representado por un profesor o material instruccional que dirige y ayuda al estudio del contenido por parte del "Agente discente".

Se reconocen tres tipos de entidades:

1. El objeto a enseñar, lo que el docente o el material instruccional pretenden enseñar en unas circunstancias dadas.
2. El objeto aprendido por los estudiantes a través del proceso de estudio. Y
3. El objeto de referencia que d cuenta del significado completo o enciclopédico del contenido matemático.

En conclusión, el proceso de enseñanza de un contenido matemático no es más que la secuencia en el tiempo de los distintos elementos del significado.

Análisis Semiótico

Este análisis consiste en reconocer la madeja de objetos y funciones semióticas (expresiones, contenidos y códigos interpretativos) que intervienen en el proceso. Puede corresponder al protocolo de respuestas emitidas por los sujetos cuando interactúan en forma efectiva. Se apoya, dicho análisis, en la descomposición del proceso de instrucción en unidades llamadas semióticas, las cuales se definen tomando en cuenta el cambio de elemento de significado, es decir, cuando se cambia del enunciado del problema al desarrollo de alguna técnica, del empleo de una notación al uso de alguna propiedad, o a la descripción, sistematización y validación de las soluciones. En otras palabras, se estudian los momentos en que intervienen los seis elementos introducidos: ostensivos, extensivos, intensivos, actuativos, validados o entidades mixtas derivadas. Precede al análisis didáctico.

Resultados de este análisis

Trayectoria semiótica: Que es la narrativa del proceso instruccional siguiendo por su puesto el orden en que aparecen las unidades identificadas a lo largo del proceso así como los tipos de entidades que intervienen.

Significado local-Significado de referencia: Mediante este análisis se puede caracterizar los elementos del significado institucional local del contenido matemático de interés en el proceso de estudio, los que pueden ser confrontados con significado de referencia correspondiente.

Análisis Didáctico

El análisis didáctico tiene por finalidad caracterizar las distintas funciones docentes y discentes, así como también los patrones de interacción de éstas con las demás componentes del contenido en cuestión en tal proceso. Operativamente hablando deben identificarse nuevas unidades de análisis de la crónica del proceso, las cuales dependerán de los momentos en que tiene lugar un cambio en dichas funciones y en los patrones de interacción. Las funciones comprenden:

Función docente:

- Planificación: Diseño del proceso, selección de los contenidos y significados a estudiar.

- Dirección/ Catalización: Control del proceso de estudio, a través del cambio de tareas, orientación y estímulo de las funciones del estudiante.
- Enseñanza: Presentación de información.
- Evaluación: Valoración del estado del aprendizaje logrado.
- Investigación: reflexión y análisis del desarrollo del proceso para introducir cambios.

Función discente:

- Exploración: Indagación, búsqueda de conjeturas y modos de responder a las cuestiones planeadas (situaciones de acción)
- Formulación-comunicación: El sujeto formula y comunica doluciones (situaciones de formulación-comunicación)
- Validación: Argumentación y verificación de conjeturas (situaciones de validación)
- Recepción: El sujeto es receptor de información sobre: hacer, describir, nombrar, validar (situaciones de institucionalización)
- Ejercitación: Realización de tareas rutinarias para dominar las técnicas específicas (situaciones de ejercitación)
- Aplicación: El sujeto que aplica conocimientos aprendidos a la resolución de problemas reales (situaciones no-didácticas)

Trayectorias docente y discente: La trayectoria docente (respectivamente discente) es la secuencia de funciones docente (discente) a lo largo del proceso de instrucción del contenido.

Trayectoria didáctica: En este caso se trata de la conjunción interactiva entre las trayectorias: semiótica, docente y discente, respecto a un contenido y a sus circunstancias dadas.

Debido a que la presente investigación se realiza en los ámbitos de una institución a distancia como lo es la Universidad Nacional Abierta es necesario presentar información inherente a los esquemas instruccionales de esta Casa de Estudios.

Diseño Instruccional de la UNA

La UNA, de la cual se habló en la sección I, presenta un modelo de instrucción basado en la utilización de módulos de estudio, los cuales son conjuntos estructurados de unidades de autoinstrucción que forman parte de los cursos y/o programas de estudio. Un módulo comprende material impreso (medio “maestro”) materiales audiovisuales. El modelo de programación del módulo se apoya fundamentalmente, en la hipótesis de que a menor subjetivismo en la determinación de los contenidos y procesos de enseñanza-aprendizaje corresponde una mayor probabilidad de conseguir una tasa más alta de aprendizaje. Esto se pretende lograr incorporando un máximo de tecnología al diseño con el fin de lograr un material altamente estructurado que dé lugar a un autoaprendizaje eficiente. El siguiente gráfico (gráfico 3) muestra el modelo para el diseño instruccional UNA.

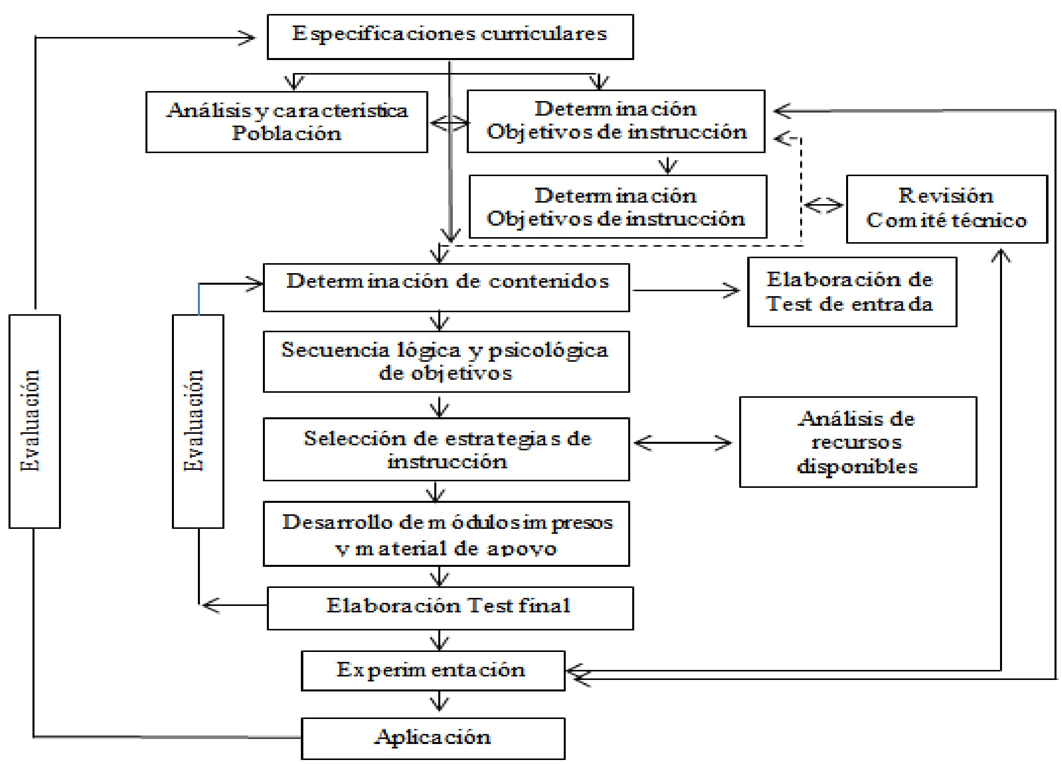


Gráfico 3 **Modelo para el diseño instruccional UNA**. Tomado del Proyecto de creación UNA. (2007) Primera reimpresión.

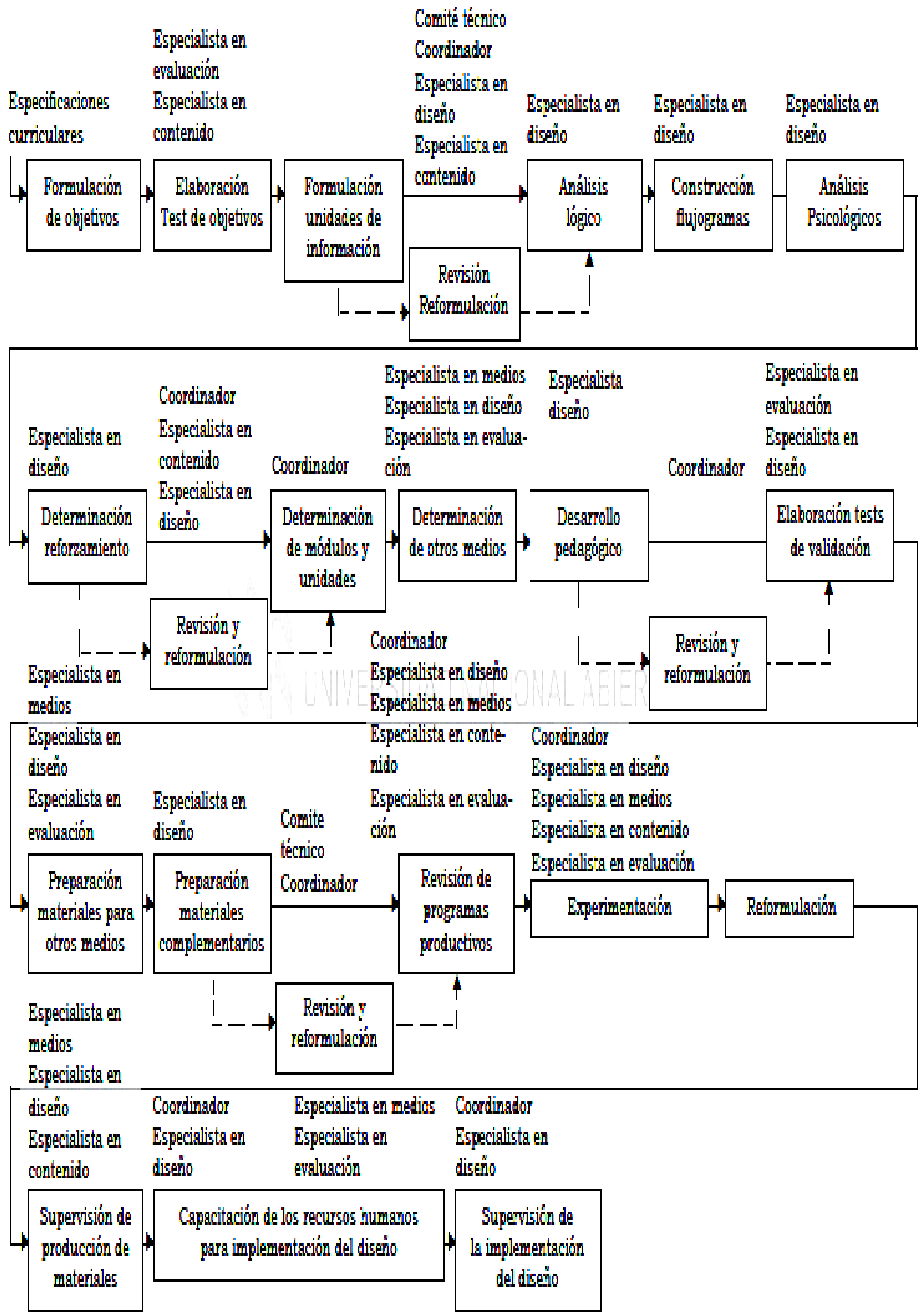


Gráfico 4 **Flujograma de fases y responsabilidad del desarrollo del diseño instruccional.** Tomado del Proyecto de creación UNA. (2007) Primera reimpresión.

El tipo de instrucción de la Universidad Nacional Abierta es:

- Abierta y a distancia
- Sistema altamente estructurado: Guía al estudiante para analizar y calificar sus metas y relacionar el logro de ellas con el proceso de instrucción.
- Trata de combinar el Modelo Tecnológico Educativo Clásico con el Modelo Cognoscitivo más el Modelo Personalidad enfocado en el adulto.
- El Medio Maestro es altamente estructurado con topografía relativamente fija con partes abiertas en que se proporcionan mapas cognoscitivos y valorativos

Y la forma de impartirla es:

- Material Modular Auto-instruccional.
- Medio maestro impreso.
- El peso de la responsabilidad de la instrucción recae fundamentalmente sobre el material porque requiere masificación y ésta no permite asistencia tutorial individualizada. Los recursos de asesorías son voluntarios.

Los cursos están estructurados genéricamente para efecto de su masificación en Módulos, éstos se subdividen en unidades de instrucción, objetivos e ítem. A su vez los Módulos están organizados en:

- Título y Código
- Lista de Módulos
- Introducción
- Lista de unidades
- Indicaciones sobre otros medios
- Unidades
- Test o Auto evaluación Final

Cada unidad está estructurada en:

- Introducción
- Objetivos
- Contenidos
- Desarrollo

    - Presentación de la información
    - Técnicas de enseñanza programada
    - Ejemplos, Ejercicios
- ➢ Auto evaluación final
- ➢ Indicaciones remediales.

Descripción del curso Álgebra I

El curso de Álgebra I se localiza en Estudios profesionales Nivel I, tiene por código 752 para la especialidad Educación Matemática y 757 para Matemática, tiene por pre-requisitos Matemática II (178-179) y Geometría (754). Tiene seis (6) unidades de crédito. Ver ANEXO C

Su contenido está conformado por el estudio de las estructuras algebraicas que a su vez sirve de fundamento para cursos posteriores como el de Álgebra Lineal, Ecuaciones Diferenciales. Presenta tópicos relacionados con la teoría de conjuntos, álgebra de Boole, funciones definidos sobre conjuntos, conjunto de partes y conjunto cociente. Dentro del campo de las estructuras algebraicas se estudian grupos, anillos y cuerpos. Además el estudio del grupo de permutaciones y grupos operando sobre conjuntos y finaliza con el estudio del anillo de polinomios y la resolución de ecuaciones algebraicas, origen del inicio del álgebra abstracta.

Específicamente, el texto en su presentación establece:

- ➢ Un primer contacto con niveles avanzados de la matemática.
- ➢ Posee un mayor nivel de abstracción y complejidad.
- ➢ Es base para el álgebra lineal.
- ➢ En cuanto a la teoría de conjuntos y funciones requiere entrenamiento previo.
- ➢ Se precisan conceptos importantes por su uso en cursos posteriores: conjunto cociente, principio de inducción, funciones definidas sobre conjuntos de partes y sobre conjunto cociente.

A continuación se presenta un cuadro (cuadro 2) con los objetivos generales:

Cuadro 2
Objetivos generales del curso Álgebra I de la UNA.

<table>
<tr><th>OBJETIVOS GENERALES</th><th>OBJETIVOS GENERALES POR MÓDULO</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Adquirir, relacionar y generalizar las ideas fundamentales de las estructuras algebraicas.
Estudiar las estructuras algebraicas de grupos, anillos, cuerpos y en especial de polinomios en una indeterminada.</td><td>Módulo 1:
Revisar las nociones básicas acerca de conjuntos, de subconjuntos, operaciones con conjuntos y la noción de relación estudia en Matemática I.
Definir y construir el conjunto de partes P(X) donde X es un conjunto.
Definir álgebra de Boole. Relación de orden y una relación de equivalencia.</td></tr>
<tr><td>Módulo 2:
Revisar las nociones básicas acerca de funciones estudiadas en Matemáticas I y II.
Definir ley de composición.
Distinguir las propiedades de leyes de composición.
Definir funciones y leyes de composición sobre un conjunto cociente.</td></tr>
<tr><td>Módulo 3:
Aplicar las propiedades de los grupos a la solución de problemas.</td></tr>
<tr><td>Módulo 4:
Estudiar las estructuras de anillo y los homomorfismos.
Estudiar los ideales de un anillo.
Estudiar el anillo de los enteros.</td></tr>
<tr><td>Módulo 5:
Manejar las nociones generales de cuerpos.
Estudiar algunos cuerpos finitos y no finitos.</td></tr>
<tr><td>Módulo 6:
Estudiar el anillo de los polinomios.</td></tr>
</table>

El Álgebra Abstracta como Desarrollo Axiomático

Ya para finalizar esta sección se presenta, de manera algo más formal, un aspecto del cual algo se ha escrito en esta investigación y que está íntimamente relacionado con el modelo didáctico que se pretende plantear. La situación que, desde el punto de vista de quien realiza este trabajo y de su experiencia en el área, se presenta y que pretende justificar la relevancia que ha adquirido la demostración en la matemática, tiene mucho que ver con la transformación del conocimiento matemático en términos de desarrollo axiomático. Una gran parte de las propiedades que surgen durante el desarrollo axiomático encuentra en el mismo desarrollo su demostración pues son, generalmente, consecuencias de axiomas, definiciones o de la combinación de éstos, inclusive de otros teoremas anteriores y de conocimientos demostrados en otras áreas del conocimiento matemático.

En el caso particular de la demostración en álgebra abstracta no ocurre nada tan diferente a lo planteado en el párrafo anterior. Como ya se comentó anteriormente los trabajos realizados por Emmy Noether al iniciar el álgebra abstracta como desarrollo axiomático son por demás importantes. Antes de presentar un segmento del álgebra abstracta como desarrollo axiomático es conveniente recordar algunos detalles sobre éste.

Un sistema axiomático está conformado por los siguientes elementos:

1. Un alfabeto S que permite construir expresiones formales que incluye:
   (a) Un conjunto de símbolos para conectivas lógicas, cuantificadores.
   (b) Un conjunto de símbolos para designar variables.
   (c) Un conjunto de símbolos para constantes (que en un modelo tendrá una interpretación fija)
   (d) Un conjunto de símbolos que serán interpretados como funciones.
   (e) Un conjunto de símbolos que serán interpretados como relaciones.
2. Una gramática formal que incluirá:
   a) Reglas de buena formación que replican la morfología del lenguaje formal.

b) Reglas de inferencia que darán lugar a deducir unas proposiciones de otras permitiendo reproducir la sintaxis del lenguaje formal.

3. Un conjunto de axiomas inicial o de expresiones bien formadas que serán el punto de partida para cualquier deducción.

En el caso del álgebra abstracta, específicamente en la teoría de grupos, asumiendo la existencia de un conjunto no vacío "G" y una ley de composición interna "o", el sistema axiomático se puede iniciar con los siguientes axiomas:

(G1) $\forall$ x,y,z $\in$ G: (x o y) o z = x o (y o z)

(G2) $\forall$ x $\in$ G, $\exists$ e $\in$ G tal que: x o e = e o x = x

(G3) $\forall$ x $\in$ G, $\exists$ y $\in$ G tal que: x o y = e

Por su puesto este conjunto de axiomas no es único pues puede ser reemplazado por otro equivalente. Otro aspecto que se debe aclarar es que este sistema presenta una mezcla de lenguaje natural, en este caso español, y lenguaje artificial ($\in$, =,$\forall$,$\exists$,o) por lo que no es llamado propiamente "formal". Observe el mismo sistema escrito de manera formal:

(G1) $\forall \mathbf{x_1}\ \forall \mathbf{x_2}\ \forall \mathbf{x_3}\ f(f(x_1,x_2),x_3) \equiv f(x_1,f(x_2,x_3))$

(G2) $\forall \mathbf{x_1}\ f(x_1,c_1) \equiv x_1$

(G3) $\forall \mathbf{x_1}\ \exists \mathbf{x_2}\ f(x_1,x_2) \equiv c_1$

En esta última forma del sistema debe entenderse a f como una función definida sobre GxG que da un elemento de G dando operación de grupo, x_i son signos de variables (puede definirse una colección infinita numerable de las mismas) y c_1 es una constante que requiere la teoría que se interpretará como el elemento neutro (es decir, los axiomas postulan que dicho elemento existe).

La estructuración de un sistema axiomático es una tarea que requiere de gran experiencia en el tópico que se desarrolla pues se trata de partir de un conjunto de axiomas suficientemente aceptado para luego ir deduciendo todas las consecuencias del mismo. Plantear los términos que se aceptarán sin definir, establecer las definiciones necesarias, deducir y demostrar cada una de las propiedades. Durante el proceso irán quedando propiedades sin demostrar que constituirán los ejercicios o quizás debiera llamárseles problemas, en todo caso no se entra en ese debate en esta investigación.

Una vez establecidos los supuestos sobre la existencia de un conjunto no vacío y de una ley de composición interna y con los axiomas establecidos es posible intentar enunciar la primera definición:

Definición 1: Un conjunto G no vacío con una ley de composición interna $*$, *decimos que es un grupo respecto a esa ley, si (G, *) verifica los axiomas* G_1, G_2 *y* G_3

Luego se podría continuar con el aspecto de la Notación, ejemplos, teoremas y sus demostraciones, etc. Asumiendo este desarrollo el experto llegará a constituir todo un contenido de conocimientos matemáticos de los cuales algunos serán demostrados mientras que otros pasarán a formar conjuntos de problemas y/o ejercicios dependiendo de las capacidades de quien los enfrenta. Por su puesto, es posible descubrir otras propiedades "aisladas" o fuera de contexto cuya demostración puede resultar muy difícil de alcanzar al no poder localizar el contexto dentro del cual se encuentra dicha propiedad.

SECCIÓN III

ESCENARIO METODOLÓGICO

Se muestra en este escenario una explicación de la forma como se llevó a cabo la investigación. Donde se indica el área en la cual se ubica la investigación, el paradigma seleccionado, el enfoque, el tipo de investigación y el diseño considerado. Además se indica quienes serán los informantes clave, las técnicas de recolección de la información a emplear, posteriormente el análisis de la información y el procedimiento a seguir para llevar a cabo dicho análisis.

Área de la Investigación

Esta investigación se ubica en el ámbito de la Educación Matemática; concretamente en el marco de la Didáctica de la Matemática por tratarse de un asunto de enseñanza-aprendizaje en el área, en este caso de la DM como objeto de estudio que involucra a futuros Licenciados en Matemática. Entre los aspectos que se estudian en ésta y han sido de interés para algunos investigadores se encuentran: (1) Aspectos pedagógicos de la demostración. (Hanna, 1990, Mora 2003); (2) Procesos de prueba en los alumnos de Matemáticas (Balacheff, 2000); (3) Significados institucionales de la demostración (Godino y Recio 2001); (4) Enseñanza de la Demostración, Aspectos Teóricos y Prácticos (Radford, 1994); (5) Procesos cognitivos y meta-cognitivos que activan los estudiantes universitarios Venezolanos cuando resuelven problemas matemáticos (Gonzáles 2014); (6) La demostración elemento vivo en la didáctica de la matemática. (Ortiz A y F. Jiménez 2006).

En consecuencia, considerando las interrogantes y objetivos planteados en el escenario I, la investigación se focaliza en la creación de un modelo didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de la DM en álgebra abstracta y se consideraron también aspectos relacionados con la transposición didáctica de Chevallard y los campos conceptuales de Vergnaud, algunos instrumentos de la psicología cognitiva, competencias cognitivas en educación universitaria y razonamiento matemático. Es oportuno recordar que con la DM en álgebra abstracta se intenta satisfacer las necesidades de certidumbre. La DM como herramienta metodológica del futuro licenciado en matemática en su papel de investigador tal como lo refleja su perfil de egreso (comentado en la sección I) en este aspecto la DM adquiere una importancia capital en su vida profesional. Los nuevos conocimientos, producto de la investigación, deberán ser validados para lograr su aceptación y esto sólo será posible si se presenta una demostración matemática de los mismos.

Las proposiciones en matemática tienen un carácter fundamental y primitivo. Una vez demostradas pasan a constituirse en conocimiento y a pesar de no contar con bases de sustentación, salvo la axiomática misma, sirve de base para muchas otras disciplinas. A pesar de ello, su discurso es extremadamente complejo y sofisticado. Según Alvarado (2015) la ontología de las entidades matemáticas y aún más su epistemología son interpretadas de manera diferente y se mantienen en el misterio. No es de extrañar que el conocimiento y la certeza de las proposiciones matemáticas hayan sido disputadas por doctrinas opuestas, por un lado los griegos, quienes consideraban que las proposiciones eran necesarias y universales y que las presentadas en los *Elementos de Euclides* eran por completo ciertas mientras que Mac Lane asegura que no hay lugar para hablar de verdades absolutas en matemáticas, y la de Lakatos que asegura que la verdad de las proposiciones matemáticas se equipara con la verdad de las proposiciones empíricas de la naturaleza.

La DM ha sido una forma importante de validar estas proposiciones constituyéndose en la de mayor aceptación por la comunidad matemática. Se necesita una conceptualización que permita visualizar estrategias de enseñanza y aprendizaje cónsonas con la realidad existente en las organizaciones encargadas de promover el conocimiento matemático. A partir de la crisis sufrida por "*el edificio matemático*" producto de los acontecimientos acaecidos a principios del siglo XX tiempo para el cual se contaba con varias escuelas o tendencias como la conjuntista, la logicista, la intuicionista, entre otras, se da un movimiento con miras a resguardar los fundamentos de la matemática orientado a la investigación de ésta desde un punto de vista lógico, en otras palabras el estudio de la lógica subyacente en los razonamientos matemáticos que servirá de base hacia la axiomatización de la matemática ya vista en nuestros días en los cursos universitarios de esta disciplina.

