REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO “RAFAEL ALBERTO ESCOBAR LARA”
DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

EL ÁLGEBRA ESCOLAR: UNA MIRADA DESDE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICA EN FORMACIÓN INICIAL

Tesis presentada como requisito parcial para optar al grado de Doctor en Educación Matemática

Autor: Mariela Lilibeth Herrera
Tutor: Dr. Andrés A. González R.

Maracay, Febrero de 2019

DEDICATORIA Y RECONOCIMIENTOS

- Al ***Gran Poder de Dios,*** quien con su infinita misericordia me dio fortaleza, salud, entendimiento, y creyentes cómplices para acompañarme y apoyarme, para lograr llevar a feliz término está investigación…
- A la ***Virgen del Valle***, por bajar las altas mareas, y permitirme dominar este mar de conocimientos, y doblegar tanta incertidumbre…
- A la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, al núcleo de Maracay, ***Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara",*** donde me formé académicamente, me permitió obtener mis primeras experiencias como profesional a nivel universitario, dictando cursos de Introducción al Álgebra, Introducción al Álgebra Lineal, entre otros, y además, contribuyó a mi formación como investigador…
- A mi ***tutor,*** al Doctor, por asesorarme, siempre Gracias.
- A los Profesores de Matemáticos en Formación Inicial por su colaboración y ser fuente de inspiración de esta investigación, por su sinceridad, ahínco, ayuda, disposición, paciencia, gracias, por acompañarme en ésta, mi travesía.
- A las personas más importantes en mi vida: ***Mis padres,*** que con sus ejemplos y estímulos contribuyen para vencer los obstáculos en la vida y alcanzar mis sueños; ***Mis hermanos*** quienes articuladamente me apoyaron y lucharon junto a mi las fluctuante mareas del camino, **y *Mis bellas*: Mariannys y Marleanys, Mariángel y Mariela del Valle,** quienes me han brindado su apoyo para perseguir mis ideales, me acompañan en mis proyectos, y soportaron tanto tiempo robado…
- A mis compañeros de travesía en estos estudios, que nunca me dejaron abandonar, que incluye a todas aquellas personas que de un modo u otro contribuyeron con este tan anhelado sueño, mi tesis doctoral.
- Y muy especialmente a ***todos los que contaron puntos, y escribieron protocolos***…

ÍNDICE GENERAL

LISTA DE CUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE FIGURAS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO "RAFAEL ALBERTO ESCOBAR LARA"
DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Línea de Investigación: Didáctica del Álgebra y Pensamiento Algebraico (LIDALGEBRA)

EL ÁLGEBRA ESCOLAR: UNA MIRADA DESDE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICA EN FORMACIÓN INICIAL

Autor: Mariela Lilibeth Herrera
Tutor: Dr. Andrés A. González R
Fecha: Febrero, 2019

RESUMEN

Esta investigación parte de la discrepancia existente entre la enseñanza del álgebra escolar (AE) y la formación inicial del profesor de Matemática (FIPM) de la UPEL: carencias de estrategias específicas para la enseñanza de contenidos algebraicos como los polinomios, ecuaciones, etc.; ausencia del contenido de determinantes en los Cursos obligatorios del área de álgebra, lo cual preocupa considerando que tiene interpretaciones geométricas. Concretamente, el AE aparece invisibilizada en la FIPM. Vinculando lo anterior con las dificultades que tienen los estudiantes para el aprendizaje del álgebra universitaria en lo que respecta a la abstracción y la generalización, y las tendencias emergentes sobre el AE surgieron las preguntas: ¿Cuáles son los aspectos resaltantes que debe contener un programa de curso cuyo fundamento sea la didáctica del AE?, ¿Cómo construyen los futuros profesores de matemática el proceso de generalización en un contexto de resolución de problemas de reconocimiento de patrones?, ¿Cuáles competencias despliegan los futuros profesores de matemática cuando se enfrentan a tareas que involucran el reconocimiento de patrones? Entre las teorías consideradas están los Registros de Representación Semiótica de Duval (2006), y las Competencias Matemáticas y didácticas del Profesor de Matemática. Es una investigación cualitativa con un diseño de estudio de caso; los sujetos fueron los estudiantes de la especialidad de matemática, inscritos en el curso de Álgebra Lineal durante el periodo académico 2018-I de la UPEL-Maracay. Las técnicas empleadas para recolectar la información fueron: el taller, la mediación contemplativa y la recolección de artefactos, y para el análisis se aplicó el análisis de contenido abordando un enfoque predominantemente cualitativo, tomando como referencia las producciones orales y escritas de los participantes. Observándose que lograron exhibir las competencias matemáticas de representación, simbolización y formalismo, comunicación, pensamiento matemáticos, ayudas y herramientas y razonamiento matemático, destacándose, el uso de distintos sistemas de representación, mostrando habilidad para usar el lenguaje algebraico e indicios del pensamiento algebraico simbólico.

Descriptores: Formación Inicial del Profesor de Matemática, Pensamiento algebraico, reconocimiento de patrones y Competencias didácticas y matemáticas.

INTRODUCCIÓN

Este escrito titulado, “El Álgebra Escolar: una mirada desde los Profesores de Matemática en Formación Inicial” conjuntamente con el corpus del estudio, corresponde la fase informativa de la investigación cualitativa planteada por Rodríguez, Gil y García (1996), y constituye la compilación de un proceso de investigación desarrollada en varios años, por su objeto de estudio, se inserta institucionalmente en la línea de investigación “Didáctica del Álgebra y Pensamiento Algebraico” (LIPDALGEBRA), adscrita al Núcleo de Investigación en Educación Matemática “Dr. Emilio Medina” del Instituto Pedagógico “Rafael Alberto Escobar Lara”

La investigación es una confluencia de distintos intereses, entre los que destacan: la imagen del álgebra que tienen los profesores de matemática en su formación inicial como la asignatura abstracta, compleja, difícil y engorrosa, donde se enfatizan la naturaleza abstracta de los objetos y del lenguaje algebraico, y la formalidad y la rigurosidad de las demostraciones; la práctica profesional de la autora de la investigación, que como miembro de la comunidad de educadores matemáticos venezolanos, relacionada activamente en procesos de enseñanza y aprendizaje del Álgebra en una facultad de formación docente le permite dar testimonio de las deficiencias cognitivas y formativas que en esta área del conocimiento presentan los futuros docentes, que posteriormente tendrán un impacto negativo en su desempeño profesional cuando estén trabajando en educación media; y la necesidad de entretejer relaciones entre el álgebra de la formación del docente, y el álgebra de su práctica docente, generalmente en educación media general, siendo éste, precisamente el tema medular de la presente investigación que se ha estructurado en VII capítulos:

I.- Planteamiento del Problema, se esboza y delimita el problema, se formulan las interrogantes guías, se exponen los objetivos que se persiguen en esta investigación.

II.- Referentes Teóricos, apoyados en la revisión documentales de diversa índole (artículos en publicaciones periódicas, capítulos en libros arbitrados, libros, trabajos de grado y tesis doctorales) con el propósito de articular las teorías escogidas como soporte de esta tesis y las investigaciones previas relacionadas al estudio, catalogadas entres grupos, las referidas al proceso de generalización, las que ofrecieron un aportes metodológicos, y las que estudiaron el pensamiento algebraico. Aunque, fueron muchos los fundamentos teóricos, los concretamos en la Teoría de registros de representaciones semióticas, el Pensamiento Algebraico, El álgebra en la formación inicial del Profesor de Matemática, El análisis didáctico como modelo para el diseño de programas, y las Competencias didácticas y matemáticas del profesor de matemática

III. - Marco Metodológico, donde se brinda una visión del proceso investigativo llevado a cabo desde una perspectiva cualitativa, y se explican: la naturaleza y el diseño de la investigación, el escenario y los sujetos del estudio, así como las técnicas e instrumentos empleados, así como los procedimientos realizados durante el proceso investigativo.

IV.-Taller: “La Generalización en el Reconocimiento de Patrones”, empleado como técnica para recolectar la información. En este capitulo se describe: la planificación del taller, considerando las actividades planificadas y realizadas, el proceso realizado para su validación, la implementación, y finalmente, la organización de la Información que se obtuvo a través de esta técnica

V.- Análisis de la Información, que esta conformado por tres momentos: el análisis de los cuatros cuestionarios iniciales, el análisis de los protocolos escritos y el análisis de cinco actividades empleando el registro oral y escrito

VI.- Propuesta de Unidad Curricular de Libre Elección (UNCLE) para la especialidad de Matemática, constituye la formulación de un curso cuya temática central es el Álgebra Escolar.

VII.- Conclusiones y prospectivas, recoge las aproximaciones del estudio que dan respuesta a los objetivos de la investigación; dejando además, líneas abiertas las cuales son señaladas en las retrospectivas

Además, se incluyen las referencias consultadas y determinados documentos anexos que complementan el desarrollo propiamente dicho de la tesis.

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA

Planteamiento del Problema

En el contexto de las expectativas es legítimo esperar que la formación algebraica que reciben los profesores de matemática en formación inicial en la UPEL se traduzca no solo en un nivel deseable de su pensamiento algebraico sino que se vea concretada en la práctica a través de la enseñanza de los contenidos específicos del álgebra escolar del sistema educativo venezolano. Dicha formación ocurre mediante el desarrollo de cinco cursos que conforman el área de álgebra de esta Universidad para la especialidad de Matemática (Ver cuadro 1). Sin embargo, el desenvolvimiento de los futuros educadores matemáticos en dicha área lo ha descrito González (2015) como portador de un conjunto de características que los limitan notablemente; sostiene que los estudiantes tienen puntos de vista disímiles con respecto al papel del álgebra en su formación, es decir, para ellos resulta complejo visibilizar la importancia que tiene el álgebra universitaria como futuro educador matemático, por lo que son altamente apreciadas las diferentes vinculaciones que hace el profesor del curso universitario. Además, en relación con los contenidos de dichos cursos se evidencia una carencia con respecto al estudio del álgebra educativa.

Cuadro 1
Cursos que conforman el área de álgebra de la UPEL según el currículum oficial vigente para el año 2016

Curso	Tipo de Curso	Descripción del contenido	Semestre
Introducción al álgebra	Obligatorio homologado	Lógica, teoría de conjuntos y relaciones y funciones	II
Sistemas Numéricos	Obligatorio homologado	Fundamentación de las estructuras algebraicas (N,+), (Z, +, .) y (Q, +, .)	III
Introducción al álgebra lineal	Obligatorio homologado	Sistemas de ecuaciones, espacios vectoriales y transformaciones lineales	IV
Estructuras Algebraicas	Obligatorio homologado	Grupo y anillo	V
Álgebra Lineal	Obligatorio no homologado	Producto interno y estructura de los polinomios	VI

Como se puede ver, el contenido de estos cursos no está vinculado expresamente con ninguna noción del álgebra escolar, sino que su relación directa es con el conocimiento específico del área en el cual se resaltan sus aspectos abstractos.

Ahora bien, una discusión en torno a aspectos resaltantes del álgebra escolar como ámbito didáctico específico debiera corresponder de forma natural al curso Educación Matemática. En el siguiente cuadro se muestran algunos detalles de este curso.

Cuadro 2
Contenidos del Curso Educación Matemática de la UPEL (vigente para el año 2016)

Educación Matemática	• Problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática en Venezuela. • Conceptualización de la Educación Matemática, la Investigación en Educación Matemática, Áreas y Líneas de Investigación en Educación Matemática. • Naturaleza y Estructura de la Matemática: • Nociones básicas relativas a la historia, filosofía y naturaleza de la Matemática. • Rasgos esenciales y metodológicos del conocimiento matemático. • Estructura actual y significación sociocultural de la Matemática. • Fines de la enseñanza de la Matemática. • Teorías contemporáneas de la instrucción y del aprendizaje, aplicables a la enseñanza de la Matemática. • Proposiciones didácticas para la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática factibles de ser aplicadas en Venezuela.

En este curso se discuten y se dilucidan aspectos teóricos de la Educación Matemática entendida como un campo emergente de investigación así como también se analiza lo relacionado con las prácticas de la enseñanza de la Matemática, lo cual requiere de muchas lecturas y de densas discusiones y reflexiones por parte de los participantes. Esta realidad impide examinar áreas específicas como la del álgebra escolar.

Un aspecto que caracteriza el álgebra en general y la escolar en particular es su repertorio simbólico, por lo que se hace importante estudiar este hecho. No obstante, lo relacionado con este aspecto resulta transparente a lo largo de la vida escolar, tanto en los niveles primario y secundario como también en el universitario. En particular, en la formación inicial de los profesores de matemática correspondiente a la UPEL no existe en los cursos obligatorios algún contenido que verse sobre el simbolismo en Matemáticas, por lo cual el mismo se asume con un hecho indiscutible, incontrovertible, lo cual al final de cuenta muestra una Matemática hermética, en la que, por ejemplo, es natural que la suma de los ángulos internos de un triángulo sumen 180°. En todo caso, lo que se quiere ilustrar es la ausencia de discusiones en torno al componente humano que ha construido el repertorio simbólico matemático.

Un ejemplo de lo expuesto anteriormente es lo relacionado con el uso de letras ((Küchemann, 1980; Ursini, et. at al, 2005); con respecto a en este asunto Quintero, Ruiz y Terán (2006) encontraron carencias con la enseñanza y aprendizaje del tema de polinomios, como por ejemplo las vinculadas con las diferentes interpretaciones que, tanto docentes como estudiantes, le atribuyen al símbolo "x" encontrando en ambos importantes dificultades de comprensión para diferenciar los conceptos variable, indeterminada e incógnita. En consecuencia, señalan los autores, "consideramos que en la enseñanza de la Matemática prevalecen las acciones didácticas dedicadas a desarrollar cálculos y no a reflexionar sobre los conceptos implicados en tales operaciones. En este sentido, el concepto de variable y su correspondiente símbolo aparece como periférico durante el desarrollo de los ejercicios" (p.323).

Como contenido específico, los determinantes de orden 2x2 y 3x3 tienen importantes aplicaciones tales como el producto vectorial, el cálculo de áreas y volúmenes las cuales permiten vincular las áreas de álgebra y geometría. Este tema es propio del álgebra escolar, forma parte del programa oficial del quinto año, además aparece en todos los libros de textos venezolanos. Sin embargo no está incluido en ningún curso obligatorio del área de álgebra de la UPEL, lo que puede ser considerado como una ausencia de relevante interés desde los puntos de vista didáctico como investigativo tomando en cuenta que los profesores deben administrar dicho contenido en los liceos.

Lo atinente al diseño e implementación de estrategias mediante recursos específicos para los contenidos escolares algebraicos también requiere ser atendido, pues en el caso de los temas de productos notables, factorización y polinomios se ha observado un manejo tradicional, que se reitera a pesar de las aportaciones que han hecho las investigaciones en este sentido, en esto resulta pertinente aludir al trabajo de Masso (2013). Por ejemplo, la enseñanza de los polinomios permite hacer una reflexión en torno al manejo de estrategias propias. En el contexto de la multiplicación de polinomios no es exagerado afirmar que casi la totalidad de los docentes al igual que los libros de texto se basan casi exclusivamente mediante el siguiente proceso para realizarla: ordenación basada en los grados de polinomios, disposición arriba-debajo de los factores y luego la multiplicación algebraica de los coeficientes y de la indeterminada, para finalmente sumar los términos semejantes. Esta manera de operar tiene la dificultad de que el estudiante debe estar atento a que cuando se multiplica la indeterminada se suman sus exponentes, todo lo cual tiende a ser para el estudiante un proceso engorroso.

De manera similar ocurre con la adición y sustracción: se hacen las operaciones conjuntamente con la indeterminada. En realidad lo anterior tiene que ver con el hecho de que no se toman en cuenta de forma separada los coeficientes, lo cual ocurre igualmente con la adición y sustracción como se mencionó anteriormente.

El punto de vista del álgebra universitaria es que en el espacio vectorial de los polinomios basta con identificar los coeficientes de términos semejantes para luego hacer la suma o la resta respectiva. En el caso de la multiplicación, se provee una construcción de los polinomios de la cual resulta que nuevamente basta con identificar los coeficientes para hacer unas operaciones multiplicativas y aditivas. En ambos casos, mediante este método la indeterminada se coloca al final junto al coeficiente que le corresponde.

En torno a este mismo tema, los hallazgos de Valdivé y Escobar (2011) confirman que: (a) El discurso escolar usa indistintamente la noción de polinomio como función polinómica y expresión polinómica en un contexto algebraico; (b) El estudio histórico epistemológico permitió un acercamiento de cómo surgió y evolucionó la noción en cada cultura, observándose el uso indistinto de ella, tal como lo hace el discurso escolar; y (c) los actores comprenden y asimilan el concepto cuando transitan de la aritmética al álgebra en diferentes contextos, otorgándole diferentes significados a la noción, consiguiendo con ello una ruptura con el álgebra desde sus prácticas aritméticas.

En cuanto a las necesarias transferencias que debe realizar un docente en el aula también son reportadas algunas carencias, en este sentido Acevedo y Falk (2000) afirman que “la formación avanzada que reciben los futuros docentes de la Educación Básica en general no enriquece su enseñanza, sino que el docente retorna a su propia experiencia escolar como guía prioritaria de su ejercicio docente elemental” (p. 247).

Las mismas autoras señalan:

> El docente no establece nexos entre la teoría de polinomios, que se supone conoce de sus cursos universitarios, y el álgebra de polinomios que se trabaja en la secundaria, limitándose a emplear herramientas, a menudo inapropiadas, que un estudiante de ese grado escolar tendría a su disposición. (p. 248)

En consecuencia, estos aspectos ameritan ser discutidos expresamente en el contexto de la formación inicial

En cuanto al cómo se debe introducir el álgebra en la escolaridad existen diversas maneras de interpretarse, una de ellas es mediante actividades de generalización (patrones numéricos o geométricos, leyes que rigen los números, etc.) (Da Ponte, 2009; Andonegui, 2009; Serres, 2011). Sin embargo alrededor de ese asunto la investigación de González (2015) reporta algunas limitaciones del pensamiento algebraico que inciden en el manejo de la abstracción y la generalización. Ante esta situación cobra sentido que “los profesores que imparten clases de Matemáticas debieran volver a aprender los contenidos que enseñan en la forma que se supone que los tienen que enseñar” (Goñi, 2001; p. 40), afirmación ésta con la que también concurre Gellert (2005) quien asevera que “la formación inicial es más efectiva si los aspirantes a profesores aprenden las matemáticas universitarias de manera similar a la que uno considera que sería deseable como práctica escolar” (p. 73)

En el mencionado estudio de González (2015), se expone un conjunto de limitaciones en el aprendizaje del álgebra universitaria, las cuales pueden vincularse con las prácticas de la enseñanza de contenidos algebraicos escolares:

(a) Dificultad para avanzar en la capacidad para asumir conceptos abstractos.

(b) Desarrollo de un proceso de "*aritmetización del Álgebra*"[1].

(c) Dificultad para la manipulación del símbolo (limitación en el manejo de la sintaxis y la semántica).

(d) Poco aprecio por la demostración (y dificultad para hacerlas).

(e) Elevado número de estudiantes reprobados en las asignaturas del Área de Álgebra, lo cual genera un estado de ansiedad-rechazo por esta área.

(f) Limitaciones de los educadores para captar el Álgebra superior (o Álgebra universitaria) como apoyo para el Álgebra escolar.

(g) Dificultad para comprender el enunciado de un Problema Algebraico.

(h) Confusión cuando el lenguaje natural funciona como metalenguaje en los problemas de Álgebra.

Por otra parte, diversos análisis sobre cómo abordar el álgebra escolar centran su atención sobre los beneficios que trae consigo el trabajo con patrones, en este sentido se han establecido algunas ventajas tales como que la generalización de patrones constituye una heurística (modo de abordar) para la solución de algunos tipos de problemas matemáticos; el esfuerzo por identificar regularidades o patrones matemáticamente útiles, estimula la activación de procesos cognitivos y metacognitivos. Sin embargo, las actividades de clase en los primeros años de la escolaridad enfatizan en los productos matemáticos, más que en los procesos matemáticos (Warren y Cooper, 2008). Como respuesta a esto proponen la introducción del pensamiento algebraico en el aula de primaria, y en ese sentido señalan estos autores como en Australia, en la escuela primaria se explora a través de patrones repetitivos sencillos utilizando formas, colores, movimiento, tacto y sonido.

Para destacar la importancia de este proceso en el desarrollo del pensamiento algebraico la revista UNO le dedica completamente su volumen de abril-junio del 2015.

[1] Un término que se ha propuesto, a modo de conjetura, para identificar una manera de interpretar los objetos del álgebra universitaria por parte de los estudiantes pata profesor de matemática.

A pesar de lo anterior, lo relacionado con la generalización y el reconocimiento de patrones no está presente de manera explícita en la formación inicial de los profesores de matemáticas de la UPEL.

Ahora bien, lo que se ha relatado puede ser visto desde en un espectro más amplio como lo es la problemática relacionada con la formación inicial de los docentes de Matemática. Esta manera de vincular este período de formación con los hallazgos en niveles más bajos de escolaridad no es algo nuevo, desde principios del siglo XX el reconocido matemático Félix Klein había expuesto su preocupación por las transferencias entre la Matemática universitaria y la Matemática escolar.

Como consecuencia del contexto anteriormente descrito, emergieron las siguientes interrogantes:

¿Cuáles son los aspectos resaltantes que debe contener un programa de curso cuyo fundamento sea la didáctica del álgebra escolar? ¿Cómo construyen los futuros profesores de matemática el proceso de generalización en un contexto de resolución de problemas de reconocimiento de patrones?¿Cuáles competencias despliegan los futuros profesores de matemática cuando resuelven problemas relacionados con patrones?

OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Objetivos Generales

Estudiar las competencias matemáticas desarrolladas por futuros profesores de matemática cuando resuelven problemas relacionados con patrones

Estudiar el proceso de generalización puesto en práctica por futuros profesores de matemática en un contexto de reconocimiento de patrones.

Objetivos Específicos

Diseñar y validar una propuesta de Programa de Curso para la formación inicial de profesores de matemática orientada hacia la didáctica del álgebra.

Describir el proceso de generalización realizado por los profesores de matemática en formación inicial cuando se desenvuelven en prácticas de reconocimiento de patrones.

Analizar las competencias matemáticas desplegadas por los futuros profesores de matemática cuando resuelven problemas relacionados con patrones.