Fundamentos Epistemológicos

Un paradigma es una postura intelectual, una manera de observar al mundo, de explicar y comprender la realidad, según reflexiones de Rojas (2010). Este estudio se llevó a cabo bajo el paradigma Fenomenológico Interpretativo basado en la filosofía de Heidegger, siendo su objetivo comprender las habilidades, prácticas y experiencias cotidianas, y articular las similitudes y diferencias en los significados, compromisos, prácticas, habilidades y experiencias de los seres humanos, por ajustarse con algunos de los objetivos perseguidos con esta investigación

Además se presta atención a la figura de Weber (1973) otro representante de la posición fenomenológica quien considera que la Sociología es la ciencia comprehensiva del acto social y que esto implica la aprehensión del sentido que el actor atribuye a su conducta, clasifica los tipos de actos en a) El acto racional con respecto a un fin, en el cual el actor infiere cual es el fin e intenta conseguir métodos cónsonos para alcanzarlo. b) El acto racional con respecto a un valor, determinado porque el actor acepta los riesgos de su comportamiento. c) El acto afectivo generado por la emoción del sujeto y d) El acto tradicional, determinado por la costumbre, las creencias y por los hábitos. Esta clasificación encuadra en buena forma con lo estudiado en esta investigación y por ello seguirá, más específicamente, un paradigma Fenomenológico Interpretativo. Se aplicó el enfoque del Interaccionismo Simbólico justificado esto en las premisas básicas presentados por Blumer (1969), citado por Rojas (2010):

1. Los seres humanos actúan en relación con los objetos del mundo físico y con otros seres de su ambiente sobre la base de los significados que éstos tienen para ellos.
2. Estos significados se derivan o brotan de la interacción social (comunicación, entendida en sentido amplio) que se da en medio de los individuos. La comunicación es simbólica, ya que nos comunicamos por medio del lenguaje y otros símbolos; es más, al comunicarnos creamos o producimos símbolos significativos.
3. Estos significados se establecen y modifican por medio de un *proceso interpretativo: "*el actor selecciona, modera, suspende, reagrupa y transforma los significados a la luz de la situación en que se encuentra y la dirección de su acción…" (pp. 2, 5)

Además se utilizará una investigación de tipo cualitativa, pues en esta investigación se ´pretende "…descubrir el sentido, la lógica y la dinámica de las acciones humanas concretas…" (Rojas 2010).

Diseño de la Investigación

Según Rojas (2010) debido a que la investigación cualitativa persigue el estudio de problemas relacionados con la experiencia humana individual y colectiva, lo cual involucra fenómenos sobre los cuales poco se conoce y que se espera llegar a comprender en su contexto natural y considerando que la presente investigación se ubica en dicho parámetros se empleó un diseño con un carácter flexible y emergente lo cual permitirá tomar decisiones en el contexto durante el proceso.

Informantes Clave

Primeramente se entenderá por informante clave, de acuerdo a Sabino (1992), a expertos sobre el tema de estudio, líderes formales o informales, personalidades destacadas o cualquier persona o material documental que, en general, posea información de particular interés para la indagación. Se consideró la Unidad 6: Grupos y Propiedades del Módulo 3 del curso de Álgebra I de la especialidad Licenciatura en Matemática de la UNA, así como algunos libros sugeridos en el Plan de Curso. Una prueba desarrollada por un estudiante y diseñada para evaluar el contenido del objetivo 4 del Plan de Curso de la asignatura Álgebra I, Los informantes clave fueron seleccionados de manera intencional.

Descripción de los informantes Clave

Considerando la importancia que para el estudio tiene el aspecto conceptual y pretendiendo dar respuesta a algunas de las interrogantes así como poder cumplir con algunos de los objetivos planteados, toma interés el contenido correspondiente a la Unidad 6 Grupos y propiedades de la cual se realizó un análisis de gran relevancia para esta investigación, adicionalmente se utilizó la resolución, por parte de algún estudiante, de una prueba diseñada para evaluar el contenido del objetivo 4 del Plan de Curso de la asignatura Álgebra I y que se muestra en los Anexos, (ANEXO B) de esta investigación. En cuanto al contenido, éste ha sido detallado en la sección anterior así como también los fundamentos necesarios para su análisis.

Cuadro 3
Descripción de los informantes clave

Unidad 6: Grupos y propiedades del Módulo 3 de Álgebra I, UNA	- Ejemplos y definición de Grupo. - Notación - Propiedades de Grupos.
Libros sugeridos en el Plan de curso de Álgebra I	- Algebra I de Armando Rojo - Álgebra moderna de I. N. Herstein - Álgebra Básica de Michael Queysanne - Álgebra Moderna de Frank Ayres - Introducción al Álgebra de Alexei Ivanovich Kostrikin

Resultados de una prueba realizada por un estudiante.	- Prueba diseñada para evaluar el objetivo 4 del Plan de Curso de Álgebra I y resuelta por un estudiante de la carrera Licenciatura en Educación Matemática que haya aprobado dicho curso en su primera vez en el lapso anterior y, que haya aprobado el objetivo 4 del Plan de Curso de dicha asignatura.

Técnicas e Instrumentos de Recolección de Información

Para el informante clave, representado por la Unidad 6: Grupos y Propiedades del módulo 3 del curso Álgebra I de la Carrera Licenciatura en Matemática de la UNA se siguió la técnica basada en el modelo ontológico semiótico presentado en la Sección II, por cuanto un problema epistémico-cognitivo como el presentado aquí no puede desligarse del ontológico. La aplicación de dicho modelo conlleva las implicaciones:

1. Análisis Epistémico.
2. Análisis Cognitivo (desde un punto de vista semiótico)
3. Análisis Instruccional

Detalladas a continuación:

Análisis Epistémico: El cual permite indagar sistemáticamente los significados puestos en juego para presentar la definición de “Grupo” y “Demostración” en el material instruccional y de cada una de las partes en que se puede descomponer para un interpretante potencial. Consiste en la identificación de (a) Componentes del contenido matemático a tratar cuando enseña “Grupos” y “Demostración”esto no es otra cosa que el significado local de la definición de “Grupo” y de “Demostración”. (b) Secuenciación del significado local de la definición de “Grupo” y de “Demostración”. (c) Comparación del significado local de “Grupo” y de “Demostración” con el significado referencial de la definición de “grupo” y de “demostración”. (d) Conflictos semióticos potenciales presentes en el texto.

Esto sigue el siguiente procedimiento:

1. Se descompone el proceso instruccional plasmado en el texto en las llamadas “Unidades epistémicas” (Unidades primarias de análisis)

a) Lingüisticas
b) Situacionales
c) Actuativas
d) Conceptuales
e) Proposicionales
f) Argumentativas

2. Establecimiento de la trayectoria epistémica
3. Establecimiento del significado referencial y la trayectoria epistémica referencial.
4. Comparación del significado institucional local con el significado referencial.
5. Determinación de conflixtos semióticos potenciales.

Este análisis permitirá obtener la siguiente información:

1. Significado local de la definición de “Grupo” y de “Demostración”
2. Trayectoria epistémica referencial
3. Descripción de la transposición didáctica implementada

Para los efectos de la indagación del significado referencial se emplearon los textos: Algebra I de Armando Rojo, Álgebra moderna de I. N. Herstein, Álgebra Básica de Michael Queysanne, Álgebra Moderna de Frank Ayres e Introducción al Álgebra de Kostrikin . Y para determinar el significado local se realizó el análisis del texto Álgebra I en su versión 1987, específicamente el Módulo 3, Unidad 6 Grupos y propiedades; Experiencia de Aprendizaje Nº 14: Secciones 113 :Ejemplos y Definición de Grupos, 114: Notación y 118: Propiedades de Grupo; ubicados en las páginas 263 a la 277 inclusive.

Análisis cognitivo (desde una perpectiva semiótica): El cual es considerado como la identificación de la malla de funciones semióticas que definen la faceta personal de las entidades primarias. Más concrétamente se trata de la identificación sistemática del significado personal de las definiciones de “Grupo” y de “demostración” que tienen para un estudiante del texto objeto de análisis. Este análisis permite caracterizar los significados personales atribuidos por los estudiantes y permite localizar patrones de interacción con el significado institucional local y con el de referencia, provenientes del análisis sistémico.

Se siguen los siguientes pasos:

1. Se descompone lo reflejado en las evaluaciones o tareas propuestas en las unidades primarias de análisis.

    a) Lingüísticas
    b) Situacionales
    c) Actuativas
    d) Conceptuales
    e) Proposicionales
    f) Argumentativas

2. Establecimiento de la trayectoria seguida

3. Establecimiento del significado personal de definición de “Grupo” y de “Demostración” del estudiante.

4. Comparación del significado personal, con el significado local establecido en el análisis anterior

5. Identificación de los conflictos entre ambos significados.

De este segundo análisis se obtendrá la siguiente información:

1. Significado personal de la definición de “Grupo” y de “Demostración”

2. Puntos críticos del proceso de enseñanza que representen conflictos de carácter semiótico que generan.

a) Vacíos de significación

b) Disparidad de interpretación

Este análisis requerirá como vertiente:

Prueba de evaluación para un (1) estudiante que haya cursado la asignatura en el lapso inmediato anterior mediante el siguiente procedimiento:

a) Se convoca a un estudiante, que haya cursado y aprobado el curso en su primera vez en el lapso inmediato anterior y, que haya logrado el objetivo 4 del Plan de Curso de la asignatura.

b) Durante 30 minutos se le permite revisar de nuevo el texto, especialmente la Unidad 6: Grupos y propiedades.

c) El estudiante dispone de 60 minutos para desarrollar la prueba de evaluación asignada. ANEXO B

Análisis Instruccional: En éste se caracterizan las funciones docente y discente mostradas en el texto instruccional y los patrones de interacción presentes, con respecto al significado institucional, local dado. Las unidades de análisis se identifican mediante el cambio de función docente y discente respectivamente.

De este tercer análisis se obtendrá la siguiente información:

1. Trayectoria docente: entendida ésta como la secuencia de enseñanza presente en el texto, a saber:
   a) Motivación
   b) Dirección-Catalización
   c) Enseñanza propiamente dicha (presentación de información)
   d) Evaluación
2. Trayectoria discente: Aceptada como secuencia de funciones de aprendizaje entre las que se consideran:
   a) Exploración
   b) Interpretación
   c) Formulación-Comunicación
   d) Validación
   e) Recepción de información
   f) Ejercitación
   g) Aplicación
   h) Evaluación

3. Trayectoria Didáctica: Considerada como la conjunción interactiva entre las trayectorias docente y discente utilizadas en el material instruccional para presentar

las definiciones de “Grupo” y de “Demostración”. Aquí se persigue conseguir patrones de regularidad presentes en estas interacciones, entre las cuales tenemos:

a) Transmición-Recepción
b) Heurístico-Constructivo
c) Reinvención guiada
d) Discursivo-Participativo

3. Posibles conflictos didácticos: Se seguirán los siguientes pasos:
   a) Identicación de las unidades de análisis presentes en en texto (docentes y discentes)
   b) Establecimiento de las trayectorias: Docente, Discente y Didáctica.
   c) Identificación de conflictos didácticos.

En cuanto a los instrumentos a utilizar se detallarán de acuerdo a cada análisis realizado empezando por.

Análisis Epistémico:

1. Con la finalidad de identificar las unidades de análisis se obtuvieron las unidades iniciales de análisis representadas por las secciones en que ha sido dividido el texto.
2. Se identificaron las unidades primarias de análisis, que vienen dadas por las oraciones que designan las seis entidades elementales. Con esto en mente se elaboró una tabla a dos columnas, (Cuadro 4): Ubicando en la columna izquierda la identificación de las unidades de análisis U_0, U_1,…U_n y en la columna de la derecha se transcribe la información completa del texto para lo cual se utilizará el símbolo $ para indicar el cambio de Unidad.

A continuación se presentan una serie de cuadros mediante los cuales se organizó la información recabada para llevar a cabo los análisis correspondientes, sólo son formatos:

Cuadro 4
Unidades primarias de análisis.

Unidades	Transcripción del contenido del texto
U_0	---$
U_1	--$
.	--$
.	---$
.	
U_n	--$

3. En cuanto a la clasificación de las Unidades primarias de análisis se utilizó la tabla (Cuadro 5) siguiente, en la cual se han agrupado las tres categorías antes mencionadas:

   a) Praxis: Situaciones,Técnicas (Elementos Actuativos)

   b) Lenguaje: Términos, expresiones, Notaciones, Gráficos.

   c) Teoría: Conceptos, Propiedades, Argumentaciones.

Cuadro 5
Entidades Matemáticas

Praxis	Lenguaje	Teoría
Situaciones Técnicas	Términos y Expresiones Notaciones	Conceptos Propiedades Argumentaciones

4. Para describir la trayectoria epistémica se emplea la siguiente tabla (Cuadro 6) en la cual:

   a) La columna de la izquierda se utiliza para la identificación de las Unidades de análisis obtenidas en el paso 2.

   b) En la columna central se describen las mencionadas Unidades.

   c) En la columna de la derecha se registra el Estado de la Unidad: Situacional, Actuativa, Notacional, Conceptual, proposicional o Argumentativa.

Cuadro 6
Trayectoria Epistémica

Unidad	Descripción	Estado

5. Se realiza una clasificación de los diferentes elementos presentes en los textos de referencia para obtener el significado referencial lo cual se refleja en el cuadro 7

Cuadro 7
Significado Referencial

Elemento	Descripción
Lingüísticos	
Situacionales	
Actuativos	
Conceptuales	
Proposicionales	
Validativos	

6. A fin de establecer la comparación entre el significado referencial y el significado local se utiliza el siguiente cuadro (Cuadro 8)

Cuadro 8
Comparación del significado referencial con el local

Elemento	Significado Local	Presentes en el referencial y ausentes en el local
Lingüísticos		
Situacionales		
Actuativos		
Conceptuales		
Proposicionales		
Validativos		

7. En cuanto a los conflictos semióticos potenciales se emplea el siguiente cuadro (Cuadro 9) donde se presenta la trama de funciones semióticas diseñada por Font (2002), citado por Chacón (2006) para las diversas funciones semióticas.

Cuadro 9
Trama de funciones semióticas presentes en el texto.

	Extensional		Intencional		Notacional	
Extensional	EE1		EI2		EN3	
Intensional	IE4		II5		IN6	
Notacional	NE7		NI8		NN9	

Para identificación de las diferentes funciones semióticas de acuerdo a la clasificación planteada por Font (2002), citado por Chacón (2006), se utilizan los recuadros en blanco del cuadro anterior, para su posterior análisis.

Análisis cognitivo desde el punto de vista semiótico: Con la intención de transcribir las respuestas dadas por el estudiante a las tareas o evaluaciones aplicadas se utiliza el cuadro siguiente, (Cuadro 10) en el que se separan las frases o sentencias en unidades de análisis.

Cuadro 10
Unidades de análisis para el significado personal

Unidades	Transcripción del contenido de la prueba o tarea desarrollado por el estudiante
U_0	--$
U_1	---$
U_2	----------$
.	
.	
U_n	--$

Tomando en consideración la información registrada en el cuadro 10 se elabora el significado personal sistémico que el estudiante le atribuye a la definición de “Grupo” y a “Demostración” el cual se mostrará en el cuadro siguiente (Cuadro 11)

Cuadro 11
Elementos del significado personal

Elemento	Descripción
Lingüísticos	
Situacionales	
Actuativos	
Conceptuales	
Proposicionales	
Validativos	

La información recabada sobre los conflictos semióticos se mostrará en los cuadros 12,13 y 14

Cuadro 12
Análisis de todas las unidades de análisis del significado personal

Unidades	Análisis semiótico de las respuestas dadas
U_0 U_1 U_2 . . . U_n	

Cuadro 13
Funciones semióticas detectadas en el texto: Prueba o Tarea

	Extensional		Intencional		Notacional	
Extensional	EE1		EI2		EN3	
Intensional	IE4		II5		IN6	
Notacional	NE7		NI8		NN9	

Cuadro 14
Conflictos semióticos reflejados

Lingüísticos				
Situacionales				
Actuativos				
Conceptuales				
Proposicionales				
Validativos				

Análisis Instruccional: Se empleará el siguiente cuadro (Cuadro 15) para identificar las unidades de análisis correspondientes a las trayectorias docente y discente empleando como unidades de análisis las establecidas como funciones docente (discente) en el análisis instruccional.

Cuadro 15
Unidades de análisis para la trayectoria docente.

Unidades	Transcripción del contenido del texto
U_0	--$
U_1	--$
U_2	-----------------------------$
.	
.	
U_n	---$

Cuadro 16
Unidades de análisis para la trayectoria discente.

Unidades	Transcripción del contenido del texto
U_0	--$
U_1	--$
U_2	-----------------------------$
.	
.	
U_n	---$

En cuanto a la descripción de las trayectorias se empleará el cuadro 17, en el cual se ubican las diversas unidades de análisis obtenidas en los cuadros 13 y 14

Cuadro 17
Trayectoria docente y discente

Unidad	Descripción	Estado

Y finalmente para la trayectoria didáctica y la obtención de los conflictos didácticos se emplearán los cuadros 18 y 19 respectivamente.

Cuadro 18
Patrones de interacción didáctica

Regularidades presentes en las trayectorias docente y discente	Unidades	Descripción del patrón

Cuadro 19
Conflictos didácticos

Regularidades presentes en las trayectorias docente y discente	Unidades	Descripción

Procedimiento a seguir en el análisis de la información recabada

Una vez recabada y registrada la información en cada uno de los cuadros correspondientes, se procede a realizar una síntesis, después de cada análisis (epistémico, cognitivo e instruccional) del mismo lo que va a permitir organizar las caracterizaciones obtenidas con la finalidad de llegar a resultados más o menos precisos de cada uno de los puntos críticos que se intenta encontrar: Conflictos de carácter epistémico consecuencia de obstáculos epistémivos y que requieran modificar el proceso de instrucción; conflictos de carácter semiótico, como por ejemplo, vacíos de significación o disparidad de interpretación que requieran arreglo consensual de significación; conflictos de carácter didáctico que ameriten una reorientación del proceso. El siguiente gráfico (Gráfico 4) muestra una imagen global del procedimiento a seguir para el análisis de la información.

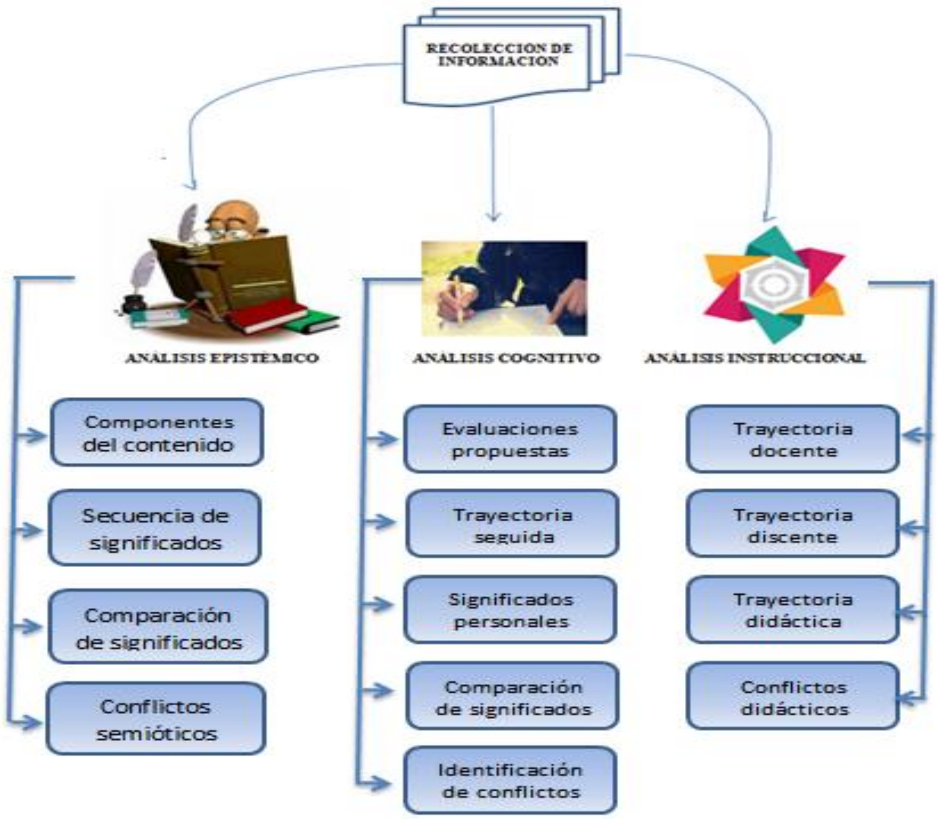


Gráfico 5 Procedimiento a seguir para el análisis de la información.

SECCIÓN IV

ESCENARIO CRÍTICO

En la presente sección se realiza el análisis del proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de demostración así como también se lleva a cabo un análisis de un segmento o componente del campo conceptual a través de la definición de grupo. Para ello se muestra primeramente la información recabada mediante los instrumentos diseñados y descritos en la sección III. Seguidamente se muestra un análisis cualitativo con la intención de reflejar los conflictos semióticos potenciales y los posibles obstáculos para su comprensión de las nociones de demostración y de grupo. Finalmente se procede con el análisis didáctico que permitirá aflorar los puntos críticos de la interacción didáctica.

Unidades de Análisis

Se comienza el análisis epistémico mediante la descripción de las unidades que darán lugar al examen detallado buscado.

Unidades iniciales de análisis

La clasificación de las unidades de análisis se inicia con la información proporcionada por las diferentes secciones del libro de Álgebra I de la UNA, para mostrar las definiciones de grupo siguiendo el esquema mostrado en cuadro 20.

Cuadro 20
Unidades iniciales de análisis

UNIDAD DE APRENDIZAJE 6: GRUPOS Y PROPIEDADES Experiencia de Aprendizaje 14: EJEMPLOS Y DEFINICIÓN DE GRUPO Sección 113 EJEMPLOS Y DEFINICIÓN DE GRUPO EJEMPLOS DEFINICIÓN 1 (GRUPO) Sección 114 NOTACIÓN Sección 115 EJERCICIOS RESUELTOS Sección 116 EJERCICIOS PROPUESTOS Sección 117 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS Sección 118 PROPIEDADES DE GRUPOS Sección 119 EJERCICIOS RESUELTOS Sección 120 EJERCICIOS PROPUESTOS Sección 121 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

Unidades primarias de análisis

La siguiente clasificación de las unidades de análisis viene dada por las diversas sentencias que representan cada una de las entidades elementales descritas en la Sección II,

En cuanto al proceso instruccional de las definiciones de grupo y demostración sólo se presenta en el texto UNA lo correspondiente a la definición de grupo pues la definición de demostración no existe y solamente se hace referencia a algunos aspectos relacionados con este término en los últimos Módulos de los textos de Matemática I y Matemática II de Estudios Generales. El siguiente cuadro (Cuadro 21) muestra las unidades y la transcripción del contenido.

Cuadro 21
Unidades primarias de análisis

Unidades	Transcripción del contenido del texto
U_0	**UNIDAD DE APRENDIZAJE 6** **GRUPOS Y PROPIEDADES** - Identificar propiedades de grupos - Identificar algunos tipos de Grupos **Experiencia de Aprendizaje 14**

DEFINICIÓN Y EJEMPLOS

- Dado un conjunto dotado de una ley de composición interna, determinar si posee estructura de Grupo.
- Manejar algunas propiedades básicas de Grupo.

Sección 113

EJEMPLOS Y DEFINICIÓN DE GRUPO

Antes de dar la definición de grupos, estudiaremos algunos ejemplos de conjuntos con ciertas operaciones que tienen propiedades similares.