JUSTIFICACIÓN

Dentro de las formas deseadas del pensamiento matemático que deben poseer los educadores matemáticos está el algebraico, el cual ha sido descrito como una potente forma de pensar (Agudelo, 2013); entre los rasgos distintivos de este tipo de pensamiento la generalización es un aspecto relevante. En consecuencia, los hallazgos de esta investigación pueden contribuir con el enriquecimiento conceptual en torno a aquellos elementos curriculares que deben tomarse en cuenta en el contexto de la formación inicial del profesor de matemática que coadyuven en el logro de un nivel deseable de su pensamiento algebraico en el cual los procesos de generalización se hagan explícitos.

También el desarrollo exitoso de la investigación propuesta está vinculado con el fortalecimiento de la línea de Investigación en pensamiento algebraico y didáctica del álgebra, LIDALGEBRA, la cual tiene entre sus objetivos: (a) caracterizar el pensamiento algebraico de los estudiantes en los diferentes niveles del sistema escolar venezolano, y (b) Estudiar la naturaleza de los fenómenos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de los objetos y procesos algebraicos.

Por otra parte, también se ha valorizado el trabajo con reconocimiento de patrones y regularidades en la formación inicial y continua del educador matemático, sin embargo se debe prestar atención a la observación que hace Da Ponte (2009) en el sentido de ubicar estas ideas con precisión en el contexto más amplio de orientaciones curriculares de la formación docente. Es por ello, que entre los objetivos planteados está el análisis sobre el proceso de generalización que efectúan los futuros profesores de matemática a fin de tener un referente empírico que permita generar interpretaciones científicamente válidas.

Tomando en cuenta las competencias docentes consideradas importantes, en este trabajo se reivindica la resolución de problemas (RP) como un proceso clave en la formación docente. Aceptando que en los centros de formación docente predomina el paradigma explicativo (González, 1993; Llinares, 2013), entonces este enfoque de RP no resulta aplicado por los profesores que imparten Matemáticas en la Educación Básica. Ante esta situación cobra sentido que las afirmaciones de Goñi (2001) y Gellert (2005) citadas en la página 5, sobre la forma como deberían aprender los profesores de Matemáticas.

Considerando lo expuesto en el párrafo anterior, el estudio que se plantea pretende que el futuro profesor de matemática vivencien el proceso de reconocimiento de patrones, experiencia ésta que seguramente ha de considerar al momento de diseñar sus unidades didácticas.

En lo que respecta al tema curricular específicamente, los hallazgos de esta investigación pueden enriquecer las discusiones que se llevan a cabo en Venezuela con motivo de las necesarias transformaciones que deben introducirse tanto en el nivel de Educación Media como en el contexto de la formación del profesor de matemática de la UPEL, por ejemplo, en el caso de la Educación Matemática con lo que tiene que ver con el desarrollo del pensamiento algebraico.

Para finalizar esta parte se cree importante indicar que un logro determinante lo será el hecho de contribuir a la visibilización del álgebra educativa como un espacio dentro de la Educación Matemática propiciatorio de discusiones didácticas e investigativas con un referente discursivo específico.

CAPÍTULO II

REFERENTES TEÓRICOS

En la búsqueda de información confiable que pueda servir de orientación y de arraigo para nuestra investigación, luego de realizar una búsqueda exhaustiva en bibliotecas, tanto físicas como virtuales, y después de leer, y evaluar la información ofrecida, a continuación presentaremos un compendio de las pesquisas realizadas previamente por otros investigadores que nos han servido para encaminar algún aspecto de este trabajo, del mismo modo, resumiremos aquellas teorías que se emplearon de apoyo y que constituyen justamente nuestros referentes teóricos.

INVESTIGACIONES PREVIAS

A continuación se describiremos investigaciones que son consideradas como bases en función de los sólidos vínculos que se han tejido entre ellas y el estudio que se tiene planteado.

Investigaciones referentes al proceso de generalización

En este apartado resumiremos investigaciones pioneras referidas a los procesos de generalización, en particular hemos escogido estudios llevados a cabo incluso hasta hace más de dos décadas, sin embargo, la rigurosidad y lo detallo del tema planteado hace que aún tengan vigencia, además, de ser estudios que aportan gran información, ejemplos, abordajes metodológicos, e incluso formas para organizar la información recabada.

Castro (1995) realizó una investigación titulada "Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares del primer ciclo de secundaria (12-14 años)", procurando integrar las configuraciones puntuales (como una representación de los números naturales) al sistema decimal y al desarrollo aritmético de los números, analizar el patrón y los desarrollos operativos de secuencias numéricas tanto lineales como cuadráticas presentadas en configuraciones puntuales, y apreciar los pasos para prolongar una secuencia, extrapolar términos, generalizar y emplear el término general para calcular un término específico, en sus propias palabras, explica que con esa investigación:

> Nos proponemos introducir a los escolares del primer ciclo de secundaria (12-14 años) en el sistema simbólico de representación para números naturales que denominamos configuración puntual y emplear estas representaciones como recurso visual para realizar un análisis estructural de números que comparten un mismo patrón de representación obteniendo su desarrollo aritmético (aditivo o multiplicativo). A partir de las conexiones establecidas entre la secuencia numérica, la secuencia de representaciones y la secuencia de desarrollos aritméticos, pretendemos estudiar la comprensión que manifiestan estos escolares en establecer relaciones entre números, reconocer y utilizar patrones y proponer una generalización a la estructura común que tienen los términos de una secuencia. (p.6)

Esta investigación guarda estrecha relación con la nuestra, ya que emplearemos configuraciones puntuales para algunas de las actividades formuladas en el taller sobre patrones, lo cual es importante porque puede permitir el establecimiento de diversas expresiones algebraicas, en palabras de Castro (1995): "al representar varios términos de una secuencia mediante configuración puntual se pueden analizar sus términos mediante diferentes desarrollos aritméticos y, por tanto, obtener expresiones algebraicas distintas, aunque equivalentes del término general de la sucesión"(p.275)

García (1998) realizó una indagación sobre el proceso de generalización efectuado por los estudiantes de secundaria al enfrentarse a problemas de generalización lineal, empleando como marco teórico referencial la psicología genética de Piaget, y los constructos de Dörfler y Dubinsky. Se manejan dos objetivos principales: establecer las acciones y los invariantes que realizan los alumnos al abordar problemas de generalización lineal, y organizar orientaciones pedagógicas para interpretar la generalización de alumnos de secundaria. Se empleó un diseño cualitativo-interpretativo, y un enfoque interpretativo y descriptivo, para explorar las conductas y captar el significado de los procesos. Del mismo modo que la observación de las conductas en el aula son importantes, "el investigador es un instrumento esencial de la investigación. Es primariamente un observador, recolector de datos y narrador. Su trabajo requiere relacionarse e interactuar con el escenario educativo de forma natural"(p.21). Con este estudio se amplió la clasificación de Stacey (1989), para analizar las respuestas de los alumnos de acuerdo con: (1) el esquema conceptual subyacente (recuento directo, proporcionalidad directa y linealidad), (2) la estructura del cálculo aritmético, y (3) la explicación aportada sobre tales cálculos. Esta investigación constituye una antecedente importante por el tratamiento tan exhaustivo que se le dio al proceso de generalización, además porque de este estudio se tomó la prueba final del tercer estudio para aplicarlo como uno de los instrumentos para la investigación que actualmente nos encontramos desarrollando.

La indagación de García (1998) se parceló de la siguiente manera: (1) El primer estudio, de carácter exploratorio, consistió en aplicar con modificaciones la prueba escrita empleada por Stacey en su investigación a 373 alumnos de secundaria, se realizó un proceso inductivo de categorización, partiendo de la de Stacey se elaboraron nuevas categorías, este estudio aportó tanto las explicaciones escritas como las estructuras de los cálculos realizados por los alumnos en cada tarea; (2) El segundo estudio se aplicó una prueba escrita referida a problemas de generalización lineal a 132 alumnos con dibujos, mientras que a 36 alumnos se le realizó otra prueba sin apoyo gráfico, luego se realizó una entrevista semi-estructurada a once alumnos seleccionados, y como resultado de este estudio se generó un instrumento visual denominado grafo para visualizar transiciones, y se determinó el esquema de descomposición genética de la pauta lineal; (3) El tercer estudio procuró una profunda comprensión de la generalización lineal a través de la instrucción, de 18 estudiantes de bajo rendimiento en matemática, se seleccionaron tres tareas de problemas de generalización lineal para que los alumnos argumentaran sobre la validez de las mismas, y otra para evaluar la persistencia del conocimiento adquirido.

El trabajo efectuado por Vergel (2014) aborda un aspecto de relevante interés para la investigación que se estamos realizando como lo es el proceso de generalización. En efecto, lo llevó a cabo con estudiantes del nivel primario (entre 9 y 10 años) en un contexto de reconocimiento de patrones con lo cual logró una caracterización del pensamiento algebraico en alumnos jóvenes, lo cual de por sí suscita interés dada la naturaleza del Problema y los objetivos considerados en el actual Proyecto.

Enfocado en el aspecto metodológico, empleó un diseño que se ha tomado en cuenta para el estudio que se pretende llevar a cabo. En este sentido, Vergel diseñó su investigación con un enfoque cualitativo, de tipo descriptivo e interpretativo, además, empleó el registro de videos y las entrevistas focalizadas. En palabras de su autor, su investigación:

> aporta elementos didácticos y metodológicos que nos permiten repensar los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar, en tanto ponen en el horizonte didáctico formas alternativas de intervención en el aula de matemáticas que necesariamente deberían considerar aspectos corpóreos en el acto de conocer y aprender (p. 187)

Además, para dicho autor, mediante los resultados de su estudio es posible:

> Alimentar los currículos de los programas de formación inicial de docentes de matemáticas, en tanto aportan elementos que permiten pensar en derrotar el prejuicio o la creencia errada de que los aprendizajes de nuestros estudiantes en matemáticas son memorísticos, mecánicos, descontextualizados e inertes, estáticos y en general, útiles para muy poco. (p.187)

Lo cual se consideran opiniones que deben considerarse a lo largo de todo el camino por discurrir en la investigación por desarrollar, tomando en cuenta que entre lo pretendido está el diseño de un curso para futuros profesores de matemáticas orientado hacia el álgebra escolar.

Con respecto al manejo de tendencias en el álgebra escolar, específicamente la del álgebra temprana, afirma este autor que, desde el punto de vista curricular, su investigación provee elementos que:

> Contribuyen a la construcción de currículos —y materiales curriculares— que consideren la perspectiva de Álgebra Temprana, construcción curricular

> que debe incidir en una mejora significativa de los aprendizajes de los estudiantes, más específicamente, debe redundar en una educación matemática con sentido y significado para ellos. (p. 187)

Investigaciones referentes a aspectos Metodológicos

Zapatera (2015) en su investigación plantea la importancia de proporcionar experiencias durante la formación inicial de los maestros que les permitan identificar el conocimiento matemático para la enseñanza, y para ello postula "el término mirada profesional como la forma en la que los profesores ven y dan sentido a situaciones complejas de enseñanza aprendizaje"(p.62). Para recolectar la información se diseñaron dos cuestionarios: en el primero los estudiantes para maestro debían resolver tres problemas de generalización de patrones, mientras que en el segundo, debían realizar un análisis a las respuestas dadas por tres estudiantes de primaria a los problemas del primer cuestionario, resultando más sencillo identificar los tópicos matemáticos que explicar la comprensión de los estudiantes, sin embargo, el formular acciones remediales para mejorar la comprensión resulto ser aún más compleja, al respecto expresa que:

> Interpretar la comprensión de un alumno conlleva identificar las dificultades o errores cometidos en cada uno de los problemas, considerar cómo intervienen los elementos matemáticos, y también identificar aspectos comunes en las respuestas de cada alumno a los tres problemas, y explicarlos usando los elementos matemáticos característicos de los estadios de comprensión de la generalización de patrones. Esto exige saber qué, cómo y cuándo usar el conocimiento especifico parea interpretar la comprensión de los estudiantes. (p.156)

Aunque la investigación realizada por Zapatera (2015) se refiere ala formación de maestros de primarias constituye un antecedente importante para este trabajo, ya que nos proporciona una experiencia que cómo indagar las competencias didácticas de los profesores de matemática en formación inicial que se trata de solicitar un análisis de las respuestas ofrecidas por los estudiantes de bachillerato sobre ciertos tópicos algebraicos, y a partir de las respuestas dadas por los docentes configurar las competencias didácticas expresadas.

Iglesias (2014) para el recabar la data de su investigación titulada: "La demostración en ambientes de geometría dinámica. Un estudio con futuros docentes de matemática", desarrollo un curso no contemplado como obligatorio en el programa de formación del profesor de matemática denominado: Resolución de Problemas Geométricos Asistido por Computadora (RPG_AC) con la finalidad de indagar tanto las competencias matemáticas como las competencias didácticas de los profesores de matemática en formación inicial desde una perspectiva geométrica. Para establecer las competencias matemáticas de los participantes se analizaron las producciones orales y escritas realizadas en grupos de trabajos durante los tres talleres de empleando un software de geometría dinámica específicamente el Cabri II, teniendo en cuenta tres aspectos: uso del Cabri II, tipo de justificación dada (explicación, prueba, demostración), y los esquemas de argumentación empleada (autoritario, simbólicos, fácticos, empíricos, analíticos); mientras que para develar las competencias didácticas se analizaron unidades didácticas diseñadas por los participantes del curso siguiendo los componentes del análisis didáctico.

Por lo expuesto en el párrafo anterior, la tesis de Iglesias (2014) constituye un antecedente metodológico, debido a que en esta investigación, planificamos y dictamos un taller referido al reconocimiento de patrones, para develar las competencias matemáticas y didácticas de los profesores de matemática desde una perspectiva algebraica, y aquellos aspectos que inicialmente estaban en la proyectados inicialmente pero que no pudieron ser abordados se agruparon en un nuevo curso que constituye la propuesta didáctica esbozada en el capitulo VII.

Investigaciones referentes al Pensamiento Algebraico

En este apartado se hace referencia a tres importantes tesis que se han desarrollado en programas doctorales diferentes, pero que convergen en el estudio de tópicos algebraicos realizadas por docentes, que han ejercido como jefes del área del álgebra adscritos al Departamento de Matemática del Instituto Pedagógico "Rafael Alberto

Escobar Lara", donde se manifiesta la necesidad de investigar desde nuestra práctica educativa, es decir, realizar investigaciones dentro de nuestro campo laboral para que tengan un mayor impacto y repercusión.

La primera de ellas se de desarrollo en el ámbito del Doctorado en Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada en España, partiendo de la interrogante ¿cuál es el papel que debería desempeñar el estudio de los conjuntos, aplicaciones y relaciones en la formación de los maestros? Arrieche (2002) realiza una investigación de naturaleza curricular, y, para contestar esta interrogante de investigación, contempla los aspectos epistemológicos, cognitivos e instruccionales inmersos en el proceso enseñanza-aprendizaje de una teoría matemática (la teoría de conjuntos) en un contexto institucional (la formación de maestros de primaria), concibiendo, (en concordancia la perspectiva Rico y Sierra, 1997), el currículo matemático como el diseño, desarrollo, evaluación de planes de formación matemática y su realización práctica. Para abordar el problema se emplea una metodología mixta de métodos cualitativos y cuantitativos: el estudio documental se ajusta con la faceta epistemológica, la faceta instruccional se orienta hacia el estudio de casos, empleando métodos etnográficos, en la faceta cognitiva se utilizó el enfoque cuantitativo y experimental y el cualitativo interpretativo.

Entre los supuestos teóricos empleados por Arrieche (2002) para el análisis didáctico están las de significado personal y significado institucional de un objeto matemático, entendidos como los sistemas de prácticas realizadas por una persona (o internamente en una institución) para resolver problemas matemáticos, y las praxeología matemática serán las prácticas apropiados o correctas empleadas para resolver tareas dentro de una institución. Mientras que para describir y explicar los logros y dificultades de los estudiantes emplea la noción de praxeología didáctica, que sugiere analizar con detalle el proceso de estudio, y las interacciones docente-alumno. A pesar de que la investigación realizada por Arrieche (2002) esta ejecutada en el contexto de la formación del maestro de primaria, se refiera, al igual que la investigación que estamos realizando a la formación del futuro profesor que impartirá los contenidos matemáticos, además, se considera un antecedente relevante ya que podría establecer una concordancia entre competencias didácticas y matemáticas de nuestra investigación con las praxeologías matemáticas y didácticas investigadas en la teoría de conjunto por dicho autor.

La segunda investigación, se desarrollo en el programa de Doctorado en Educación de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador realizada por la doctora Paredes (2014) desde un paradigma interpretativo-fenomenológico, es la que pretende develar la repitencia académica en el área de álgebra de la especialidad de matemática de la UPEL- Maracay desde la visión del estudiante, aunque en la investigación que estamos realizando no estamos trabajando con repitencia ni trayectorias académicas, Paredes (2014) despliega en su investigación la descripción de los conocimientos algebraicos de los alumnos repitientes, entre los que tenemos: el lenguaje y el razonamiento algebraico, la representación en el desarrollo del pensamiento matemático, los errores y dificultades que cometen los estudiantes, y las actitudes hacia el álgebra. Entre las conclusiones explica la ausencia de sentido que tienen las convenciones y notaciones del lenguaje algebraico como una de las causas de los errores que cometen los estudiantes, además, expone la desvinculación entre los conceptos algebraicos con las tareas como una dificultad que manifiestan los alumnos en el desarrollo del razonamiento algebraico, y ubica a los futuros docentes de matemática en el nivel 0 aproximándose al nivel 1 del razonamiento algebraico, alejándose de los estándares de álgebra propuestos por NTCM. Es importante resaltar que Paredes (2014) señala que: "El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico"(p.340)

En virtud a lo expresado anteriormente, la tesis realizada por Paredes (2014) constituye un pilar para esta investigación porque además de considerar como contexto y sujetos de estudio equivalentes a los nuestros, aborda y desarrolla elementos del razonamiento algebraico que sirven como guía para el estudio que nos encontramos desarrollando.

La tercera, y quizás, la más importante, se desarrolló en el programa de Doctorado en Educación de la Universidad Central de Venezuela intitulada "Procesos del pensamiento algebraico en entornos de aprendizaje mediados tecnológicamente", y que dio origen a la línea de investigación en la que se inscribe esta trabajo: Didáctica del Álgebra y Pensamiento Algebraico (LIDALGEBRA), esta investigación versa sobre el empleo de la plataforma Moodle como una herramienta para fortalecer las clases presenciales, haciendo énfasis en los procesos del pensamiento algebraico involucrados en los contextos de aprendizaje. La investigación realizada por el doctor González (2016), al igual que esta indagación que nos encontramos realizando, se realizó en el Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara" (IPMAR), siendo los sujetos de estudio los estudiantes de la asignatura Álgebra Lineal. Entre los aportes que tomamos de esta investigación, decidimos adaptar el constructo de mediación contemplativa considerada en un entorno virtual a una mediación contemplación pero en situaciones presenciales de aula, ya que según explica González (2016): "Este proceso de gestión de los aprendizajes tiene la ventaja de permitirle al mediador manejar diversos y simultáneos planteamientos de los estudiantes, interpretando lo dicho implícita o explícitamente por ellos y responder" (p.219). Asimismo, emplearemos el instrumento denominado Evaluación del Pensamiento Algebraico (EVAPAL) para indagar las condiciones iniciales de nuestros sujetos de estudio, al referirse a este instrumento el autor, González (2016) explica que la: "prueba diseñada, validada y aplicada con el objeto de diagnosticar algunos elementos que permitieran tener un acercamiento al pensamiento algebraico de los estudiantes del IPMAR, consistió en 20 preguntas abiertas"(p.89)

Por otra parte, por la sistematización que hace de las dificultades que tienen los estudiantes para profesor de matemática, el cómo vislumbran el papel que jugará el álgebra universitaria en su desempeño docente se considera como antecedente el estudio de González (2015). Esta investigación además, introduce aspectos que vinculan el álgebra escolar con un elemento esencial del pensamiento algebraico como loes el lenguaje. En efecto, a la luz de lo que plantean autores como Rojano (1994), Pimm (2002), Freudenthal (1983), entre otros, en torno a las matemáticas escolares como lenguaje resultan de relevante interés sus constructos de lenguaje algebraicamente significativo y construcción relacional del objeto algebraico. Además, resulta vinculante por la revisión que hace del álgebra escolar considerando los puntos de vista investigativo y didáctico. Desde el punto de vista metodológico, empleó la cronogénesis con la cual describió el desarrollo del curso que sirvió de soporte en su investigación. En consecuencia, resultará importante examinar la manera como abordó cualitativamente el análisis de los diarios para diseñar la reconstrucción del discurso del aula con lo cual emergió la cronogénesis.

A modo de resumen, podemos observar que las tres tesis doctorales realizadas por diferentes jefes del área del Álgebra de IPMAR contempladas en este apartado, combinan la indagación de tópicos o proceso algebraicos durante la formación inicial de los futuros profesores de matemática (bien a nivel de primaria o de secundaria) por lo que constituyen un cimiento para la investigación que nos encontramos desarrollando, pues justamente, pretendemos develar los procesos de pensamiento algebraicos puestos en juego por los profesores de matemática durante su formación al enfrentarse a problemas relativos a la búsqueda de patrones y la generalización (elementos que no están contemplados de forma explicita en dicha formación).

FUNDAMENTOS TEORICOS:

Toda investigación se soporta sobre un marco referencial, constituido por teorías o fundamentos teóricos que establecen las premisas sobre la cual se va a indagar, en este particular, los sustentos serán:

- Teoría de los registros de representación semiótica
- Pensamiento algebraico
- El álgebra en la formación inicial del profesor de matemática

- El análisis didáctico como modelo para el diseño de programas
- Competencias didácticas y matemáticas del profesor de matemática

TEORÍA DE LOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

La palabra representación se relaciona con la comprensión intencional de un objeto, tiene multiplicidad de aserciones que va desde el uso de palabras, imágenes, símbolos o figuras para personificar o imitar un acto o un objeto con la finalidad de establecer una imagen o concepto que hace presenta a la conciencia de la persona; se relaciona con la impresión directa o indirecta del objeto, con su percepción, la idea que se crea en torno a él, hasta la fantasía intelectual de lo que se imagina la persona del objeto; este vocablo representación también se refiere a la presentación sensible o intelectual, interna o externa, intuitiva o conceptual que se cree de un objeto. Otro aserción importante de la representación tiene que ver con sustituir, desempeñar las funciones de otro, con el hecho de interpretar una obra teatral, y más coloquialmente, casa que representa a otra (Ferrater, 2004; Diccionario Esencial de la lengua española, 2006)

La representación puede entenderse, desde una perspectiva psicológica, como la aprehensión o percepción de un objeto presente, como el recuerdo consciente de percepciones pasadas, a la imaginación o anticipación a eventos futuros basados en percepciones anteriores, o incluso la alucinación. Las representaciones como percepciones son sensoriales, es decir, captadas por uno de los sentidos, así, tenemos representaciones ópticas, acústicas, olfativas, etc; y las apoyadas en las formas pueden ser representaciones afectivas, volitivas, eidéticas, conceptuales, etc. Mientras que, desde una perspectiva epistemológica, la representación es un acto, subjetivo y privado de contenido mental, o es el objeto intencional de semejante acto, es decir, aquello que se representa en el acto de representar. (Ferrater, 2004).