EJEMPLOS

U_1 a. Consideremos el conjunto **Z** de los números enteros con la operación suma, es decir, (**Z,**+). $

U_2 Hemos visto que (**Z,**+) cumple las siguientes propiedades:

a.1. La operación suma es una ley de composición interna sobre el conjunto **Z** es decir, + es una función de **Z**x**Z** en **Z**

a.2. La operación suma es asociativa, es decir,

$$(x+y)+z = x+(y+z).$$

cualesquiera sean $x,y,z \in \mathbf{Z}$

a.3. Existe un elemento neutro con respecto a esta operación, que es el número 0, y que verifica:

$x = 0+x = x+0$, para toda $x\in\mathbf{Z}$

a.4. Para todo elemento $x\in\mathbf{Z}$**,** existe el elemento simétrico en **Z**, respecto a esta operación, es decir, para cada $x\in\mathbf{Z}$ existe $-x\in\mathbf{Z}$, tal que

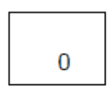
$x+ (-x) = (-x)+x= 0$ $

U_3 Observe que una situación análoga la tenemos con:

(**Q**,+), (**R**,+) y (**C**,+)

Ahora veamos que además de la suma de números enteros, pueden hacerse otro tipo de operaciones con otros entes, de tal manera que se verifiquen propiedades análogas a las a.1, a.2, a.3, a.4 $

U_4 b. Consideremos las rotaciones de un cuadrado en el plano alrededor del centro 0, que lo llevan en sí mismo (ver figura)



. $

U_5 Diremos que dos rotaciones son iguales si difieren en un número entero de giros completos (es decir, en un ángulo que sea múltiplo de 360^0 . $

U_6 Se puede verificar que las dos rotaciones en cuestión son las de 90^0, la de 180^0, la de 270^0 y la llamada rotación de ángulo nulo. $

U_7 Denotaremos estas rotaciones por:

rot 90^0
rot 180^0
rot 270^0
rot 0^0

Observe que cada una de estas rotaciones son funciones que mandan el cuadrado en sí mismo, por lo tanto aplicar dos rotaciones o más consecutivamente es equivalente

U_8 a hacer la composición de dos o más funciones. $

U_9 Por ejemplo si aplicamos al cuadrado rot 90^0 y luego rot 180^0, obtenemos: rot 180^0 o rot 90^0 = rot 270^0

U_{10} Es fácil ver que la composición de dos rotaciones del cuadrado, es nuevamente una rotación del cuadrado, y por lo tanto la composición de rotaciones es una ley de composición interna sobre el conjunto de las rotaciones del cuadrado. $

Haciendo todas las posibles composiciones de estas rotaciones, obtenemos la siguiente tabla:

o	rot 0^0	rot 90^0	rot 180^0	rot 270^0
rot 0^0	rot 0^0	rot 90^0	rot 180^0	rot 270^0
rot 90^0	rot 90^0	rot 180^0	rot 270^0	rot 0^0
rot 180^0	rot 180^0	rot 270^0	rot 0^0	rot 90^0
rot 270^0	rot 270^0	rot 0^0	rot 90^0	rot 180^0

$

U_{11} Sabemos que la composición de rotaciones es asociativa, ya que éstas son funciones. $

U_{12} De la tabla se tiene que el elemento neutro es la rotación nula y que todo elemento tiene simétrico. $

U_{13} c. Sea X un conjunto, P(X) el conjunto de partes de X, consideremos en P(X) la ley de composición diferencia simétrica (ver Módulo 2). $

U_{14} Hemos probado que, dados

$$A, B, C \in P(X)$$

Se tiene :

- c.1. $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$
- c.2. $A = A \Delta \phi = \phi \Delta A$
- c.3. $\phi = A \Delta A$

Es decir, la diferencia simétrica en P(X) es asociativa, el conjunto ϕ es el elemento neutro y todo elemento tiene simétrico respecto a esta operación. $

U_{15}

d. Observe que las propiedades análogas a a.1, a.2 , a.3, a.4 del ejemplo a., que verifican los dos ejemplos anteriores también las verifican:

$$(\mathbf{Q}^*,.), (\mathbf{R}^*,.), (\mathbf{C}^*,.). \ \$$$

Todos los conjuntos dotados de una cierta operación que satisfacen propiedades similares a las del ejemplo a. tiene gran importancia. De aquí la siguiente definición:

U_{16} **DEFINICIÓN 1 (Grupo)**

Un conjunto G no vacío con una ley de composición interna *, decimos que es un grupo respecto a esa ley si (G,*) verifica las siguientes propiedades:

$U_{16.1}$

1. La ley de composición * es asociativa, es decir, $(x*y)*z = x*(y*z)$, cualesquiera sean $x,y,z \in G$
2. Existe un elemento neutro $e \in G$. Es decir, $e \in G$ tal que
   $$e*x = x*e = x, \text{ para todo } x \in G$$
3. Para todo $x \in G$, existe elemento simétrico de x, es decir, existe $x' \in G$ tal que $x*x' = x'*x = e$

U_{17}	Si además de 1), 2) y 3) la ley de composición es conmutativa, se dice que el grupo es conmutativo o abeliano. $ En honor al gran matemático noruego Niels Henrik Abel (1802-1829), de quien C. Hermite (matemático francés (1802-1905) dijo: "Ha legado a los matemáticos algo que les mantendrá activos durante 500 años" Nótese que todos los ejemplos considerados anteriormente son ejemplos de grupos conmutativos. $
U_{18}	**Sección 114** **NOTACIÓN** En la práctica , para designar la ley de composición interna u operación de un grupo, se emplearán las siguientes notaciones: + (Notación aditiva que se usa frecuentemente cuando el grupo es conmutativo) . (Notación multiplicativa) Es decir, para componer u operar dos elementos x,y $\in$G, se escribe x+y ó x.y, según sea el caso. Nosotros, de ahora en adelante, salvo se diga lo contrario, usaremos la notación multiplicativa y escribiremos xy en lugar de x.y Al elemento neutro se le denota generalmente por : 0 (cuando la notación es aditiva) 1 o e (cuando la notación es multiplicativa) Nosotros, en general, denotaremos al elemento neutro del grupo con la letra e. Para designar el elemento simétrico de un elemento x de un grupo, se utilizan las siguientes notaciones: -x (si la notación es aditiva y se le llama opuesto de x) x^{-1} (si la notación es multiplicativa y se le lo llama inverso de x) En este Módulo usaremos la segunda notación, salvo que se diga lo contrario. Al hablar de un grupo diremos: "el grupo G", sin nombrar la ley de composición interna salvo en aquellos casos que esto pueda traer algún tipo de confusión. $
U_{19}	**Sección 115** **EJERCICIOS RESUELTOS**
$U_{19.1}$	1. Considere el conjunto: $\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in$ R$\}$ con la operación suma de matrices, entonces (G,+) es un grupo conmutativo. $
U_{20}	**DEMOSTRACIÓN**
$U_{20.1}$	• Como ya hemos visto (Módulo 2, Mat. II), la suma de matrices 2x2, es nuevamente una matriz 2x2, y además esta suma es asociativa. $
$U_{20.2}$	La matriz nula $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es el elemento neutro. $

U21 ya que :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Para todo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$

Dada una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$, si consideramos la matriz $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ se tiene que

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. $

U22

Es decir, toda matriz de G, tiene matriz simétrica en G. $

Por último, es fácil ver que esta operación es conmutativa ya que, dadas dos matrices:

U23

$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, tenemos que

U24 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$. $

2. Probar que el conjunto G del ejercicio anterior, con el producto de matrices no es
U25 un grupo. $

- Si consideramos la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y la multiplicamos por una matriz cualquiera

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, se obtiene,

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $

U26

U27 Es decir, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es el elemento neutro de G respecto a esta operación. $

Consideremos la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y multipliquémosla por una matriz cualquiera

U28 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, es decir,

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $

Luego la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no tiene elemento simétrico respecto a este producto, por lo tanto, (G,.) no es un grupo. $

U29

U_{30} 3. Sea X un conjunto y Biy(X) el conjunto de Apl(X) (ver Módulo 2, sección 104) formado por todas las funciones biyectivas de X en X. Entonces Biy(X) con la composición de funciones es un grupo. $

- En efecto, como ya hemos visto, la composición de funciones es asociativa.

La función identidad I: $X \to X$, definida por $I(x)=x$ para cada $x \in X$ es un

U_{31} elemento de Biy(X), y además es el elemento neutro respecto a esta operación. $

ya que:

U_{32}

$$Iof=foI=f \quad \text{para toda } f \in Biy(X). \quad \$$$

U_{33} Dada una función $f \in Biy(X)$, la función inversa o recíproca f^{-1} de f es el elemento inverso de f. $

U_{34} Debido a que:

U_{35}

$$fof^{-1} = f^{-1}of = I \quad \$$$

Por lo dicho antes (Biy(X), o) es un grupo. $

U_{36}

Este grupo no es conmutativo en general. $

ya que si por ejemplo

$$X = \mathbf{R} \quad y\ g(x)=x+1,\ f(x) = 2x$$

Se tiene que $g,f \in Biy(X)$ y
$gof(x) = 2x+1$, $fog(x) = 2x+2$

Como

$$gof(1)=3,\ fog(1)=4$$

U_{37} Obtenemos

$$gof \neq fog$$

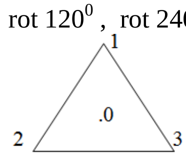
U_{38} 4*. El conjunto $\mathbf{Z}_n$ con la operación + definida en el Módulo 2 sección 106, es un grupo conmutativo. $

- En efecto, hemos probado que + es asociativa en $\mathbf{Z}_n$, que $\overline{0}$ es el elemento neutro respecto a esta operación y que el simétrico de $\overline{n_1}$ es el elemento $\overline{n_2}$ tal que $\overline{n_1+n_2} = \overline{0}$, es decir, n_1+n_2 es un múltiplo de n. Además se tiene

U_{39} que $\overline{n_1}+\overline{n_2} = \overline{n_2}+\overline{n_1} = \overline{n_{2+}n_1}$ cualesquiera sean $n_1 y\ n_2 \in \mathbf{Z}$ $

5. Considere el triángulo equilátero con centro o (ver figura), entonces todas las rotaciones de este triángulo que lo llevan en sí mismo son:

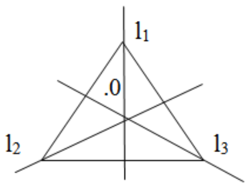
$$\text{rot } 120^0,\ \text{rot } 240^0,\ 360^0 = 0^0$$



$U_{39.1}$ $

Además de estas, considere las simetrías, S_1 , S_2 y S_3 respecto a las rectas l_1, l_2 y l_3 respectivamente (ver figura)

$U_{39.2}$



Entonces el conjunto

$$S_T = \{\text{rot } 0^0, \text{ rot } 120^0, \text{ rot } 240^0, \; S_1, S_2, S_3\}$$

con la composición de funciones es un grupo. $

En efecto, haciendo todas las posibles composiciones de los elementos S_T se obtiene la siguiente tabla:

o	rot 0^0	rot 120^0	rot 90^0	S_1	S_2	S_3
rot 0^0	rot 0^0	rot 120^0	rot 240^0	S_1	S_2	S_3
rot120^0	rot120^0	rot 240^0	rot 0^0	S_3	S_1	S_2
rot 240^0	rot 240^0	rot 0^0	rot 120^0	S_2	S_3	S_1
S_1	S_1	S_2	S_3	rot 0^0	rot120^0	rot 240^0
S_2	S_2	S_3	S_1	rot240^0	rot 0^0	rot 120^0
S_3	S_3	S_1	S_2	rot 120^0	rot 240^0	rot 0^0

Es claro que $^{\upsilon}$ es asociativa. De la tabla se obtiene que rot 0^{υ} es el elemento neutro y que todo elemento tiene simétrico.
Observe que este grupo no es conmutativo, ya que por ejemplo:

$$S_1 \text{o rot } 120^0 = S_2 \neq S_3 = \text{rot } 120^0 \text{o } S_1 \quad \$$$

U_{40} 6. El conjunto G= $\{2^n : n\in \mathbf{Z}\}$ con el producto de números naturales es un grupo conmutativo.

U_{41} En efecto: como (**Q*,.**) es un grupo, entonces el producto de elementos de G es asociativo y conmutativo. Además

a) $2^0.2^n = 2^n.2^0 = 2^n$
b) $2^n.2^{-n} = 2^{n-n} = 2^0 = 2^{-n}.2^n$

Para todo $n\in \mathbf{Z}$

U_{42}

Luego $1 = 2^0$ es el elemento neutro de G y el simétrico de 2^n es 2^{-n}. Por lo tanto G es un grupo conmutativo con el producto de números racionales. $

U_{43}

Sección 116
EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Probar que el conjunto **N** con la operación de suma usual, no es un grupo.
2. U_{44} Sea X un conjunto no vacío y consideremos en P(X) las operaciones "+" y "."

   Definidas como sigue:

   a. $A+B=A\cup B$, para todo $A,B\in P(X)$
   b. $A.B= A\cap B$, para todo $A,B\in P(X)$ $U_{44.1}$

   Demostrar que (P(X),+), (P(X),.) no tiene estructura de grupo y hallar los elementos neutros en cada uno de los casos.

3. Considere el conjunto G= $\{f:\mathbf{R}\to R: f \text{ es una función}\}$ con la operación suma de funciones. Demuestre que (G,+) es un grupo conmutativo.

4. Demuestre que el conjunto 2**Z=** {2n: n∈**Z**} con la operación de números enteros, es un grupo conmutativo.
5. Hallar todas las rotaciones y simetrías de las letras A,S y O que las llevan en sí.
6. Consideremos el conjunto G={e,a,b,c} con la ley de composición interna dad por la siguiente tabla:

U_{45}

·	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

   a. Verifique que. es conmutativa
   b. Verifique que e es elemento neutro
   c. Verifique que el elemento simétrico de cada elemento es el mismo elemento.
   d. Verifique que. es asociativa. (Ver ejercicio 2, auto evaluación 3) $

Este grupo es llamado grupo de Klein, en honor al matemático alemán Felix Klein (1842-1925). $

U_{46}

Sección 117
RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. No es grupo, ya que no existe el simétrico de cada elemento. $

2. a) El elemento neutro es el conjunto ϕ, ya que:

$$A\cup\phi= \phi\cup A= A, \text{ para todo } A\in P(X)$$

b) El elemento neutro es el conjunto X, ya que:

$$A\cap X= X\cap A =A, \text{ para todo } A\in P(X)$$

(P(X),+) no tiene estructura de grupo, ya que si tuviera, para todo $A\in P(X)$ debería existir un $B\in P(X)$ tal que:

$$A\cup B = \phi, \text{ (por ser } \phi \text{ el elemento neutro)}$$

de lo que se concluye que $A=B=\phi$

Y esto no vale necesariamente, ya que podemos tomar $A\neq\phi$, puesto que $X\neq\phi$

Análogamente, si (P(X),.) fuera un grupo, para todo $A\in P(X)$ debería existir $B\in P(X)$ tal que:

$$A\cap B=X \quad \text{(por ser X el elemento neutro)}$$

Luego

$$A=B=X$$

Esto es cierto en general, salvo que si $X=\phi$

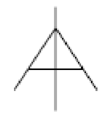
U_{47}

Observe que por lo visto antes, $X= \phi$, entonces

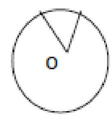
$$(P(X),+), \ (P(X),.) \text{ son grupos ya que } P(\phi)= \{\phi\}. \ \$$$

3. Hemos visto (Módulo 1, Mat. 2) que la suma de funciones es asociativa. El elemento neutro para la suma es la función nula O, idénticamente igual a cero y el simétrico de cada función f es la función –f. Además, la suma de funciones reales es conmutativa, por lo tanto, (G,+) es un grupo conmutativo.
4. La operación suma en 2**Z** es una ley de composición interna, ya que la suma de dos números pares es nuevamente un número par, esta operación es asociativa debido a que lo es en **Z**.
   El elemento neutro es 0=2.0 y el simétrico de 2n es 2(-n). Además, esta operación es conmutativa porque en **Z** también lo es, luego (2**Z**,+) es un grupo conmutativo.

5. En el caso de la letra A, tenemos solamente:
   a) La rotación de 0^0, es decir, rot 0^0 y
   b) La simetría de la recta l (ver figura)



En el caso de la letra S sólo tenemos dos rotaciones respecto a su centro estas son: rot 0^0 y rot 180^0, y ninguna simetría.
Por último en el caso de la letra O tenemos todas las rotaciones con centro O y ángulo cualquiera (ver figura) y todas las simetrías respecto a cualquier recta que pasa por o.



U_{48} Observe, que en cualquiera de los casos anteriores el conjunto de las rotaciones y simetrías de las recta A, S ó O forma un grupo con la composición de funciones. $

Sección 118
PROPIEDADES DE GRUPOS

Veamos ahora algunas propiedades de grupos.

Teorema 1.

Si G es un grupo, entonces valen las siguientes propiedades:

a) El elemento neutro de G es único.
b) El inverso de cada elemento de G es único.
c) Para todo $a \in G$, $(a^{-1})^{-1} = a$.
d) Para todo a , $b \in G$, $(ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$

Trate de probar este teorema por su cuenta, si no puede probar alguna de las propiedades, vea la demostración en el Módulo 2 de este curso, secciones 102 y 104.

Cuando tratamos de resolver una ecuación del tipo $a*x = b$, sobre algún conjunto G, donde $*$ es una ley de composición interna sobre este conjunto; como por ejemplo, si G es el conjunto de los números reales, de los números complejos, ¿cómo podemos asegurar de que esta ecuación tiene solución en estos conjuntos y que esta solución es única? La respuesta a esta pregunta nos la da el siguiente teorema.

Teorema 2

Dados dos elementos a,b cualesquiera en un grupo G, la ecuaciones:

$$ax = b$$

U49 $$ya = b$$

tienen soluciones y éstas son únicas.

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que $x_1 \in G$ es una solución de la ecuación $ax = b$, es decir, $ax_1 = b$; si en ella multiplicamos ambos miembros por la izquierda, por el inverso de a, obtenemos:

$$a^{-1}\,(ax_1) = a^{-1}\,b$$

es decir

$$(a^{-1}\,a)\,x_1 = a^{-1}\,b$$

Luego

$$e\,x_1 = a^{-1}\,b$$

por lo tanto

$$x_1 = a^{-1}\,b$$

Es decir, si x_1 es solución de la ecuación $ax = b$, entonces x_1 es de la forma $a^{-1}\,b$. Es fácil comprobar que $a^{-1}\,b$ es solución de esta ecuación. Por este hecho y lo dicho antes se tiene que $x_1 = a^{-1}\,b$ es la única solución de esta ecuación. Análogamente se prueba para $ya = b$

U50

Haga otra demostración de la unicidad, suponiendo que existen dos soluciones.

Ahora podemos asegurar que las ecuaciones $a*x = b$ y $y*a = b$ tienen soluciones y éstas son únicas sobre cualquier grupo G.

Sección 119
EJERCICIOS RESUELTOS

1. Considere el conjunto $U_4 = \{1, -1, i, -i\}$, con el producto de números complejos. Construya la tabla del producto en U_4 y verifique que U_4, con este producto, es un grupo y halle todas las soluciones de las ecuaciones:

   (a) $ix = 1$, $ix = i$, $ix = -1$, $ix = -i$

   - Haciendo todos los productos de los elementos de U_4, se obtiene la siguiente tabla:

.	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

	El producto en U_4 es asociativo porque el producto de números complejos lo es. De la tabla se deduce que (U_4, .) cumple las demás propiedades del grupo, como: $x = (i)^{-1}\,1 = -i$ $x = (i)^{-1}\,i = 1$ $x = (i)^{-1}\,(-1) = i$ $x = (i)^{-1}\,(-i) = -1$ Son soluciones respectivamente de las ecuaciones de (a), y (U_4, .) es un grupo, se tiene que éstas son las únicas soluciones de dichas ecuaciones. 2. En el ejercicio 5 de la sección 115 halar la solución del sistema de ecuaciones: $\begin{cases} rot\ 120^0 \ \ o \ \ x = S_1 \ \ o \ \ y & (1) \\ S_2 \ \ o \ \ y \ \ o \ \ S_3 = S_1 & (2) \end{cases}$ • De (1) se tiene que: $X = ((rot\ 120^0)^{-1}\ o\ S_1) o\ y = ((rot\ 240^0)\ o\ S_1) o\ y = S_2\ o\ y$ Sustituyendo este resultado en (2), y despejando se obtiene: $x = S_1\ o\ S_3^{-1} = S_1\ o\ S_3 = rot\ 240^0$ sustituyendo este resultado en (1) y despejando se obtiene:
U_{51}	$y = S_1\ o\ rot\ 120^0\ o\ rot\ 240^0 = S_1$ Observe, que por el teorema 2 estas soluciones son únicas. Resuelva el sistema propuesto despejando primero y en la ecuación (2). **Sección 120** **EJERCICIOS PROPUESTOS** 1. Sea G un grupo y sean a, x, y∈G. Probar que en G valen las dos leyes de cancelación, es decir:
U_{52}	$ax = ay \Rightarrow x = y$ (cancelación por la izquierda) $xa = ya \Rightarrow x = y$ (cancelación por la derecha) 2. Probar que en un grupo G el único elemento que verifica la propiedad x x = x, es el elemento neutro. Deducir de aquí que si G es un grupo tal que todo elemento verifica dicha propiedad, entonces G tiene un solo elemento. **Sección 121** **RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS** 1. Supongamos que existen a, x, y∈G tales que ax = ay; multiplicando en ambos

	miembros, por la izquierda, por a^{-1}, se obtiene: $a^{-1}(ax) = a^{-1}(ay)$ luego $(a^{-1}a)x = (a^{-1}a)y$ Por lo tanto $ex = ey$ entonces $x=y$ De manera similar se procede para probar la otra ley de cancelación. 2. Evidentemente el elemento neutro e del grupo G verifica la propiedad e e = e Supongamos que x_1 e $\in$G es tal que $x_1 x_1 = x_1$. De aquí se deduce $x_1 x_1 = x_1 e$ y por lo tanto, cancelando por la izquierda se obtiene $x_1 = e$ luego, e es el único elemento que verifica la ecuación $x x = x$ la otra parte es inmediata. Haga otra demostración sin utilizar las leyes de cancelación (usa elemento inverso x_1^{-1}).

Combinación de Entidades Elementales

A continuación se muestran en el cuadro 22 la combinación de las entidades elementales

Cuadro 22
Clasificación de las unidades primarias de análisis

Praxis
Situaciones
▪ Semejanza de las propiedades de (**Z**,+) a (**Q**,+), (**R**,+), (**C**,+). Además de otros entes con otras operaciones (U_3)
▪ Ejemplos de rotaciones iguales (U_6)
▪ Ejemplo de composición de rotaciones (U_9)
▪ Composición de las rotaciones de un cuadrado (U_{10})
▪ Propiedades de la Diferencia Simétrica en el Conjunto de las Partes (U_{14})
▪ Analogía de las propiedades descritas, con las propiedades de ($\mathbf{Q}^*$,.), ($\mathbf{R}^*$,.), ($\mathbf{C}^*$, .) e importancias de estos conjuntos (U_{15})
▪ Referencia histórica de personajes ligados a la teoría de grupos. Consideración de los ejemplos anteriores como Grupos Conmutativos (U_{17})
▪ Expresión Ejercicios resueltos (U_{19})
▪ Grupo de las matrices cuadradas 2x2 con la suma de matrices es un grupo abeliano ($U_{19.1}$)
▪ Propiedad de cierre y asociatividad de la suma de matrices 2x2 ($U_{20.1}$)
▪ Conmutatividad de las matrices 2x2 (U_{23})
▪ El conjunto de las matrices con el producto de matrices no es grupo (U_{24})
▪ Biy(X) con la composición de funciones es Grupo (U_{29})
▪ Biy(X) con la composición de funciones no es Grupo conmutativo (U_{35})

▪ (**Z_n**,+) es un grupo (U_{37})
▪ (S_T,o) es un grupo (U_{40})
▪ G={2^n: n∈**Z}** con el producto de naturales es grupo conmutativo (U_{42})
▪ Ejercicios propuestos (U_{44})
▪ **N** con la suma usual no es grupo, cada elemento no tiene simétrico (U_{46})
▪ Expresión: Ejercicios propuestos (U_{56})
▪ Expresión: Ejercicios resueltos (U_{57})
Técnicas
▪ Aplicación de dos (2) o más rotaciones (U_8)
▪ Prueba a través de contraejemplo de que un conjunto con una operación dada no es un grupo (U_{27})
▪ Prueba de existencia de soluciones de una ecuación en un grupo (U_{51})
▪ Prueba de unicidad de soluciones de una ecuación en un grupo (U_{58})
Lenguaje
Términos y Expresiones
▪ Grupo como tarea general de estudio de la Unidad (U_0)
▪ Rotaciones de un cuadrado en un plano (U_4)
▪ Conjunto de Partes y ley de composición Diferencia Simétrica (U_{13})
▪ Matriz nula 2x2 ($U_{20.2}$)
▪ Triángulo equilátero con centro 0 (U_{39})
▪ Rotaciones de un triángulo equilátero ($U_{39.1}$)
▪ Grupo de Klein (U_{45})
Notaciones
▪ (**Z**,+) Conjunto **Z** con la operación suma. Notación de Grupo (U_1)
▪ Denotación de Rotaciones (U_7)
▪ Grupos aditivos (+), (x+y) multiplicativos (.), (x.y) Elemento neutro: Grupo aditivo (0), Multiplicativo (1). Neutro (e). Simétrico (-x, x^{-1}). Grupo (G) (U_{18})
▪ Notación de Simetrías de un triángulo equilátero ($U_{39.2}$)
Teoría
Conceptos
▪ Igualdad de rotaciones (U_5)
▪ Grupo, grupo abeliano(U_{16}, $U_{16.1}$)
▪ Definiciones de suma y producto de conjuntos ($U_{44.1}$)
Propiedades
▪ Propiedades del conjunto **Z** con la operación Suma (Grupo (**Z**,+)) (U_2)
▪ Propiedades de la Diferencia Simétrica en el Conjunto de Partes (U_{14})
▪ Propiedades del Grupo ($U_{16.1}$)
▪ Existencia de matrices simétricas para la matriz 2x2 (U_{22})
▪ Elemento neutro multiplicativo de las matrices 2x2 (U_{26})
▪ Propiedades de la composición de funciones (U_{30})
▪ Elemento neutro de la composición de funciones (U_{30})
▪ Elemento simétrico de la composición de funciones(U_{32})
▪ (Biy(X),o) es un grupo (U_{34})
▪ Propiedades de la suma en **Z_n** (U_{38})

▪ Propiedades de Grupo (U_{48})
▪ Propiedades del producto de números complejos (U_{54})
Argumentaciones
▪ Propiedad asociativa de las rotaciones (U_{11})
▪ Argumentación del elemento neutro y Simétrico de la composición de rotaciones (U_{12})
▪ Expresión “DEMOSTRACIÓN” (U_{20})
▪ Verificación de que la matriz nula 2x2 es el neutro para la adición de matrices 2x2 (U_{21})
▪ Expresión: Demostración (U_{50})
▪ Verificación de que un conjunto dado es un grupo (U_{53})
▪ Verificación de se cumple propiedad de unicidad (U_{59})
▪ Verificación de que la matriz identidad 2x2 es el neutro del producto de matrices 2x2 (U_{25})
▪ Verificación de que la función I es el neutro de la composición de funciones sobre Biy(X) (U_{31})
▪ Verificación de que f^{-1} es el inverso en la composición de funciones sobre Biy(X) (U_{33})
▪ Verificación de que (Biy(X),o) no es grupo conmutativo (U_{36})
▪ Verificación de que (S_T,o) es un grupo (U_{41})
▪ Verificación de que un conjunto es Grupo conmutativo (U_{43})
▪ Verificación de que determinados conjuntos son grupos (U_{47})
▪ Determinación de las soluciones de un sistema (U_{55})

Trayectoria Epistémica

El siguiente cuadro (Cuadro 23) muestra la trayectoria Epistémica:

Cuadro 23
Trayectoria Epistémica

Unidad	Descripción	Estado
U_0	Grupo como integrante de la praxeología	Lenguaje
U_1	Notación de un conjunto con una operación	Lenguaje
U_2	Propiedades de **Z** con la operación suma	Propiedades
U_3	Semejanza de las propiedades expuestas para otros conjuntos y otras operaciones.	Situación
U_4	Término: Rotaciones de un cuadrado y su gráfica	Lenguaje
U_5	Definición de igualdad de Rotaciones	Concepto
U_6	Ejemplos de Rotaciones iguales	Situacional
U_7	Denotación de Rotaciones	Lenguaje
U_8	Cómo aplicar dos o más Rotaciones	Acciones
U_9	Ejemplo de composición de Rotaciones	Situacional
U_{10}	Composición de Rotaciones de un cuadrado	Situacional
U_{11}	Propiedades de las Rotaciones	Argumentación
U_{12}	Argumentación de la existencia de neutro y simétrico para Rotaciones	Argumentación