Mas recientemente, Macías, (2015), en concordancia con Kaput, plantea que "Una representación es una construcción que hace referencia a un objeto o realidad determinada, así como a algunas de sus características y propiedades, permitiendo a los sujetos interaccionar y operar con ellos sin necesidad de su presencia física". (p.42). Para Kaput (1987a, 1992, 1998), en la representación se articulan dos entidades relacionadas, pero con funciones separadas: el representante (símbolo) y el representado (concepto), y justamente de esa confluencia surgen algunas dificultades en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, además, detalla que una representación debe describir cinco entidades: el representado, el que representa, qué aspectos del representado se representan, qué aspectos del que representa son representados y la relación entre ambos. Para Goldín y Janvier (1998), el término representación tienen las siguientes interpretaciones: (1) Concreción y descripción de ideas matemáticas de una situación o entorno físico; (2) Materialización lingüística (sintáctica y semántica) de un contenido matemático; (3) Constructo matemático formal, que puede representar situaciones mediante símbolos; y, (4) Configuración cognitiva interna, individual inferida a partir de la conducta, que describe aspectos de los procesos del pensamiento matemático

En el campo de la emergente Didáctica de la Matemática, Castro y Castro, (1997) postulan que las representaciones "son las notaciones simbólicas o gráficas, especificadas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características y propiedades más relevantes"(p.96), más adelante estos mismos autores plantean que:

> Las representaciones constituyen los diversos sistemas para expresar un determinado concepto matemático; cuando queremos expresar un concepto matemático lo hacemos por medio de su representación. Las representaciones son notaciones, reglas y convenios, que expresan determinados aspectos y propiedades de un concepto, ninguno de los sistemas de representación de un concepto agota por sí mismo a dicho concepto (p.108)

La representación puede entenderse como el conjunto de herramientas (acciones, signos o gráficos) empleadas por los estudiantes para abordar e interactuar con el conocimiento matemático; las representaciones se articulan en sistemas estructurados, y el uso de representaciones facilita el proceso de aprendizaje de las nociones matemáticas. A este respecto, Castro y Castro (1997) explican que "Al utilizar el término representación hemos elegido un sistema estructurado de signos que utilizamos como objetos matemáticos…Las representaciones siempre ocurren en el interior de las propias matemáticas, aun cuando los símbolos o gráficos elegidos procedan de otros campos "(p.109), y Cifarelli (1998) añade que las representaciones se emplean:

> Para describir el proceso de resolución de problemas en matemáticas, ya que la investigación sugiere que si un alumno es capaz de resolver problemas, tal vez se debe en gran parte a su habilidad de construir representaciones que le ayudan a entender la información y la relación de la situación problemática (Cifarelli, 1998, p. 239)

Las representaciones tienen un gran interés desde la perspectiva didáctica, ya que son fundamentales en la estructura conceptual que se requiere para analizar los procesos de comprensión, aprendizaje y asignación de significados que realizan los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas (Radford, 1998).

Es importante hacer mención a los cinco sistemas de representación enumerados por Fernández (1997) que utilizan los estudiantes al abordar problemas de álgebra, los cuales son: (1) Ensayo–Error: emplea la notación numérica y los símbolos aritméticos para establecer relaciones entre los datos conocidos y los desconocidos, (2) Parte-Todo: los datos desconocidos se consideran como parte del resultado de operar los datos conocidos, comparando el total con las partes, (3) Gráfico: se usan códigos gráficos como esquemas, dibujos, tablas, diagramas como medio para resolver el problema, (4) Gráfico–Simbólico: basándose en una representación gráfica se establece la relación entre los datos y las incógnitas a través de un lenguaje simbólico, y (5) Simbólico: se emplea únicamente el lenguaje algebraico, y se expresan las relaciones mediante ecuaciones

Se pueden diferenciar las representaciones internas, conformadas por todo el conjunto de concepciones o imágenes mentales que un individuo tiene acerca de un objeto, de las externas. Debido a que para pensar sobre ideas y conceptos matemáticos es necesaria una representación interna, de forma que el cerebro sea capaz de operar y comunicar estas ideas y conceptos, las representaciones externas son las comunicadas por las personas, de forma escrita u oral, a través de dibujos, esquemas, gráficos, ecuaciones, tablas, palabras, mapas, etc., para expresar dichas ideas. Mientras que las representaciones internas son más complejas de describir, porque se relacionan con las imágenes mentales que se crean las personas para representar procesos u objetos matemáticos. (Cucoo y otros, 2001). Se estima que las representaciones están armónicamente vinculadas, para Duval (1998) las externas son el medio de expresión de las representaciones mentales internas, existiendo una congruencia entre ambas.

De la misma manera, es preciso una representación externa que nos posibilite la comunicación, Así mismo, los signos externos de representación tiene un equivalente mental, lo que torna necesaria una distinción entre las representaciones internas y externas. La relación entre estas dos modalidades de representación fue expresada por Duval (2009), para que las representaciones mentales y las representaciones externas no pueden ser vistas como dominios diferentes, pues el desenvolvimiento de las representaciones mentales se da como una interiorización de las representaciones externas y la diversificación de las representaciones de un objeto, aumenta la capacidad cognitiva del sujeto y, por consiguiente, sus representaciones mentales. Del mismo modo, las representaciones externas, como enunciados en lenguaje natural, fórmulas algebraicas, gráficos, entre otros, son los mejores a través de los cuales los individuos exteriorizan y comunicas sus representaciones mentales y se tornan accesibles. Estas representaciones externas son también conocidas como representaciones semióticas

A este respecto, Duval (2002) concreta que las representaciones semióticas son los objetos que permiten exteriorizar y comunicar las representaciones mentales, y logrando hacerlos apreciables o tangibles a los demás, en la matemática, estas representaciones semióticas pueden ser una fórmula, un símbolo, una figura, una gráfica, un diagrama, los números, los esquemas, etc.; así, las representaciones semióticas son las producciones constituidas por el empleo de signos. Duval (2002), define por representación semiótica "la producción constituida por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significado y de funcionamiento" (p.175). El mismo autor plantea dos clases de representaciones semióticas en relación de la conservación o no de ciertas propiedades del objeto representando: las analógicas (figuras, imágenes, etc.) y las no analógicas (la lengua natural, el lenguaje algébrico, etc.). Esta clasificación se basa en el criterio de similitud, ya que los registros de representación se diferencian en la naturaleza de sus significados, en el sistema de reglas que permiten su asociación y en el número de relaciones que se consiguen construir en dicha asociación. Estas dos últimas diferencias son la base de la flexibilidad y el poder de una gran variedad de registros, porque permiten realizar tratamientos equivalentes menos complejos, con menor esfuerzo al realizar un adecuado cambio de registro, y contribuyen a superar las limitaciones inherentes a cada registro en el desempeño de una actividad compleja.

Es importante resaltar, la existencia de múltiples sistemas semióticos que referencian a un mismo concepto matemático, donde cada uno presenta bondades, dificultades y limitaciones que lo hacen insuficiente por sí sólo. La incompletitud de una representación conlleva a conjugar diversas representaciones un mismo objeto matemático para abordar su comprensión desde varias perspectivas, ya que, hay propiedades del objeto se aprecian mejor en un registro particular. Así, podemos hacer uso, entre otros, de los siguientes registros representación:

- Registro de la Lengua Natural (RLN): se refiere al uso del lenguaje nativo, bien sea en forma escrito oral o incluso mímica, el uso de registro de la lengua natural permite describir, designar, definir, etc.
- Registro Figural-Icónico (RFI): incluye las marcas, líneas, mapas, bosquejos, esquemas, dibujos, etc., que intentan representar el objeto de conocimiento sin concretar la cualidad de los elementos involucrados
- Registro Numérico (RN): Las representaciones de tipo numérico permite realizar operaciones de cálculo y aplicar propiedades, permite caracterizar e identificar elementos de los objetos matemáticos representados, y aproximarlos con representaciones gráficas y geométricas.
- Registro Tabular (RT): se emplea un ordenamiento de los datos y cálculos en arreglos rectangulares de filas y columnas teniendo una visión integral de la información, lo que conlleva a comparar y relacionar los datos con facilidad, para revelar propiedades y características del objeto de conocimiento referido.
- Registro Algebraico (RA): el uso de un registro algebraico involucra el conocimiento y uso del lenguaje algebraico, facilita las generalizaciones, establecimiento de fórmulas, y la modelizaciones, y su principal ventaja es que permite enunciar características particulares del objeto que representa.
- Registro Geométrico (RG): este registro acepta la reconfiguración y manipulación para facilitar la comprensión y establecer vínculos entre diferentes objetos
- Registro Gráfico (RGr): el uso del registro gráfico permite visualizar el comportamiento de una función, un lugar geométrico, y establecer procesos de traslaciones, reflexiones, simetrías, contracciones, dilataciones, etc.

Los procesos matemáticos se producen por el carácter funcional de las representaciones semióticas. Algunos sistemas semióticos pueden ser utilizados sólo para una función cognitiva, como el tratamiento matemático; sin embargo, otros sistemas semióticos pueden cumplir una diversidad de funciones cognitivas: como comunicar, informar, procesar, entre otros. Según Duval (2006) en un sistema semiótica monofuncional o técnicos los registros derivados se especializan en un solo tratamiento, mientras que dentro de un sistema semiótico multifuncional o plurifuncional se encuentran los registros que se utilizan en la vida cultural y social, los cuales sirven para tratamientos amplios, porque son más potentes. Lo esencial para entender los procesos de pensamiento involucrados en cualquier actividad matemática es centrarse en el nivel de los sistemas de representación semióticos y no en la representación particular producida. Así, con respecto a la propiedad de las representaciones semióticas que es básica para la actividad matemática, podemos distinguir cuatro tipos bien diferenciados de sistemas semióticos: dos sistemas multifuncionales (sistema lenguaje natural o verbal, y el sistema figural), y dos sistemas monofuncionales (el sistema numérico o simbólico, y el sistema de gráficos cartesianos). Respecto al uso de los registros, Duval (1999) hace referencia a que los registros discursivos permiten describir, inferir, razonar, calcular, mientras que los registros no discursivos permiten visualizar lo que nunca es proporcionado de manera visible.

Cuadro3
Clasificación de los Registros de Duval, tomado de Macías, 2015

	Representación Discursiva	**Representación no discursiva**
Registros Multifuncionales	˙ Lenguaje Natural. ˙Teoremas, definiciones, descripciones. ˙Razonamiento: argumentaciones, conjeturas, deducciones	˙ Figuras geométricas planas o en perspectiva (configuraciones 1D/2D, 2D/2D, 3D/2D). Aprehensión operativa y perceptiva. ˙ Construcción con instrumentos. ˙ Modelización de estructuras
Registros Monofuncionales	˙ Sistemas de notación: numérica (decimal, fraccionaria, exponencial), algebraica, simbólica, funcional. Cálculo literal, algebraico, numérico	˙Gráficos Cartesianos ˙Cambio de sistemas de coordenadas, ˙Interpolación ˙Extrapolación

En la actividad matemática es primordial movilizar y coordinar varios registros en el desarrollo de una misma tarea y durante el aprendizaje de un concepto, en este mismo contexto se consideran dos actividades claves, una ligada a la producción de representaciones, y otra enlazada con la aprehensión conceptual de los objetos representados. La primera la denomina semiosis, mientras que a la aprehensión conceptual del objeto la llama noesis, así, la semiosis es la actividad vinculada a la elaboración de representaciones, la cual depende de los signos que forman parte del sistema utilizado para concebirlas, y noesis es la actividad ligada a la aprehensión conceptual de los objetos representados, incluyendo las diferentes actividades y procesos cognitivos desarrollados por el sujeto. Además, postula que la actividad de producción de representaciones es la que permite la comprensión; es decir, la semiosis es la que determina las condiciones de posibilidad de la noesis.

Duval (1999) postula que para que un sistema semiótico (conjunto de signos y reglas que representan objetos, donde los signos son las unidades elementales del sistema y las reglas rigen las asociaciones de signos) pueda ser un registro de representación, debe permitir las tres actividades cognitivas básicas ligadas a la semiosis inherentes a toda representación: (1) Representación identificable, (2) El tratamiento de representaciones, y (3) La conversión entre representaciones de diferentes registros

La formación de representaciones identificables en un registro semiótico particular se puede equiparar a la designación nominal de objetos para expresar una representación mental o para evocar el objeto real, la cual están constituidas por un conjunto de marcas perceptibles identificables como la representación específico de alguna cosa en un sistema determinado. Estos actos adquieren relevancia en la medida en que las representaciones formadas se puedan modular o articular en representaciones de orden superior, dicha articulación obedece a la estructuración interna del sistema semiótico, concretamente a las reglas de conformidad del sistema semiótico empleado.

Las reglas de conformidad definen el sistema de representación y, también, a los tipos de unidades constitutivas de las representaciones posibles en un registro, y describen: (1) La determinación de unidades elementales: símbolos, vocabulario; (2) Las combinaciones admisibles de unidades elementales para formar unidades de nivel superior: reglas de formación de un sistema formal, gramática de las lenguas naturales; y (3) Las condiciones para que una representación de orden superior sea una producción pertinente y completa: reglas canónicas propias de un género literario o a un tipo de producción de registro

Por otro lado, tenemos que a las transformaciones instantáneas se ejecutan fugaces, casi simultaneas, con la observación, y producen información significante de la cual el sujeto toma consciencia inmediatamente. Por la rapidez con la que se realizan estas transformaciones no se logran apreciar la cantidad de elementos que están integrando, y son el resultado de una competencia adquirida a través de la práctica. Mientras, que las transformaciones intencionales requieren de la observación del objeto y se efectúan de forma consciente, llevan tiempo y se puede apreciar el número de elementos que se componen, y solo pueden ser efectuadas una después de la otra. La actividad cognitiva se basa en la complementariedad de estos dos tipos de transformaciones: las transformaciones instantáneas suministran la "percepción inmediata" a la consciencia de las unidades informacionales más y más distinguidas, para llegar a objetos mas complejos o más generales, y las transformaciones intencionales se refiere a la transformación interna dentro de un registro y producen una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales.

Así, se define tratamiento como la trasformación que se efectúa en el interior de un mismo registro, así, un tratamiento moviliza un solo registro de representación y corresponde a la expansión de la información del contenido de la representación de partida y la reorganización de sus elementos, por lo que, en su conformación se emplean las reglas de expansión de una representación que son, reglas cuya aplicación produce una representación en el mismo registro que la representación de partida en el que ha sido formulada. La finalidad de las transformaciones es que se obtengan otras representaciones que puedan constituir ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales. Un ejemplo de tratamiento es cuando se tiene una ecuación y se hace una simplificación de la misma, estamos trabajando dentro del mismo registro.

Además del tratamiento, existe otro tipo de transformación, denominada conversión que es una actividad diferente e independiente de la del tratamiento, la conversión es una transformación externa relativa al registro de representación de partida, donde empleando operaciones designadas por términos de transposición, traducción, ilustración, interpretación, codificación, se transformar representaciones de un registro a otro de un mismo objeto, y requiere de la coordinación por parte del sujeto que la efectúa.

La conversión es una habilidad que permite cambiar de registro de representación semiótica, y convertir las representaciones producidas de un sistema de representación a otro sistema, de manera que este otro sistema permita explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado, es decir, la conversión es la transformación de una representación en una representación de otro registro conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial y se trata de una transformación externa a un registro.

Según las investigaciones de Duval (1992), Guzmán (1998) y Gutiérrez (2007) que se han podido desarrollar en el aprendizaje de las matemáticas se ha logrado demostrar que cambiar la forma de una representación es para muchos alumnos una operación difícil ya que no ponen en correspondencia las unidades significantes en cada uno de los registros, la falta de una interpretación global de las gráficas cartesianas, la tendencia de los estudiantes a mecanizar los procedimientos en un solo registro “Todo sucede como si para la gran mayoría de los alumnos la comprensión que logran de un contenido quedara limitada a la forma de representación” (Duval, 1999).

Presentaremos tres aspectos a considerar cuando se analicen los procesos de pensamiento presentes en la actividad matemática:

(1) Los dos tipos de transformaciones de las representaciones semióticas: tratamientos y conversiones; los tratamientos son transformaciones de

representaciones que ocurren dentro del mismo registro donde se ha formado, estas transformaciones ocurren con las únicas reglas propias de dicho sistema semiótico, de modo que a partir de estas representaciones iniciales de se obtengan otras representaciones que muestran una ganancia de conocimientos en comparación con las representaciones iniciales; las conversiones son las transformaciones de representación que consisten en cambiar un registro a otro, sin cambiar el objeto denotado: esto ocurre cuando la ecuación lineal $Ax+By+C=0$ representada en registro simbólico se convierte a su representación gráfica lográndose reconocer la relación entre el registro de partida y el registro de llegada. Según Duval (2006) la conversión es una transformación de la representación, que es más complejo que el tratamiento porque cualquier cambio de registro primero requiere el reconocimiento del mismo objeto representado entre dos representaciones cuyos contenidos muy a menudo no tienen nada en común.

(2) Reconocimiento del mismo objeto matemático a través de dos representaciones cuyo contenido es heterogéneo: estamos frente a un criterio de reconocimiento en que se requiere de una capacidad de observación a los signos matemáticos, donde haciendo uso de la paradoja cognitiva del acceso a los objetos matemáticos, debemos diferenciar entre el contenido de una representación (el registro) y lo que refiere dicha representación (el objeto). Así, Duval (2006) propone que entre el contenido de una representación y el objeto representado no hay otra relación que la denotación. Ahora, y esta es la consecuencia decisiva que apenas es tomada en cuenta, el contenido de una representación depende más del registro de la representación que del objeto representado. Esta es la razón porque pasando desde un registro a otro, en los cambios no sólo importa la manera de realizar la conversión, sino también las propiedades que permiten su realización.

(3) Las dos fuentes principales de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: cuando nuestros alumnos realizan los dos tipos de transformaciones (tratamientos y conversiones) se encuentran con dificultades: (a) la complejidad y especificidad de los tratamientos llevados a cabo en un registro multifuncional, y (b)

la complejidad cognitiva de la conversión de las representaciones o el cambio de registro.

La complejidad y especificidad de los tratamientos llevados a cabo en un registro multifuncional parte del hecho de que el lenguaje natural está presente en el estudio de cualquier disciplina, en particular, la comprensión en la matemática requiere de articular los registros multifuncionales con las representaciones producidas dentro de los registros monofuncionales. Para comprender la complejidad cognitiva de los tratamientos, se debe separar y analizar la ejecución de los tratamientos, en el registro discursivo y el registro gráfico, aun cuando se presentan en el mismo proceso matemático. En el caso del registro gráfico, se requiere de una visualización de las unidades significativas de dicho registro, aquí estamos frente a una fuerte discrepancia entre la forma habitual de ver las figuras, generalmente en una forma icónica, y la manera matemática que ellas esperan ser miradas.

La complejidad cognitiva de la conversión de las representaciones o el cambio de registro: se relaciona con los pares de registro que son transformados en la conversión, un ejemplo con el cual estamos habituado, es una transformación de términos de un problema enunciado en lenguaje natural a su respectiva expresión algebraica. Duval (2004) explica que la conversión posee dos características: (1) la congruencia o no de la conversión, y (2) la conversión tiene una orientación o sentido, lo cual permite señalar al registro de partida y al registro de llegada. El primer fenómeno de la complejidad cognitiva de la conversión se debe a la no congruencia de la conversión.

Para Duval (2006): "es el primer umbral de la comprensión en el aprendizaje de las matemáticas". (p. 166), el autor manifiesta que la conversión entre registros de representación diferentes, es espontánea cuando dichos registros son congruentes; y explica que para determinar si la conversión entre dos representaciones es congruente, hay que comenzar por segmentar cada una de las representaciones en sus unidades significantes, de tal manera que se pueda realizar una correspondencia, luego de esta segmentación comparativa, se puede ver si las unidades significantes son, en cada uno de los dos registros, simples o combinaciones de unidades simples (la comparación puede ser directa o empleando una tercera representación que codifique las representaciones que se quieren comparar), y si cumplen con los tres criterios: correspondencia semántica entre las unidades significantes propias de cada registro, univocidad semántica terminal y conservación del orden de organización de las unidades significantes en las representaciones, entonces las dos representaciones son congruentes.

Así, dos representaciones son congruentes cuando hay correspondencia semántica entre sus unidades significantes, hay univocidad semántica terminal y existe el mismo orden posible de aprehensión de estas unidades en las dos representaciones. Es importante mencionar que las unidades significantes son los valores que pueden tomar las diferentes variables en cada registro de representación. Mientras que los tres criterios de convergencia, detallados son:

(1.1) La posibilidad de una correspondencia "semántica" de los elementos significantes: a cada unidad significante simple de una de las representaciones, pueden relacionarse una unidad significante elemental de una representación con una unidad significante elemental de la otra representación

(1.2) Univocidad semántica terminal, esto significa que las unidades significantes de cada registro están en relación de uno a uno, es decir, a cada unidad significante elemental de la representación de salida, le corresponde sólo una única unidad significante elemental en el registro de la representación de llegada.

(1.3) Orden de las unidades significantes, esto indica que las unidades conservan el mismo orden en las dos representaciones Y conllevan a que las unidades en correspondencia semántica sean aprehendidas en el mismo orden en las dos representaciones. Este criterio de correspondencia en el orden del arreglo de las unidades que componen cada una de las dos representaciones es pertinente solo cuando éstas tienen el mismo número de dimensiones.

Al no cumplirse alguno de estos criterios se dice que la conversión es no congruente. Según Duval (2004) "la dificultad de la conversión de una representación depende del grado de no-congruencia entre la representación de partida y la representación de llegada". (p. 53).

Evidentemente, un cambio de registro resulta interesante y fecundo cuando los tratamientos en dos registros diferentes no son congruentes. La importancia de un cambio de registro está en que, justamente, se pueden efectuar tratamientos totalmente diferentes en un registro distinto a aquel en el que fueron dadas las representaciones iniciales debido a que no son "funcionalmente equivalentes", Duval manifiesta: "… la actividad de conversión no puede ser asimilada a una inferencia, incluso cuando hay no congruencia. Y esto porque no hay reglas de conversión, pero si hay reglas de tratamiento". (pág. 52)

Las dificultades que se tienen por la no-congruencia de la conversión, pueden agravarse por el desconocimiento de uno de los registros de representación. En el análisis de desarrollo de pensamiento y los problemas de aprendizaje de las matemáticas, el trabajo realizado por Duval, plantea tres fenómenos, que se encuentran muy relacionados entre sí, los cuales se refieren a:

a) La diversificación de los registros (los multiregistros) de representación semiótica, debido a que los diferentes sistemas de representación son muy diferentes entre sí y cada uno de ellos plantea propuestas sobre el aprendizaje, además que, un registro puede ser más económico y potente que otro registro para realizar un tratamiento determinado.

b) Diferenciación entre representante y representado, tanto de forma como de contenido de una representación semiótica, se refiere a la comprensión de lo que representa una representación y la posibilidad hacer corresponder otras representaciones y añadirlas a las formas de tratamiento.

c) Coordinación de diversos registros de representación, se refiere a conocer las reglas de correspondencia entre dos sistemas semióticos diferentes y los fenómenos de congruencia entre las representaciones producidas en los diferentes sistemas.

Para que los objetos matemáticos sean diferenciados de sus representaciones, se reconozca el objeto de conocimiento a través de distintas representaciones cuyos contenidos no tienen relación entre sí, y se logren reconocer y distinguir dos objetos a través de dos representaciones cuyos contenidos parecen semejantes porque dependen del mismo sistema de representación, es fundamental movilizar diferentes registros de representación semiótica (lengua natural, lenguaje algebraico, gráfico, figuras, etc.) y desarrollar la coordinación entre ellos. (Duval, 2006).

Debido a lo anterior, el autor resalta que la transformación de registros y la capacidad de pasar de un registro de representación a otro ocupa un lugar trascendental y determinante en el aprendizaje de las matemáticas. Lo más significativo en la enseñanza de las matemáticas no es elegir el mejor sistema de representación, ya que ningún sistema permite apreciar todas las propiedades de un objeto. Lo significativo es lograr que los estudiantes sean capaces de establecer diversas relaciones en la manera de representar los contenidos matemáticos, y que sean capaces de emplear aquellas que les permitan entender mejor los conocimientos puestos en juego, evadiendo el establecimiento y creación de los obstáculos en el progreso de la comprensión y el aprendizaje.

Para finalizar queremos mostrar los niveles de comprensión de un concepto que plantea Hitt (1995), en relación al uso de los distintos sistemas de representación, identificación, conversión, y coordinación realizada por los estudiantes al resolver problemas algebraicos

Cuadro4
Niveles de Comprensión de los estudiantes al resolver problemas, tomado de Hitt, 1995

NIVELES DE COMPRENSIÓN	Características observadas en los niveles de los estudiantes
NIVEL 1	Uso incoherente de diferentes representaciones del concepto después de someterse a un proceso de aprendizaje Ideas imprecisas sobre un concepto (mezcla incoherente de diferentes representaciones del concepto).
NIVEL 2	Identificación de diferentes representaciones de un concepto Identificación de las diferentes representaciones de un concepto. Identificación de sistemas de representación.
NIVEL 3	Transformación, con la preservación del significado, de un sistema de representación a otro Traducción con preservación del significado de un sistema de representación a otro.
NIVEL 4	Articulación coherente entre dos sistemas de representación.
NIVEL 5	Articulación coherente de diferentes sistemas de representación en la solución de un problema.

PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Interpretación de Las Letras

Hasta el momento, se ha establecido, que actualmente la simbolización es un signo distintivo del Álgebra y que en ésta es implementada, preponderantemente, a través de las letras, de hecho “el uso de las letras se encuentra fuertemente ligado al Álgebra elemental y a los razonamientos de tipo algebraico (González y Diez, 2002, p.283), razón por la que es importante considerar las distintas interpretaciones que de ellas se hacen. Una categorización ampliamente conocida es la que ofrece Küchemann (1981), este autor realizó en 1976 una investigación que involucró 3000 alumnos británicos entre 13 y 15 años, en el marco del proyecto CSMS (Concepts in Secondary Mathematics and Science). Analizó las interpretaciones que los estudiantes hacen de las expresiones literales (letras) que aparecen en las expresiones algebraicas y estableció 6 categorías las cuales han servido de base para varias investigaciones con relación a la enseñanza del Álgebra elemental como lo demuestran los trabajos de Palarea (1998); Ursini, et. al (2005), entre otros; a saber: letra evaluada, letra no considerada, letra como objeto concreto, letra como incógnita específica, letra como un número generalizado y letra como variable. Se podría afirmar que de esta clasificación las tres primeras se constituyen en dificultades para el desarrollo del pensamiento algebraico del estudiante mientras que las restantes son algunos usos correctos de las letras en Álgebra. A continuación se describirán cada una de tales categorías.

(1) Letra evaluada: el estudiante asigna un valor numérico a la letra desde el principio como una manera de evitar el trabajo con algo que se desconoce y así eliminar la incertidumbre, para ello se vale de relaciones y conceptos como la simetría, lugar que ocupa en el alfabeto, reparto equivalente, etc. (Palarea, 1998). Un ejemplo se tiene cuando el estudiante tiene que operar con expresiones del tipo $a+b=10$ y adjudica el valor de 5 para las dos letras.

Este tipo de caso también es una muestra de los peligros que conlleva la transferencia de lo aritmético a lo algebraico, por ejemplo cuando en los primeros grados de escolaridad se colocan problemas como el siguiente "$[\ ]+7=11$" donde el número que falta debe ser colocado dentro del cuadrado siendo éste un accesorio para colocar dentro de él el número 4. Otra variante de esta situación son los problemas del tipo "Si $a+7=11$, cuánto vale a", el valor de la letra a es desconocido pero seguidamente es evaluable, se conmina entonces a el alumno para que asigne el valor 4 a la letra a, corriendo el riesgo de que los niños asimilen este tipo de problemas reflexionando sobre el significado de una letra como un valor numérico específico (Palarea, 1998). Se debe agregar que esto es didácticamente correcto porque se está trabajando en el nivel de pensamiento numérico pero en el nivel algebraico, como lo señala la precitada autora, esta misma situación es conceptualmente diferente si se plantea así "Si $a+7=11$, entonces $a=?$".

Otro tipo de situaciones que puede reforzar esta noción de letra evaluada son los ejercicios del tipo "Calcula el valor de la expresión $5b-2$ cuando $b=0, \mathrm{b}=1, \mathrm{b}=2$" con los cuales la idea de letra fija, inicialmente desconocida, es cambiada por la idea de que ella puede tomar el valor de varios números.

(2) Letra no considerada: la letra es ignorada o, en el mejor de los casos, se reconoce su existencia sin darle significado. Un ejemplo se consigue en ejercicios del tipo "añade 5 a $7m$" y el estudiante señala $12m$ con lo cual asume que la letra está ahí pero se puede prescindir de ella. De este caso hay una variante que puede pasar desapercibida por el docente en ejercicios del tipo "multiplica por 5 a $7m$" en el cual se obtiene $35m$.

(3) Letra considerada como objeto concreto: la letra se contempla como un signo taquigráfico para un objeto concreto o el objeto concreto en sí mismo, un ejemplo se consigue en expresiones $8p+5m$ en la que el estudiante puede estar "leyendo" las letras como iniciales de frutas y creer que se trata de 8 peras más 5 manzanas o incluso ver las letras como los objetos mismos en cuyo caso se tienen 8 "pes" más 5 "emes". Como señala Palarea (1998) esta reducción del significado abstracto de las letras a objetos generalmente ocurre inadecuadamente en problemas en los que es

necesario distinguir entre los objetos concretos y las cantidades específicas de esos objetos.

En Geometría es frecuente tomar las letras como simples nombres para los lados de un polígono descuidando el sentido de la magnitud del lado, por ejemplo, al escribir, para el área de un cuadrado, $A = a.b$ debería quedar claro que, en este caso, a y b no son los segmentos sino las magnitudes de dichos segmentos. Igualmente ocurre con conceptos como la altura, el radio de una circunferencia, etc.

(4) Letra considerada como una incógnita específica: se observa la letra como un número específico que, a pesar de ser desconocido, se puede operar con él directamente. Un ejemplo de tal categoría surge al responder correctamente problemas del tipo "Supongamos que los lápices cuestan Bs. 3 y los sacapuntas Bs. 4. Si gasté Bs. 25 entre *L* lápices y *S* sacapuntas, ¿qué relación se puede establecer entre *L* y *S*?

(5) Letra considerada como un número generalizado: la letra es vista como representante o, al menos llega a tomarse como tal, de distintos valores. Por ejemplo, en esta categoría se reconocen como infinitas las soluciones de $x < 5$ siempre que x sea un número real, mientras que la misma inecuación tiene solución finita si x es un número natural.

(6) Letra considerada como una variable: la letra se contempla como un conjunto de valores no específicos con unas relaciones sistemáticas, se la considera como elemento de una relación entre dos conjuntos semejantes de valores. Esta categoría supone un alto nivel de abstracción pues en ésta están envueltas las últimas 2 categorías, esto es, se reconocen las letras como incógnitas específicas con uno o más valores pero además se distinguen las posibles relaciones entre ellas. Alcanzar esta categoría es un asunto complejo en el tránsito de lo numérico a lo algebraico, en referencia a las dificultades que significa este aspecto para el alumno señala Palarea (1998) que los símbolos que hasta el momento ha usado el niño en Aritmética tales como los signos de operaciones, paréntesis y números "son de significación unívoca y está acostumbrado a poder interpretar, de manera única, cada símbolo que encuentra" (p. 66).

En el ejemplo anterior, para escribir la ecuación bastaba con reconocer las letras como incógnitas y con la siguiente interpretación se podían reconocer sus soluciones, pero el reconocimiento de L y S como variables exige el establecimiento de otras consideraciones como por ejemplo la idea de cambio o variación de tal manera que se puede dar respuesta a interrogantes como: ¿qué pasa si L crece?, y si L decrece.

Otro contexto muy importante que involucra esta categoría es en el establecimiento de una relación funcional a partir de una tabla de valores lo cual supone observar los cambios que se operan en una letra (variable) en virtud de los cambios que se operan en la otra.

Interpretación del Signo de Igualdad

La interpretación del signo de igualdad es otro asunto que ha ocupado un lugar importante en los trabajos relacionados con la didáctica del Álgebra y el Pensamiento Algebraico como se desprende de los trabajos de González y González (2012a) y Carpenter, et al (2003). También ha sido mencionado incidentalmente en los otros apartados de este documento lo cual es una muestra de su inseparabilidad y trascendencia al momento de tratar lo concerniente a la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra. En la experiencia docente se han evidenciado algunas "expresiones algebraicas" carentes de sentido matemático como $x+0 \rightarrow x$ en la cual se confunde el signo igualdad (=) con el signo de implicación lógica, en otros casos se ha constatado que algunos alumnos frente a una expresión del tipo $x+6$ escriben $6x$, también se ha observado como el signo de igualdad es utilizado para unir partes aisladas de un cálculo como en $4+2=6x8=48$.

En estos casos no se interpreta la equivalencia lógica de este signo, sino como símbolo empleado para escribir una respuesta, es decir, como sinónimo de hacer algo. Esta forma de actuar está en consonancia, según afirma MacGregor (1996), con anteriores aprendizajes escolares consolidados en su estructura cognitiva. Para la autora, ésta y otras dificultades del aprendizaje del Álgebra escolar están relacionadas con conocimientos deficientes de la Aritmética, en este sentido afirma que:

“Los alumnos que no comprenden de modo suficiente las propiedades de los números y las operaciones no reconocen las relaciones y los procedimientos generales. Se les enseña a utilizar el lenguaje algebraico para expresar conceptos que no han desarrollado y relaciones que no comprenden” (MacGregor, (1996) p. 66).

Esto permite reafirmar la idea, ya manejada, en cuanto a la necesidad de promover y desarrollar el pensamiento relacional en los estudiantes como un puente que conduce al pensamiento algebraico.

Reconocimiento de Patrones

No es común en la enseñanza de la Matemática el empleo de los patrones para motivar, explorar y propiciar la comprensión del álgebra escolar, no obstante la afirmación de Zazkis y Liljedahl (2002) de que “los patrones son el corazón y el alma de las matemáticas” (p. 379); frase análoga a la de Halmos (1980), quien asigna este papel a los problemas. Plantean que “a diferencia de la resolución de ecuaciones o la manipulación de los números enteros, la exploración de los patrones no siempre se destacan por sí misma como un tema o una actividad curricular” (Zazkis y Liljedahl, 2002, p. 1).

En este contexto cabe destacar el concepto de razonamiento matemático. Giménez (1997) lo considera como el “conjunto de enunciaciones y procesos asociados que se llevan a cabo para fundamentar una idea en función de unos datos o premisas y unas reglas de inferencia” (p. 70). En él convergen cuatro procesos: reconocimiento, inducción, iteración y recursión.

El reconocimiento es utilizado como sinónimo de descubrimiento y explicitación de patrones a partir de una situación dada. Esto supone otros subprocesos tales como: (a) Observar regularidades; (b) identificar descriptivamente situaciones; y, (c) interpretar situaciones similares, entre otros. A través de la inducción se busca la formulación de leyes generales a partir de la observación de casos particulares. Con la iteración se repite un cierto razonamiento o procedimiento. Finalmente, la recursión se ejecuta cuando se hace un procedimiento aparentemente circular para poner en práctica un proceso iterativo.

Con respecto al término patrón cabe destacar que no es propio del lenguaje matemático, ni apunta hacia un área específica dentro de su amplio universo ya que el mismo corresponde a una noción “meta-matemática” (Da Ponte, 2009); por ello es posible, según este autor, hablar de patrones en cualquier rama de la Matemática con configuraciones y propiedades propias en cada caso, por lo que no resulta sencillo identificar aspectos que sean comunes.

Desde el punto de vista matemático Andonegui (2009) define patrón como:

> Secuencias de números o de gráficos cuyos elementos se obtienen a partir de cierta regla estable que se va aplicando a cada elemento de la secuencia para obtener el siguiente, de tal modo que cada elemento guarda cierta relación con la posición que ocupa. (p. 30)

El término regularidad alude a la repetición de un fenómeno en diversas instancias que bien pueden ocurrir en un contexto informal como científico; es decir, dicha repetición puede estar asociada al tiempo, las experiencias de la vida cotidiana, entre otros; también puede emparentarse con los términos compás o ritmo. En el caso de las ciencias, y particularmente las matemáticas, estudiar las regularidades constituye un eje transversal.

Por su parte, Da Ponte (2009) observa la complementariedad entre los términos regularidad y patrón, en ese sentido afirma:

> El término patrón apunta a la unidad de base que se repite, de forma exactamente igual o de acuerdo con alguna ley de transformación, mientras que regularidad remite a la relación que existe entre los diversos objetos, aquello que es común a todos ellos o que de algún modo los une. Patrones y regularidades son, por tanto, dos puntos de vista complementarios. (p.170)

A su vez, Warren y Cooper (2008) sostienen que el poder de las matemáticas radica en las relaciones y transformaciones que dan lugar a patrones y generalizaciones.

Sin embargo, el estudio de patrones y regularidades no debe plantearse como un objetivo en sí mismo, pues como lo advierte Da Ponte (2009) esto puede dar origen a diversos malos entendidos e incomprensiones. El ejemplo anterior sirve para ilustrar como el patrón funciona como instrumento para estudiar el número racional.

Además, no todas las generalizaciones de patrones son algebraicas. Por esta razón, en el uso de patrones como recurso didáctico, se debe tener mucho cuidado en no confundir generalizaciones algebraicas con otras formas de generalización (Radford, 2010).

En el trabajo con patrones y regularidades se debe tener claro lo relacionado con lo representacional, en ese sentido, se puede hablar de representaciones pictóricas, geométricas, numéricas, tabulares, algebraicas y verbales. Además, también son importantes siguiendo a Britt e Irwin (2008), reconocer la articulación de diferentes sistemas semióticos, palabras, gestos, imágenes, gráficos y símbolos.

Según Radford, citado por Vergel (2014), *generalizar* significa observar algo que va más allá de lo que realmente se ve. Ontogenéticamente hablando, este acto de percibir se desarrolla a través de un proceso durante el cual el objeto por ser visto emerge progresivamente.

El siguiente cuadro muestra la tipología de pensamiento algebraico que propone Radford (2010) ha sido elaborada citando a Vergel (2014):

Cuadro 5
Tipologías de Pensamiento algebraico según Radford (2010)

Pensamiento algebraico Factual	Los medios semióticos de objetivación movilizados son los gestos, los movimientos, el ritmo, la actividad perceptual y las palabras. En este estrato de pensamiento la indeterminancia no alcanza el nivel de la enunciación, pues se expresa en acciones concretas, por ejemplo, a través del trabajo sobre números; por lo que podemos afirmar que en este estrato la indeterminancia queda implícita. Por ejemplo, el alumno señala con la mirada, con su índice, realiza movimientos con un lápiz, dice “aquí”, señala y dice “más 2”.
Pensamiento algebraico Contextual	Los gestos y las palabras son sustituidos por otros medios semióticos de objetivación tales como frases “clave”. En este estrato de pensamiento la indeterminancia es explícita, se vuelve objeto del discurso. La formulación algebraica es una descripción del término general. Por ejemplo, el estudiante dice “arriba quito uno” o “dos por la figura más uno”, o “# de la figura + 1 para la fila de arriba y # de la figura + 2 para la de abajo. Sumar los dos para el total”. Esto significa que los estudiantes en este estrato de pensamiento tienen que trabajar con formas reducidas de expresión.

Pensamiento algebraico Simbólico	Las frases "clave" son representadas por símbolos alfanuméricos del álgebra. Por ejemplo, mediante expresiones como: $n+(n-1)$ ó $2n-1$. Según Radford (2010, p. 8), en este estrato de pensamiento "hay un cambio drástico en la manera de designar los objetos del discurso", a través de signos alfanuméricos del álgebra, lo cual hace pensar en otro estado del proceso de objetivación de contracción semiótica. (p. 80)

Para Bednarz, Kieran y Lee (1996) la generalización es un enfoque mediante el cual se puede introducir el álgebra a nivel escolar. Además de Inglaterra, también Portugal y Brasil, más recientemente, se han incorporado al desarrollo de trabajos de investigación y didácticos que involucran el tema de patrones y regularidades como se desprende de Da ponte (2009). Mientras que, en Venezuela son pocos los trabajos que se dirigen a esta práctica, sin embargo Andonegui (2009) lo incluye como actividad que propicia el trabajo orientado hacia la generalización.

Competencias Algebraicas Escolares

Desde el punto de vista de Palarea (1998) se afirma que se debe "aprender el Álgebra como un conjunto de competencias incluyendo la representación de las relaciones cuantitativas, como un estilo del pensamiento matemático, el pensamiento algebraico" (p.6). En este sentido cobra importancia la clasificación en torno a las competencias de índole algebraica que realizan Socas y otros (1998):

Cuadro 6
Competencias algebraicas escolares según Socas, et al. (1998)

Competencia	Indicador
Habilidad para aplicar los conocimientos algebraicos a la resolución de problemas	Formular problemas algebraicos, aplicar diferentes estrategias en la resolución de problemas algebraicos, verificar e interpretar resultados y generalizar soluciones
Habilidad para usar el lenguaje algebraico en la comunicación de ideas	Expresar ideas matemáticas usando el lenguaje algebraico tanto verbal como escrito, comprender e interpretar las ideas que se presentan en lenguaje algebraico y usar la notación algebraica para estructurar y representar ideas, describir situaciones y modelos.
Habilidad para razonar y analizar información dada en lenguaje algebraico	Analizar situaciones en lenguaje algebraico para determinar propiedades y estructuras comunes, usar el razonamiento deductivo para verificar conclusiones y construir razonamientos válidos expresados en lenguaje algebraico, usar el razonamiento inductivo y el lenguaje algebraico para hacer, reconocer y refutar conjeturas

Conocimiento y entendimiento de los conceptos y procedimientos algebraicos	Clasificar y definir objetos expresados en lenguaje algebraico, identificar y generar ejemplos y contraejemplos, usar diferentes representaciones semióticas para representar los objetos del álgebra, reconocer los distintos significados y representaciones de los objetos del Álgebra, identificar propiedades de los objetos algebraicos y determinar condiciones que determina un objeto particular, comparar y contrastar objetos del Álgebra
Disposición positiva hacia el Álgebra	Confianza en el Álgebra para resolver problemas, comunicar ideas y razonar, flexibilidad y tolerancia en la exploración de objetos algebraicos, predisposición a perseverar en la búsqueda de soluciones o conclusiones cuando trabaja con objetos algebraicos, interés, curiosidad y creatividad en los trabajos con Álgebra, apreciaciones de las aplicaciones del Álgebra a otras áreas y a experiencias de la vida cotidiana.

Pensamiento Relacional y Pensamiento Algebraico

Andonegui (2009), concibe el pensamiento relacional (PR) como iniciación remota al pensamiento algebraico en el nivel primario, es decir, como una antesala estratégica que facilita el álgebra temprana. Por ello es necesario precisar el concepto de pensamiento relacional.

El citado autor, asumiendo a Sfard (1991), entiende que los conceptos matemáticos se pueden interpretar como objetos y como procesos. Ambos casos, conducen respectivamente, a una concepción estructural y procedimental del ente matemático, teniéndose así dos concepciones con características específicas y distintivas, las cuales se muestran en el siguiente cuadro:

Cuadro 7
Comparación de las visiones estructural y procedimental

Visión estructural	Visión Procedimental
Es estática, integrada, actual e instantánea Se observa el objeto en su totalidad (Andonegui, 2009)	Potencial, dinámica, secuencial y desglosada en detalles. Es operatoria

En el caso aritmético, la percepción global del objeto permite el establecimiento de relaciones entre los números, entre las operaciones, y entre los números y las operaciones (Andonegui, 2009). El tipo de pensamiento matemático puesto en práctica a través de estas conexiones y en el contexto de la aritmética se denomina pensamiento relacional[2]. Por ejemplo, la entidad matemática dada por el producto de 5 y 102, expresado 5x102 puede ser concebida como un objeto en sí misma. Así, podría escribirse 102+102+102+102+102, o también 5(100+2), etc., debe quedar claro que el tipo de relación que se establezca debe servir para facilitar el trabajo. Aquí entra en juego la capacidad para ver la situación aritmética globalmente y conocer las relaciones posibles a fin de poder llevar a cabo las transformaciones que conduzcan a expresiones equivalentes pero en las cuales son más sencillos los cálculos (Andonegui, 2009).