U_{13}	Términos: Conjunto de Partes, Diferencia Simétrica	Conceptos
U_{14}	Propiedades de la Diferencia Simétrica	Propiedades
U_{15}	Analogía de propiedades expuestas para otros conjuntos	Situacional
U_{16}	Definición de Grupo y Grupo abeliano	Conceptos
$U_{16.1}$	Propiedades de un Grupo	Propiedades
U_{17}	Consideración de ejemplos presentados como Grupos abelianos	Situacional
U_{18}	Notación de Grupos, Grupos aditivos, multiplicativos, neutro y simétrico	Lenguaje
U_{19}	Expresión: Ejercicios resueltos	Situacional
$U_{19.1}$	Ejemplo de Grupo conmutativo	Situacional
U_{20}	Expresión: Demostración	Lenguaje
$U_{20.1}$	Propiedad del cierre y asociatividad de las matrices 2x2	Situacional
$U_{20.2}$	Términos: Matriz 2x2 y nula	Lenguaje
U_{21}	Verificación de neutro y simétrico	Argumentación
U_{22}	Propiedad de las matrices 2X2	Propiedades
U_{23}	Conmutatividad de matrices	Situacional
U_{24}	Ejemplo de conjunto con ley interna que no es Grupo	Situacional
U_{25}	Verificación de neutro	Argumentación
U_{26}	Propiedades de las matrices 2x2	Propiedades
U_{27}	Prueba de que no es Grupo a través de contraejemplo	Acciones
U_{28}	Propiedad de las matrices 2x2	Propiedades
U_{29}	Ejemplo de Grupo	Situacional
U_{30}	Propiedades de la composición de funciones	Propiedades
U_{31}	Verificación de neutro	Argumentación
U_{32}	Propiedades de la composición de funciones	Propiedades
U_{33}	Verificación de inverso	Argumentación
U_{34}	Ejemplo de Grupo	Situacional
U_{35}	Ejemplo de conjunto con ley interna que no es Grupo conmutativo	Situacional
U_{36}	Verificación de que un conjunto no es Grupo conmutativo	Argumentación
U_{37}	Ejemplo de Grupo	Situacional
U_{38}	Propiedades de la suma en $\mathbf{Z}_n$	Propiedades
U_{39}	Triángulo equilátero de centro 0	Lenguaje
$U_{39.1}$	Rotación de un triángulo equilátero	Lenguaje
$U_{39.2}$	Notación de simetrías	Lenguaje
U_{40}	Ejemplo de Grupo	Situacional
U_{41}	Verificación de que un conjunto es Grupo	Argumentación (*)
U_{42}	Ejemplo de Grupo	Situacional
U_{43}	Verificación de que un conjunto es un Grupo conmutativo	Argumentación(*)
U_{44}	Ejercicios propuestos	Situacional
$U_{44.1}$	Definición de suma y producto de conjuntos	Conceptos
U_{45}	Grupo de Klein	Lenguaje
U_{46}	Ejemplo de conjunto sin la propiedad de existencia de simétrico	Situacional
U_{47}	Verificación de qué conjuntos son Grupos	Argumentación(*)
U_{48}	Propiedades de Grupo	Propiedades
U_{49}	Expresión: Demostración	Lenguaje
U_{50}	Expresión: Ejercicios resueltos	Situacional
U_{51}	Expresión: Ejercicios propuestos	Situacional
U_{52}	Respuestas a los ejercicios propuestos	Situacional

(*) Introducen una técnica para verificar si un conjunto con una ley interna es Grupo

Continuando con la propuesta de Font (2002), citado por Chacón (2006), para las numerosas funciones semióticas, así como para la información obtenida anteriormente se muestran (Cuadro 23), las diversas funciones identificadas que permitirán establecer los conflictos semióticos probables:

Funciones Semióticas

Cuadro 24
Funciones semióticos

	Extensional		Intensional		Notacional	
Extensional	EE1	U_{21} U_{25} U_{27} U_{37}	EI2		EN3	
Intensional	IE4	U_3 U_6 U_8 U_9 U_{10} U_{17} $U_{20.1}$ U_{23} U_{24} U_{29} U_{31} U_{32} U_{34} U_{35} U_{40} U_{42} U_{43} U_{44} U_{46} U_{47}	II5	U_2 U_5 U_{11} U_{12} U_{16} U_{22} U_{26} U_{28} U_{30} U_{38} $U_{44.1}$	IN6	U_1 $U_{2.1}$ $U_{2.2}$ $U_{2.3}$ $U_{2.4}$ U_4 U_7 U_{18} U_{39} $U_{39.1}$ $U_{39.2}$
Notacional	NE7	U_0 U_{15} U_{36} U_{41}	NI8	U_{13} U_{14} $U_{19.1}$	NN9	U_{19} U_{20} $U_{20.2}$ U_{45}

Conflictos Semióticos Posibles

Sobre la información suministrada en el cuadro anterior se identifican los conflictos semióticos probables para el investigador.

1. (U_0) Se denomina la Unidad "Grupos y Propiedades" y en ésta se plantea a los estudiantes los objetivos que son, en ambos casos "identificar" (Nivel de Conocimiento en la Taxonomía de objetivos de Bloom). Al pasar a otra experiencia de aprendizaje se mencionan dos nuevos objetivos "Determinar" y "Manejar" que pertenecen a los Niveles de Evaluación y Aplicación (Respectivamente). En los enunciados hace su aparición un nuevo objeto matemático "Grupo" el cual está vinculado con objetos ya conocidos "Conjunto" y "Ley de Composición Interna" los cuales definen una nueva praxeología para el estudiante.
2. (U_1) Esta frase corresponde a una Unidad Notacional que parte de intensivos "conjunto **Z** de los números enteros" y "Operación Suma". Se coloca la preposición "con" y enseguida se da por entendido que esto se denota (**Z**,+), notación que, hasta ahora, no ha aparecido en el texto, tampoco se explica el significado de "con". En este caso se origina un vacío al suponer que el

estudiante ha comprendido que (**Z**,+) significa un “par especial conformado por el conjunto **Z** de los Números enteros y la operación definida como suma”. Este vacío es considerado de gran magnitud, pues esta noción continúa siendo utilizada a lo largo de toda la Unidad. Por otro lado se percibe en los textos referenciales que en éstos se introduce variadas formas mejor explicadas: “Par (G,T)” o Par (G,*) con la debida explicación de su significado como un conjunto y una ley de Composición.

3. (U_2) En este caso, la expresión usada es un intensivo cuyo contenido es otro intensivo; donde cada numeral (a_1, a_2,…) expresiones intensivas con contenido Notacional. Se asume que se ha visto que (**Z**,+) cumple propiedades y que el estudiante ha comprendido cabalmente el significado de (**Z**,+), cuando lo que se ha visto son las propiedades de la Suma en el conjunto **Z** (Curso de Matemática I, Versión Actual y Versiones anteriores; y no se hace ninguna referencia a la necesidad de revisarlo nuevamente). Vale agregar que en la primera propiedad se relacionan dos intensivos “ley de composición interna” y “función de **Z**x**Z**” mientras que en las demás propiedades sólo se utilizan notaciones que se espera resulten ser intensivos para el estudiante.
4. (U_4) Dando por hecho la comprensión de la notación (**Z**,+) plantean la analogía entre las propiedades descritas en U_2 con las que se cumplen en (**Q**,+), (**R**,+), (**C**,+). Se asume que esto genera una acción de verificación por parte del estudiante de tal analogía, pero, el texto no lo solicita. Se mantiene abierta la posibilidad de generalizar lo planteado a otros conjuntos y otras operaciones. Como no se plantea como una actividad explícita que deberá ser convertida por el estudiante en una entidad Actuativa, ésta se convierte en un intensivo más.
5. (U_4) La expresión intensiva “rotación de un cuadrado alrededor del centro 0” se representa con un dibujo, sin embargo, el dibujo no representa el intensivo. Nuevamente se está suponiendo tácitamente que el estudiante conoce el significado de relaciones en el plano.

6. (U_5) Aquí se introduce el concepto "Rotaciones iguales" pero no se presenta ningún ejemplo y cómo funciona dicho concepto. Tampoco se solicita al estudiante verifique o interprete tal concepto.
7. (U_6) Se plantea la posibilidad de verificar el concepto de igualdad de rotaciones, sin embargo, no se pide expresamente al estudiante que lo haga.
8. (U_7) Se le asigna una notación a las rotaciones mencionadas antes.
9. (U_8) Se comienza con un intensivo cuando se usa la expresión "funciones que mandan el cuadrado en sí mismo" para caracterizar las rotaciones anteriores. ¿Pero qué significa "mandar un cuadrado en sí mismo"? Expresión ambigua y poco técnica que muy bien se hubiera podido ejemplificar gráficamente. Seguidamente que "por tanto" aplicar dos o más rotaciones equivale a hacer "composición de dos o más funciones" (En este caso se pasa de una expresión intensiva-ambigua a un contenido intensivo que el estudiante debe conocer).
10. (U_9) En esta Unidad se ejemplifica lo anterior usando la notación "o" de composición de funciones. Pero la notación no es suficientemente clara, porque no es la representación tradicional empleada para composición, es interesante preguntarse, ¿cómo interpreta el estudiante, a partir de lo plantead rot 180^0 o rot 90^0 ? Acá tampoco se han presentado ejemplos de utilización parecida de composición de funciones. La Unidad culmina con un "es fácil verificar" argumentando que la composición de rotaciones es ley de composición interna. De nuevo no aparecen, las sugerencias de cómo verificar ni la solicitud para hacerlo.
11. (U_{10}) Es utilizado el concepto de composición de rotaciones en la construcción de una tabla que minimiza la actuación del estudiante. De nuevo no se le indica que lo realice.
12. (U_{11}) En esta parte la propiedad (intensivo) de la composición de rotaciones de ser asociativa es argumentada usando el intensivo asociado en U_8 el cual hace referencia a que las rotaciones son funciones (intensivo que solamente fue anunciado no ejemplificado ni argumentado, ni se solicitó su verificación) y la

existencia de la propiedad de la composición de funciones de ser asociativa. Aparece un trama de intensivos que generan uno nuevo.

13. (U_{12}) Con la justificación de las propiedades del “elemento neutro y simétrico” se pone fin a la presentación de la praxeología concerniente a las rotaciones bajo la argumentación de “la tabla”. Ante esta situación para el estudiante pueda llegar a entender la argumentación tiene que llevar a cabo algunas verificaciones nada claras en cuanto a su procedimiento. Como ya es costumbre no se solicita argumentación al estudiante. Se da por culminada esta praxeología sin ninguna recapitulación que permita vincularla con el ejemplo precedente, quedando así aislada.
14. (U_{13}) En esta Unidad sólo combina términos simplemente enunciados referidos a intensivos tratados anteriormente (Conjunto, Conjunto de Partes) con otros a los cuales invita al estudiante a que los revise (Ley de Composición, Diferencia Simétrica). Aquí las expresiones son del lenguaje pero los contenidos son conceptuales.
15. (U_{14}) Esta Unidad arranca de expresiones totalmente notacionales las cuales deben ser interpretadas como propiedades (intensivos) de la Diferencia Simétrica como operación en el Conjunto de Partes. Donde a pesar de decir “hemos probado” no ha sido así a lo largo del texto, tan solo ha sido enunciado. De nuevo no se visualiza la conexión de esta praxeología con las anteriores, permaneciendo aislada.
16. (U_{15}) En esta Unidad se parte de expresiones rotacionales con contenido intensional (**Q***,.), (**R***,.),(**C***,.) las cuales inducen una Actuación al estudiante cuando se expresa que poseen propiedades análogas a las de los ejemplos anteriores, sin embargo, se insiste en la notación (**Q***,.) que no ha sido explicitada al estudiante y que en los dos ejemplos anteriores a ello no ha sido presentada (inclusive ni en el caso de las rotaciones, ni tampoco en el caso de la Diferencia Simétrica).
17. (U_{16}) Aquí se presenta la definición central de “Grupo” que es un intensivo de carácter conceptual con intensivos implícitos como propiedades ($U_{16.1}$). Usa

como preámbulo la expresión referida a las propiedades del ejemplo a. (y cabe la pregunta: ¿Por qué no a las del b y c, se han catalogadas como análogas? Esto ratifica el aislamiento de los ejemplos)

Además, en la definición se incluye por primera vez la condición que el conjunto G debe ser no vacío (Sin ninguna argumentación ni interrogante para el estudiante). Nuevamente se usa el Notacional (**G**,*) sin mayor explicación. Se presentan las propiedades (intensivos con expresiones notacionales). También se agrega un posible propiedad: la "conmutatividad" asignándole terminología propia sin incluir elementos Notacionales.

18. (U_{17}) Se realiza una referencia histórica acerca de la importancia de la teoría de grupos abelianos. Además se especifica que los ejemplos planteados anteriormente son grupos conmutativos, sin embargo, una vez más no se le solicita al estudiante su verificación. Se considera una expresión intensivo que debería producir un extensivo mediante la actuación del sujeto.

19. (U_{18}) En esta Unidad los intensivos fundamentales vierten su contenido en ostensivos Notacionales. En una primera parte se fija una notación restrictiva y particular que bien pudiera producir la confusión del Notacional "+" y éste se presenta como el contenido de un intensivo mucho más amplio pues se designa la ley interna de grupos conmutativos. Esta notación, generalmente, indica suma, adición, ahora representa múltiples operaciones. En cuanto a la notación (.) será el ostensivo contenido en un intensivo que designa a la ley interna de grupos no abelianos (esto no se dice explícitamente sin embargo, así poder interpretarlo). Además, esta notación no se da nada muy bien con los ejemplos dados anteriormente, particularmente los referentes a rotaciones y diferencia simétrica.

    Se hace hincapié en que la notación a usar en adelante será la multiplicativa en la forma xy en lugar de x.y. Esto se interpreta literalmente como sustituir cualquier símbolo de cualquier ley de composición por "nada" (Se vuelven a recordar los casos de la diferencia simétrica y de las rotaciones). Esta clase de representación Notacional es un extremo particular y pudiese dar lugar a ser interpretada como que las “operaciones o leyes internas posibles para los grupos serían aditivas o multiplicativas solamente.

El establecimiento de x^{-1} como inverso de x vuelve a dar la misma idea restrictiva de que el tipo de operaciones involucradas son las multiplicativas. El grado de generalización de esta notación es mucho más amplio ahora.

20. (U_{19}) En esta Unidad el enunciado “Ejercicios resueltos” y el planteamiento del numeral ($U_{19.1}$) inducen la actividad matemática, es decir, son expresiones con contenido situacional extensional.
21. (U_{20}) La palabra demostración es una expresión que indica que se va a dar la justificación o argumentación de la proposición intensiva enunciada previamente. En $U_{20.1}$ se argumenta lo interno de la ley y de la asociatividad refiriendo a otro punto del material instruccional siendo este un contenido que invita al estudiante a la acción de revisar el contenido de nuevo (Un extensional, actuativo). En $U_{20.2}$ se hace una afirmación muy delicada “$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$” lo que debe ser interpretado como que el “0” de la izquierda de la igualdad significa elemento neutro y no el número, este tipo de notación no es clara.
22. (U_{21}) Esta Unidad es la verificación de que la matriz nula 2x2 es el elemento neutro de la adición de matrices y de cuál es la matriz simétrica en el conjunto de las matrices 2x2 . Se tiene así, por lo tanto, una argumentación cuya expresión se deriva de un conjunto de Notacionales representativos de varios extensivos.
23. (U_{22}) Se observa un intensivo pues anuncia una propiedad del objeto matemático, en este caso, de la adición de matrices 2x2.
24. (U_{23}) Aquí se presenta un intensivo (propiedad conmutativa) representado mediante Notacionales e induce la actividad matemática de verificación de lo que allí se expresa a partir de argumentaciones, pero, no se le pide , explícitamente, al estudiante que lo haga.
25. (U_{24}) De nuevo se presenta una Situación que induce a la actividad matemática.
26. (U_{25}) Con el uso de Notacionales cuyo contenido es intensivo se argumenta la existencia de neutro multiplicativo en el conjunto de las matrices 2x2, sin

embargo, la presentación es como una “película” editada, y en este caso el estudiante no participa en su elaboración, sólo mira. (Surge la duda ¿Qué haría el estudiante ante esta situación problemática si no visualiza previamente cuál es el neutro?)

27. (U_{26}) Debido a que se anuncia una propiedad del objeto matemático que en este caso es la multiplicación de matrices 2x2, se puede notar la presencia de un intensivo.
28. (U_{27}) La información presentada en esta Unidad es algo confusa, mediante unas notaciones argumenta que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ al multiplicarse por una matriz 2x2 cualquiera no será igual a la matriz identidad en ningún caso (la cual, según se indicó en la U_{26} era el neutro multiplicativo. Esto último no se explicita). Con esta presentación del contenido resulta poco significativo dentro de lo que se realiza.
29. (U_{28}) En esta Unidad de una representación Notacional se obtiene una generalización muy amplia. De este modo difícilmente será aprovechado por los estudiantes este intensivo, como tampoco la argumentación empleada para generarlo.
30. (U_{29}) Un enunciado que induce a la actividad matemática (Situacional).
31. (U_{30}) Acá se presentan intensivos como propiedades matemáticas del objeto matemático tratado. En la parte inicial se alude a un tema ya tratado, sin hacer referencia a en qué momento se hizo.
32. (U_{31}) Aquí se argumenta que la función identidad es el elemento neutro respecto a la composición. Esta argumentación está incompleta, sin que haya ninguna indicación para que el estudiante la complete.
33. (U_{32}) Se presenta una expresión intensional que induce a la práctica educativa. Este intensivo es una propiedad del objeto matemático tratado.
34. (U_{33}) Se argumenta que la función identidad es el elemento neutro respecto a la composición. Esta argumentación está incompleta, sin embargo, no hay sugerencia alguna para que el estudiante la complete.

35. (U_{34}) composición. (U_{34}) En esta generalización se cierra el ejemplo dado en U_{29} con un intensivo tipo “proposición” ya verificada. Con la intención de que el procedimiento quedase realmente entendido en este momento, sería necesario recapitular lo realizado. Nótese que en ninguno de los ejemplos esto se ha realizado. Vale decir, recordando lo establecido en U_{18} sobre la notación que sería usada, que nuevamente se usó como símbolo de la ley interna (Composición de funciones en este caso) el símbolo “^{0}” en contradicción con lo dicho en U_{18}.
36. (U_{35}) La expresión Intensional dada en este ejemplo tiene un contenido Situacional que induce a la actividad matemática de la argumentación.
37. (U_{36}) Esta Unidad está conformada por un conjunto de Notacionales contenido de expresiones intensivas que son una argumentación de lo expresado en U_{35}. Es usado el contraejemplo como medio de argumentación, sin embargo, no se menciona en ningún momento. Ni se hace un cierre del ejemplo, quedándose en la espera del mismo.
38. (U_{37}) Unidad con expresión intensiva que induce a la argumentación teniendo entonces un contenido extensivo, situacional.
39. (U_{38}) Esta Unidad argumenta lo planteado en U_{37}. En ningún momento se explicita qué es lo que se está haciendo, sólo se hace. La argumentación de la asociatividad, elemento neutro y simétrico se realiza sobre la base de una referencia de un Módulo del texto anterior, vale decir, la expresión “es decir n_1+n_2 es múltiplo de n” es una explicación relativa a propiedades de $\mathbf{Z}_n$ que para efectos del planteamiento no resulta relevante. El ejemplo no se ilustra, quedando la impresión de que algo falta.
40. (U_{39}) Esta Unidad junto con $U_{39.1}$ y $U_{39.2}$ son expresiones intensivas con contenido Notacional que indican la representación en lenguaje de los objetos matemáticos que serán tratados a continuación. a pesar de que son conocimientos que presumiblemente deberían ser adquiridos previamente, haciéndose necesario dar alguna referencia para que el estudiante revise por cuenta propia. De nuevo se emplea una expresión de la jerga matemática “que lo

lleven en sí mismo”, expresión que para el estudiante no debe resuktar muy clara, no dándose explícitamente alguna de ella.

41. (U_{40}) Expresión intensiva que posee un contenido situacional ya que induce a la actividad matemática.
42. (U_{41}) En esta Unidad se argumenta lo planteado en U_{40}. La argumentación suministrada es muy particular en cuanto a que se utiliza una tabla con todas las posibilidades de composición para los elementos del conjunto estudiado. Así como no es explicado en ningún momento cómo realizar las diversas composiciones, por ejemplo ¿por qué S_3 o rot $0^0 = S_3$?, esto no es nada claro ni evidente. Esta situación crea un vacío que inducirá al estudiante a buscar recursos adicionales de comprensión, sin ninguna referencia previa. Las argumentaciones presentadas en las siguientes líneas dependen de esta tabla, a pesar de ello no se sugieren, en ningún momento como derivadas de ésta, inclusive en el caso de la asociatividad ¿Cuántas combinaciones posibles hay que realizar para asegurarla?
    En cuanto a la conmutatividad se elige un contraejemplo de la generalidad, a pesar de esto no se reafirma que es posible que existan casos de composiciones conmutativas dentro de la tabla, sin implicar la conmutatividad del grupo en general. Un ejemplo puede llevar a una confusión a futuro de que es posible verificar las propiedades del grupo construyendo una tabla de valores. El ejercicio no dice nada al respecto ni cierra con ninguna conclusión.
43. (U_{42}) Expresión intensiva con contenido situacional que induce a la actividad matemática.
44. (U_{43}) En esta Unidad se argumenta lo planteado en U_{42}. La argumentación inicial (conmutatividad y asociatividad) se fundamenta en que (**Q***,.) es un grupo, esto genera conflictos inmediatos en el estudiante, ¿por qué? ¿Qué relación hay? Además debe fundamentarse en que (**Q***,.) es grupo conmutativo, y cuando se probó tal afirmación o se sugirió probarla, aparece un tremendo vacío en la información para el estudiante, generando un punto crítico en su comprensión. Además se utilizan unos Notacionales contenido de expresiones intensivas para argumentar el neutro y simétrico, no hay cierre ni recapitulación en el ejemplo.

45. (U_{44}) Esta Unidad se corresponde con la sección de ejercicios propuestos para el estudiante. Cada uno de los planteamientos comprende expresiones intensionales con contenido extensional que inducen a la actividad matemática ya que traducen situaciones donde éste debe argumentar, probar, validar. Se incluyen algunos intensivos puros como $U_{44.1}$, la cual es una definición específica para ser utilizada.
46. (U_{45}) Expresión con contenido del lenguaje matemático, la cual es justificada por su raíz histórica.
47. (U_{46}) Esta Unidad pertenece a las respuestas dadas en el texto a los ejercicios propuestos al estudiante. En esta Unidad en particular se argumenta con la expresión de una propiedad que no es cumplida generando un contenido extensivo, pues induce a la actividad matemática de argumentación.
48. (U_{47}) Esta Unidad cubre el resto de las respuestas dadas a los ejercicios planteados a los estudiantes, las cuales son expresiones intensivas con contenido Notacional o intensivo las cuales argumentan directamente lo planteado en los ejercicios o en algunos casos referencian a otras partes del texto.
49. (U_{48}) Esta Unidad presenta un intensivo pues anuncia propiedades del término “Grupo.
50. (U_{49}) La palabra “DEMOSTRACIÓN” es una expresión lingüística que indica que se va a proporcionar justificación o argumentación a la proposición intensiva anunciada en U_{47} Esta Unidad se corresponde con la sección de ejercicios propuestos para el estudiante. Cada uno de los planteamientos comprende expresiones intensionales con contenido extensional que inducen a la actividad matemática ya que traducen situaciones donde éste debe argumentar, probar, validar.
51. (U_{50}) En esta Unidad el enunciado “Ejercicios resueltos” induce la actividad matemática, es decir, son expresiones con contenido situacional extensional.
52. (U_{51}) Esta Unidad se corresponde con la sección de ejercicios propuestos para el estudiante. Cada uno de los planteamientos comprende expresiones intensionales

con contenido extensional que inducen a la actividad matemática ya que traducen situaciones donde éste debe argumentar, probar, validar.

53. (U_{52}) Esta Unidad pertenece a las respuestas dadas en el texto a los ejercicios propuestos al estudiante. En esta Unidad en particular se argumenta con la expresión de una propiedad que no es cumplida generando un contenido extensivo, pues induce a la actividad matemática de argumentación.