Una comprensión exitosa de los objetos aritméticos pasa por hacer complementarias ambas concepciones Sin embargo, como lo reconoce Andonegui (2009), lo que prevalece de manera usual en la manipulación de los objetos aritméticos es la concepción procedimental.

EL ÁLGEBRA EN LA FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICA

La formación del docente de Matemática en Venezuela se imparte en universidades privadas, públicas autónomas y experimentales. Entre las experimentales, destaca la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL) creada en 1983 para aglomerar a los Institutos Pedagógicos dedicados a la formación de docentes, y en la actualidad está integrada por 13 Núcleos Académicos, 19 Extensiones y 23 Centros de Atención, con presencia en cada todos y cada uno de los estados, de allí, que la “Universidad de los Maestros”, (lema de la UPEL) tenga impacto nacional, ya que forma una gran parte de docentes en todo el país y en todas las especialidades.

La formación del profesorado en Venezuela en las distintas Universidad cumple con lo emanado en la Resolución N°1 del año 1996, donde se establece el perfil y la

[2] Se puede considerar este pensamiento en distintos contextos matemáticos; por ejemplo, Carpenter, Franke y Levi (2003), lo han empleado en el contexto de resolución de problemas de igualdades numéricas vinculados con la comprensión del signo de igualdad.

malla curricular basada en cuatro áreas: General, Especializada, Pedagógica y Prácticas Profesionales, la suma de estás dos últimas deben abarcar más del 30% del diseño curricular, proporcionando una formación conceptual armónica con la ética, y con proyección hacia el sistema educativo venezolano. A continuación se muestra en el cuadro 7 la distribución de la malla curricular de la UPEL:

Cuadro 8
Distribución de los Componentes de la Malla Curricular de la UPEL

Componente	Cursos/Fases	Unidad Crédito	
		N°	%
Formación General	8	26	15,7
Formación Especializada	21	66	39,8
Formación Pedagógica	15	49	29,5
Práctica Profesional	4	25	15,0
Total	48	166	100%

Los componentes de Formación Pedagógica y de Práctica Profesional abarcan el 44,5%, en el primero, se establecen las herramientas teóricas para transformar el saber matemático a través del uso de recursos y estrategias que permitan facilitar su enseñanza, pero se plantea desde la pedagogía general, aún cuando la teoría pedagógica genera ofrece multiplicidad innovación, creatividad y motivación a las clases, también simplifica la acción educativa a un conjunto de conocimientos vinculados a técnicas e instrumentos. (León, Beyer, Serres, Iglesias, 2013)

El componente de Práctica Profesional pretende integrar todos los componentes en la praxis educativa, contempla cuatro cursos, siendo éstas: (1) Fase de Observación persigue que los docentes en formación inicien la observación del entorno escolar, para caracterizar las relaciones del docente con el estudiante, la institución y la comunidad; (2) Fase de Ejecución de Proyectos Educativos pretende la elaboración de un proyecto de investigación vinculado con el aprendizaje de tópicos matemáticos, cuando es administrado por el Departamento de Matemática, las investigaciones están acordes con las tendencias actuales de la Didáctica de la Matemática; (3) Fase de Ensayo Didáctico corresponde a ensayos donde el docente en formación planifica, ejecuta y evalúa situaciones simuladas a través de micro-clases, integrando los temas matemáticos y la pedagogía; (4) Fase Integración Docencia Administración (FIDA) constituye la práctica docente, donde el estudiante participa en los procesos académicos y administrativos en instituciones educativas.

El componente de formación especializada en Matemática ocupa el 39,8 % del currículo y tiene el mayor número de cursos, se distribuyen por área de la siguiente manera: Geometría (2), Cálculo y Análisis (7), Álgebra (5), Educación Matemática (1), optativas y cursos no homologados (5), en el cuadro 8, se observa la distribución en la UPEL, comparada con otras cuatro universidades venezolanas que también forman docentes de Matemática en Venezuela como lo son: Universidad Central de Venezuela (UCV), Universidad de Carabobo (UC), La Universidad del Zulia (LUZ), Universidad Nacional Abierta (UNA)

Cuadro 9
Distribución de los cursos del componente de la formación especializada en Matemática en cinco Universidades venezolanas

Áreas de la Formación Especializada	UPEL		UCV		UC		LUZ		UNA	
	Cursos	%	Cursos	%	Cursos	%	Cursos	%	Cursos	%
Total de cursos de la Formación Especializada	21	39,8	15	67,2	17	36,7	26	46,9	14	35,1
Álgebra	**5**	**9,5**	**2**	**9**	**3**	**6,5**	**2**	**3,6**	**2**	**5**
Geometría	2	3,8	1	4,5	3	6,5	2	3,6	1	2,5
Cálculo	7	13,2	6	26,9	4	8,6	4	7,2	4	10
Probabilidad y Estadística	1	1,9	2	8,9	1	2,1	2	3,6	2	5
Otras	6	11,3	4	17,9	6	13	16	28,9	5	12,6

Como se puede observar los cursos correspondientes al área de Álgebra de la formación especializada oscilan ente 3,6% y el 9,5%, siendo el porcentaje más bajo el de La Universidad del Zulia, y el más alto el del Instituto Pedagógico Experimental Libertador, ofertando cinco cursos obligatorios homologados, comenzando con Introducción al álgebra que se imparte en el segundo semestre de la carrera con un horario de seis (06) horas semanales y está conformada por cinco unidades: Lógica Proposicional, Teoría intuitiva de conjuntos, Relaciones, Funciones y Leyes de

Composición Interna. La siguiente asignatura Sistemas Numéricos se cursa en el III semestre con una carga horaria de cinco (05) horas semanales, y consta de las siguientes unidades: Sistema de los números naturales, Sistema de los números enteros, Sistema de los números racionales, y sistema de los números reales. Introducción al álgebra lineal se cursa en el IV semestre de la carrera con una carga de cinco (05) horas semanales, conformada por Sistema de Ecuaciones lineales, Espacios vectoriales, y Transformaciones lineales. En el quinto semestre se cursa Estructuras Algebraicas que esta constituida por el estudio de Grupos y subgrupos, Subgrupos normales y homomorfismo de grupo, y Anillos y campos, con una carga horaria de cinco (05) horas semanales. En el VI semestre se dicta la asignatura Álgebra lineal constituida por los contenidos de Espacios vectoriales L(V,W) y L(V), polinomios, formas canónicas elementales, y espacio con producto interno.

El egresado de la UPEL en la especialidad de Matemática, debe ser un profesor que comprenda las teorías fundamentales, principios y técnicas propias de la pedagogía y específicos de la didáctica de la Matemática, además de poseer sólida conocimientos matemáticos, que le permitan ejercer su praxis educativa, y diseñar experiencias y situaciones de aprendizaje relacionadas con los contenidos matemáticos en los diferentes niveles educativos venezolanos.

Partiendo de la premisa que para enseñar Matemática hay que saber Matemática, un saber conceptual y procedimental, con el componente de la Especialidad se pretende una formación teórica en las disciplinas Matemática necesarias para el ejercicio del docente de Matemática, la integración de los contenidos matemáticos entre sí y con los de otras disciplinas y su aplicabilidad en la resolución de problemas matemáticos y extra-matemáticos. Sin embargo, la Didáctica de la Matemática sólo se contempla el curso de Educación Matemática, no hay cursos de didácticas específicas como pueden ser Didáctica de la Aritmética, del Álgebra, de la Geometría, de la Estadística, que podrían ayudar al futuro docente a vincular la teoría con lo que será su praxis educativa, además, estos curso poseen amplios programas extensos que no se abarcan con profundidad, no se consideran las aplicación de los temas en la cotidianidad, no hay tiempo para la resolución de problemas o exploración de para el estrategias didácticas, son cursos rigurosos dictados bajo un enfoque deductivo y abstracto del modelo tradicional de enseñanza, usando el esquema didáctico: definición-teoremas-ejercicios, realzando el lenguaje formal matemático. (León, Beyer, Serres, Iglesias, 2013)

Cada Instituto Pedagógico tiene su propio organigrama administrativo, sin embargo, a groso modo, por un lado están los profesores de matemática administrando la formación especializada, y por otro lado, totalmente desvinculados, los profesores, de diversas menciones administrando el área de educación (formación pedagógica y práctica profesional). Este alejamiento permite la parcelación en la formación del profesor de Matemática, estableciéndose un sectarismo, donde cursos como Evaluación de los Aprendizajes, Recursos Instruccionales, Investigación Educativa que pueden tener una óptica desde la Didáctica de la Matemática, son administrados por el Departamento de Pedagogía desde la perspectiva de teorías generales de la educación, por educadores que desconocen la Matemática y la Educación Matemática. (León, Beyer, Serres, Iglesias, 2013)

En contraposición a lo que sucede, González (1999) sugiere que los profesores de matemática debieran vivenciar durante la formación inicial formas de aprender Matemática explorando situaciones de aprendizaje y enseñanza como “las que se espera que ellos sean capaces de diseñar y gestionar durante el ejercicio profesional de su rol como Profesor de Matemática” (p. 12). En este mismo orden de ideas, Félix Klein planteó la necesidad de construir vínculos entre lo que se aprende en la Universidad y la Matemática de la escuela.

EL ANÁLISIS DIDÁCTICO COMO MODELO PARA EL DISEÑO DE PROGRAMAS

El análisis didáctico ha sido considerado como una importante herramienta reflexiva y teórica para el diseño de unidades didácticas con contenido matemático. Según Gómez (2007), el análisis didáctico "es un procedimiento con el que es posible explorar, profundizar y trabajar con los diferentes y múltiples significados del contenido matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje" (p. 18).

La finalidad del Análisis Didáctico, tal y como lo establecen Rico y Fernández (2013) es fundamentar, dirigir y sistematizar la planificación, desarrollo y evaluación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos escolares específicos, según establece la comunidad educativa y tienen lugar en el medio escolar.

De acuerdo con Iglesias (2014) existe una adecuación entre la teoría de análisis didáctico y el componente curricular lo cual se puede ilustrar mediante el siguiente gráfico:

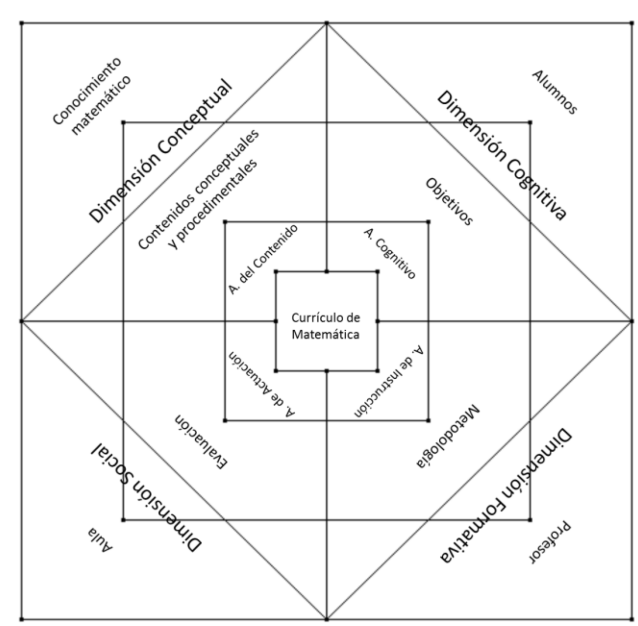


Gráfico 1. Componentes del currículo de Matemática y su relación con la noción de análisis didáctico (Iglesias, 2014, p.84).

En esta investigación por desarrollar esta metodología tiene doble fin, por un lado se empleará con fines investigativos y, por otra parte, también formará parte del contenido del Curso que pretende diseñarse; es decir, los estudiantes la tendrán como una herramienta a los efectos de las unidades de enseñanza con contenido algebraico que deberán diseñar, además del *mapa de enseñanza y aprendizaje (MEA),* propuesto por Orellana (2002), el cual es una herramienta que facilita el análisis de contenido de un tema matemático en un determinado nivel educativo. En consecuencia, resulta esclarecedor el ejemplo de aplicación que aportan Ortiz, Iglesias y Paredes (2013) en el caso particular de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas específicamente mediante el contenido del Curso Geometría I en la UPEL.

El Análisis Didáctico está formado por cuatro componentes: análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación. A continuación se mostrará un cuadro descriptivo basada en Ortiz, Iglesias y Paredes (2013).

Cuadro 10
Descripción del Análisis Didáctico (Ortiz, Iglesias y Paredes, 2013)

Análisis de contenido	Está orientado a develar la estructura conceptual y los distintos significados del tema matemático seleccionado (Gómez, 2007). El análisis de contenido de un tema matemático se facilita mediante la elaboración de su *mapa de enseñanza y aprendizaje* (MEA) (Orellana, 2002), el cual permite desarrollar estrategias de enseñanza y aprendizaje en relación con cuáles aspectos enseñar de algún tema matemático y, además, establecer la secuencia didáctica a seguir en cuanto a la presentación de los contenidos; en este punto, se considera necesario que el docente tome en cuenta los contenidos matemáticos y los objetivos de aprendizaje planteados en los programas de estudio del área de Matemáticas, debido a que hay que dar respuestas a las exigencias establecidas en el currículo vigente.
Análisis Cognitivo	Tiene como propósito identificar las *competencias matemáticas* que se espera sean desarrolladas o puestas en práctica por los estudiantes, los posibles *errores* en que puedan incurrir y las posibles *dificultades* que puedan llegar a confrontar, cuando se enfrenten a las situaciones de enseñanza y aprendizaje diseñadas por el profesor y orientadas al estudio de un tema matemático específico (Gómez, 2007).

Análisis de la Instrucción	Esta componente responde al ¿cómo?, ¿cuándo? y con ¿qué? se llevará a cabo la formación, a partir de los análisis de contenido y cognitivos anteriormente desarrollados. En consecuencia, se orienta al diseño de las actividades de enseñanza y aprendizaje por parte del profesor de Matemáticas. Aquí también el docente debe seleccionar o elaborar los materiales y recursos didácticos a ser utilizados durante la puesta en práctica de la unidad didáctica o Curso, por lo cual debe hacer una adecuada selección.
Análisis Evaluativo (o de actuación)	Se pretenderá ver los logros alcanzados en este caso las competencias que los estudiantes para profesor de matemáticas pudieron alcanzar mediante el desarrollo del Curso orientado hacia el álgebra escolar.

COMPETENCIAS DIDÁCTICAS Y MATEMÁTICAS DEL PROFESOR DE MATEMÁTICA

Aún cuando se reconoce que existen otras definiciones se tomará en cuenta la definición de C*ompetencia Matemática* de la OCDE[3] (2013):

> La aptitud de un individuo para identificar y comprender el papel que desempeñan las Matemáticas en el mundo, alcanzar razonamientos bien fundados y utilizar y participar en las Matemáticas en función de las necesidades de su vida como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo. (p. 5)

Buscando dar respuesta a la interrogante ¿cómo los maestros necesitan entender las materias que enseñan? Lee Shulman se dedicó, desde la década de los 80, a investigar la formación y el desempeño del docente, identificando un dominio de conocimiento del maestro, que denominó *conocimiento de contenido para la enseñanza (pedagógico)*, haciendo distinción entre el conocimiento del contenido en la enseñanza (tal como se estudia y aprende en entornos disciplinarios) y el conocimiento del contenido pedagógico (combinación de contenido y pedagogía necesaria para enseñar el tema) en particular. Resaltó, además, el papel del *contenido* a enseñar en el estudio del conocimiento de los docentes, y propuso

[3] Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico, fundada en 1961, agrupa a 34 países miembros y su misión es promover políticas que mejoren el bienestar económico y social de las personas alrededor del mundo; promueve el Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos (PISA).

aprovechar el conocimiento del contenido como técnica para el establecimiento de la enseñanza como profesión. (Ball, Thames, y Phelps, 2008)

Partiendo de la premisa que “el proceso de enseñanza se inicia necesariamente en una circunstancia en que el profesor comprende aquello que se ha de aprender y cómo se lo debe enseñar (p.9) Shulman (2005) desarrolla el constructo del conocimiento base para la enseñanza como los “conocimientos de la materia y estrategias didácticas interactuaban en la mente de los profesores” (p.7), y que a su vez son los “conocimiento que subyace en la comprensión que debe tener el profesor para que los alumnos puedan a su vez entender” (p. 10). Distinguiendo entre (1) las fuentes de obtención del conocimiento: los espacios de la formación docente, junto con los materiales, la investigación educativa y la experiencia profesional del docente, de donde pueden extraer su comprensión, (2) y los campos de actuación del conocimiento: procesos de razonamiento y prácticas profesionales dentro de los cuales los profesores utilizan el conocimiento base para la enseñanza.

Shulman (2005) plantea una taxonomía del conocimiento del contenido para la enseñanza, compuesta por siete categorías, que debe poseer el maestro: (1) Conocimiento pedagógico general, engloba los principios y estrategias generales de la organización y gestión del aula; (2) Conocimiento de los estudiantes y sus características; (3) Conocimiento de contextos educativos, que parten del funcionamiento del aula hasta el carácter de comunidades y culturas; (4) Conocimiento de fines, propósitos y valores educativos, y sus fundamentos filosóficos e históricos; (5) Conocimiento del contenido, incluye el conocimiento del tema y sus estructuras organizativas; (6) Conocimiento curricular, comprenden las herramientas del oficio para maestros, representada por programas diseñados para la enseñanza de temas y temas particulares en un nivel dado, la variedad de materiales de instrucción disponibles en relación con esos programas, y el conjunto de características que sirven como indicaciones y contraindicaciones para el uso de un currículo particular o materiales del programa en circunstancias particulares; y (7)

Conocimiento de contenido didáctico (pedagógico), esa combinación de contenido y pedagogía que es exclusivamente de los profesores, su especial forma de comprensión profesional. (Ball, Thames, y Phelps, 2008; Shulman 2005)

El docente debe estructurar actividades para impartir conocimientos a los alumnos y promover el aprendizaje, ya que, el proceso de enseñanza comienza con la comprensión del docente del contenido, y la indagación de cómo enseñarlo, Shulman (2005) explica que los docentes:

> son capaces de comprender el contenido de la materia por sí solos y aquella en que llegan a dilucidarlo de nuevas maneras, de reorganizarlo y dividirlo, de vestirlo con actividades y emociones, con metáforas y ejercicios, con ejemplos y demostraciones, de modo que pueda ser captado por los alumnos.
> Tal como hemos llegado a concebir la enseñanza, ella se inicia con un acto de razón, continúa con un proceso de razonamiento, culmina con la acción de impartir, sonsacar, hacer participar, o seducir, y luego es objeto de mayores reflexiones hasta que el proceso puede reiniciarse. (p.17)

Es importante destacar, que a los docentes tienen que conjugar su conocimiento base para pensar, tomar decisiones y ejecutar acciones, durante su praxis educativa, con finalidad pedagógica. Al respecto, Shulman (2005) propone un modelo de los procesos razonamiento y acción pedagógica, y aunque, los procesos se presentan secuencialmente, no constituyen etapas o fases fijas, pues el orden puede variar, el proceso cíclico comprende las siguientes actividades, y se ilustra en el gráfico 2:

(1) Comprensión: es el punto de inicio y de un nuevo inicio del proceso considerado cíclico, donde se espera que el docente comprenda de diversas maneras los contenidos a enseñarse, las conexiones del tema dentro y fuera de la disciplina de estudio, que comprender tanto la materia como las finalidades, es decir, los objetivos, las metas educativas, se plantea que enseñar es comprender.

(2) Transformación: se espera que el docente tenga la capacidad de convertir su conocimiento (las ideas aprendidas) del contenido para enseñarlas empleando la

didáctica, adaptándose, además, a la diversidad de los alumnos y su motivación. Las transformaciones, conllevan al ordenamiento de los siguientes procesos: (1) preparación del contenido, de los materiales a enseñar, análisis crítico de los textos escolares, Shulman explica que "La preparación depende ciertamente de la disponibilidad de un repertorio curricular, de la comprensión de la gama completa de materiales, programas y concepciones de enseñanza existentes" (p.21); (2) representación de ideas en nuevas analogías, metáforas, simulaciones, ejemplos, contraejemplos, demostraciones, incluye todas las formas alternativas de representar un contenido frente a los alumnos; (3) selecciones didácticas de métodos y modelos de enseñanza, incluye los enfoques pedagógicos y estrategias de enseñanza: clases expositivas, demostración, juegos, trabajos grupales, y formas de aprendizaje: cooperativo, enseñanza recíproca, diálogo socrático, aprendizaje por descubrimiento, métodos de proyectos y aprendizaje fuera del aula (al estilo de Simón Rodríguez); y, (4) adaptación y adecuación del material representado a las características de los educandos: motivación, edad, cultura, idioma, conocimientos previos, expectativas. La transformación, en palabras de Shulman (2005) organiza el "proceso mediante el cual pasamos de la comprensión personal a la preparación para que otros comprendan, constituyen la esencia del acto de razonar pedagógicamente" (p.21)

(3) Enseñanza: esta acción es la ejecución del razonamiento pedagógico, incluye: la organización y el manejo de la clase; las explicaciones, la asignación y revisión de las actividades programadas, la interacción con los alumnos, el debate a tevés de preguntas y respuestas, por tanto abarca toda la instrucción. Es importante resaltar que el razonamiento, no concluye con la enseñanza, ya que, la comprensión, transformación, evaluación y reflexión son acciones que continúan durante la enseñanza

(4) Evaluación: es la inspección de la comprensión para corregir interpretaciones erróneas de los estudiantes durante el proceso de enseñanza, además, de la evaluación sumativa como medio de promoción contempla esa evaluación formativa y

diagnóstica que permite redireccionar la enseñanza, también contempla, la autoevaluación del desempeño docente, de los materiales y las actividades planificada.

(5) Reflexión: el docente analiza retrospectivamente el proceso de enseñanza y aprendizaje, es importante contrastar el proceso de enseñanza con los objetivos planteados. En este acto reflexivo el docente aprende a través de la experiencia de su práctica profesional.

(6) Nueva comprensión: el docente adquiere una redimensión de los objetivos y del contenido como consecuencia de la reflexión y evaluación de la acción de la enseñanza, aprende de su propia praxis educativa, y comenzamos nuevamente con el acto de comprender a partir de esta nueva realidad

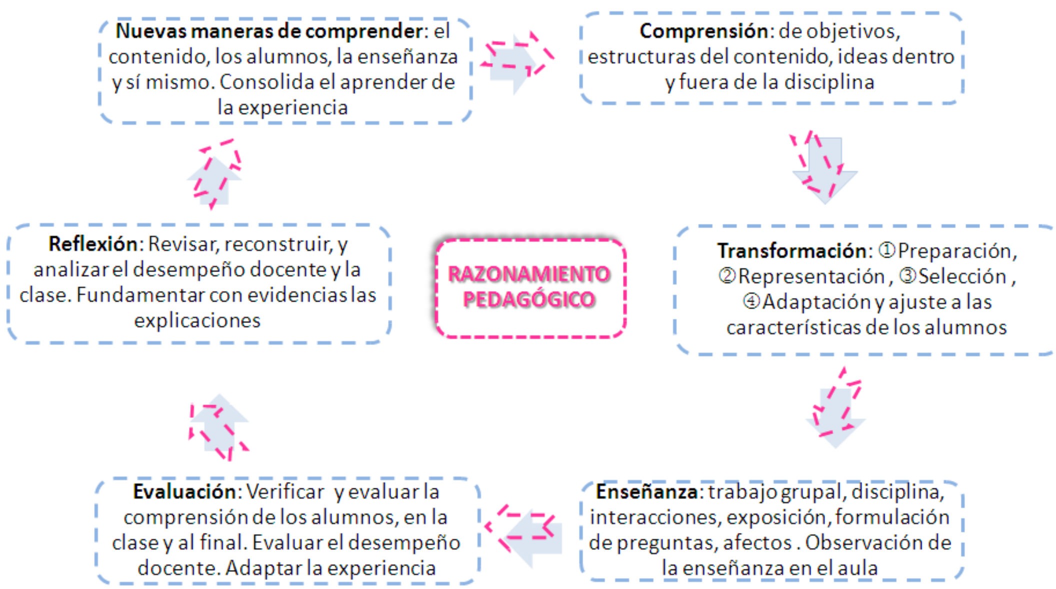


Gráfico 2: Modelo de Acción y Razonamiento Pedagógico (Shulman, 2005)

Es importante destacar, que Shulman llevó a cabo sus investigaciones de la formación y desempeño de profesores de secundaria de diversas menciones, y sus contribuciones han sido extrapoladas a la educación matemática. Sin embargo, partiendo de los trabajos de Shulman diversos investigadores han extendidos sus aportes al campo de la Educación Matemática, entre los que destacan el enfoque para estudiar el conocimiento matemático para le enseñanza de Ball, Thames y Phelps (2008), plantean la división de las categorías de conocimiento de contenido y conocimiento pedagógico de Shulman, por un lado el común y el especializado juntos, y por el otro, el del contenidos y los estudiantes, y el del contenido y la enseñanza, que se detallan a continuación: (1) el conocimiento común del contenido, es el noción que los docentes para poder hacer el actividades que asignan a sus alumnos; (2) el conocimiento de contenido y de los estudiantes, es un conocimiento pedagógico que articula la comprensión matemática y con las singularidades de los estudiantes y su pensamiento matemático; (3) el conocimiento de contenido y enseñanza, es conocimiento que conjuga la comprensión matemática y la comprensión pedagógica que influyen en el aprendizaje de los estudiantes; (4) el conocimiento especializado del contenido especializado, abren la reflexión sobre las interrogantes: ¿Cuándo los profesores desarrollan uso explícito y fluidez de la notación matemática?, ¿Dónde aprenden a inspeccionar las definiciones y establecer la equivalencia de las alternativas definiciones para un concepto dado? , ¿Dónde aprenden lo que constituye una buena explicación matemática? (Ball, Thames, y Phelps, 2008)

Contemplan, que el refinamiento de las categorías de conocimiento del contenido de enseñanza podría emplearse para el diseño de materiales instruccionales, así como la formación y el desarrollo profesional docente, y plantean una lista de tareas de la enseñanza matemática, entre las que destacan: dar respuesta a los ¿por qué? y ¿para qué? de los estudiantes, reconocer las ventajas y desventajas del uso de una representación particular, vincular distintas representaciones a nociones subyacentes, emplear representaciones con intereses particulares, adecuar la dificultad de la tareas, explicar y evaluar justificaciones matemáticas, elegir y desarrollar definiciones utilizables, usar de forma crítica la notación matemática, formular preguntas matemáticas productivas, reconocer equivalencia. (Ball, Thames, y Phelps, 2008)

Hill, Ball y Schilling (2008) exponen una *conceptualización y medición del conocimiento específico del contenido y los estudiantes del docente, y postulan que* los docentes tienen un conocimiento único de las ideas matemáticas, así como también del pensamiento de los estudiantes, y justamente la combinación de dichos conocimientos es lo que emplean los profesores promover el aprendizaje de los estudiantes en las aulas de clases.

Se ha establecido que el conocimiento matemático para la enseñanza de esta disciplina abarca dos dominios de conocimiento. Por una parte está el conocimiento del contenido el cual contempla: Conocimiento común del contenido, conocimiento del horizonte matemático, y conocimiento especializado del contenido. Y por otro lado, está el dominio del conocimiento didáctico del contenido el cual contempla: conocimiento del contenido y de los estudiantes, conocimiento del currículo y conocimiento del contenido y de la enseñanza. Esta relación se recoge en el gráfico 3.

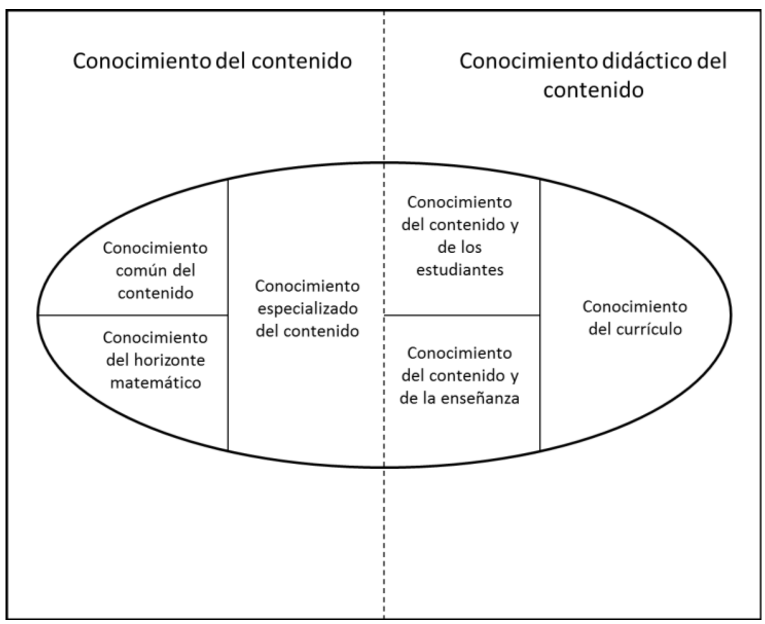


Gráfico 3. Modelo sobre los dominios de conocimientos matemáticos para la enseñanza (Hill, Ball y Schilling, 2008).

El gráfico 3 representa el mapa del Dominio del conocimiento matemático para la enseñanza propuesto por Hill, Ball y Schilling (2008), que se describen a continuación:

El Conocimiento del contenido matemático (CCM), contempla:

(1) Conocimiento común del contenido (CCC): Conocimiento del contenido es lo que se podría llamar, la alfabetización matemática, es el conocimiento matemático que esperaríamos que un adulto bien educado supiera, en el caso del docente, se requiere que sean capaces de realizar los cálculos, diagramas, construcciones, conjeturas (algoritmos de resolución) implicadas en las actividades que le solicitan a los estudiantes que realicen. En resumen, es el conocimiento que los maestros necesitan para poder *hacer el trabajo* que asignan a sus alumnos. (Ball, Thames, y Phelps, 2008)

(2) Conocimiento especializado del contenido (CEC): Conocimiento matemático que va *más allá de lo* esperado de cualquier adulto bien educado, pero que aún no requiere conocimiento de los estudiantes o conocimiento de la enseñanza, pues la enseñanza implica conocer los fundamentos de los procedimientos, los significados de los términos y explicaciones para los conceptos, determinar si un método alternativo funcionará, explicar el significado de un procedimiento, o reconocer propiedades matemáticas ofrecidas por diferentes materiales o modelos, implican conocimiento profundo y explícito del algoritmo de resta, más que simplemente saber cómo para realizar el cálculo, ya que el maestro necesita conocer el *significado* del algoritmo de la sustracción, para mostrar los pasos del procedimiento, y por qué tienen sentido. Los maestros necesitan enseñar, pero sobre lo que ellos mismos necesitan saber y poder decidir si un método o procedimiento funcionaría en general, requieren conocimientos y habilidades matemáticas. Muchas de las tareas comunes de enseñanza requieren una gran cantidad de recursos matemáticos, pero aún no necesariamente requieren saber sobre estudiantes o enseñanza (Ball, Thames, y Phelps, 2008)

(3) Conocimiento del horizonte matemático (CHM): este conocimiento se refiere a la relación de los temas matemáticos en los programas de estudio entre ellos mismos, y con otras disciplinas.

El Conocimiento didáctico del contenido matemático (CDCM), comprende:

(1) Conocimiento del contenido y de los estudiantes (CCEs): es un tipo de conocimiento de contenido pedagógico que combina saber sobre estudiantes y saber sobre las matemáticas, al elegir un ejemplo, los profesores deben predecir qué es lo que los estudiantes encontrarán interesante y motivador, al asignar una tarea, deben anticipar lo que los estudiantes probablemente harán, sí lo encontrarán fácil o difícil. También deben poder escuchar e interpretar el pensamiento emergente e incompleto de los estudiantes. Cada una de estas tareas requiere una interacción entre la comprensión matemática específica y la familiaridad con los estudiantes y su pensamiento matemático. (Ball, Thames, y Phelps, 2008).

En el Conocimiento del contenido y de los estudiantes están inmersos los aspectos cognitivos del pensamiento lógico–matemático, las competencias matemáticas de los estudiantes para realizar las actividades propuestas por el docente, los errores de los estudiantes al realizar una tarea matemática. (Hill, Ball y Schilling, 2008) plantean que los profesores puedan invocar el conocimiento matemático para interpretar el pensamiento de los estudiantes, haciendo énfasis en: (a) Errores comunes de los estudiantes: identifican y proporcionan explicaciones plausibles para los errores, teniendo un sentido de qué errores surgen con qué contenido, (b) La comprensión de los estudiantes del contenido: interpretan las producciones de los estudiantes para indagar su comprensión, decidir qué producciones estudiantiles indican retracción, (c) Secuencias de desarrollo de los estudiantes: identificación de los tipos de problemas, temas o actividades matemáticas que son más fáciles y más difíciles en edades particulares, sabiendo lo que los estudiantes aprenden primero.

(2) Conocimiento del contenido y de la enseñanza (CCEn): es conocimiento que combina saber sobre enseñanza y saber sobre las matemáticas. Muchas de las tareas matemáticas de la enseñanza requieren conocimiento matemático que interactúa con

el diseño de la instrucción: los maestros necesitan secuenciar el contenido particular para la instrucción, decidiendo qué ejemplo comenzar con y qué ejemplos utilizar para llevar a los estudiantes más profundamente en el contenido, necesitan evaluar las ventajas y desventajas de las representaciones utilizadas para enseñar una idea especifica, en el aula, deben decidir cuándo solicitar más información, cuándo usar la observación, y cuándo reformular una interrogante o plantear una nueva tarea para fomentar el aprendizaje de los estudiantes. Cada uno de estos requiere una interacción entre la comprensión matemática específica y una comprensión de cuestiones pedagógicas que afectan el aprendizaje de los estudiantes. (Ball, Thames, y Phelps, 2008). Entre los conocimientos del contenido y la enseñanza se incluyen las cuestiones didácticas, como la idoneidad de las estrategias didácticas para desarrollar un tema matemático, la selección de materiales y recursos didácticos, la selección y organización de las tareas

(3) Conocimiento del currículo (CC): se relaciona la finalidad de la enseñanza de la Matemática y los materiales curriculares, está compuesto por los programas diseñados para la enseñanza de temas matemáticos particulares en cada nivel educativo, por los materiales instruccionales disponibles en relación con esos programas, y el conjunto de características que sirven como indicaciones y contraindicaciones para el uso de un currículo particular o materiales del programa en circunstancias particulares.

A continuación se muestra una tabla que relaciona ambos dominios con las competencias didáctico-matemáticas.

Cuadro 11
Relación entre dominios del conocimiento matemático para la enseñanza y las competencias matemáticas y didácticas (Iglesias, 2014)

Dominios del Conocimiento matemático para la enseñanza (Hill et al., 2008)	Competencias Didáctico – matemáticas (Niss y Hojgaard, 2011)
Conocimiento del contenido matemático (CCM)	-Pensar y Razonar (PR) -Plantear y resolver problemas (P y RP) -Modelar (M) -Argumentar (A) -Representar (R)

	-Lenguaje Simbólico (LS) -Comunicar (c) -Ayudas y Herramientas (M y R)
Conocimiento didáctico del contenido Matemático (CDCM):	
Conocimiento del currículo	Competencia curricular (CC)
Conocimiento del contenido y los estudiantes	Competencia para propiciar, revelar y evaluar el aprendizaje (C_Apr)
Conocimiento del contenido y la enseñanza	Competencia para gestionar y evaluar la enseñanza (C_Ens)

Niss y Højgaard (2011) organizan las competencias en dos grupos:

Cuadro 12
Organización de las competencias según Niss Højgaard (2011)

La capacidad de formular y responder preguntas sobre y por medio de las matemáticas	El ser capaz de hacer frente con el lenguaje y las herramientas matemáticas
-Pensamiento Matemático -Planteamiento y Resolución de Problemas -Modelización Matemática -Razonamiento Matemático	-Representación -Simbolización y Formalismo -Comunicación -Ayudas y herramientas

Competencias matemáticas de los profesores de matemática formuladas por Niss y Hojgaard (2011):

(1) Competencia de pensamiento matemático: comprende: (a) La Naturaleza de las preguntas y respuestas: se refiere a conocer los tipos de preguntas propias de la matemática, buscando introspectivamente los tipos de respuestas plausibles, enfatizando el carácter matemático para encontrar las condiciones necesarias y suficientes para identificar las propiedades específicas de un objeto; (b) El alcance de los conceptos: comprende y reconocer la configuración de los conceptos matemáticos, incluyendo sus limitaciones, sus raíces en diferentes dominios, el uso de la abstracción para ampliar la perspectiva de un concepto o sus propiedades, comprender las implicaciones de la generalización de los conocimientos, y extrapolarlos a clases más grandes de objetos; (c) Diferenciar los tipos de enunciados matemáticos: incluye distinguir los diferentes tipos de enunciados matemáticos, proposiciones, implicaciones lógicas, definiciones, teoremas, enunciados

fenomenológicos de casos únicos, conjeturas obtenidas de la experiencia con casos particulares, la comprensión del uso de los cuantificadores en las proposiciones matemáticas y de sus combinaciones; (d) Conocimiento (sobre visión, descripción) básica del sujeto: en el aula el docente debe conectar el desarrollo de las actividades en el aula, los tipos de preguntas y respuestas propias de la matemática con los tipos de respuestas que se pueden esperar que les pueden surgir a los estudiantes; (e) Abstracciones y generalizaciones: el maestro debe propiciar la abstracción de los estudiantes, partiendo de situaciones concretas y casos individuales, debe promover conceptos, deducir y enfatizar propiedades y conexiones generales; y (f) Distinguir entre tipos de argumentaciones de los estudiantes: el maestro necesita distinguir cuando el estudiante esta en el proceso de nombrar, caracterizar o distinguir las propiedades de un objeto. (Niss y Højgaard, 2011)

(2) Competencia para abordar (hacer frente) los Problema: (a) Proponer y resolver problemas: implica ser capaz de plantear, mostrar, formular, delimitar y especificar diferentes tipos de problemas matemáticos, y ser capaz de resolver tales problemas matemáticos de diferentes maneras; (b) El maestro debe mostrar confianza en su implementación y guía de los procesos de resolución de problemas frente a los estudiantes; (c) Ayuda a los estudiantes: al plantear problemas, el maestro debe organizar preguntas que pueden conducir a actividades de resolución de problemas entre los estudiantes, tomando en cuenta los diferentes antecedentes intelectuales, socioeconómicos y culturales de los participantes, el maestro también puede establecer diferentes estrategias para tratar con el problema en cuestión y para ayudar a los estudiantes a acercarse a ellos desde diversas perspectivas; (d) Resolver problemas ya formulados y cerrados: por su potencial en la enseñanza de las matemáticas; (e) Formulación y especificación de un problema: que puede crear el punto de partida para el trabajo de indagación de los estudiantes, también puede formular un problema más abierto como punto de partida para el estudiante; (f) Tratar un problema desde diferentes perspectivas.

(3) Competencia de modelado: (a) Análisis del modelo: esto es la capacidad de matematizar, saber decodificar e interpretar los elementos del modelo y la situación

real que se quiere modelar; (b) Modelado: conlleva la plasmar un modelado activo en contextos determinados, es decir, matemáticamente y aplicándolo a situaciones más allá de las matemáticas; (c) Elementos en modelado: capacidad de estructurar la situación que se modelará, implementar la matematización de esta situación, equiparando los objetos, las relaciones, la formulación de problemas, etc. en términos matemática que resultan en un modelo matemático, validación del modelo completado al evaluarlo tanto internamente (en relación con las propiedades matemáticas del modelo) y externamente (en relación con el área o situación modelada), analizar el modelo críticamente tanto en relación a su propia usabilidad y relevancia, y en relación con una posible modelo alternativo, comunicarse con otros sobre el modelo y su resultados. Finalmente, también se incluye en el modelado activo el poder monitorear, por lo que los docentes debe ser capaz de analizar y evaluar el uso de las matemáticas para el propósito de la aplicación, y en relación con los problemas y situaciones del mundo real; (d) Decodificar e interpretar modelos y elementos de modelos: el reconocimiento de las relaciones entre, el modelos o elementos de los mismos, y las situaciones y circunstancias que están siendo modeladas; (e) Dominar el proceso de modelado: el maestro debe comprender los elementos los procesos (estructuración de la situación, matematizar, interpretar, validar, etc.) que conforman un modelado, para poder seleccionar y evaluar el grado de dificultad de los procesos individuales, y poder tener un visión general del proceso en situaciones concretas; (f) Analizar la base y las propiedades y propiedades de los modelos; (g) Desmatematizar un modelo: un ejemplo de eliminación de la matematizaciones de un modelo podría ser interpretar la relación entre la precipitación y las condiciones del viento partiendo de las observaciones; (h)Modelado activo: el modelado activo debe conllevar a la construcción de un modelo, donde el alumno sea capaz de incluir las siguientes actividades: (1) estructurar la situación, (2) llevar a cabo una matematización de la situación y su tratamiento, (3) validar el modelo, (4) comunicarse con otros sobre el modelo y sus resultados.

(4) Competencia de razonamiento: (a) Seguimiento y evaluación del razonamiento, es la capacidad de seguir y evaluar una cadena de argumentos presentada por otros, por escrito u oralmente, en apoyo de un reclamo; (b) Comprender qué es una prueba, se trata de saber y entender qué es una prueba matemática y cómo esto difiere de otras formas de razonamiento matemático; (c) Diseñar y llevar a cabo argumentos informales y formales (basados en la intuición); (d) Trascender sus propios argumentos: el profesor es capaz de familiarizarse con las formas de pensar de los estudiantes y, conocer sus razonamientos, el maestro pueda trascender sus propios argumentos, comentando y evaluando el razonamiento de los estudiantes, con la intención de ayudarlos a desarrollar su propia capacidad de razonamiento matemático; (e) Reformular y ajustar el razonamiento; (f) Prueba: el maestro sea capaz de distinguir entre cuando una afirmación tiene la naturaleza de una prueba, y cuando es sólo una buena explicación o ilustración, y que él puede ayudar a los estudiantes a alcanzar esta distinción; (g) Comprender qué es una prueba y cuándo algo no es una prueba: permitir que los estudiantes entiendan qué es una prueba y determinar cuando el razonamiento matemático constituye (o no) una prueba puede ser ejemplificado pidiéndoles a los estudiantes que señalen, y posiblemente corrijan, errores en el razonamiento; (f) Descubriendo las ideas básicas en una prueba matemática (correcta); (i) Pruebas independientes

(5) Competencia de Representación: (a) Comprender y utilizar diferentes representaciones: comprender (decodificar, interpretar, distinguir entre), y utilizar diferentes tipos de representaciones de objetos matemáticos, fenómenos, problemas o situaciones (incluidos los simbólicos, especialmente algebraicos, visuales, geométricos, gráficos, representaciones esquemáticas, tabulares o verbales, pero también representaciones concretas mediante objetos materiales); (b) Elegir y cambiar entre representaciones: el docente debe ser capaz de elegir y cambiar entre diferentes formas de representación para cualquier entidad o fenómeno dado, según la situación y el objetivo; (c) La diversidad de los antecedentes de los estudiantes: el maestro debe tener conciencia de la composición del grupo de estudiantes; (d) Juzgar las fortalezas y debilidades de las formas de representación: el docente debe poner en

juego una gama de representaciones, y ser capaz de juzgar las fortalezas y debilidades de la representación (incluida la pérdida o aumento de la información), con el objetivo de ser capaz de priorizar entre ellos, también en un contexto de enseñanza; (e) Un hilo conductor en la enseñanza: el docente debe crear enlaces entre las diferentes formas de representación a lo largo del sistema educativo; (f) Comprender y manejar conexiones recíprocas entre diferentes formas de representación: el maestro debe ser capaz de señalar sus respectivas fortalezas, y debilidades; (g) Consolidar la comprensión de los resultados matemáticos: el cambio entre representaciones puede ser utilizado para consolidar la comprensión de los resultados matemáticos, por ejemplo, el producto notable $(a+b)^2$, además de ser presentado en su forma algebraica, se puede presentar el áreas de un cuadrado con el lado a + b, y resaltar la interpretación geométrica de dicho producto notable.