Significado Referencial

Con los términos "Grupo" y "Demostración" se denota un sistema de prácticas descriptivas, Actuativas, discursivas y validativas cuyos elementos característicos se describen a continuación:

Cuadro 25
Significado referencial

Elemento	Descripción
Lingüísticos	La notación e interpretación de grupo se simboliza de variadas formas. ▪ Queysanne: - Le llama grupo G ó Conjunto que posee estructura de Grupo - Grupo es un par (G,T) donde T es ley interna (Ley de grupo) - T cumple propiedades: asociativa, elemento neutro, elemento simetrizable. - El elemento neutro se denota con "e" - El elemento simétrico de "a" se denota por " a' " - El cardinal finito de G lo convierte en grupo finito. - G conmutativo es llamado Grupo Abeliano - Para la ley + ó . se llama grupo aditivo o grupo multiplicativo. - Se muestra una tabla explicativa de las propiedades de Grupo teniendo presente si son aditivos, multiplicativos o de una ley cualquiera T. ▪ Kostrikin: - Grupo es un Monoide G con todos los elementos invertibles - Operación Binaria $(x,y)\rightarrow xy$ La operación cumple propiedades: asociativa, elemento neutro (unidad) denotada por "e", existe inverso denotado por "x^{-1}. ▪ Herstein: - Conjunto no vacío de elementos donde se define una operación binaria, el producto (.) - (.) cumple las propiedades cierre, asociativa, elemento identidad (e), existencia de inversos (a^{-1})

	Orden del grupo o(G): número de elementos de un grupo finito ▪ Rojo: - Emplea la notación (G,*) como estructura de grupo. Donde G es un conjunto no vacío y * una función. - * es una ley interna que verifica axiomas: Asociatividad, existencia de neutro o identidad (e), existencia inversos (a’) - Si G es conmutativo se denomina abeliano. - Si G es aditivo la ley se denota + y el simétrico se denomina opuesto y se denota –a. - Si G es multiplicativo la ley es * y el simétrico se llama inverso y se denota a^{-1}. - Al grupo (G,*) se le identifica luego por G. ▪ Ayres: - $\mathscr{G}$. Conjunto no vacío con una operación definida (^{o}) - Propiedades: ley asociativa, existencia de elemento neutro (u), existencia de simétrico (a^{-1}). - Al simétrico a^{-1} cuando la operación binaria es la adición se le denota por –a - Si la operación es la adición se llama grupo aditivo y si es la multiplicación se le llama multiplicativo. - Presenta una Nota aclarando respecto al uso de a^{-1} para denotar el simétrico (respectivamente -a). - . -
Situacionales	El campo de problemas del que emergen el objeto de estudio.. ▪ .Kostrikin - Submonoide con propiedades especiales. Marco histórico que desemboca en Galois. ▪ Herstein: - Realiza una introducción donde inserta la definición en el conjunto de las estructuras matemáticas, describiendo superficialmente su historia. - Operaciones Binarias no conmutativas y con propiedades específicas cumplidas. ▪ Rojo: - Realiza una introducción en la cual vincula con lo anterior y lo que vendrá a continuación dentro del texto. - Sistema axiomático básico y fundamental de la matemática. - Impone condiciones a las estructuras de Monoide o semigrupo. -
Actuativos	Las situaciones problema que originan las definiciones. ▪ Queysanne:

	Las reglas de cálculo son aplicaciones de los axiomas usando notaciones variadas dependientes de la ley interna ▪ Kostrikin: Verificar cumplimiento de los diferentes axiomas. ▪ Herstein: - Escribir todos los elementos del grupo y verificar que aplicando la ley interna, para todos se cumplen los axiomas. ▪ Rojo: - Verificación los axiomas. - Verificación del elemento neutro e inverso por la izquierda y por la derecha. - . -
Conceptuales	**Definición 1** (Queysanne, M.) Un Conjunto G provisto de una ley interna T, es decir, un par (G,T) es un grupo si: G_1) la ley es asociativa G_2) existe un elemento neutro en (G,T) G_3) todo elemento de (G,T) es simetrizable **Definición 2** (Kostrikin, A) Un monoide G, cuyos elementos son todos invertibles, se llama grupo. En otras palabras, se presupone el cumplimiento de los siguientes axiomas: (G_1) en el conjunto G hay definida una operación binaria: $(x,y)\rightarrow xy$, (G_2) la operación es asociativa: $(xy)z = x(yz)$, para todos los $x,y,z \in G$ (G_3) G posee elemento neutro (unidad) e: $xe = ex = x$, para todo $x \in G$, (G_4) para cada elemento $x \in G$, existe un inverso x^{-1}: $xx^{-1} = x^{-1}x = e$ **Definición 3** (Herstein, A) Un conjunto no vacío de elementos G se dice que forma un grupo ei en G está definida una operación binaria, llamada producto y denotada por (.) que: 1. $a,b \in G$ implica que $a.b \in G$ (cierre) 2. $a,b,c \in G$ implica que $a.(b.c)=a.(b.c)$ (ley asociativa) 3. Existe un elemento $e \in G$ tal que $a.e=e.a = a$ para todo $a \in G$ (existencia del elemento identidad en G) 4. Para todo $a \in G$ existe un elemento $a^{-1} \in G$ tal que $a.a^{-1} = a^{-1}a = e$ (existencia de inversos en G)

	Definición 4. (Rojo A.) Sean un conjunto no vacío G, y una función *. El par (G,*) es un grupo si y sólo si * es una ley interna en G, asociativa, con elemento neutro, y tal que todo elemento de G admite inverso respecto de *. En forma simbólica, se presenta (G,*) es un grupo si y sólo si se verifican los axiomas G_1. $*: G^2 \to G$ G_2. Asociatividad $\forall a \forall b \forall c \in G \Rightarrow (a*b)*c = a*(b*c)$ G_3. Existencia de elemento neutro o identidad $\exists e \in G \,/\, \forall a: a \in G \Rightarrow a*e=e*a = a$ G_4. Existencia de inversos $\forall a \in G, \exists a' \in G / a*a' = a'*a = e$ **Definición 5** (Ayres, F) Un conjunto no vacío G sobre el cual se ha definido una operación binaria ^{0} se llama grupo con respecto a esta operación si para cualesquiera $a,b,c \in G$ se verifican las siguientes propiedades: P_1 $((a^0b)^0c = a^0(b^0c)$ (ley asociativa) P_2 Existe un $u \in G$ tal que $a^0u=u^0a= a$ (existencia de elemento neutro) P_3 Para cada $a \in G$ existe un $a^{-1} \in G$ tal que $a^0a^{-1}= a^{-1\,0}\,a =u$ (existencia de elemento simétrico)
Proposicionales	▪ Queysanne: La ley interna o ley de grupo es asociativa, existe el elemento neutro y todo elemento es simetrizable. ▪ Kostrikin: Propiedades del grupo lineal general GL(n,R). ▪ Herstein Existen grupos finitos no triviales ▪ Ayres Z no es multiplicativo.
Validativos	

A continuación se presenta el cuadro comparativo (Cuadro 26) entre el significado Referencial y el significado Local Implementado.

Comparación de Significados

Cuadro 26
Comparación del significad Referencial y el significado Local Implementado

Elemento	Significado Local	Presentes en el referencial y ausentes en el local
Lingüísticas	**Términos utilizados** Conjuntos Conjuntos no vacíos Ley de Composición Interna Grupo Grupo Aditivo Grupo Multiplicativo Grupo Abeliano Grupo de Klein Neutro Simétrico o inverso Asociatividad Conmutatividad	Operación binaria Estructura Algebraica Sistema Axiomático Sistema Algebraico. Monoide Submonoide Elemento Identidad Neutro a la izquierda y a la derecha Inverso a la izquierda y a la derecha Simetrizable Cierre-Cerrado Teoría de grupos.
	Expresiones utilizadas Propiedades del grupo Grupo respecto a la ley "Conjunto" con "ley u operación"	Par (G,*) Axiomas de Grupo $(x,y)\rightarrow xy$ Transformaciones (Por funciones) "Operación Binaria llamada producto"
	Notaciones Grupo G, (G,*) Notación aditiva (+) Notación Multiplicativa (.) Notación a usar para operar: Multiplicativa en la forma xy (en vez de x.y) Elemento neutro (e) (0 si la ley es aditiva, 1 si es multiplicativa) Elemento simétrico:-x (opuesto) si la ley es aditiva, x^{-1} (inverso) si la ley es multiplicativa.	Explicación detallada del significado de (G,*) como "par especial" Función Identidad I_A
	Gráficos Figura referida a las rotaciones de un cuadrado. Tabla de composición de rotaciones. Figura referida a rotaciones y simetrías de un triángulo equilátero.	Tabla de las propiedades cuando la ley interna es + o .
Situacionales	**Problemas abiertos** Analogía de propiedades de los grupos ejemplificados con otros	

	conjuntos análogos. Grupos	
	Aplicaciones extra matemáticas No aparecen	Alusión a las posibles aplicaciones a las Ciencias Naturales.
	Ejercicios En las Unidades U_{44}, U_{52} y U_{56} presenta un conjunto de ejercicios propuestos	Variedad de otros ejercicios y ejemplos: Simetrías del Plano, Isometrías etc.
Actuativos	**Operaciones** Cálculo de todas las Composiciones que aparecen en la Tabla de U_{10} Cálculos de verificación de las propiedades de los conjuntos para ser o no grupos.	
	Algoritmos No aparecen	
	Técnicas de cálculo No aparecen especificadas.	Verificación de neutro y simétrico por la izquierda y derecha. Reglas de cálculo cuando es aditivo o multiplicativo.
	Procedimientos Aplicación de dos rotaciones (U_8) Aunque no explícitamente se deduce el procedimiento de verificación sobre si un conjunto con una determinada ley es un grupo.	Verificación de que un conjunto con una ley es un grupo (Con mayor precisión que en el texto de la UNA)
Conceptuales	**Definiciones** Definición de rotaciones iguales Definición de grupo Definición de grupo abeliano	
	Descripciones Rotaciones de un triángulo equilátero Simetrías de un triángulo equilátero Adición y multiplicación de conjuntos ($U_{44.1}$) Grupo de Klein	
Propiedades	**Enunciados** Propiedades de la suma en Z Propiedades de la Diferencia Simétrica Propiedades de la adición de matrices 2x2. Propiedades de la Composición de funciones. Propiedades de la suma en Z.	
	Proposiciones	

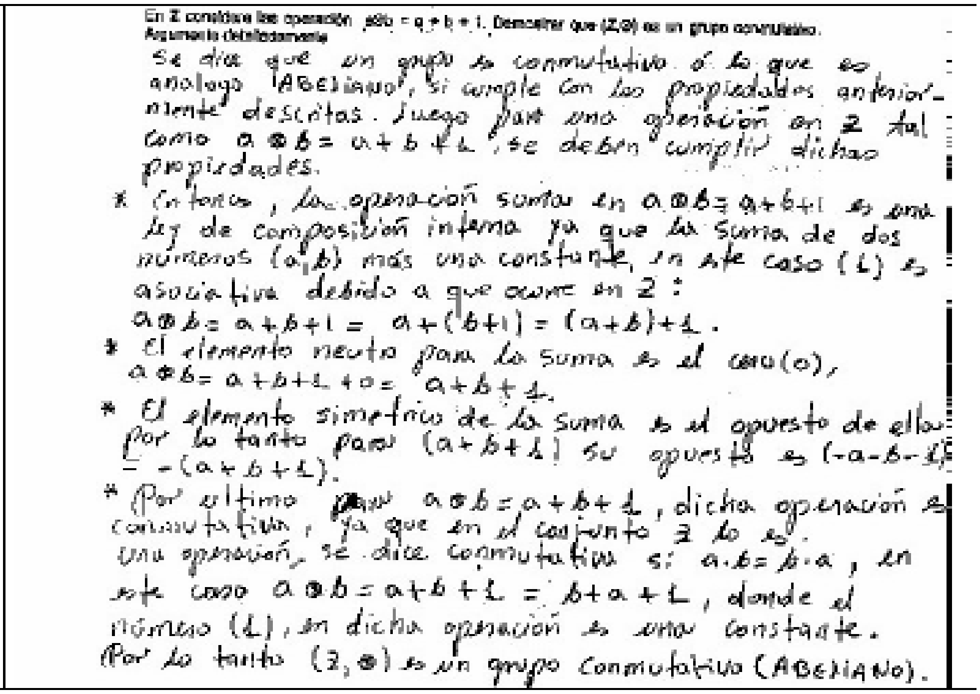
	Propiedades que definen un Grupo Conjuntos con leyes que son grupos.	
Validativos	**Argumentaciones** Asociatividad de la rotaciones Existencia de neutro y simétrico de la Composición de rotaciones iguales. La matriz nula es el neutro de la adición de matrices 2x2. El simétrico de la Composición de matrices 2x2 Inverso de la Composición de funciones biyectivas (Biy(X),o) no es abeliano El grupo aparecido en U_{40} y U_{42} es en efecto un grupo	Argumentación de el uso de a^{-1} y $-a$ Argumentación de la verificación de axiomas.
	Demostraciones El conjunto de las matrices 2x2 con la adición de matrices es un grupo El conjunto de las biyecciones con la Composición es un grupo El conjunto Z_n con la suma es un grupo	

Análisis cognitivo desde un punto de vista semiótico

En el siguiente cuadro siguiente, (Cuadro 27), se muestra la información suministrada por el estudiante en la prueba elaborada para ello y que de utilidad para realizar el análisis cognitivo desde un punto de vista semiótico.

Cuadro 27
Unidades de análisis de la tarea del estudiante.

Unidades	Trascripción del contenido del examen o tarea elaborado por el estudiante
U_0 U_1	Escribe la Definición de Grupo: Un grupo es un conjunto cualquiera no vacío, dotado de una serie de propiedades y una ley de composición interna, donde las propiedades que posee son las siguientes: la ley de composición es asociativa, existe un elemento neutro, simétrico, y además posee la propiedad conmutativa.
U_2	PTA 2 Interpreta la siguiente notación (R,°) La notación (R,°) significa el conjunto R de los números reales con la operación ° la ley de composición interna.
U_3 U_4	Escribe el procedimiento para verificar si un Conjunto P donde se define una ley de composición * es un Grupo Abeliano El procedimiento para verificar si cualquier conjunto, en este caso el conjunto P es un grupo abeliano, es el siguiente: - La ley de composición debe ser asociativa. - Debe existir un elemento neutro x ∈ P. - Debe existir el elemento simétrico para todo x ∈ P. - Además de estas propiedades debe tener la propiedad conmutativa, para poder ser un grupo abeliano.



	En Z considere las operación $a \oplus b = a + b + 1$. Demostrar que $(Z, \oplus)$ es un grupo conmutativo. Argumente detalladamente
U_5	Se dice que un grupo es conmutativo ó lo que es analogo 'ABELIANO', si cumple con las propiedades anteriormente descritas. Luego para una operación en Z tal como $a \oplus b = a + b + 1$, se deben cumplir dichas propiedades.
U_6	* Entonces, la operación suma en $a \oplus b = a + b + 1$ es una ley de composición interna ya que la suma de dos números (a, b) más una constante, en este caso (1) es asociativa debido a que ocurre en Z:
U_7	$a \oplus b = a + b + 1 = a + (b + 1) = (a + b) + 1$.
U_8	* El elemento neutro para la suma es el cero (0), $a \oplus b = a + b + 1 + 0 = a + b + 1$.
U_9	* El elemento simetrico de la suma es el opuesto de ello. Por lo tanto para $(a + b + 1)$ su opuesto es $(-a - b - 1) = -(a + b + 1)$.
U_{10}	* Por ultimo para $a \oplus b = a + b + 1$, dicha operación es conmutativa, ya que en el conjunto Z lo es. Una operación, se dice conmutativa si: $a \cdot b = b \cdot a$, en
U_{11}	este caso $a \oplus b = a + b + 1 = b + a + 1$, donde el número (1), en dicha operación es una constante. Por lo tanto $(Z, \oplus)$ es un grupo Conmutativo (ABELIANO).

Significado personal que le atribuye el estudiante a las nociones de "Grupo" y "demostración"

Con la información suministrada en el cuadro 26 se presenta ahora el significado personal que atribuye el estudiante a las nociones de "Grupo" y "demostración"

Cuadro 28
Significado personal

Elemento	Descripción
Lingüísticos	Se observa cuando el estudiante responde la segunda pregunta de la tarea, especialmente (R,*): interpreta R como números reales y a ^{0} como ley de composición interna.
Situacionales	En este caso los enunciados cumplen este rol, a pesar de ello el estudiante no propone otra situación para justificar las cuestiones que se le plantean.
Actuativos	Desarrollo que muestra en las argumentaciones suministradas en U_6 a U_{11}
Conceptuales	Se aprecia cuando el estudiante utiliza el concepto de grupo o al indicar las condiciones para ser grupo. U_0
Proposicionales	Cuando escribe las propiedades de un grupo U_1.
Validativos	Cuando argumenta en U_5 lo que debe hacer para validar que $(Z, \otimes)$ es un grupo. Igualmente cuando enuncia la argumentación para demostrar cada propiedad.

Conflictos semióticos

Identificación de funciones semióticas

Cuadro 29
Funciones semióticas detectadas en el texto de la tarea

	Extensional		Intensional		Notacional	
Extensional	EE1	U_6 U_7 U_8 U_9	EI2		EN3	
Intensional	IE4	U_3 U_4 U_5	II5	U_0 U_1	IN6	
Notacional	NE7		NI8	U_2	NN9	

Conflictos semióticos

Cuadro 30
Análisis de las diversas unidades del significado personal

Unidades	Análisis semiótico de las respuestas dadas
U_0	El estudiante enuncia, en la definición que “Un grupo es un conjunto con algunas propiedades y una ley interna” le asigna las propiedades al conjunto y no a la ley como debiera ser. Luego redacta las supuestas propiedades del conjunto se las asigna a la ley. La ley interna y el conjunto terminan aislados en la definición. Cuanto realiza la verificación de que el conjunto del ejercicio 3 es un grupo, se reafirma esta confusión al argumentar lo que realizará.
U_1	Aquí se observa que asigna las propiedades ahora a la ley y no al conjunto tal como enunció. Le asigna la propiedad conmutativa generalizando a cualquier grupo, naturalmente que esto no es válido pues existen grupos no conmutativos.
U_2	El estudiante interpreta la Notación tal como aparece en su texto: un conjunto “con” una ley interna, sin embargo no afirma que es un grupo que es precisamente el significado dado en el texto. Además interpreta R como el conjunto de los números reales. Lo cual no es necesariamente cierto. Maneja como un sinónimo operación y ley de composición interna y omite en su presentación el símbolo de ley ^{0}.
U_3	El estudiante habla de cualquier conjunto y obvia de nuevo la ley desvinculando el conjunto de la ley.
U_4	Escribe las propiedades de la ley conociendo, aparentemente, su notación. Hecho que no refleja en su aplicación en la pregunta 4. De nuevo no utiliza la ley al describir las propiedades (Neutro, Simétrico, Conmutativa). Se mantiene la desvinculación entre ley y conjunto.
U_5	El estudiante realiza una analogía que deje en evidencia el conflicto semiótico que padece: El grupo es conmutativo si el conjunto cumple las propiedades; “luego” la operación debe cumplir las propiedades. Esto refleja la no comprensión cabal de la definición de grupo.

U_6	A pesar de que las expresiones resultan un absurdo hay detalles que resaltar: a) Aparece la expresión "la operación suma" al lado de las propiedades de la suma de enteros, dejándose de lado la definición suministrada en ⊗, que no es la "suma" usual de los números enteros. b) Usa la expresión "suma de dos números" colocando un par ordenado (a,b). c) En ninguna parte el estudiante denota qué es asociatividad lo que confirma que sólo conoce el enunciado de las propiedades más no su notación y mucho menos en el caso que aparece el "1" al cual llama constante. d) Argumenta que es asociativa porque "ocurre en Z" (¿La suma de enteros en Z?). e) Intenta demostrar que es una ley interna pero lo combina con la asociatividad terminando sin demostrar ninguna de las dos propiedades de la ley ⊗
U_7	La notación utilizada confirma la confusión entre la operación "Suma" y la ley interna ⊗{ El estudiante no ha comprendido cual es la ley interna definida y asocia algunos elementos que componen la propia definición de la ley. Ya se había adelantado anteriormente la necesidad de clasificar la ley y las operaciones que definen la ley.
U_8	Surge aquí un proceso de generalización que había sido previsto en el análisis epistémico, como lo es el asumir "0" es el elemento neutro para cualquier ley de composición interna. Además esta unidad confirma el vacío que posee el estudiante en la comprensión de la definición de ley de composición interna, la cual convierte en una "suma". También se evidencia la falta de claridad en la definición de neutro y se reafirma el vacío de significado dado por éste a la existencia del neutro" para cualquier elemento del conjunto.
U_9	Hace su aparición un nuevo significado erróneo por parte del estudiante, establece que el simétrico es el opuesto aditivo, se debe recordar que en el texto se utiliza en U_{18} algunas convenciones que no resultan del todo claras, ocasionando como se evidencia un significado incorrecto.
U_{10}	En el enunciado de la argumentación que el estudiante utilizará aparece una generalización sobre el hecho de ser "Z conmutativo" (De nuevo vuelve a ser el conjunto el que posee las propiedades y no la ley), implica la conmutatividad de la ley. Significado de la noción de grupo conmutativo evidentemente erróneo. Aparece un nuevo elemento en la exposición del estudiante sobre la analogía de la conmutatividad con la conmutatividad del producto, la cual no utiliza sino que nuevamente, su vacío de significado de la ley interna, lo lleva a manipular parte de los elementos que definen la ley, creyendo que aplica la conmutatividad.
U_{11}	Lo iniciado en la anterior unidad lo completa en esta. Hay un evidente conflicto en el estudiante de tipo semiótico con el significado local implementado, tanto para el objeto matemático "ley interna" como para el nuevo objeto "grupo".

Conflictos semióticos reflejados

Cuadro 31
Conflictos semióticos reflejados

Elemento	Significado Local	Significado Personal	Conflicto presente
Lingüísticos	**Términos utilizados**: Conjuntos Conjuntos no vacíos Ley de Composición Interna Grupo Neutro Simétrico Asociatividad Conmutatividad	**Términos utilizados:** Conjuntos Conjuntos no vacíos Ley de Composición Interna Grupo Neutro Simétrico Asociatividad Conmutatividad	El estudiante utiliza el término Grupo asignándoselo a un objeto diferente al del texto. La ley de Composición Interna la reduce a operaciones aditivas o multiplicativas usuales. El neutro lo equipara con el Cero aditivo. El simétrico se reduce al opuesto aditivo.
	Expresiones utilizadas: Propiedades del grupo Grupo respecto a la ley Conjunto con ley u operación	**Expresiones utilizadas:** Dotado de propiedades Conjunto con operación o ley	Las propiedades que definen un grupo se las asigna al conjunto y no a la ley interna.
	Notaciones: Grupo G, (G,*) Notación aditiva (+) Notación multiplicativa (.) Notación a utilizar para operar: Multiplicativa en la forma xy (en vez de x.y) Elemento neutro (e) (0 si la ley es aditiva, 1 si es multiplicativa) Elemento simétrico: -x (opuesto) si la ley es aditiva, x^{-1} (inverso) si la ley es multiplicativa.	**Notación:** Grupo G, (G,*) Números (a,b) La interpretación solicitada en la pregunta N^0 2	Aparentemente interpreta correctamente la notación $(R,^0)$ sin embargo, a pesar de que pareciera deducirse que el par (R,*) es para el estudiante un Grupo, cuando usa la definición de grupo interpreta algo diferente.
Situacionales	**Ejercicios:** En U_{44} del texto de Álgebra hay una variedad	**Ejercicios:** La pregunta N^0 4 de la tarea se corresponde con un ejercicio.	El estudiante hace analogías con lo planteado en el texto, sin embargo, no está claro en quién cumple las propiedades: si el conjunto o la ley definida por él.
Actuativos	**Procedimientos:** El establecido no	**Procedimientos:** El solicitado en la pregunta	El estudiante escribe casi por

	explícitamente a lo largo de la exposición	N^0 3 de la tarea.	completo el procedimiento a seguir (salvo la propiedad del elemento neutro). Sin embargo existe nuevamente la expresión referida a que el conjunto independientemente de la ley es un Grupo, y es sobre esta base que él enuncia el procedimiento.
Conceptuales	**Definiciones:** Definición de grupo Definición de grupo Abeliano	**Definiciones:** Solicitada en la pregunta N^0 1	Se evidencia el conflicto principal: El conjunto no es por sí solo un Grupo, lo es cuando en él se define una ley interna, que cumple determinadas propiedades. El grupo es el conjunto con la ley interna definida.
Proposicionales	Propiedades que definen un grupo	Propiedades que definen un grupo.	Cuando el estudiante asigna las propiedades a un conjunto y no a la ley interna, la aplicación de las mismas se hace indebidamente. Este conflicto se materializa en la pregunta N^0 4 en la que el estudiante básicamente no utiliza la ley interna sino el conjunto.
Validativos	Diversas argumentaciones para asegurar que un conjunto con una ley interna es un Grupo.	Argumentaciones utilizadas para comprobar que un Conjunto dado con una ley es un grupo.	Las argumentaciones dadas por el estudiante a partir de una significación errónea de la noción de grupo no son válidas. Adicional a esto existe el conflicto

			entre el significado del neutro, que para el estudiante es el cero aditivo. Así como el simétrico el cual para el estudiante es el opuesto aditivo.