(6) Competencia de símbolo y formalismo (simbolización y formalismo): (a) Decodificar, traducir y manejar declaraciones simbólicas: ser capaz de decodificar símbolos y lenguaje formal, poder traducir de ida y vuelta entre lenguaje de símbolos matemáticos y lenguaje natural; y ser capaz de tratar y utilizar declaraciones y expresiones simbólicas, incluidas las fórmulas; (b) Sistemas matemáticos formales: dominar la idea de la naturaleza del Reglas del juego de sistemas matemáticos formales (típicamente teorías axiomáticas); (c) Decodificar símbolo y lenguaje formal: el docente debe ser capaz, a través de su propias descripciones, explicaciones, ilustraciones y ejemplos concretos, así como creando situaciones para que los estudiantes trabajen, apoyen el trabajo de los otros estudiantes con declaraciones simbólicas más o menos abstractas; (d) Traducir/interpretar: el maestro debe traducir de ida y vuelta entre el lenguaje matemático simbólico y lenguaje natural, y es capaz de estimular la traducción correspondiente entre los estudiantes; (e) Configurar, tratar y utilizar declaraciones simbólicas: el docente debe ser capaz de entender a los estudiantes y sus dificultades, y para poder ayudarlos a superar esto, el maestro debe poder para hacer frente a tales declaraciones con una garantía considerable y excesiva conocimiento, y con una visión general que le permite actuar con flexibilidad y efectivamente en situaciones de enseñanza; (f) Las reglas de los sistemas matemáticos

formales: el maestro tiene que dominar los rasgos de la competencia relativa a los sistemas matemáticos formales; (g)Tratar con sistemas matemáticos formales: el maestro debe tener la habilidad para ayudar a los estudiantes a lidiar con la matemática formal, la geometría axiomática euclidiana es un ejemplo de un formalismo matemático que no tiene que ser representado simbólicamente, los sistemas pueden ilustrarse mediante las condiciones y reglas para tratar diversos objetos matemáticos.

(7) Competencia Comunicativa: (a) Comprender e interpretar expresiones y textos: ser capaz de comprender e interpretar expresiones matemáticas escritas, orales o visuales o textos; (b) Expresarse sobre las matemáticas: ser capaz de expresarse en diferentes formas y con diferentes niveles de precisión teórica o técnica sobre cuestiones matemáticas, ya sean escritas, orales o visuales, para diferentes tipos de audiencias; (c) Comprender e interpretar: el docente debe ser capaz de comprender e interpretar las expresiones escritas y orales de los estudiantes, y de relacionarse con las diferentes formas de expresar de los estudiantes (uso del lenguaje, nivel teórico y precisión); (d) Expresarse: el maestro debe ser capaz de expresarse acerca de asuntos de la matemática en una variedad de formas, ya sea escrita, oral o visualmente, y adaptar su expresión a los estudiantes y circunstancias de la enseñanza. La variación puede, entre otras cosas, incluir terminología específica de la materia y su nivel de precisión, combinaciones o cambios entre texto, discurso, ilustraciones visuales y otras formas de expresión; (e) Evaluar materiales de enseñanza: el maestro también debe ser capaz de evaluar la presentación y la calidad comunicativa de los temas matemáticos en una variedad de materiales de enseñanza, incluyendo los libros de texto; (f) Comunícate con colegas y otros: es importante que el maestro se pueda comunicar de manera flexible con colegas y con padres, sobre las perspectivas, formulaciones de problemas, contenidos y métodos de enseñanza de las matemáticas; (g) Comunicarse con los estudiantes: sobre asuntos matemáticos básicos; (h) Comprender lo oral de las declaraciones de los demás; (i) Expresarse de diferentes maneras: de acuerdo al nivel de la audiencia.

(8) Competencia de ayudas y herramientas: (a) Conocer las posibilidades y limitaciones de, y ser capaz de usar ayudas y herramientas: tener un conocimiento de la existencia y las propiedades de las diversas formas de herramientas relevantes utilizadas en la matemática y tener una idea de sus posibilidades y limitaciones en diferentes tipos de contextos, y, ser capaz de reflexionar sobre el uso de tales ayudas; (b) Diferentes antecedentes de los estudiantes: los salones de clases están conformados por grupos heterogéneo de estudiantes en lo que se refiere a madurez, antecedentes, intereses, estilo de aprendizajes, por lo tanto, es necesario que el maestro conozca y pueda usar un amplio repertorio de herramientas y ayudas que son típicas y accesibles para el actividades matemáticas en el nivel que enseña; (c) Percepción de los potenciales didácticos: El docente puede hacer uso de diferentes ayudas y herramientas, como medio para iniciar o fomentar los procesos de aprendizaje de los estudiantes.

La Mirada profesional en los profesores de matemática

La competencia docente mirada profesional se basa en el buen uso del conocimiento para la enseñanza, y conlleva ala toma de decisiones apropiadas, Zapatera (2015) explica "el término mirada profesional como la forma en que los profesores ven y dan sentido a situaciones complejas de enseñanza - aprendizaje"(p.62) y en palabras de Llinares (2013):

> La mirada profesional es una componente de la práctica profesional del profesor de matemáticas que puede caracterizarse por (1) el conocimiento matemático del profesor que le facilita la identificación de lo que es relevante desde la perspectiva del aprendizaje de las matemáticas en un contexto de enseñanza y (2) el uso de esta identificación para interpretar evidencias de acuerdo con los objetivos deseados (p.84)

Uno de los aspectos que contempla la mirada profesional de los profesores de matemática es el mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes, ya que, entre las diversas ocupaciones y tareas del docente Zapatera (2015) resalta que la mirada profesional del pensamiento de los estudiantes se refiere a: "la destreza de los profesores para observar, describir, interpretar y dar sentido a las situaciones de enseñanza y, en particular, a las estrategias que utilizan los estudiantes y que evidencian su pensamiento" (p.65), que va más allá de imaginar las ideas esbozadas por los estudiantes a través de sus preguntas, comentarios y acciones, desplegadas durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de tópicos matemáticos desarrollado en el aula de clase, el docente debe demostrar su pericia para observar, interpretar y tomar decisiones para responder adecuadamente a lo planteando explicita e implícitamente por el estudiante.

El docente para mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes debe distinguir lo relevantes, otorgarle un significado al interpretarlo y decidir las acciones a tomar, Jacobs, Lamb y Phillip (2010) despliegan esta competencia como la conjunción de las siguientes destrezas: (1) Identificar las estrategias empleadas por los estudiantes, (2) Interpretar el razonamiento manifestado por los estudiantes, y (3) decidir una respuesta congruente al razonamiento de los estudiantes. La identificación de las estrategias empleadas por los estudiantes conlleva a señalar los aspectos matemáticos significativos en las acciones desplegadas por los estudiantes, y en palabras de Zapatera (2015):

> Para identificar lo que es relevante en las estrategias que utilizan los estudiantes, el profesor debe, por una parte, tener un profundo conocimiento matemático para la enseñanza, y por otra parte, mirar con detalle las respuestas de los estudiantes, atender a lo que dicen y hacen, a lo que piensan del tema, a la forma en la que se enfrentan a los problemas y a cómo entienden los detalles matemáticos significativos.
> El desarrollo de la mirada profesional está, pues, vinculado a centrar la atención sobre aspectos que pueden mostrar información relevante acerca de la manera de proceder de los estudiantes. (p.66)

Esta destreza, conlleva a rastrear minuciosamente detalles significativos, a tener un vasto conocimiento de lo relevante desde una perspectiva matemática, y a identificar lo matemáticamente significativo en los argumentos y destrezas exhibidas por los estudiantes al resolver tareas o enfrentarse a problemas, que muchas veces suelen ser exteriorizarlas de forma parcial y desordenada, el objetivo que se persigue con la mirada profesional del pensamiento de los estudiantes es que el docente logre generar respuestas efectivas en sus prácticas profesionales

CAPÍTULO III

ABORDAJE METODOLÓGICO

Naturaleza y Diseño de la Investigación

Esta investigación se enmarca en el campo de la Educación Matemática específicamente en el área de la formación inicial de los profesores de matemática, orientada hacia el estudio de la Didáctica del Álgebra debido a que esta dirigida a indagar las competencias matemáticas de un grupo de futuros profesores de matemática, estudiantes de la Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara" cuando resuelven problemas relacionados con patrones. Tomando en cuenta la naturaleza del problema expuesto y sus correspondientes preguntas y objetivos se corresponde con una investigación de tipo cualitativa, que posee las siguientes características de acuerdo a Corbeta (2003): es de (1) diseño desestructurado, con un plan de trabajo abierto y construido en el curso de la investigación, (2) se consideran los casos individuales para la obtención de la información, considerando las situaciones relevantes, (3) en cuanto a la naturaleza de la información es rica y profunda, asimismo, su análisis es profundo con el objeto de comprenderlos, y en cuanto a los resultados "está más atenta a la defensa de la especificidad de las distintas situaciones sociales que a la identificación de rasgos que los unen"(p.67)

Esta investigación se corresponde con la modalidad de Campo, definida por la UPEL (2006) como:

> el análisis sistemático de problemas de la realidad, con el propósito bien sea de describirlos, interpretarlos, entender su naturaleza y factores constituyentes, explicar sus causas y efectos, o predecir su ocurrencia haciendo uso de métodos característicos de cualquiera de los paradigmas o enfoques de investigación conocidos o en desarrollo. Los datos de interés son recogidos en forma directa de la realidad; en este sentido se trata de investigaciones de datos primarios y originales. (p.18)

En concordancia con los objetivos esta investigación busca develar las competencias matemáticas puestas en juego por profesores de matemáticas en formación inicial al resolver problemas relacionados con patrones, por lo que nuestro interés se centra en indagar el pensamiento enmarcando el estudio en el paradigma fenomenológico interpretativo, en concordancia con Forner y Latorre, (1996): "La fenomenología es una corriente de pensamiento propia de la investigación interpretativa que aporta como base del conocimiento la experiencia subjetiva inmediata de los hechos tal como se perciben" (p.73). Además tiene un carácter intensivo, por lo que corresponde a un estudio de casos colectivos, al respecto Buendía, Colás y Hernández (1998) explican que:

> Se estudian varios casos conjuntamente con objeto de indagar dentro del fenómeno, la población y las condiciones generales. Los datos obtenidos no siempre manifiestan características comunes. Pueden ser redundantes o variados, similares o distintos. Se eligen porque se piensa que la comprensión de ellos llevará a un mejor entendimiento teórico, al ser más extensiva la recogida de la información. (p.257)

Escenario y Sujetos del estudio

La recogida de la información para la investigación se realizó durante el periodo académico 2018-I en los salones del Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara" en Maracay, núcleo de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, que se dedica a la formación del Magisterio venezolano. Los sujetos del estudio fueron los integrantes los Profesores de Matemática en Formación Inicial, en este caso, un grupo de estudiantes inscritos en la especialidad de Matemática cursantes de la asignatura Álgebra Lineal durante el periodo académico 2018-I, que participaron en un taller titulado: "La Generalización en el Reconocimiento de Patrones", diseñado y dictado, por la autora de la investigación en horas de la tarde, fuera del horario de clases de los participantes.

Técnicas e Instrumentos de la Investigación

Partiendo de la premisa que para recaudar la información, el investigador debe valerse de técnicas e instrumentos que le permitan capturar la realidad que esta estudiando para dar respuestas a las preguntas planteadas. En este caso, la investigadora, diseño y dicto un taller referido al reconocimiento de patrones para recolectar la información, siendo éste, el taller, la técnica elemental empleada para la recolección de la información, debido a que se considera un escenario propicio para las interacciones grupales, a este respecto Ghiso (1999) precisa que "Taller es una palabra que relacionamos experiencial y conceptualmente con el hacer, con el procesar con otros. Es un término que nos lleva a considerar que hay algo que esta dispuesto para la acción entre varias personas" (p.143), y afirma que investigadores sociales, han implementado el taller como medio para recolectar, analizar y construir el conocimiento. Con el taller se pretendió darle al profesor de matemática en formación inicial la oportunidad de familiarizarse con tareas propias del reconocimiento de patrones, tema presente en la educación primaria y una de las rutas que permite la introducción al pensamiento algebraico, para lo cual se planificaron actividades que incluían distintas relaciones entre cantidades, que conllevaban a identificar estructuras y a deducir una fórmula general, es decir, a generalizar. (Kieran, 2004, Mason, Graham, Pimm, Gowar, 2014).

Asimismo, es importante resaltar que en el taller se planificaron actividades grupales con la finalidad de promover la interacción social, y de saberes entre los participantes, en concordancia con el ámbito intencional como conversacional propuestos por Ghiso (1999), quien explica respecto al ámbito intencional lo siguiente:

> Entender el taller como un dispositivo y éste conformado por multilíneas, diversas, entrelazadas y móviles, nos lleva a considerar la posibilidad de que en él se encadenen diferentes haceres como: hacer ver, el hacer hablar, el hacer recordar, el hacer conceptuar, el hacer recuperar, el hacer analizar y muchos haceres que permiten que el objeto del quehacer de investigación se haga visible, transparente, relacionable, transitivo o se convierta en un ente invisible, aislado y vacío. (p.149)

Mientras que, con respecto al ámbito conversacional, Ghiso (1999) expresa:

> El taller se configura como dispositivo de investigación en la medida que se constituye en una oportunidad, en un espacio, en un tiempo y en una disposición para conversar. Las informaciones, los conocimientos, los contenidos se producen mediante juegos de lenguaje "tipo conversación". Este juego abierto de construcción de conocimiento en el que se puede cuestionar las preguntas y las respuestas, hacer nuevas preguntas. (p.150)

Al recoger la información de investigaciones cualitativas, el investigador juega un papel decisivo, pues es justamente él, el instrumento primordial por lo que se debe poseer habilidades para seleccionar los diferentes técnicas, instrumentos y procedimientos para captar y luego poder interpretar la realidad, en este caso, durante la realización del taller la investigadora adoptó la perspectiva de la mediación contemplativa (en lugar de la observación) y la recolección de artefactos como técnicas cualitativas para la recolección de la información.

A pesar, que en todo momento, la investigadora estuvo presente en el aula donde se desarrollaban las actividades, aupándolos, dándoles animo, motivándolos, intento no responder preguntas que pudieran encaminar las posibles soluciones de las actividades, intento estar impalpable para los estudiantes procurando el libre desarrollo de las actividades, por ello consideramos más conveniente emplear la perspectiva "mediador contemplativo" introducido por González (2016) como una variante del observador, a este respecto el autor ya mencionado explica que la mediación contemplativa "se trata de una mediación reflexiva, vigilante, pero que no se hace ostensible al alumno de manera constante; en ella el docente espera, con cautela y parsimonia, la intervención del participante" (p.114), consideramos importante mencionar que el término se acuño cuando el docente esta empleando entornos de aprendizaje, sin embargo, consideramos que este término se ajusta mejor al papel desempeñado por el docente-investigador durante el desarrollo del taller que se ejecutó de forma presencial. Como instrumento para recabar las observaciones realizadas por el investigador a través de la mediación contemplativa se uso el diario de notas, donde se registro por escrito aquellos aspectos de interés ocurridos en cada una de las sesiones del taller.

El acopio de artefactos consistió en la compilación de cualquier escrito elaborado por los profesores de matemática en formación inicial ya que, como indican Lanksshear y Knobel (2000) éstos "son las huellas materiales de la vida cotidiana de las personas, como por ejemplo, textos producidos por estudiantes, dibujos, revistas leídas por los estudiantes, etc." (p.25). Aunado a que Buendía, Colás y Hernández (1998) afirman que: "Las manifestaciones orales o escritas de los sujetos serán los principales medios y recursos de los que se valdrán los investigadores para describir la estructura de los significados e iluminar la comprensión de las acciones" (p.233), entre los artefactos recolectados tenemos: cuestionarios, la prueba EVAPAL, los formatos de las actividades, los protocolos escritos y las grabaciones de las conversaciones de los estudiantes en audio al resolver los problemas relacionados con patrones (estos instrumentos se explicaran detalladamente en el Capitulo IV).

Cuadro 13
Técnicas e Instrumentos para recolectar la información

Técnica de recolección de información	Instrumentos de recolección de información
Taller: "La Generalización y el Reconocimiento de Patrones"	- Diario de notas del investigador - Cuestionarios - Prueba EVAPAL - Formato de las actividades - Protocolos escritos - Grabaciones de las conversaciones en audio al resolver los problemas

Procedimientos de la Investigación

Esta investigación cualitativa se realizó en concordancia con las fases continuas y recurrentes que plantean Rodríguez, Gil y García (1996) y se muestran en el gráfico 4, las cuales suelen solaparse uno sobre otra: la primera fase es la Preparatoria, y en este caso contempló la revisión documental de diversas fuentes, la elaboración, exposición y aprobación del Proyecto de investigación, y la planificación del Taller sobre Reconocimiento de Patrones, esta fase comprende dos momentos:

Momento I: El proyecto, comenzó con la búsqueda, consulta y selección de documentos, investigaciones, libros, que permitió a través de la revisión documental establecer un problema investigativo, unos referentes teóricos y un abordaje metodológico que se articularon en un trabajo que fue revisado y confrontado ante tres investigadores, arbitrando de esa manera la aprobación del Proyecto de Investigación.

Momento II: Planificación del taller, con la finalidad de recoger la información se proyectaron la realización de diversas actividades relacionadas con el álgebra escolar, con los enfoques para introducir el álgebra en la escuela, con las perspectivas de su enseñanza, con el reconocimiento de patrones y la generalización recogidas en una versión preliminar del taller.

La segunda Fase corresponde al Trabajo de campo que se cristalizó durante el desarrollo del Taller “Generalización y Reconocimiento de Patrones”, que se empleó para la recogida de la información.

Momento III: Validación del taller, con la finalidad de establecer la viabilidad de que el taller planificado pudiese emplearse para recoger los datos de la investigación, se realizó una ejecución ad-hoc, en un liceo donde los participantes fueron los Profesores de Matemática de esa institución, los cuales al finalizar realizaron sugerencias y recomendaciones que permitieron tener una versión definitiva del taller. Sin embargo, en función de diversos contratiempos, las actividades planificadas referidas a la didáctica del álgebra no se lograron ejecutar, motivo por el cual, en el capitulo IV se expondrán para no confundir al lector sólo las actividades planificadas que se realizar.

Momento III: Ejecución del taller para la recogida de los datos, este se expondrá con detalle en el capítulo IV.

Momento IV: Organización de la información, luego de la ejecución del taller, se procedió a ordenar la información, para lo cual se leyeron y se clasificaron los distintos artefactos recolectados, se fueron archivando en una carpeta de tres anillo, empleando fundas plásticas para resguardarlos del tiempo y evitar cualquier daño, luego se tomo un tiempo para asignarles un código, posteriormente se procedió a la digitalización de todos y cada uno de los artefactos, el siguiente paso fue la transcripción en la computadora de los escritos, en la medida de nuestras posibilidades porque hubo cálculos y dibujos complejos que no pudimos reproducir, pero que para citarlos en la investigación hicimos uso de las figuras digitalizadas, como se apreciará en el capítulo V.

La tercera Fase es la analítica y corresponde al análisis de los artefactos recogidos en la fase anterior, esta fase comprende dos momentos, uno para analizar y otro para decantar la información recogida durante el taller.

Momento V: Análisis de la información, se organizó, siguiendo el procedimiento de análisis de contenido, que es una técnica interpretativa que permite analizar con detalle y profundidad el contenido de cualquier producto comunicativo que procede de procesos singulares de comunicación previamente registrados, y que a partir de ellos se pueden elaborar y procesar datos relevantes sobre las condiciones en que se han producido aquellos textos, mensajes o discursos. Delgado y Gutiérrez (1999) afirman que:

> … cuando se habla del contenido de un texto –y en general de cualquier realidad expresiva- a lo que se está aludiendo en realidad, en forma un tanto paradójica, no es al texto mismo sino a algo en relación con lo cual el texto funciona, en cierto modo, como instrumento. Desde este punto de vista, el contenido de un texto no es algo que estaría localizado dentro del texto en cuanto tal, sino fuera de él, en un plano distinto en relación con el cual ese texto define y revela su sentido (p.179)

El análisis de contenido se interesa indagar sobre lo escondido, lo latente, lo no aparente, lo potencial, lo inédito (lo no dicho) de todo mensaje, e inclusive la imagen a adquirido una trascendencia nunca vista hasta el presente, y el discurso iconográfico es un elemento que aparece acompañando al discurso escrito. Desde los dibujos hasta los videos, exigen suma pericia en el manejo de la imagen, colores, tamaños, movimiento, proporciones, formas, son conceptos que aparecen ante el observador, y además tienen un mensaje, un discurso que se despliega en toda la imagen. En nuestro caso, los dibujos y las figuras seleccionadas por los estudiantes para expresar sus ideas se analizaron los símbolos y los significados otorgados por los estudiantes para comprender el mensaje que expresaron de acuerdo a la triple finalidad del análisis de contenido: la guiada por la concepción y el diseño (prescriptiva), la que pretende facilitar el escrutinio crítico de los resultados obtenidos (analítica), y la orientada al desarrollo y perfeccionamiento sistemático del propio método (metodológica).

Momento VI: Decantación de la información, consiste en un análisis más selectivo de la información donde se busca relacionar los diversos datos aportados.

Mientras que la cuarta Fase es la informativa, que corresponde a la redacción del informe de la investigación concretada a través de este documento.

Momento VII: La redacción del informe, corresponde a la compilación de la investigación en un trabajo escrito, la tesina.

Momento VIII: La divulgación, corresponde a la defensa oral y pública de esta investigación

Momento IX: Este momento, aunque es opcional, también corresponde a la fase informativa, y es la elaboración de artículos científicos germinados de este estudio.