Análisis Instruccional

Identificación de las unidades de análisis correspondientes a las trayectorias Docente y Discente

Cuadro 32

Unidades de análisis para las trayectoria Docente y Discente

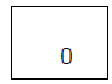
Unidades Discentes	Unidades docentes	Transcripción del contenido del texto
U_0	U_0	**UNIDAD DE APRENDIZAJE 6** **GRUPOS Y PROPIEDADES** - Identificar propiedades de grupos - Identificar algunos tipos de Grupos **Experiencia de Aprendizaje 14** **DEFINICIÓN Y EJEMPLOS** - Dado un conjunto dotado de una ley de composición interna, determinar si posee estructura de Grupo. - Manejar algunas propiedades básicas de Grupo.
	U_1	**Sección 113** **EJEMPLOS Y DEFINICIÓN DE GRUPO** Antes de dar la definición de grupos, estudiaremos algunos ejemplos de conjuntos con ciertas operaciones que tienen propiedades similares. **EJEMPLOS** e. Consideremos el conjunto **Z** de los números enteros con la operación suma, es decir, (**Z**,+). \$ Hemos visto que (**Z**,+) cumple las siguientes propiedades: a.1. La operación suma es una ley de composición interna sobre el conjunto **Z** es decir, + es una función de **Z**x**Z** en **Z** a.2. La operación suma es asociativa, es decir, $(x+y)+z = x+(y+z)$. cualesquiera sean $x,y,z \in \mathbf{Z}$ a.3. Existe un elemento neutro con respecto a esta operación, que es el número 0, y que verifica: $x = 0+x = x+0$, para toda $x \in \mathbf{Z}$ a.4. Para todo elemento $x \in \mathbf{Z}$, existe el elemento simétrico en **Z**, respecto a esta operación, es decir, para cada $x \in \mathbf{Z}$ existe $-x \in \mathbf{Z}$, tal que $x+(-x) = (-x)+x = 0$ \$

Observe que una situación análoga la tenemos con:

($\mathbf{Q}$,+), ($\mathbf{R}$,+) y ($\mathbf{C}$,+)

Ahora veamos que además de la suma de números enteros, pueden hacerse otro tipo de operaciones con otros entes, de tal manera que se verifiquen propiedades análogas a las a.1, a.2, a.3, a.4 $

f. Consideremos las rotaciones de un cuadrado en el plano alrededor del centro 0, que lo llevan en sí mismo (ver figura)



. $

Diremos que dos rotaciones son iguales si difieren en un número entero de giros completos (es decir, en un ángulo que sea múltiplo de 360^0 . $

Se puede verificar que las dos rotaciones en cuestión son las de 90^0, la de 180^0, la de 270^0 y la llamada rotación de ángulo nulo. $

Denotaremos estas rotaciones por:

rot 90^0
rot 180^0
rot 270^0
rot 0^0

Observe que cada una de estas rotaciones son funciones que mandan el cuadrado en sí mismo, por lo tanto aplicar dos rotaciones o más consecutivamente es equivalente a hacer la composición de dos o más funciones. $

Por ejemplo si aplicamos al cuadrado rot 90^0 y luego rot 180^0, obtenemos: rot 180^0 o rot 90^0 = rot 270^0

Es fácil ver que la composición de dos rotaciones del cuadrado, es nuevamente una rotación del cuadrado, y por lo tanto la composición de rotaciones es una ley de composición interna sobre el conjunto de las rotaciones del cuadrado. $

Haciendo todas las posibles composiciones de estas rotaciones, obtenemos la siguiente tabla:

o	rot 0^0	rot 90^0	rot 180^0	rot 270^0
rot 0^0	rot 0^0	rot 90^0	rot 180^0	rot 270^0
rot 90^0	rot 90^0	rot 180^0	rot 270^0	rot 0^0
rot 180^0	rot 180^0	rot 270^0	rot 0^0	rot 90^0
rot 270^0	rot 270^0	rot 0^0	rot 90^0	rot 180^0

$

Sabemos que la composición de rotaciones es asociativa, ya que éstas son funciones. $
De la tabla se tiene que el elemento neutro es la rotación nula y que todo elemento tiene simétrico. $

g. Sea X un conjunto, P(X) el conjunto de partes de X, consideremos en P(X) la ley de composición diferencia simétrica (ver Módulo 2). $

Hemos probado que, dados

$$A, B, C \in P(X)$$

Se tiene :

c.1. $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

c.2. $A = A \Delta \phi = \phi \Delta A$

c.3. $\phi = A \Delta A$

Es decir, la diferencia simétrica en P(X) es asociativa, el conjunto ϕ es el elemento neutro y todo elemento tiene simétrico respecto a esta operación. $

h. Observe que las propiedades análogas a a.1, a.2 , a.3, a.4 del ejemplo a., que verifican los dos ejemplos anteriores también las verifican:

$$(\mathbf{Q}^*,.), (\mathbf{R}^*,.), (\mathbf{C}^*,.). \ \$$$

U₂

Todos los conjuntos dotados de una cierta operación que satisfacen propiedades similares a las del ejemplo a. tiene gran importancia. De aquí la siguiente definición:

U₃

DEFINICIÓN 1 (Grupo)

Un conjunto G no vacío con una ley de composición interna *, decimos que es un grupo respecto a esa ley si (G,*) verifica las siguientes propiedades:

4. La ley de composición * es asociativa, es decir, $(x*y)*z = x*(y*z)$, cualesquiera sean $x,y,z \in G$
5. Existe un elemento neutro $e \in G$. Es decir, $e \in G$ tal que
$$e*x = x*e = x, \text{ para todo } x \in G$$
6. Para todo $x \in G$, existe elemento simétrico de x, es decir, existe $x' \in G$ tal que $x*x' = x'*x = e$

Si además de 1), 2) y 3) la ley de composición es conmutativa, se dice que el grupo es conmutativo o abeliano. $

U₄

En honor al gran matemático noruego Niels Henrik Abel (1802-1829), de quien C. Hermite (matemático francés (1802-1905) dijo: “Ha legado a los matemáticos algo que les mantendrá activos durante 500 años”

Nótese que todos los ejemplos considerados anteriormente son ejemplos de grupos conmutativos. $

U₅

Sección 114

NOTACIÓN

En la práctica , para designar la ley de composición interna u operación de un grupo, se emplearán las siguientes notaciones:

+ (Notación aditiva que se usa frecuentemente cuando el

		grupo es conmutativo) . (Notación multiplicativa) Es decir, para componer u operar dos elementos x,y $\in$G, se escribe x+y ó x.y, según sea el caso. Nosotros, de ahora en adelante, salvo se diga lo contrario, usaremos la notación multiplicativa y escribiremos xy en lugar de x.y Al elemento neutro se le denota generalmente por : 0 (cuando la notación es aditiva) 1 o e (cuando la notación es multiplicativa) Nosotros, en general, denotaremos al elemento neutro del grupo con la letra e. Para designar el elemento simétrico de un elemento x de un grupo, se utilizan las siguientes notaciones: -x (si la notación es aditiva y se le llama opuesto de x) x^{-1} (si la notación es multiplicativa y se le lo llama inverso de x) En este Módulo usaremos la segunda notación, salvo que se diga lo contrario. Al hablar de un grupo diremos: “el grupo G”, sin nombrar la ley de composición interna salvo en aquellos casos que esto pueda traer algún tipo de confusión. \$ **Sección 115** **EJERCICIOS RESUELTOS** 4. Considere el conjunto: $\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in$ R$\}$ con la operación suma de matrices, entonces (G,+) es un grupo conmutativo. \$ **DEMOSTRACIÓN** • Como ya hemos visto (Módulo 2, Mat. II), la suma de matrices 2x2, es nuevamente una matriz 2x2, y además esta suma es asociativa. \$ La matriz nula 0 = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es el elemento neutro. \$ ya que : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Para todo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ Dada una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$, si consideramos la matriz $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ se tiene que

		$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. \$ Es decir, toda matriz de G, tiene matriz simétrica en G. \$ Por último, es fácil ver que esta operación es conmutativa ya que, dadas dos matrices: $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, tenemos que $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$. \$ 5. Probar que el conjunto G del ejercicio anterior, con el producto de matrices no es un grupo. \$ • Si consideramos la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y la multiplicamos por una matriz cualquiera $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, se obtiene, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ \$ Es decir, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es el elemento neutro de G respecto a esta operación. \$ Consideremos la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y multipliquémosla por una matriz cualquiera $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, es decir, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ \$ Luego la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no tiene elemento simétrico respecto a este producto, por lo tanto, (G,.) no es un grupo. \$ 6. Sea X un conjunto y Biy(X) el conjunto de Apl(X) (ver Módulo 2, sección 104) formado por todas las funciones biyectivas de X en X. Entonces Biy(X) con la composición de funciones es un grupo. \$ • En efecto, como ya hemos visto, la composición de funciones es asociativa. La función identidad I: $X \rightarrow X$, definida por I(x)=x para cada $x \in X$

es un elemento de Biy(X), y además es el elemento neutro respecto a esta operación. $

ya que:

$$Iof=foI=f \quad \text{para toda } f \in Biy(X). \quad \$$$

Dada una función $f \in$Biy(X), la función inversa o recíproca f^{-1} de f es el elemento inverso de f. $

Debido a que:

$$fof^{-1} = f^{-1}of = I \quad \$$$

Por lo dicho antes (Biy(X), o) es un grupo. $

Este grupo no es conmutativo en general. $

ya que si por ejemplo

$$X = \mathbf{R} \quad y \ g(x)=x+1, \ f(x) = 2x$$

Se tiene que $g,f \in$Biy(X) y
gof(x) = 2x+1, fog(x) = 2x+2

Como

$$gof(1)=3, \ fog(1)=4$$

Obtenemos

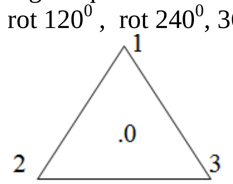
$$gof \neq fog$$

4*. El conjunto $\mathbf{Z}_n$ con la operación + definida en el Módulo 2 sección 106, es un grupo conmutativo. $

- En efecto, hemos probado que + es asociativa en $\mathbf{Z}_n$, que $\overline{0}$ es el elemento neutro respecto a esta operación y que el simétrico de $\overline{n_1}$ es el elemento $\overline{n_2}$ tal que $\overline{n_1+n_2} = \overline{0}$, es decir, n_1+n_2 es un múltiplo de n. Además se tiene que $\overline{n_1}+\overline{n_2} = \overline{n_2}+\overline{n_1} = \overline{n_{2+}n_1}$ cualesquiera sean $n_1 y \ n_2 \in \mathbf{Z}$ $

5. Considere el triángulo equilátero con centro o (ver figura), entonces todas las rotaciones de este triángulo que lo llevan en sí mismo son:

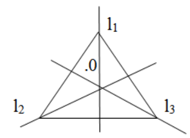
$$\text{rot } 120^0, \ \text{rot } 240^0, 360^0 = 0^0$$



$

Además de estas, considere las simetrías, S_1, S_2 y S_3 respecto a las rectas l_1, l_2 y l_3 respectivamente (ver figura)

U_1 | **U_6**



Entonces el conjunto

$$S_T = \{\text{rot } 0^0, \text{rot } 120^0, \text{rot } 240^0, S_1, S_2, S_3\}$$

con la composición de funciones es un grupo. $

En efecto, haciendo todas las posibles composiciones de los elementos S_T se obtiene la siguiente tabla:

o	rot 0⁰	rot 120⁰	rot 90⁰	S_1	S_2	S_3
rot 0⁰	rot 0⁰	rot 120⁰	rot 240⁰	S_1	S_2	S_3
rot120⁰	rot120⁰	rot 240⁰	rot 0⁰	S_3	S_1	S_2
rot 240⁰	rot 240⁰	rot 0⁰	rot 120⁰	S_2	S_3	S_1
S_1	S_1	S_2	S_3	rot 0⁰	rot120⁰	rot 240⁰
S_2	S_2	S_3	S_1	rot240⁰	rot 0⁰	rot 120⁰
S_3	S_3	S_1	S_2	rot 120⁰	rot 240⁰	rot 0⁰

Es claro que ^{0} es asociativa. De la tabla se obtiene que rot 0^0 es el elemento neutro y que todo elemento tiene simétrico.
Observe que este grupo no es conmutativo, ya que por ejemplo:

$$S_1 \text{o rot } 120^0 = S_2 \neq S_3 = \text{rot } 120^0 \text{o } S_1 \quad \$$$

6. El conjunto G= $\{2^n : n \in \mathbf{Z}\}$ con el producto de números naturales es un grupo conmutativo.

   En efecto: como (**Q*,.**) es un grupo, entonces el producto de elementos de G es asociativo y conmutativo. Además

   c) $2^0.2^n = 2^n.2^0 = 2^n$
   d) $2^n.2^{-n} = 2^{n-n} = 2^0 = 2^{-n}.2^n$

   Para todo $n \in \mathbf{Z}$

   Luego 1= 2^0 es el elemento neutro de G y el simétrico de 2^n es 2^{-n}. Por lo tanto G es un grupo conmutativo con el producto de números racionales. $

Sección 116
EJERCICIOS PROPUESTOS

7. Probar que el conjunto **N** con la operación de suma usual, no es un grupo.
8. Sea X un conjunto no vacío y consideremos en P(X) las operaciones "+" y "."

   Definidas como sigue:

   c. $A+B=A\cup B$, para todo $A,B\in P(X)$
   d. $A.B= A\cap B$, para todo $A,B\in P(X)$

   Demostrar que (P(X),+), (P(X),.) no tiene estructura de grupo y hallar los elementos neutros en cada uno de los casos.

9. Considere el conjunto G= $\{f:\mathbf{R}\rightarrow R$: f es una función$\}$ con la operación suma de funciones. Demuestre que (G,+) es un grupo conmutativo.
10. Demuestre que el conjunto 2**Z=** $\{2n: n\in \mathbf{Z}\}$ con la operación de

números enteros, es un grupo conmutativo.

11. Hallar todas las rotaciones y simetrías de las letras A,S y O que las llevan en sí.
12. Consideremos el conjunto G={e,a,b,c} con la ley de composición interna dad por la siguiente tabla:

·	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

e. Verifique que. es conmutativa
f. Verifique que e es elemento neutro
g. Verifique que el elemento simétrico de cada elemento es el mismo elemento.
h. Verifique que . es asociativa. (Ver ejercicio 2, auto evaluación 3) $

Este grupo es llamado grupo de Klein, en honor al matemático alemán Felix Klein (1842-1925). $

U_7

Sección 117
RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

6. No es grupo, ya que no existe el simétrico de cada elemento. $

7. a) El elemento neutro es el conjunto ϕ, ya que:

$$A\cup\phi= \phi\cup A= A, \text{ para todo } A\in P(X)$$

b) El elemento neutro es el conjunto X, ya que:

$$A\cap X= X\cap A =A, \text{ para todo } A\in P(X)$$

U_2 U_8

(P(X),+) no tiene estructura de grupo, ya que si tuviera, para todo $A\in P(X)$ debería existir un $B\in P(X)$ tal que:

$$A\cup B = \phi, \text{ (por ser } \phi \text{ el elemento neutro)}$$

de lo que se concluye que $A=B=\phi$

Y esto no vale necesariamente, ya que podemos tomar $A\neq\phi$, puesto que $X\neq\phi$

Análogamente, si (P(X),.) fuera un grupo, para todo $A\in P(X)$ debería existir $B\in P(X)$ tal que:

$$A\cap B=X \text{ (por ser X el elemento neutro)}$$

Luego

$$A=B=X$$

Esto es cierto en general, salvo que si $X=\phi$

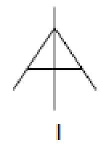
Observe que por lo visto antes, $X= \phi$, entonces

(P(X),+), (P(X),.) son grupos ya que $P(\phi)= \{\phi\}$. $

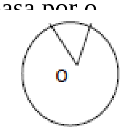
8. Hemos visto (Módulo 1, Mat. 2) que la suma de funciones es asociativa. El elemento neutro para la suma es la función nula O, idénticamente igual a cero y el simétrico de cada función f es la función –f. Además, la suma de funciones reales es conmutativa, por lo tanto, (G,+) es un grupo conmutativo.
9. La operación suma en 2**Z** es una ley de composición interna, ya que la suma de dos números pares es nuevamente un número par, esta

operación es asociativa debido a que lo es en **Z**.
El elemento neutro es 0=2.0 y el simétrico de 2n es 2(-n). Además, esta operación es conmutativa porque en **Z** también lo es, luego (2**Z**,+) es un grupo conmutativo.

10. En el caso de la letra A, tenemos solamente:
    c) La rotación de 0^0, es decir, rot 0^0 y
    d) La simetría de la recta l (ver figura)



En el caso de la letra S sólo tenemos dos rotaciones respecto a su centro estas son: rot 0^0 y rot 180^0, y ninguna simetría.
Por último en el caso de la letra O tenemos todas las rotaciones con centro O y ángulo cualquiera (ver figura) y todas las simetrías respecto a cualquier recta que pasa por o



Observe, que en cualquiera de los casos anteriores el conjunto de las rotaciones y simetrías de las recta A, S ó O forma un grupo con la composición de funciones. $

Sección 118
PROPIEDADES DE GRUPOS

U_9

Veamos ahora algunas propiedades de grupos.

Teorema 1.

Si G es un grupo, entonces valen las siguientes propiedades:

e) El elemento neutro de G es único.
f) El inverso de cada elemento de G es único.
g) Para todo $a \in G$, $(a^{-1})^{-1} = a$.
h) Para todo a , b $\in$ G, $(ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$

Trate de probar este teorema por su cuenta, si no puede probar alguna de las propiedades, vea la demostración en el Módulo 2 de este curso, secciones 102 y 104.

Cuando tratamos de resolver una ecuación del tipo $a * x = b$, sobre algún conjunto G, donde $*$ es una ley de composición interna sobre este conjunto; como por ejemplo, si G es el conjunto de los números reales, de los números complejos, ¿cómo podemos asegurar de que esta ecuación tiene solución en estos conjuntos y que esta solución es única? La respuesta a esta pregunta nos la da el siguiente teorema.

Teorema 2

Dados dos elementos a,b cualesquiera en un grupo G, la ecuaciones:

$$ax = b$$

$$ya = b$$

tienen soluciones y éstas son únicas.

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que $x_1 \in G$ es una solución de la ecuación ax = b, es decir, $ax_1 = b$; si en ella multiplicamos ambos miembros por la izquierda, por el inverso de a, obtenemos:

$$a^{-1}(ax_1) = a^{-1}b$$

es decir

$$(a^{-1}a)x_1 = a^{-1}b$$

Luego

$$e\,x_1 = a^{-1}b$$

por lo tanto

$$x_1 = a^{-1}b$$

Es decir, si x_1 es solución de la ecuación ax = b, entonces x_1 es de la forma $a^{-1}b$. Es fácil comprobar que $a^{-1}b$ es solución de esta ecuación. Por este hecho y lo dicho antes se tiene que $x_1 = a^{-1}b$ es la única solución de esta ecuación. Análogamente se prueba para ya = b

Haga otra demostración de la unicidad, suponiendo que existen dos soluciones.

Ahora podemos asegurar que las ecuaciones $a*x = b$ y $y*a = b$ tienen soluciones y éstas son únicas sobre cualquier grupo G.

Sección 119
EJERCICIOS RESUELTOS

3. Considere el conjunto $U_4 = \{1, -1, i, -i\}$, con el producto de números complejos. Construya la tabla del producto en U_4 y verifique que U_4, con este producto, es un grupo y halle todas las soluciones de las ecuaciones:

   (b) $ix = 1$, $ix = i$, $ix = -1$, $ix = -i$

   - Haciendo todos los productos de los elementos de U_4, se obtiene la siguiente tabla:

.	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

El producto en U_4 es asociativo porque el producto de números complejos lo es. De la tabla se deduce que (U_4, .) cumple las demás propiedades del grupo, como:

$$x = (i)^{-1}\, 1 = -i$$

$$x = (i)^{-1}\; i = 1$$

$$x = (i)^{-1}\, (-1) = i$$

$$x = (i)^{-1}\, (-i) = -1$$

Son soluciones respectivamente de las ecuaciones de (a), y (U_4, .) es un grupo, se tiene que éstas son las únicas soluciones de dichas ecuaciones.

4. En el ejercicio 5 de la sección 115 halar la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} rot\ 120^0 \quad o \quad x \quad = \quad S_1 \quad o \quad y & (1) \\ S_2 \quad o \quad y \quad o \quad S_3 \quad = \quad S_1 & (2) \end{cases}$$

- De (1) se tiene que:

  $$X = ((rot\ 120^0)^{-1}\ o\ S_1) o\ y = ((rot\ 240^0)\ o\ S_1) o\ y = S_2\ o\ y$$

  Sustituyendo este resultado en (2), y despejando se obtiene:

  $$x = S_1\ o\ S_3^{-1} = S_1\ o\ S_3 = rot\ 240^0$$

  sustituyendo este resultado en (1) y despejando se obtiene:

  $$y = S_1\ o\ rot\ 120^0\ o\ rot\ 240^0 = S_1$$

  Observe, que por el teorema 2 estas soluciones son únicas.

  Resuelva el sistema propuesto despejando primero y en la ecuación (2).

Sección 120
EJERCICIOS PROPUESTOS

3. Sea G un grupo y sean a, x, y$\in$G. Probar que en G valen las dos leyes de cancelación, es decir:

$$ax = ay \Rightarrow\ x = y \quad (\text{ cancelación por la izquierda})$$

$$xa = ya \Rightarrow x = y \text{ (cancelación por la derecha)}$$

4. Probar que en un grupo G el único elemento que verifica la propiedad $x\,x = x$, es el elemento neutro. Deducir de aquí que si G es un grupo tal que todo elemento verifica dicha propiedad, entonces G tiene un solo elemento.

Sección 121
RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

3. Supongamos que existen a, x, $y \in G$ tales que $ax = ay$; multiplicando en ambos miembros, por la izquierda, por a^{-1}, se obtiene:

$$a^{-1}(ax) = a^{-1}(ay)$$

luego

$$(a^{-1}a)\,x = (a^{-1}a)\,y$$

Por lo tanto

$$ex = ey$$

entonces

$$x=y$$

De manera similar se procede para probar la otra ley de cancelación.

4. Evidentemente el elemento neutro e del grupo G verifica la propiedad $e\,e = e$

   Supongamos que $x_1\ e \in G$ es tal que $x_1\,x_1 = x_1$. De aquí se deduce

$$x_1\,x_1 = x_1\,e$$

   y por lo tanto, cancelando por la izquierda se obtiene $x_1 = e$

   luego, e es el único elemento que verifica la ecuación

$$x\,x = x$$

   la otra parte es inmediata.

Haga otra demostración sin utilizar las leyes de cancelación (usa elemento inverso x_1^{-1}).

Descripción de las trayectoria Docente y Discente
Cuadro 33
Trayectoria Docente

Unidad	Descripción	Estado

U_0	Se presentan los objetivos a lograr exponiendo al estudiante el propósito del Módulo, de la Unidad y las experiencias de aprendizaje.	Planificación
U_1	Se presentan ejemplos sobre conjuntos con una ley interna con propiedades especiales.	Enseñanza
U_2	Se emplean frases con las cuales se destaca la importancia del tema.	Motivación
U_3	Es presentada la definición formal de grupo.	Enseñanza
U_4	Presentan una alusión histórica sobre los personajes que crearon la Teoría de Grupos y se menciona una frase célebre de uno de ellos.	Motivación
U_5	Aquí se presenta información sobre notación y un conjunto de ejercicios resueltos.	Enseñanza
U_6	Se proponen ejercicios que el estudiante deberá resolver con lo estudiado en la Unidad.	Evaluación
U_7	Se emplea una referencia histórica.	Motivación
U_8	Se muestra la resolución de los ejercicios planteados previamente.	Enseñanza

Cuadro 34
Trayectoria Discente

Unidad	Descripción	Estado
U_0	El alumno recibe pasivamente la información aportada en el texto.	Recepción
U_1	El alumno se auto-evalúa con los ejercicios propuestos	Auto-evaluación
U_2	En el text se presenta la solución de los ejercicios y el estudiante los recibe pasivamente.	Recepción

Trayectoria Didáctica

Cuadro 35
Patrones de interacción didáctica

Regularidades presentes en las trayectoria Docente y discente		**Unidades epistémicas**	**Descripción del patrón**
Docente	Discente	U_1 a U_{15}, U_{16} a U_{43}, U_{45} a U_{47}	Enseñanza (Transmisión-Recepción)
U_1 U_3 U_5 U_8	U_0 U_2		
U_6	U_1		

Conflictos Didácticos

Cuadro 36
Conflictos didácticos

Conflicto presentes en las trayectorias Docente y Discente		**Unidades epistémicas**	**Descripción**
Docente	Discente		
U_0		U_0	El estudiante no tiene ninguna participación
U_2 ,U_4 ,U_7		U_{15} ,U_{17} ,U_{45}	El docente (Medio maestro) intenta motivar incluyendo la historia, sin embargo el estudiante no actúa, es sólo un receptor pasivo.

Se observan dos periodicidades o patrones en el análisis hecho que tienen que ver con la interacción de Recepción-Transmisión, característico del estilo de enseñanza pasiva. Sin exagerar desde el inicio del texto se presenta información sin que el estudiante haga otra cosa que recibirla y memorizarla, nunca se le pide expresamente que "actúe" sólo en el momento de la ejercitación (Auto-evaluación). Luego aparece el patrón emisor-receptor cuando el texto presenta resultados ya elaborados de ejercicios.

Debido a que, en este caso, el proceso de instrucción se produce mediante un libro diseñado para la Educación a Distancia hay un predominio casi total de la función docente que consiste en la publicación de información, de ejemplos, de las técnicas de resolución, definiciones y justificaciones con lo cual el punto crítico se acentúa pues el estudiante no participa en el proceso de aprendizaje que no sea como receptor pasivo.

En el medio maestro se presupone una planificación de la instrucción por parte de los diseñadores (vale recordar que dicho texto fue elaborado hace 40 años por un personal que ya no labora en la institución y algunos de ellos ya no están con nosotros) lo cual produce un vacío en el estudiante el cual no puede participar del orden ni de las actividades a desarrollar; se motiva sobre la importancia del tema a través de referencias históricas pero este efecto motivante no se refuerza más que como elemento aislado.

Sólo se observa participación del estudiante en las auto-evaluaciones. Como se pudo observar en esta modalidad de sistema didáctico las funciones discentes se restringen a recibir y retener información suministrada y a realizar las tareas rutinarias propuestas. No se presenta un momento de exploración, formulación y validación del formulario. Es posible en los ejemplos aprovechar un poco más la participación del estudiante proponiendo tareas no rutinarias a ser resueltas por iniciativas propias de éste.

Un aspecto que no es posible pasar por alto es el de la presencia del objeto "Demostración" como elemento relevante para el proceso de aprendizaje del álgebra abstracta. Tanto en el texto utilizado en la UNA, llamado "Medio Maestro" como en los textos referenciales se considera la noción demostración como una noción-herramienta, empleada para validar o argumentar hechos matemáticos pero sin incursionar en ninguna estrategia didáctica para su adquisición por parte del estudiante. A pesar de que el estudiante cursa obligatoriamente el curso de Lógica no se dedica ningún espacio para ubicar la demostración como proceso en este ámbito, sin embargo, la presencia del término "Demostración" se hace notar al momento de validar diversas propiedades inherentes al campo del álgebra abstracta.

SECCIÓN V

ESCENARIO GENERATIVO

Soporte Teórico del Modelo Emergente

Según Martínez (s/f) “la generación de teorías es el fin principal de la ciencia” (p.1). Para Martínez la teoría es un modelo ideal vacío de contenido observacional directo que permite establecer una estructura conceptual inteligible, ordenada y coherente para sistematizar los fenómenos. Es decir, se le puede considerar como un sistema de fórmulas legaliformes y/o leyes establecidas cuya síntesis puede incluir lo conocido o lo meramente sospechado. Es posible considerar la teorización como el paso del proceso de análisis cualitativo, mediante el uso de esquemas lógicos, sistemáticos y explicativos.