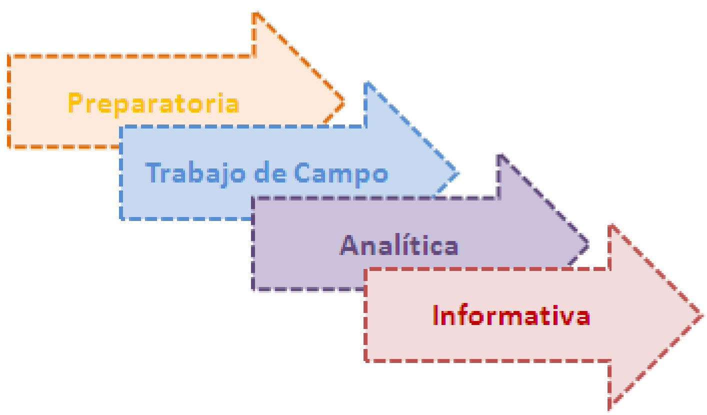


Gráfico 4: Proceso de investigación cualitativa (tomado de Rodríguez, Gil y García, 1996, p.63)

CAPÍTULO IV

TALLER:

“LA GENERALIZACIÓN EN EL RECONOCIMIENTO DE PATRONES”

En este apartado comenzaremos con describir las actividades que se realizaron en el taller, es importante destacar que se tenían otras actividades adicionales planificadas a priori, sin embargo, en virtud del tiempo que se dispuso para compartir con los participantes, y de que estamos trabajando con una metodología cualitativa que nos permite un diseño abierto y flexible que se va adaptando a las necesidades que van surgiendo durante el proceso investigativo, sólo se describirán en este capítulo las actividades que se realizaron.

Es conveniente que comencemos por enfocarnos en que un taller es un método de trabajo, donde el participante aprende haciendo por lo que se requiere de una participación activa, aprende compartiendo con los pares mediante el trabajo en grupo, se enfoca hacia la actividad práctica que sirve de entrenamiento, donde el docente es un facilitador, o puede ejercer la función de mediador contemplativo, que esta atento a las necesidades y requerimientos de los estudiantes, pero sólo los guía en la búsqueda de soluciones, el diccionario El Pequeño Larousse Ilustrado (2007) define, entre otras aserciones a el taller como el “Conjuntos de alumnos o colaboradores que trabajan o han trabajado bajo la dirección de un mismo maestro” (p.957). En este caso, el participante tendrá que realizar diversas actividades referidas al reconocimiento de patrones y la generalización.

PLANIFICACIÓN DEL TALLER

"LA GENERALIZACIÓN EN EL RECONOCIMIENTO DE PATRONES"

Objetivos del taller:

- Analizar el patrón que define los modelos puntuales y los desarrollos operativos de secuencias numéricas.
- Trabajar los procedimientos de continuar una secuencia, extrapolar términos, generalizar y utilizar el término general en la obtención de términos concretos.
- Explorar las propiedades, relaciones y regularidades en secuencias numéricas. Fomentar el empleo de expresiones algebraicas para simbolizar números inicialmente desconocidos y números sin concretar en los procesos de generalización.

-

Característica de los Participantes:

- Profesores de Matemática en Formación Inicial, estudiantes del Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara" (IPMAR) de la especialidad de Matemática, inscritos en la asignatura Algebra Lineal durante el semestre 208-I, a pesar de no haber alcanzado aún su grado universitario ejercen la profesión docente en distintos niveles y modalidades del Sistema Educativo venezolano

Metodología y/ o Dinámica de las actividades del taller:

- Inicio: Actividades pre-instruccionales: Se comenzará la actividad con una evaluación diagnóstica que contemple la exploración gráfica y numérica de secuencias numéricas para establecer las dificultades de los participantes.

- Desarrollo: Actividades-instruccionales: Seguidamente el facilitador realizar una orientación sobre las actividades a realizar, y se dará inicio a las actividades programadas, se grabaran en audio, las actividades que realiza cada equipo.
- Cierre: Actividades post-instruccionales: Se pretendió realizar una reflexión junto a los participantes de las actividades realizadas, sin embargo, lo corto del tiempo y la premura de la situación del transporte no nos permitía cumplir el cierre de las actividades como se tenía previsto

Tiempo de ejecución del que se dispuso:

- Seis (06) Sesiones de trabajo, convenido según las necesidades de los estudiantes en el horario de los martes al salir de la asignatura Álgebra Lineal

Actividades planificadas y realizadas en el taller

Las dos primeras sesiones de clases se destinaron a la obtención de las características del grupo, para lo cual se aplicaron cuatro (04) cuestionarios:

Cuestionario No. 1 (Anexo 1) se aplicó en la primera sesión a los cinco estudiantes que cursaban la asignatura, este instrumentos consta de trece (13) preguntas con las cuales se pretende: establecer el significado dado por lo estudiantes a las palabras más características relacionadas con el reconocimiento de patrones y establecer los conflictos de precisión y de confusión semántica que pudieran existir, asimismo, establecer la capacidad para seguir un razonamiento lógico, la relación de proporcionalidad, déficits en la comprensión lectora, recursos de atención limitados, y déficits perceptivo-espacial.

Cuestionario No. 2 (Anexo 2) se aplicó en la primera sesión a los cinco estudiantes que cursaban la asignatura, este instrumento consta de veinte (20) preguntas, y esta dirigido a indagar las actitudes afectivas, creencias y emocionales de los participantes del taller hacia el álgebra y su aprendizaje

La Prueba EVAPAL (González, 2016) (Anexo 3) se aplicó en la segunda sesión a los cinco estudiantes que cursaban la asignatura, es un instrumento diseñado con la finalidad de explorar el pensamiento algebraico de los profesores de matemática en formación inicial del IPMAR, y como nos dice su autor, consta "de 20 ítems agrupados en dos partes; la primera de ellas para examinar el componente conceptual (definiciones de objetos o procedimientos) y la segunda para examinar lo relativo a lo procedimental"(p.94). Es importante destacar, que para este instrumento, su autor, diseño también una tabla de respuestas institucionales, con las cuales es posible contrastar las emitidas por los participantes en el taller para el proceso de su análisis.

Cuestionario No.3 (Anexo 4) se aplicó en la segunda sesión a cuatros estudiantes, porque uno se retiro antes de la salida porque manifestó tener compromisos personales ineludibles, se le oferto el formato para que lo llenara en su tiempo disponible pero, nunca lo regreso, por lo cual sólo aparecen las repuestas dadas por cuatro estudiantes. Este cuestionario consta de 14 preguntas dirigidas a indagar las competencias didácticas de los participantes.

Durante la segunda sesión de encuentros presenciales se discutieron los contenidos algebraicos que aparecen en el Programa de Educación Media General para lo que se le hizo entrega de la Lectura de Apoyo para el desarrollo de las actividades no Presenciales No.1 (LAnP#1) impresa a cada uno de los estudiantes, "Matemática, enfoques" (pp.140-153)

Durante el tercer encuentro se realizaron las actividades 1, 2, 3 y 4, la actividad 5 se dejo de tarea, y se les entrego la Lectura de Apoyo para el desarrollo de las actividades no Presenciales No.2 (LAnP#2) impresa a cada uno de los estudiantes del artículo: “Los protocolos escritos para evaluar la comprensión matemática aplicando el análisis semiótico al proceso de resolución de problemas matemáticos”

Las actividades planteadas en el taller atiende al modelo propuesto por Cañadas y Castro que consta de los siguientes: (1) Trabajo con casos particulares, (2) Organización de casos particulares, (3) Identificación de patrones, (4) Formulación de conjeturas, (5) Justificación, (6) Generalización y, (7) Demostración. Los Trabajo con casos particulares, están constituidos por ejemplos sencillos, son casos concretos que se emplean para iniciar el proceso de inducción, luego se busca la organización, mostrando un ordenamiento en filas, o tablas, procurando la identificación de patrones, en búsqueda de la regularidad o de los invariantes de la figura o la secuencia, para establecer conjeturas, posibles relaciones que pueden ser confirmadas o rechazadas, durante el mismo proceso, inclusive en el mismo proceso de justificar las conjeturas, los razonamientos pueden llevar a la desestimación, o por el contrario, reafirmarlas, hasta conducir a la generalización, que agrupe todos los términos o casos mostrados, que se puede cristalizar en la identificación y escritura de una fórmula general que requiera ser validada a través de distintos métodos de demostración, verificación o comprobación.

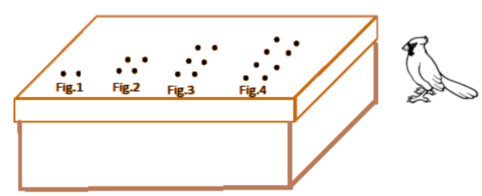
Con la actividad 1 se pretendió iniciar al estudiante al reconocimiento de patrones, asimismo que aplicara la metacognición para establecer el proceso seguido, no se les dio ninguna instrucción, pero el facilitador estuvo atento a cualquier duda o requerimiento, esta actividad se puede considerar como la elaboración ingenua de un protocolo matemático. Las actividades 2 y 3 pueden considerarse de entrenamiento, porque a través de una serie de preguntas se va acercando al estudiante a distintas estrategias para el reconocimiento de patrones, se presentan mediante una situación concreta una configuración puntual, o una seguidilla gráfica de puntos que representan los términos de una secuencia, y se pide calcular un valor cercano, si continuará la secuencia, y unos muy lejanos o grandes, que requieren del establecimiento de una fórmula general.

En la actividad 3 se resalta la expresión oral, al separar el grupo, y sólo un participante observe para describirle la secuencia de dibujos al otro para y éste la logre dibujar, se presenta las tablas de formación como un recurso para sintetizar la información y facilitar el proceso de reconocimiento de patrones. Mientras que en la actividad 4, se les solicita al participante que proponga las actividades a realizar, evidenciando sus competencias didácticas. La actividad 5 consiste en la escritura de un protocolo, de lo cual se les dieron algunos tips en la clase, y se les recomienda la lectura de un artículo entregado impreso a cada participante, la finalidad es que los estudiante comiencen a reconocer y a plasmar por escritos los procesos que realizan al enfrentarse a situaciones que involucran el reconocimiento de patrones. A continuación se detallan las cinco actividades citadas anteriormente:

Actividad No.1: Encuentra una fórmula general que te permita calcular cualquiera de los términos de la secuencia siguiente:

Describa el proceso empleado para encontrar dicha fórmula

Actividad No. 2: Al salir de la Universidad Mariángel encontró un cardenal herido, decidió ayudar al cardenalito a curarlo, y para llevárselo a su casa busco una caja con tapa, y perforó la tapa de la siguiente manera: (Adaptado de un libro de 6° grado)



(2.1) ¿Estos orificios que conforman las figuras: 1, 2, 3 y 4 representan una sucesión? ¿Por qué?; (2.2) ¿Qué regularidad observas?; (2.3) Si la caja fuera más grande, y Mariángel tuviera que hacer más orificios, ¿cuántos orificios tendrá la figura 5, la figura 6?, y si fuera aún más grande ¿cuántos orificios tendría la figura 15?; (2.4) ¿Qué expresión nos ayudaría a determinar el número de orificios para cualquier figura? Describe los pasos que te llevaron a esa expresión algebraica; (2.5) ¿Habrá alguna figura que tenga 28 orificios?, ¿Habrá alguna figura que tenga 53 orificios?

Actividad No. 3: (Se separaron los grupos de trabajo, el dibujo de la secuencia sólo lo podía ver un participante que debía describírselo a los otros para que lo dibujaran)

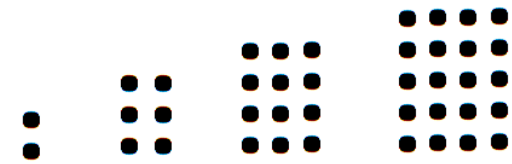


fig.1 fig.2 fig.3 fig.4

(3.1) Sólo uno de los compañeros observa la secuencia dada y describe de forma oral (grabar en audio) la secuencia de las figuras para que los otros compañeros puedan dibujarla. (3.2) Dibujen las dos figuras que siguen en la secuencia. (3.3) Realiza con tu compañero todas las observaciones, características e inferencias que puedas de la secuencia dada. (3.4) Realiza una tabla de formación

No.de la Figura						
Figura						
Cantidad de puntos						

(3.5) Describe con la ayuda de tu compañero una regla que ayude a la producción de la secuencia, y que tiene las figuras dadas como los primeros términos de la secuencia ¿cómo pueden estar seguros que la regla funciona?¿qué hizo para reconocer el patrón?. (3.6) ¿Cuántos puntos se necesitan para formar la figura n?. (3.7) Puedes escribir una fórmula (expresión algebraica). (3.8) ¿Cuántos puntos se necesitan para la figura No.12?. (3.9) ¿Cuántos puntos se necesitan para la figura No.35?. (3.10) Con 110 puntos, ¿se podrá dibujar alguna figura de la secuencia que tenga dicha cantidad de puntos?. (3.11) Con 1110 puntos, ¿se podrá dibujar alguna figura de la secuencia que tenga dicha cantidad de puntos?. (3.12) ¿Qué pasos seguiste para encontrar el patrón de formación?. (3.13) ¿Habrá otra forma de encontrarlo?

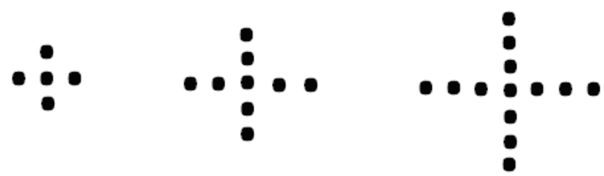
Actividad No.4: Propongan las actividades que deberán realizar los estudiantes, dada la siguiente figura

Evaluación-Reflexiones: ¿Qué aprendiste hoy?, ¿fue sencillo? ¿Qué dificultades se presentaron?, ¿la tabla de formación ayuda para hallar el patrón? ¿Qué actividades te parecen las más complejas? Realiza un resumen de las actividades realizadas.

Actividad No.5: Lee el artículo escrito por Freddy González: *Los Protocolos Escritos como medio para evaluar la comprensión matemática aplicando el análisis semiótico al proceso de resolución de problemas matemáticos*, y realiza un protocolo del proceso seguido para encontrar la fórmula general de la siguiente secuencia, (dibujo de la secuencia tomada de Rutas hacia el/Raíces del Álgebra, p.129)

En la cuarta sesión se realizaron las actividades 6, 7, 8, y 9 que se refieren a una misma secuencia representada de distintas manera, en la actividad 6 se pone de manifiesto el uso de material concreto para realizar las secuencias, en nuestro caso le facilitamos arandelas a los estudiantes, la actividad 7 presenta la misma secuencia, pero con otro modelo, ambas actividades tienen una serie de preguntas para su solución, a diferencia de la actividad 8 que sólo requiere la obtención de la fórmula general, y en la actividad 9 se les solicita realizar un cuarto modelo distinto a los tres anteriores de la misma secuencia. En las actividades 10 y 11 no se ofrece ayuda visual de la secuencia, y se realiza una caracterización para el problema. Para la casa se les solicita que realicen un protocolo como actividad 12, luego de realizar la lectura de la versión preliminar del artículo "Resolución de la búsqueda de un patrón en un protocolo escrito" escrito por la autora de la investigación, es importante mencionar que la secuencia presentada en la actividad 12 es la misma de la actividad 4, y que además volverá a aparecer en la actividad 17. A continuación se presentan las actividades

Actividad No.6:



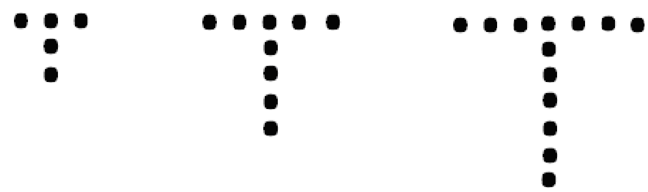
(6.1) Emplea material concreto y realiza la secuencia que sigue en la secuencia.

(6.2) Realiza una tabla de formación (emplea la cantidad de cuadros que consideres necesarios):

No.de la Figura							
Figura							
Cantidad de puntos							

(6.3) Describe de forma escrito-oral la secuencia de las figuras para que tu compañero pueda dibujarlas. (6.4) Realiza con tu compañero todas las observaciones, características e inferencias que puedas de la secuencia dada ¿cómo aumentan o disminuyen los elementos de la figura?, ¿en que posición se colocan o se eliminan elementos?. (6.5) Describe con la ayuda de tu compañero una regla que ayude a la producción de la secuencia, y que tiene las figuras dadas como los primeros términos de la secuencia ¿cómo pueden estar seguros que la regla funciona?, ¿qué factores influyeron para reconocer la regla?, ¿el material concreto facilitó la formulación de la regla?. (6.6) ¿Cuántos puntos se necesitan para formar la figura n?. (6.7) Puedes escribir una fórmula (expresión algebraica). (6.8) ¿Cuántos puntos se necesitan para la figura No.8?. (6.9) ¿Cuántos puntos se necesitan para la figura No.30?. (6.10) Con 101 puntos, ¿se podrá dibujar alguna figura de la secuencia que tenga dicha cantidad de puntos?. (6.11) Con 1110 puntos, ¿se podrá dibujar alguna figura de la secuencia que tenga dicha cantidad de puntos?.(6.12) ¿Qué pasos seguiste para encontrar el patrón de formación?. (6.13) ¿Habrá otra forma de encontrarlo?

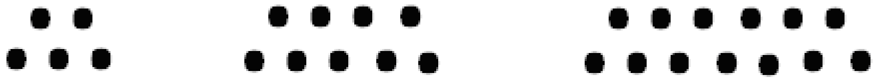
Actividad No. 7:



(7.1) Utiliza material concreto para dibujar las dos figuras que siguen en la secuencia. (7.2) Describe de forma escrito-oral la secuencia de las figuras para que tu compañero pueda dibujarlas. (7.3) Realiza con tu compañero todas las observaciones, características e inferencias que puedas de la secuencia dada. (7.4) Realiza tu propia tabla de formación, empleando los títulos que consideres y la cantidad de cuadros que requieras. (7.5) Describe con la ayuda de tu compañero una regla que ayude a la producción de la secuencia, y que tiene las figuras dadas como los primeros términos de la secuencia ¿cómo pueden estar seguros que la regla funciona?¿qué hizo para reconocer el patrón?. (7.6) ¿Cuántos puntos se necesitan para formar la figura n?. (7.7) Puedes escribir una fórmula (expresión algebraica).

(7.8) ¿Cuántos puntos se necesitan para la figura No.12?. (7.9) ¿Cuántos puntos se necesitan para la figura No.35?. (7.10) Con 101 puntos, ¿se podrá dibujar alguna figura de la secuencia que tenga dicha cantidad de puntos?. (7.11) Con 1110 puntos, ¿se podrá dibujar alguna figura de la secuencia que tenga dicha cantidad de puntos?. (7.12) ¿Qué pasos seguiste para encontrar el patrón de formación?. (7.13) ¿Habrá otra forma de encontrarlo?. (7.14) ¿Qué relación encuentras con la actividad No.1?. (7.15) Realiza un resumen de las ideas más resaltantes involucradas en la realización de esta actividad

Actividad No.8: Encuentra una regla general para la siguiente secuencia:



Actividad No. 9: Proponga una configuración diferente a las tres anteriores para la secuencia presentada en el taller

Actividad No.10: **El truco del Mago** (adaptación del problema de Galindo, Pasten y Lobos (2013)):

Mariángel está de cumpleaños, y sus padres llevaron al Mago de moda para su fiesta. Todos los niños están ansiosos esperando los trucos enigmáticos del artista, el Mago le pregunta a la cumpleañera cuántos niños asistieron a su cumpleaños, Mariángel le responde, diciendo: yo y diez amiguitos más; entonces el Mago comienza su presentación:

"Muestra el sombrero para que verifiquen que no tiene nada, luego lo golpea con su varita y aparecen tres caramelos en el sombrero, lo desecha, Repite el truco y aparecen cinco caramelos, los desecha, repite el truco obteniendo siete caramelos, y así sucesivamente"

(10.1) Realiza una representación con los datos del enunciado. Explica con tus propias palabras, cómo se forma la secuencia del truco del Mago. (10.2) ¿Cuántas veces es necesario repetir el truco para que cada niño reciba un caramelo?.Es importante considerar que el número de niños coincida con la cantidad de caramelos que el Mago está sacando del sombrero en ese momento. Explica la respuesta. (10.3) Si llegan 4 niños más a la fiesta mientras el Mago hace su presentación, ¿cuántas veces debería hacer el truco para que cada niño obtenga un caramelo?. Explica la respuesta. (10.4) Realiza una tabla de formación, presenta un modelo de configuración puntual para la secuencia, o cualquier otro esquema que consideres se adapte

No.de la							

Figura							
Figura							
Cantidad de puntos							

(10.5) Si el Mago obtuvo 27 caramelos ¿cuántas veces hizo el Mago el truco? Explica la respuesta. (10.6) ¿Cuántos caramelos salen del sombrero cuando realiza el truco la vigésima vez? Explica la respuesta. (10.7) ¿Cómo se escribiría la cantidad de caramelos obtenidos del sombrero para la enésima repetición del truco?. Escriba una expresión general para hallar cualquier término de la secuencia, y explique por qué la generalización es correcta. (10.8) Pueden planear otro modelo para la secuencia. (10.9) ¿Qué dificultades se presentaron en la realización de está actividad?. (10.10) Realiza un protocolo explicando cómo llegas a la regla de formación, y la experiencia de crear tu propio modelo puntual

Actividad No. 11: **El nuevo truco del Mago**

Ahora el Mago, cambia de truco, y en lugar de caramelos, al golpear el sombrero, hace aparecer unas ricas y suculentas donas. Al golpear la primera vez el sombrero hace aparecer una dona, al golpear el sombrero por segunda vez, hace aparecer cuatro donas, al golpear por tercera vez el sombrero con su varita mágica hace aparecer nueve donas, al golpear el sombrero por cuarta vez, hace aparecer dieciséis donas, y así sucesivamente.

(11.1) Realiza un modelo de configuración puntual para la secuencia. (11.2) Intenta establecer de forma gráfica el patrón de crecimiento. Anota todas las observaciones que realices. (11.3) Escribe una expresión general para hallar cualquier término de la secuencia, y explica por qué la generalización es correcta. (11.4) Puedes pensar en otro modelo para la secuencia

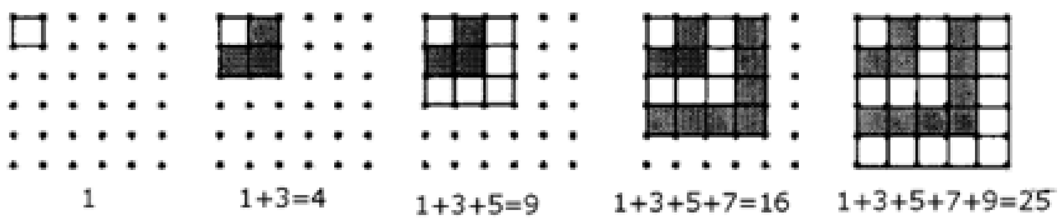
Actividad No.12:

(12.1) Lee el artículo Un protocolo escrito sobre la búsqueda de un patrón, y realiza una reflexión-comparativa con el protocolo que elaboraste. (12.