Corresponde en esta Sección formalizar los aportes provenientes del análisis de la información, del contacto con la realidad y de la experiencia personal en un amplio contexto de trabajo. Precisamente cuando el contexto de estudio es una modalidad no tradicional y el objeto de estudio está revestido de cierta áurea de complejidad la teorización pasa a convertirse en un necesario producto de la investigación. Vale agregar las palabras de Martínez (1989), citado por Morillo (2017)

> la teoría es una construcción mental simbólica, verbal o icónica, de naturaleza coyuntural o hipotética que nos obliga a pensar de un modo nuevo al completar, integrar, unificar, sistematizar o interpretar un cuerpo de conocimiento, que hasta el momento se consideran incompletos, imprecisos, inconexos o intuitivos.

El análisis de toda la información obtenida a través de los recursos metodológicos mostrados en la Sección anterior más la experiencia personal del investigador en el área que funge de entorno de la demostración matemática y de su enseñanza-aprendizaje como objeto de estudio compromete a generar alternativas que fortalezcan el acervo teórico de un ente perteneciente al campo de la Educación Matemática. Con esto en mente y a manera de preámbulo es necesario dar inicio recordando un aspecto de gran interés como lo es el modelo didáctico.

Siempre será un motivo de preocupación para un docente de matemática cuál será el modo más apropiado para hacer llegar el conocimiento al alumno. Esta preocupación ha movido al mundo desde otrora y como ejemplo de ello puede considerarse, la aparición de la Educación Matemática como un intento por atacar este tipo de inquietudes que en el área de la enseñanza de la matemática se ha convertido en foco de interés para propios y extraños al área.

Lo comentado en el párrafo anterior nos hace pensar en un modelo, pero más específicamente en un modelo didáctico. El cual puede ser imaginado como la abstracción teórica del mundo real. Abstracción ésta que pretende aminorar la complejidad de la realidad y señalarnos solamente los aspectos característicos más relevantes que nos sirvan de soporte para orientarnos hacia lo que deseamos lograr.

Pero independientemente de cómo se conciba al término modelo didáctico su esencia nos indica su estrecha relación con la didáctica de los procesos de enseñanza-aprendizaje, variante de un contexto a otro, pero todos emparentados en el mismo objetivo: cómo enseñar. Me agrada la concepción que nos presenta Mario Bunge (1997) quien lo conceptualiza como una construcción teórica que pretende otorgar una explicación sobre un fragmento acotado de la realidad y nos indica de qué manera intervenir dicha realidad y orientar de esa manera cuál es el camino adecuado.

Por otro lado Joyce y Weil (1985) citado por García (2013) resumen el concepto dándole un enfoque más educativo mediante la definición de modelo didáctico como un plan estructurado para configurar el currículo, diseñar materiales y en general dar cierta orientación a la enseñanza.

La enseñanza-aprendizaje de la demostración matemática ha sido objeto de múltiples estudios como se ha podido ver a lo largo de esta investigación. Algunos se han interesado por su relación con la enseñanza de otros tópicos de la matemática, otros se han preocupado por sus connotaciones sociales y los que más se han acercado al aspecto de su aprendizaje hablan de esquemas para enfrentar una demostración. Pero hasta ahora se la elude y se considera un ente imposible de enseñar y que sólo puede fungir como herramienta para resolver otras situaciones. Todo esto me ha motivado a crear un modelo que, empleando como soporte la teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud, la teoría de la Transposición Didáctica de Chevallard, los principios de la Psicología Cognitiva y la teoría de las Competencias Cognitivas, empezará con una nueva conceptualización que permita configurar una estrategia global para su aprendizaje y para su enseñanza.

Conceptualización Emergente de la demostración Matemática

En la presente investigación se asume la demostración matemática como un *proceso*, entendiéndose por *proceso* el concepto presentado por el Diccionario de la Real Academia Española *acción de ir hacia adelante, al transcurso del tiempo, al conjunto de fases sucesivas de un fenómeno natural o de una operación artificial,* conformado por dos fases, una de naturaleza *Procedural* y otra *Relacional* tal como se explica a continuación:

1. **Fase de Generación Procedural (FGP)**

Previamente conviene aclarar que el término *Procedural* es relativo a procedimientos. Considerando la homología iniciada en la psicología cognitiva al comparar el funcionamiento del cerebro humano con el de un ordenador cobra sentido entender la generación procedural como aquella fase del proceso donde los contenidos no están diseñadados de antemano sino que se crean dependiendo de la situación que se presenta. La aprehensión y dominio de esta fase del proceso por parte de quien enfrenta la tarea de demostrar requiere de una dosis de entrenamiento que debe verse reflejada en el diseño instruccional y que puede involucrar varios aspectos, algunos de los cuales han sido mencionados a lo largo de esta investigación.

Dominio Conceptual Precedente

Esta primera fase no es fácil de lograr pues requiere el cumplimiento de ciertas condiciones que considero necesarias para lograr algún tipo de éxito en la siguiente fase. Por ejemplo, cuando se decía en la Sección II que la demostración es un dispositivo que busca "demostrar que algo nuevo por conocer es verdadero, a partir de algo viejo conocido", y se hace la aclaratoria, según quien escribe, que ambos aspectos :hipótesis y Tesis son conocidos y necesitan de conocimientos anteriores para ser internalizados y por tanto la enorme importancia que tiene ese cúmulo de información catalogada como "conocida" y puede considerarse explícita en las hipótesis de los teoremas y en las tesis e implícita si se piensa en todo lo que hay detrás de ésta. Es extremadamente relevante el contexto donde se ubica la proposición a demostrar, pues si estamos inmersos en el sistema axiomático del álgebra abstracta, lo cual es un hecho cuando nos ubicamos en la Carrera Licenciatura en Matemática en el ámbito universitario, el conocimiento de la estructura axiomática y de la lógica de su desarrollo es vital para acercarse al éxito en tan exigente tarea.

Si lo nuevo por conocer requiere de algo viejo conocido que se encuentra más allá de dicho sistema axiomático entonces lograr las condiciones necesarias por parte del estudiante se vuelven cuesta arriba. Es esta investigación llamaré *Dominio Conceptual Precedente* (DCP) a la base de conocimientos cuyo manejo por parte del estudiante es una de las condiciones necesarias al abordar una DM. En el caso puntual que aquí se investiga, ese DCP está constituido por la conceptualización de Grupo y el establecimiento de las Propiedades de Grupo. Considerando los vacíos y conflictos de tipo conceptual encontrados en el material instruccional a través del análisis ontológico semiótico realizado y que en esta modalidad de estudio a distancia el material instruccional juega un papel esencial en el proceso de enseñanza-aprendizaje se vuelve indispensable una revisión más a fondo.

***Dominio de Competencias Cognitivas Genéricas* (DCCG)**

Otra condición necesaria es poseer, por parte del estudiante, ciertas Competencias Cognitivas Genéricas (CCG) que le faciliten armar una cadena de razonamientos lógico-matemáticos con éxito, indispensable para al menos acercarse al logro de la tarea de demostrar en álgebra abstracta. Entre tales Competencias se pueden mencionar:

Competencias para comprender la información (Pensamiento Comprensivo: el comparar, clasificar, analizar y sintetizar, secuenciar y descubrir)

Competencias para evaluar la información (Pensamiento Crítico: el investigar, interpretar, predecir y razonar)

Competencias para generar información (Pensamiento Creativo: generar, establecer, producir, crear y emprender)

Toma de decisiones y Solución de Problemas (Competencias Complejas).

Es oportuno recordar a Tardif (2008) cuando asegura que una competencia es "un saber actuar complejo" en el que tiene lugar la movilización y el uso de una variedad de recursos. Vale agregar que la adquisición de competencias básicas requiere de tiempo de dedicación pues es comparable a las habilidades motoras en donde el entrenamiento disciplinado es clave.

2. Fase de Generación Relacional (FGR)

Esta fase puede entenderse como una consecuencia del aprendizaje por descubrimiento (APD). De descubrir relaciones existentes, descubrir sobre la base de conocimientos precedentes. Se vuelve imperativo descubrir las distintas relaciones existentes entre esa gama de "verdades conocidas" porque, precisamente el descubrir la relación o relaciones existentes entre hipótesis y tesis es la esencia de lo que llamamos realizar una demostración. Pero, para realizar con éxito esta acción el requerimiento por parte del individuo de ciertas competencias cognitivas genéricas y el dominio conceptual precedente se vuelven indispensables. Según Barrón (1991) se entenderá por descubrimiento a toda actividad autorreguladora de resolución de problemas. Y demostrar entra en la categoría de problema.

Según esta autora el APD tiene una serie de principios: (a) El ser humano está dotado de potencialidad natural para descubrir conocimiento. (b) El resultado del descubrimiento es una construcción intrapsíquica novedosa. (c) El APD encuentra su punto de partida en la identificación de problemas. (d) El APD se desarrolla a través de un proceso de resolución significativo de problemas. (e) El acto del descubrimiento tiene su centro lógico en la comprobación de conjeturas. (f) Para que la actividad resolutiva pueda ser caracterizada de descubrimiento ha de ser autorregulada y creativa. (g) El APD va asociado a la producción de errores. (h) El APD puede ser pedagógicamente promovido.

Esta forma particular de aprendizaje está necesariamente presente en el proceso de la DM y cada demostración debiera estimular en el estudiante su capacidad de descubrir como un elemento importante en su formación como matemático.

Por ejemplo, pensemos por un momento en la siguiente proposición existente en el campo del álgebra abstracta:

Si un grupo (G,.) es cíclico, entonces es abeliano

En este caso tanto la hipótesis: "(G,.) es un grupo cíclico" y la tesis "(G,.) es abeliano" pueden ser considerados como "conocidos" o al menos para serlo necesitan, por parte del individuo, el dominio conceptual precedente, DCP y poseer las competencias cognitivas genéricas necesarias, DCCG, para luego enfrentar el reto de descubrir cuál es la relación existente entre ambos. Por ello resultaría de mucho provecho para sus estudiantes que el docente que tuviera la intención de demostrar esta propiedad a éstos, la comenzara preguntándose conjuntamente con ellos ¿Qué relación existe entre ser un grupo cíclico y un grupo abeliano? ¿Qué forma tienen los elementos de un grupo cíclico? ¿De qué forma se da la multiplicación en un grupo cíclico? ¿Qué significa que (G,.) sea abeliano o conmutativo? Es posible que este tipo de proceder pudiera permitir a sus estudiantes descubrir la razón de ser de esta propiedad y por qué no, encontrar la forma de demostrarla sin la ayuda de dicho docente. En nuestro caso, el "Medio Maestro" que funge como docente, o más propiamente quienes lo diseñaron, debería utilizar estas herramientas con la intención de enseñar cómo debe el estudiante proceder ante una demostración de este tipo y cómo debe manejar la información existente en el Campo Conceptual, entendiéndose como tal el concepto presentado por Vergnaud. A continuación una idea de cómo proceder.

Una vez que se tiene que los elementos de G son de la forma a^{r} con $a \in$G y r$\in$**Z** (Números enteros) y que ese número r marca la diferencia entre dos elementos cualesquiera de G, es decir, a^{r_1} y a^{r_2} son dos elementos de G, entonces quizás será más fácil ver que $a^{r_1}.a^{r_2} = a^{r_1+r_2} = a^{r_2+r_1} = a^{r_2}.a^{r_1}$, debido a la conmutatividad de la adición en **Z** y las propiedades de la multiplicación de potencias. Obsérvese como ese establecimiento de la forma de los elementos del grupo cíclico y de cómo se presenta el producto de sus elementos, permite descubrir la relación existente la cual es clave para lograr la demostración.

A manera de conclusión, la demostración en álgebra abstracta mostrada como proceso ilustra la necesidad de un entrenamiento de quien asumirá el rol de investigador en esta disciplina para el cual la demostración será su estrategia metodológica ineludible. El gráfico 6 muestra el Modelo Didáctico creado.

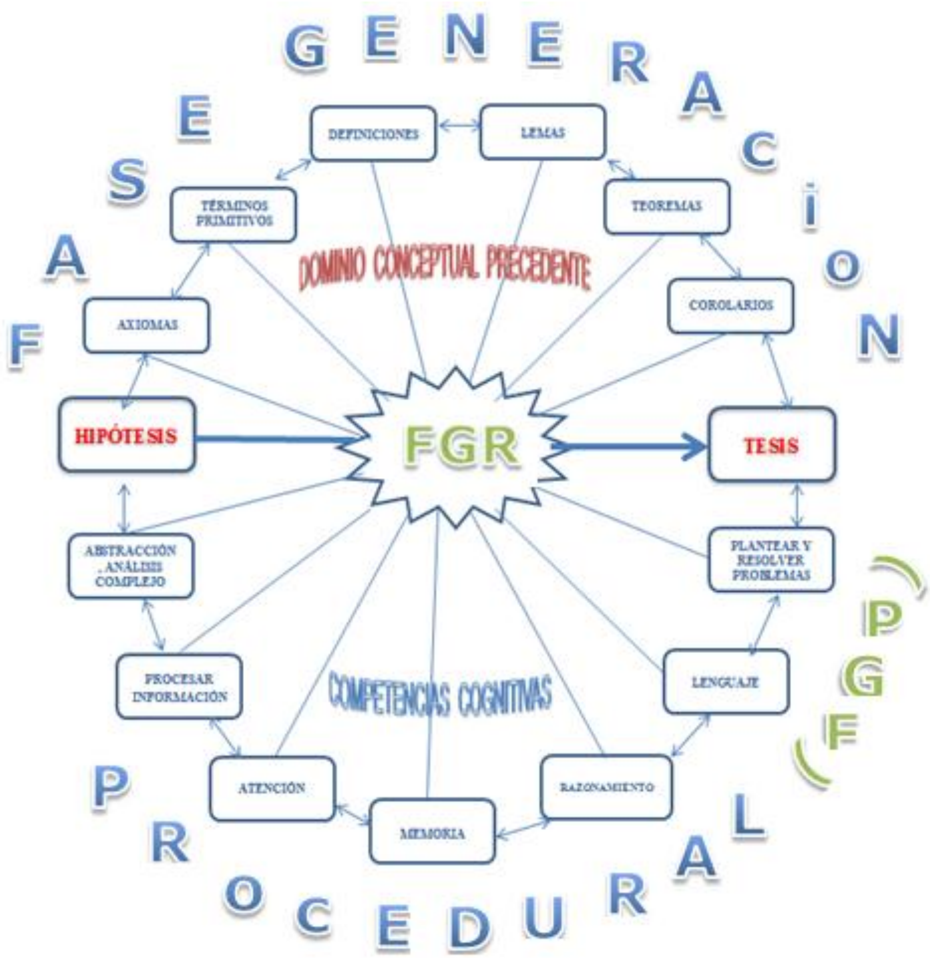


Gráfico 6. **Modelo didáctico para la demostración en álgebra abstracta.**

Obsérvese que en el gráfico se interpreta que tanto la hipótesis como la tesis están involucradas en la FGP. El individuo debe reconocer de qué trata la hipótesis y de qué trata la tesis apoyado en el DCP y lo que realmente intentará descubrir es la relación existente entre hipótesis y tesis que viene a constituir la clave para llevar a cabo la tarea de demostrar. Naturalmente que esta segunda fase requiere habilidades que se adquieren con la práctica. Veremos a continuación dos demostraciones que ilustrarán la actuación del Modelo.

En primer lugar consideremos la siguiente proposición:

Si G es un conjunto finito y (G,.) es un grupo, entonces existe un entero positivo n tal que $a^n = e$ para todo $a \in G$.

Antes de realizar la demostración analicemos la información que se está recibiendo.

-Se tiene por un lado un conjunto finito G que dotado de una operación multiplicativa adquiere la estructura algebraica de Grupo. Luego se tiene información subyacente correspondiente a la definición de grupo y a las distintas propiedades del mismo.

-Por otro lado se tiene un problema de existencia, el conjunto de los enteros y una igualdad en la que está involucrada una potencia de un elemento del grupo.

-Como se puede ver ambas, hipótesis y tesis son conocimientos de alguna manera conocidos que se ubican en el DCP.

-Lo que se debe descubrir es precisamente la relación que existe entre ambas informaciones y entramos a la FGR.

¿Pero cómo es posible lograr esto último?

Demostración:

-La expresión $a^n = e$, nos puede llevar a pensar en el producto $a.a.a^{\text{ n veces}}$ a el cual debe ser también un elemento de G, pues sabemos que al ser (G,.) un grupo, entonces "." es una ley de composición interna, por lo tanto, si operamos dos o más elementos de G el resultado será nuevamente un elemento de G. En particular podemos considerar un subconjunto de G formado por potencias de un elemento "a" cualquiera de G. Así $H=\{a,a^2,a^3,\ldots\}$ contiene infinitas potencias del elemento "a" de G y todas pertenecen a G, por lo dicho a comienzos de este párrafo.

-Ahora recurrimos a la información que asegura que G es finito, con lo cual deducimos que en H, en algún momento, comenzarán a repetirse las potencias. Es decir, en ciertas posiciones i, j de H debe ocurrir que $a^i = a^j$ y podemos suponer, sin perder generalidad, que $j>i$.

- Esta nueva igualdad pudiera, de alguna manera conectarnos con la igualdad de la tesis. Por ejemplo, en $a^i = a^j$ pudiéramos multiplicar ambos miembros por a^{-i}

$a^i.a^{-i} = a^j. a^{-i}$ por ser (G,.) un grupo, pero esto nos conduce, por definición de elemento simétrico, a la igualdad $e = a^{j-i}$ y como $j-i>0$ podemos asumir al n buscado como j-i, es decir, n= j-i y así existe n = j-i tal que $a^n = e$. Por lo tanto queda demostrado que:

Si G es un conjunto finito y (G,.) es un grupo, entonces existe un entero positivo n tal que $a^n = e$ para todo $a \in G$.

En segundo lugar se demostrará la siguiente proposición:

Si (G,.) es un grupo tal que $(a.b)^2 = a^2.b^2$ para todo $a \in G$, $b \in G$, demuestre que (G,.) debe ser abeliano.

Nuevamente se debe mostrar al alumno cómo analizar la información suministrada en la proposición. Por un lado se tiene que (G,.) es un grupo y por tanto se cumplen todas las propiedades inherentes a éste (DCP), $(a.b)^2 = a^2.b^2$ es una propiedad muy particular de este grupo y da la impresión que está relacionada con el hecho de que a.b = b.a condición característica de un grupo abeliano, (DCP).

Ahora, ¿cómo determinar la relación existente entre estas dos igualdades? (FGR).

La presencia de multiplicaciones en estas igualdades pudiera ayudar al individuo a visualizar, empleando el (DCP) que $(a.b)^2 = (a.b).(a.b)$ (1) y por la misma razón que $a^2.b^2 = a.a.b.b$, (2), propiedad que se cumple en todo grupo, por otro lado, de lo observado en (1) y (2) (Aquí entran en juego algunas competencias cognitivas) se deduce que a.a.b.b = (a.b).(a.b) = a.b.a.b debido a la asociatividad de ".", es decir, a.a.b.b = a.b.a.b igualdad que al multiplicar por el simétrico de a por la izquierda y por el simétrico de b a la derecha nos conducirá a la igualdad buscada (DCP) :

$a.a.b.b = a.b.a.b \Rightarrow a^{-1}.a.a.b.b.b^{-1} = a^{-1}.a.b.a.b.b^{-1}$

$\Rightarrow (a^{-1}.a).a.b.(b.b^{-1}) = (a^{-1}.a).b.a.(b.b^{-1})$ asociando convenientemente.

$\Rightarrow e.a.b.e = e.b.a.e$, por definición de elemento simétrico.

$\Rightarrow (e.a).(b.e) = (e.b).(a.e)$, asociando convenientemente.

$\Rightarrow a.b = b.a$, por definición de elemento neutro.

$\Rightarrow$ (G,.) es abeliano , por definición de grupo abeliano.

De este modo queda demostrada la proposición:

Si (G,.) es un grupo tal que $(a.b)^2 = a^2.b^2$ para todo $a\in G$, $b\in G$, demuestre que (G,.) debe ser abeliano.

Puede observarse en estos dos ejemplos de demostraciones que el proceso no es nada fácil de seguir, sobre todo en la FGR, pero la utilización del modelo en la enseñanza de la demostración matemática en álgebra abstracta irá permitiendo dotar, gradualmente, al futuro Licenciado en Matemática de habilidades cognitivas y conceptuales que le ayudarán a desenvolverse de manera más efectiva en su labor profesional.

Una observación interesante: aunque resulta poco ortodoxo y completamente incorrecto como presentación seria de una demostración matemática, algunas veces conviene suponer la verdad de la tesis y proceder de manera regresiva sólo para descubrir relaciones difíciles de ver. Esta manera de proceder la realiza el investigador que se propone hacer alguna demostración y no consigue descubrir las relaciones claves. Obsérvese con atención el análisis hecho a la siguiente proposición.

Sea $\underline{\underline{\text{(G,.) un grupo}}}$, supóngase que $\underline{\underline{a\in G \text{ genera un subgrupo cíclico de orden 2}}}$ $\underline{\underline{\text{y además es el único elemento con esa propiedad}}}$. Muéstrese que $\underline{x.a = a.x}$ para todas las $x\in G$.

En este caso se ha utilizado subrayado doble para la hipótesis y subrayado simple para la tesis. Esta situación planteada por John B. Fraleigh en su libro *álgebra abstracta* da una sugerencia al final para quienes no logren descubrir la relación entre la hipótesis y la tesis. Pero veamos cómo se podría descubrir la relación si no pudiéramos ir al final del libro.

Lo que trato de mostrar es, más o menos, cómo razonar estas situaciones. A mí se me ocurrió (tal vez también al que resolvió por primera vez este problema) analizar qué consecuencias produciría el hecho que debo demostrar, es decir, ¿qué pasa si ocurre que $x.a = a.x$ para todo $x\in G$? Aclaro nuevamente, esto que voy a realizar no es la forma correcta de demostrar formalmente lo que me piden, sólo estoy indagando estratégicamente (DCCG) para ver si descubro algo que me sea útil. Es como venirme desde donde quiero llegar.

Supongamos que $x.a = a.x$

$x.a=a.x \Rightarrow x.a.x' = a.x.x'$ multiplicando por el simétrico de x, el cual existe porque G es un grupo

$\Rightarrow x.a.x' = a.e$ por definición de simétrico.

$\Rightarrow x.a.x' = a$ por definición de elemento neutro.

Recuerde, esta igualdad final es una consecuencia de lo que debo probar y que me dice más o menos de donde podría partir en mi demostración.

Esto me da una pista: si logro probar que $xax' = a$ entonces sólo me quedará, en el camino descrito producido por mi supuesto, devolverme y lograré mi objetivo.

Pensemos ahora un poco…. (DCCG). Me dicen que el elemento a es el único que genera un subgrupo cíclico de orden 2, quiere decir que el orden de a es 2, es decir, $a.a = e$ luego si $(x.a.x')^2 = e$ entonces deberá coincidir con a que es el único elemento con orden 2, es decir $a^2 = e$.

Veamos:

$(x.a.x')^2 = (x.a.x')(x.a.x') = x.a(x'.x)a.x'$ asociando pues G es grupo.

$= x.a.e.a.x'$ por definición de simétrico.

$= (x.a)(a.x')$ por definición de neutro.

$= x(a.a)x'$ asociando.

$= x(e)x'$ por ser a de orden 2

$= x.x'$ definición de neutro.

$= e$ por definición de elemento simétrico.

Esto quiere decir que $x.a.x'$ debe coincidir con a, es decir,

$x.a.x' = a \Rightarrow (x.a.x')x = a.x \Rightarrow x.a(x'.x)=a.x \Rightarrow x.a = a.x$

Esto significa que podría comenzar la demostración de la manera siguiente: Evaluemos $(x.a.x')^2$ (¿Pero que se dirá a los estudiantes del porqué empezar así?)

$(x.a.x')^2= (x.a.x') (x.a.x') = x.a(x'.x)a.x' = (xa)(ax')= x(a.a)x'= x.x'=e$

Quiere decir que $x.a.x'$ genera un subgrupo de orden 2, $H = \{x.a.x',e\}$ pero a es el único elemento que genera un subgrupo de orden 2, a saber, $K=\{a,e\}$ esto significa que $x.a.x' = a$ (H=K) y de aquí se obtiene fácilmente lo que buscamos.

Lo realmente complejo es cómo saber que debo evaluar ese elemento. Fraleigh (1987) comenta, cuando plantea este problema, sin que por ello nos debamos desanimar:

> Quizá se haya observado que puede ser difícil encontrar una demostración en álgebra, aun cuando existan demostraciones fáciles. Por lo general, no se pueden dibujar «figuras» que ayuden a visualizar la demostración. A menudo se tiene que inventar el «truco» adecuado. Para encontrar los trucos adecuados hace falta experiencia, intuición y a veces sólo suerte. Uno de los principales algebristas de este siglo observó alguna vez que la manera de hacer investigación en álgebra es pensar en algún truco y después encontrar un problema que se pueda resolver con ese truco, en lugar de tratar de encontrar el modo de resolver un problema específico. (p. 64)

REFERENCIAS

Alvarado, A. (2015). El Estatus de la Demostración Matemática en el Aula: De una noción Paramatemática al Diseño de una Ingeniería Didáctica en matemática. Tesis de doctoral no publicada. Universidad de Salamanca. España.

Anderson, J. (1995). Cognitive Psychology and its Implications [Libro en línea] Worth Publishers. Disponible: http://b –ok .org/s/?q=John+R. + Anderson.+ Cognitive + psicology&yearFrom =&yearTo =&language =&extension =&t =0. [Consulta: 2017, Enero 20]

Ayres, F. (1988). Teoría y Problemas de Álgebra Moderna. Bogotá. McGraw-Hill.

Balacheff N. (2000). Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. Editorial Una Empresa Docente. Disponible: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00520133. [Consulta: 2017, Enero 12]

Barrón, A. (1991). Aprendizaje por descubrimiento: Principios y aplicaciones inadecuadas. Universidad de Salamanca. España.

Blumer H. (1969). *Simbolic Interationism. Perspective and method.* Englewood Cliff, New York: Prentice Hall. En Rojas B. Investigación Cualitativa, Fundamentos y Praxis. Segunda Edición. Caracas (p.42)

Caillot M. (1996) ¿La théorie de la transposition didactique est-elle transposable?. En Gómez M. (2005). Transposición Didáctica: Historia de un concepto. Sistema de información científica. Colombia. Revista Latinoamericana de Estudios Educativos.[Revista en línea] Disponible: **www.** Redalic.org/ articulo.oa?id = -134116845006 [Consulta: 2017, Abril 11]

Calvo, P. (2001). Estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral. Tesis doctoral no publicada. Universidad Autónoma de Barcelona. España. Disponible: ddd.uab.cat/pub/tesis/2001/hdl_10803_4689/ccp1de1.pdf. [Consulta: 2016, Agosto 12]

Carrasco P. (2004). Emmy Noether y el inicio del álgebra abstracta. En La gaceta de la RSME. Volumen 7.2, pp. 331-346. [Libro en línea]. Disponible: http://www.rsme.es/comis/mujmat/documentos/Gaceta/carrasco.pdf. [Consulta: 2017, Febrero 15]

Castro Robinson P. (2013). Álgebra Moderna, e Introducción al Álgebra Geométrica. Colombia, Bogotá. Universidad Nacional de Colombia.[Libro en línea]. Disponible:http://www.ecoeediciones.com/wp-content/uploads/2016/08/ALGE

BRA MODERNA-E-INTRODUCCION-Vista-preliminar-del-libro.pdf. [Consulta: 2017, Enero 18]

Codina, A., y Lupiáñez, J. L. (1999). El razonamiento matemático: argumentación y demostración.[Libro en línea]. Disponible: https:// core.ac.uk /download/pdf/ 12341369.pdf. [Consulta: 2017, Marzo 6]

Contreras F.(2012). La evolución de la didáctica de la matemática. Horizonte de la ciencia. (2) Dispónible: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5420575.pdf [Consulta: 2018, Febrero 7]

Córdoba A. (2010). Competencias cognitivas en educación superior. Revista electrónica de desarrollo de competencias (REDEC) No. 6. Vol. 2 Universidad de Talca. [Revista en línea] 6. Disponible: dta.utalca.cl/ojs/index.php/fcompetencias /article/ download/79/84. [Consulta: 2017, Enero 8]

Cortez I. (2003) El procesamiento humano de la información: en busca de una explicación. [Revista en línea] 6. Disponible: scielo.sld. cu/scielo.php ?script= sci_arttext&pid=S1024-94352003000600006. [Consulta: 2016, Enero 13]

Chacón, R. (2006). Análisis del proceso instruccional del Álgebra Abstracta en la Universidad Nacional Abierta, desde una perspectiva Semiótica-Didáctica. Trabajo de ascenso no publicado. Universidad Nacional Abierta. Barinas.

Chevallard, Y. (1997). La transposición didáctica Del saber sabio al saber enseñado. [Libro en línea] Editorial AIQUE. Disponible: http://pdfhumanidades .com/sites/default/files/apuntes/Chevallard%20que%20es%20la%20transposicion %20didactica.pdf. [Consulta: 2016, Julio 14]

Chevallard, Y. (2005). La transposición didáctica Del saber sabio al saber enseñado. Francia. 3ra edición, Buenos Aires, Aique grupo editor, traducido por Claudia Gikman.

D´Amore, B. (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza. [Revista en línea] 1. Disponible: welles.dm.unibo.it/.../ damore/ 6 55 % 20 Epistemologia%20didactica%20y%20practicas. [Consulta: 2018, Junio 22]

Dávila, G. (2003) El desarrollo del álgebra moderna. Parte II: El álgebra de las ecuaciones. Apuntes de historia de las matemáticas. No. 1. Vol 2. Disponible: http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/2-1-4-algebra.pdf. [Consulta: 2016, Marzo 15]

Fiallo J., Camargo L. y Gutierrez A. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. [Revista en línea]. Disponible:

http://www.scielo.org.co/pdf/rein/v31n2/v31n2a07.pdf. [Consulta: 2016, Marzo 12]

Font, V. (2000) Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. Philosophy of matematics Education journal. Disponible: http://www.urs.es/~jgodino/doctorado/documentos.htm. [Consulta: 2018, Febrero 10]

Font, V. (2002) Una organización de los programas de investigación en didáctica de las matemáticas. Revista EMA, 7(2): 122-170. Disponible: Disponible: http://www.urs.es/~jgodino/doctorado/documentos.htm. [Consulta: 2018, Febrero 12]

Fraleihg, J. (1987). Álgebra Abstracta. Ed. Addison Wesley Iberoamericana. Delaware. E.U.A

Godino, J.D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherche en Didactiquedes Mathématiques,* 14(3), pp. 325-355. Disponible: www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/download/21763/21597 [Consulta: 2017, Noviembre 16]

Godino, J. D., y Recio, A. M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la Educación Matemática. [Revista en línea] 3. Disponible: https://ddd.uab.cat/pub/edlc/02124521v19n3/02124521v19n3p405.pdf [Consulta: 2016, Septiembre 12]

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. Departamento Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible: http://www.ugr.es/local/jgodino. [Consulta: 2018, Febrero 7]

Gómez M. (2005). Transposición Didáctica: Historia de un concepto. Sistema de información científica. Colombia. Revista Latinoamericana de Estudios Educativos.[Revista en línea] Disponible: www.Redalic.org/articulo.oa?id= 134116845006. [Consulta: 2017, Febrero 11]

González A. (2016). Procesos de pensamiento algebraico en entornos de aprendizaje mediados tecnológicamente. Caracas: Tesis doctoral no publicada. Universidad Central de Venezuela. Caracas.

Hanna G., (1990). Some Pedagogical Aspects of Proof. Interchange. [Revista en línea] 1. Disponible: http://flm-journal. org/Articles /7679867298F4 CBEABE82 D0ABEB5EC.pdf [Consulta: 2016 Enero 8]

Halte J. F. (1998) L'espace didactique et la transposition, Pratiques, n° 97 –98, juin, 171 – 192. En Gómez Mendoza, Miguel Angel, La Tansposición Didáctica: Historia de un Concepto Revista Latinoamericana de Estudios Educativos (Colombia) [Revista en línea]. Disponible en: < http:// www.redalyc.org/ articulo.oa?id=134116845006 > ISSN 1900-9895. [Consulta: 2017, Julio 29]

Harel, G. y Sowder, L. (1996). Classifying processes of proving, en Puig, L. y Gutiérrez, A. (eds.). *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 3, pp. 59-65. Valencia: Universitat de València. En Godino, J. D., y Recio, A. M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la Educación Matemática. [Revista en línea] 3. Disponible: https://ddd.uab .cat/pub/edlc/ 02124521v19n3/ 02124521v19n3p405.pdf [Consulta: 2016, Septiembre 12]

Herstein, I. N. (1974). Álgebra Moderna. México. Editorial Trillas.

Iglesias M. y Ortiz J. (2013). La Demostración en Geometría desde una perspectiva epistemológica. En A. González, J. Sanoja de Ramírez, R. García y Z. Paredes (Eds). *Memorias de la VII Jornada de Investigación del Departamento de Matemática y IV Jornada de Investigación en Educación Matemática* (pp. 230-247). Maracay: Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Instituto Pedagógico de Maracay.

Iglesias M. (2014). La Demostración en Ambientes de Geometría Dinámica. Un Estudio con Futuros Docentes de Matemática. Maracay: Tesis doctoral no publicada. Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Instituto Pedagógico de Maracay

Joyce, B. y Weil, M. (1985). *Modelos de enseñanza*. Madrid: Anaya.

Jun (2008). Plan de curso 2008. Semestres III. Venezuela: Jun.

Kilpatrick J. (1995).Investigación en educación matemática: su historia y algunos temas de actualidad. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds). *Educación Matemática. Errores y Dificultades de los Estudiantes. Resolución de Problemas. Evaluación, Historia.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Kostrikin, A. I. (1992). Introducción al Álgebra. España. Editorial McGraw-Hill/Interamericana.

Krantz Steven, G. (2007). The History and Concept of Mathematical Proof. American Institute of Mathematics. California.

Mandler, J. M. (2000). Perceptual and Conceptual Processes in Infancy. Journal OF Cognition and Development, 2000, Volume 1, pp. 3–36

Martí, E. y Pozo J. (2000) Más allá de las representaciones mentales: la adquisición de los sistemas externos de representación, Infancia y Aprendizaje: Journal for the Study of Education and Development,23:90, 11-http://dx.doi.org/ 10.1174/ 021037 000760087946

Martínez, M. (s/f). Uso del programa Atlas ti de Thomas Mühr (Universidad de Berlín) en la estructuración teórica de datos cualitativos. [Artículo en línea] [Disponible en: htpp//prof.usb.ve/miguelm/estructuracionteorica%203.html] [Consulta::2018 Febrero 26]

Martínez, M. (1989). *La Investigación Cualitativa Etnográfica en Educación*. Editorial Trillas, México.

Mayer E. Richard. (1980). Futuro de la psicología cognitiva. Alianza psicológica.

Mayor, J., A. Moñivas (1992). Representación e imágenes mentales: I La representación mental. En: Osses Bustingorry, S. y Jaramillo Mora, S.(2008). metacognició: un camino para aprender. Estudios pedagógicos, Vol. XXXIV, Núm. 1 pp. 187-197. Valdivia Chile.

Mayor, J., A. Suengas, J. González (1995). Estrategias metacognitivas. Madrid: Síntesis. En: Osses Bustingorry, S. y Jaramillo Mora, S.(2008). Metacognició: Un Camino Para Aprender. Estudios pedagógicos, Vol. XXXIV, Núm. 1 pp. 187-197. Valdivia Chile.

Mena Arturo L.(2011). Estudio epistemológico del teorema de isomorfismo de grupos. Tesis doctoral. Instituto Politécnico Nacional. México.

Mora, D. (2014). Tres etapas de la demostración en la historia de la matemática. Tesis doctoral no publicada. Universidad Veracruzana. Xalapa México.

Morillo, R. (2017). Apropiación del Concepto de Límite de una Función Real en un Punto. Tesis doctoral no publicada. Universidad Experimental Libertados. Maracay Venezuela

Morin, E. (2004). Introducción al Pensamiento Complejo. Barcelona, España: Gedisa.

Ortiz, H. y Jiménez, F. (2006). La demostración: elemento vivo en la didáctica de la matemática. Scientia Et Technica. Vol.12, Nº 31, p.237-240. Disponible en:http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=84911639041 [Consulta: Diciembre, 2012]

Osses Bustingorry, S. y Jaramillo Mora, S.(2008). Metacognición: un camino para Aprender. Estudios pedagógicos, Vol. XXXIV, Núm. 1 pp. 187-197. Valdivia Chile.

Palmer, S. E., R. Kimchi (1986). The information processing approach to cognition. En: Osses Bustingorry, S. y Jaramillo Mora, S.(2008). Metacognición: Un Camino para Aprender. Estudios pedagógicos, Vol. XXXIV, Núm. 1 pp. 187-197. Valdivia Chile

Petitjean A. (1998) La transposition didactique en français, Pratiques, N° 97 – 98, 7–33. En Gómez M. (2005). Transposición Didáctica: Historia de un concepto. Sistema de información científica. Colombia.

Queysanne, M. (1973). Álgebra Básica. España. Editorial

Radford, L. (1994). La Enseñanza de la Demostración. Aspectos Teóricos y Prácticos. Educación Matemática. Vol 6 N° 3 Diciembre 1994.

Raisky C. Et Caillot M. (1996) – Audelà des didactiques, le didactique ; débats autour de concepts fédérateurs, Paris, Bruxelles, De Boeck Université, 20–35. En Gómez M. (2005). Transposición Didáctica: Historia de un concepto. Sistema de información científica. Colombia. Revista Latinoamericana de Estudios Educativos.[Revista en línea] Disponible: www. Redalic.org/ articulo.oa?id = 134116845006. [Consulta: 2017, julio 29]

Real Academia Española, (2001). *Diccionario de la lengua española.* (22ª ed), Madrid, España: Autor.

Rojo, A. (1974). Álgebra I. Buenos Aires. Editorial “El Ateneo”.

Rojas de Escalona, B. (2010). Investigación Cualitativa, fundamentos y praxis. Segunda edición. Caracas. Editorial FEDUPEL.

Sabino, C. (1992). El proceso de investigación. Caracas.

Siegler R.S (1983b). Five generalizations about cognitive development. *American Psychologist*, *38*,263-277. En John H. Flavell (1996). El desarrollo cognitivo. Prentice Hall 1985.

Tardif, J. (2008). *Desarrollo de un Programa por Competencias: De la Intención a su Implementación*. Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado, 12 (3). En Córdoba A. (2010). Competencias cognitivas en educación superior. Revista electrónica de desarrollo de competencias (REDEC) No. 6. Vol. 2 Universidad de Talca.

Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in Mathematics. *Bulletin (New series) of the AMS, 30(2), 16-177.* En Alvarado A. (2015). El Estatus de la Demostración Matemática en el Aula: De una noción Paramatemática al Diseño de una Ingeniería Didáctica en matemática. Tesis de doctoral no publicada. Universidad de Salamanca. España.

Vega L. (1992). ¿Pruebas o demostraciones? Problemas en torno a la idea de Demostración Matemática, *Mathesis*, *8*,155-177. En Alvarado A. (2015). El Estatus de la Demostración Matemática en el Aula: De una noción Paramatemática al Diseño de una Ingeniería Didáctica en matemática. Tesis doctoral. Universidad de Salamanca.

Vergnaud G. (1990). Teoría de los campos conceptuales. CNRS y University René Descartes. Paris Francia.

Weber M. (1973). The Methodology of the Social Sciencies. Glencoe, Illinois.

Wilder, R.W. (1981). *Mathematics as a cultural system.* Nueva York: Pergamon.

ANEXOS

[ANEXO A]

[PLAN DE CURSO DE ÁLGEBRA I (UNA)]

UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA
VICERRECTORADO ACADÉMICO
SUBPROGRAMA DE DISEÑO ACADÉMICO
ÁREA DE MATEMATICA

PLAN DE CURSO

I. IDENTIFICACIÓN

Nombre:	ÁLGEBRA I
Código:	752 / 757
U. C.:	06
Carreras:	...ncíatura en Matemática (Cód. 126) Educación Mención Matemática (Cód. 508)
Semestres:	III y IV respectivamente
Prelación:	Ninguno
Requisito:	Ninguno
Autor:	Prof. Chanel C. Chacón S
Asesoría en Diseño Académico:	Prof. Antonio Alfonzo Profª Wendy Guzmán

Nivel Central

Caracas, Junio 2008

II. FUNDAMENTACIÓN

En matemática es frecuente considerar algunos conceptos como primitivos; una vez aceptados estos conceptos se formulan algunos axiomas es decir, aceptamos algunas "reglas" de diversa índole que nos permiten utilizar los axiomas y comenzamos a demostrar teoremas o proposiciones. A medida que se desarrolla el tema, por necesidades que se imponen a partir de ese desarrollo, se introducen nuevos términos (definiciones) y otros axiomas (en caso de ser necesario) y se continúa desarrollando la teoría., esta manera de proceder es lo que se conoce como teoría matemática, es decir, generar una teoría de este tipo consiste en dar una sucesión de enunciados y a través de "cierto" engranaje lógico, la **teoría deductiva**, ir demostrando los teoremas y las proposiciones que van surgiendo en la construcción de dicha teoría

El carácter de este curso, como asignatura que se integra en el plan de estudios de la Licenciatura en Matemática, es de tipo **teórico – práctico**, ya que introduce al estudiante en el desarrollo de una **teoría deductiva** a partir de ciertas definiciones pertenecientes al álgebra abstracta. Esta preparación desarrolla habilidades cognitivas en el estudiante que le permitirán realizar demostraciones matemáticas. Con respecto al **componente práctico** este lo desarrollará aplicando los resultados del Álgebra Moderna concernientes a éste curso, en la resolución de problemas.

Igualmente tiene un carácter formativo por excelencia y por ende **obligatorio**, y en tal sentido es el primer eslabón de una cadena de asignaturas de conformada por: Álgebra II (Lineal), Tópicos Numéricos de Cálculo y Álgebra. La cual expondrá al alumno no solo al estudio, sino también a la internalización de valores intrínsecos de la matemática, tales como la rigurosidad, claridad y lógica del pensamiento. En concreto, el estudio de las estructuras algebraicas proporcionará al estudiante sólidos fundamentos para la profundización de las nociones básicas relativas a la Teoría Matemática en general.

Se encuentra ubicado en el tercer semestre de la Licenciatura, con una carga crediticia de seis (06) unidades crédito.

Para la reestructuración de los contenidos de este curso, se consideraron, además de las pautas contenidas en el diseño curricular de la carrera las siguientes:

1. Atendiendo el llamado de las nuevas políticas nacionales educativas y, de desarrollo científico y tecnológico emanadas por las instancias correspondientes, la Universidad Nacional Abierta ha venido realizando esfuerzos orientados a la actualización de los diseños curriculares de las distintas carreras que se ofrecen en su seno y por ende la actualización del material impreso.
2. El nuevo perfil del egresado de la Licenciatura en Matemática
3. Informaciones que en forma abierta y verbal han expresado alumnos, profesores y algunas instancias académicas de la Universidad como las de Evaluación y Diseño Académico.
4. Discusiones entre el personal del Área de Matemática y los asesores de matemática de los Centros Locales, de los que se recoge la experiencia que

estos últimos tienen en la corrección de las pruebas y las asesorías prestadas a estudiantes de la Universidad.

El material Instruccional seleccionado para este curso es el siguiente:

Bibliografía Básica

[1]. Orellana M., et all. Universidad Nacional Abierta. 1980

Bibliografía Complementaria

[2]. Birkohff G & Mac Lane S. *Álgebra Moderna*.. Editorial Vicens – Vives.1970

[3]. Bujalance E., et all. Teoría Elemental de Grupos. Cuadernos de la UNED – España. 1989.

[4]. Grimaldi, Ralph. Matemáticas Discretas y Combinatoria. Addison – Wesley. 1997

[5]. Fraileigh Jhon. Álgebra Abstracta. Addison – Wesley. 1976.

[6]. Herstein, I. N. Tópicos en Álgebra

[7]. Goberna M., et all. Álgebra y Fundamentos. Editorial Ariel - España. 2000

[8]. Baumslag B. & Chandler B., Teoría de Grupo. Serie Shaum. 1968

[9]. Rivero Francisco. Álgebra. Universidad de Los Andes. 1980

[10]. Rojo Armando. Álgebra. Editorial Ateneo – Argentina. 1973

[ANEXO B]

[PRUEBA ESPECIAL PARA RECABAR INFORMACIÓN SUMINISTRADA POR UN ESTUDIANTE]

Universidad Nacional Abierta	**Álgebra I (757) Carrera 126**
Vicerrectorado Académico	**PRUEBA ESPECIAL**
Área de Matemática	**Fecha**

PRUEBA DE DESARROLLO/ CORRECCIÓN MANUAL

Tiempo de prueba 1 hora

INSTRUCCIONES

Con la presente prueba se intenta recabar información acerca de los significados de algunos conceptos del Álgebra Abstracta tales como la definición de "Grupo" y la noción de "Demostración" por parte de un estudiante que cursó y aprobó dicha asignatura. Se facilita el Material Instruccional correspondiente a la Unidad de Aprendizaje 6: Grupos y Propiedades, sujeto a las condiciones de uso establecidas a continuación.

La prueba o tarea consiste en:

- Realizar una lectura comprensiva de la dicha Experiencia de Aprendizaje por un lapso de una (1) hora con el fin de refrescar lo planteado allí.
- Luego resolver los planteamientos que a continuación se presentan, sin consultar el material, para lo cual dispondrá de una (1) hora.

PREGUNTAS

PTA. 1 Escriba la definición de Grupo.

PTA. 2 Interpreta la notación (R,º)

PTA. 3 Demuestre que (P,º) es un Grupo. Donde P es un conjunto formado por funciones y º es la ley interna Composición de Funciones.

PTA. 4 En **Z**, conjunto de los números enteros, considere la operación

$a \otimes b = a+b+1$. Demuestre que (**Z**,$\otimes$) es un Grupo conmutativo.

FIN DE LA PRUEBA

[ANEXO C]

[PLAN DE ESTUDIOS DE LA CARRERA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS DE LA UNA]

UNIVERSIDAD
NACIONAL
ABIERTA

PLAN DE ESTUDIOS

CARRERA: MATEMÁTICA CÓDIGO: 126

U.C.	CÓD.	ASIGNATURA	PRELACIÓN Y/O REQUISITO
		SEMESTRE I	
05	177	MATEMÁT	-
03	107	LÓGICA	-
03	116	INTROD. A LA INFORMÁTICA	-
03	115	LENGUA Y COMUNICACIÓN	-
03	106	PRESENTACIÓN A LA FÍSICA	-
		SEMESTRE II	
U.C.	CÓD.	ASIGNATURA	PRELACIÓN Y/O REQUISITO
05	179	MATEMÁTICA II	177
06	754	GEOMETRÍA	107
04	323	COMPUTACIÓN I	
03	118	METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN	
		SEMESTRE III	
U.C.	CÓD.	ASIGNATURA	PRELACIÓN Y/O REQUISITO
06	756	CALCULO INTEGRAL	179
06	757	ALGEBRA I	179 y 754
03	117	AMB. Y DESARROLLO SOST. VENEZUELA	
04	300	FÍSICA GENERAL	179
		SEMESTRE IV	
U.C.	CÓD.	ASIGNATURA	PRELACIÓN Y/O REQUISITO
06	758	CALCULO VECTORIAL	756
06	759	ÁLGEBRA II	757
04	760	HISTORIA DE LA MATEMÁTICA	
03	761	DIDÁCTICA DEL CÁLCULO	756
		SEMESTRE V	
U.C.	CÓD.	ASIGNATURA	PRELACIÓN Y/O REQUISITO
06	762	ANÁLISIS I	758
05	763	TÓPICOS NUMÉRICOS EN CÁLCULO Y ÁLGEBRA	756 y 759
05	764	PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA I	758
03	765	DIDÁCTICA DEL ALGEBRA LINEAL Y PROBABILIDAD	761
02	119	TEMAS DE ÉTICA	

ELECTIVAS			
U.C.	CÓD.	ASIGNATURA	PRELACIÓN Y/O REQUISITO
04	310	OPTIMIZACIÓN NO LINEAL	100 U.C.
04	321	INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES IV	100 U.C.
04	334	COMPUTACIÓN GRÁFICA	100 U.C.
04	359	APLICACIONES DE PROGRAMACIÓN ENTERA Y DINÁMICA	100 U.C.
06	718	PROCESOS ESTOCÁSTICOS	100 U.C.
06	719	MÉTODOS MULIVARIANTES	100 U.C.
06	775	SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS	100 U.C.
06	776	TÓPICOS EN OPTIMIZACIÓN I	100 U.C.
06	777	TÓPICOS EN OPTIMIZACIÓN II	100 U.C.
06	778	ANÁLISIS DE DATOS	100 U.C.
06	779	PROGRAMACIÓN NO LINEAL	100 U.C.
06	780	TEORÍA DE JUEGOS	100 U.C.
06	781	INTRODUCCIÓN A LOS ELEMTOS FINITOS	100 U.C.
06	782	ÁLGEBRA LINEAL NUMÉRICA	100 U.C.
06	783	INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS DE HILBERT Y SUS OPERADORES	100 U.C.

RECOMENDACIONES:

- Para cursar la 310 se recomienda haber aprobado la 771
- Para cursar la 718 se recomienda haber aprobado la 770
- Para cursar la 776 se recomienda haber aprobado la 771
- Para cursar la 777 se recomienda haber aprobado la 776
- Para cursar la 778 se recomienda haber aprobado la 758 y 759
- Para cursar la 779 se recomienda haber aprobado la 771
- Para cursar la 781 se recomienda haber aprobado la 762
- Para cursar la 782 se recomienda haber aprobado la 762
- Para cursar la 783 se recomienda haber aprobado la 766

CURRÍCULUM VITAE

Richard Gustavo Díaz Fuentes, titular de la cédula de identidad V-4.544.856, nacido en la ciudad de Caracas Distrito federal el 2 de Febrero de 1954. Realizó sus estudios Académicos en el Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara" de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, donde obtuvo el título de Profesor en la Especialidad Matemática el 11 de Agosto de 1984, culmina su Maestría en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara", obteniendo el título de Magister en Enseñanza de la Matemática el 26 de Junio de 1996. En cuanto a su experiencia laboral, durante el período 1985-1992 prestó servicios como profesor por horas en la Escuela Básica Nacional Henri Pittier, durante el período 1985-1990 prestó sus servicios en el Instituto Universitario Tecnológico Industrial (IUTI) cumpliendo funciones docentes y en la Jefatura del Departamento de Control de Estudios, durante el período 1992-1997 trabajó como docente de física, Matemática y Dibujo Técnico en la Unidad Educativa Federico Villena en el Distrito Santiago Mariño. El año 1992 ingresa al Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara por Concurso de credenciales y en el año 1994 por Concurso de Oposición permaneciendo en esta Universidad hasta el año 2006. En el período 2000-2017 labora en la Universidad Nacional Abierta en el Centro Local Aragua como asesor académico en el Área de Matemática con la categoría de profesor Agregado y un tiempo de dedicación Exclusiva. Actualmente está jubilado desde el 31 de Octubre de 2017 y cursando estudios de doctorado en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador.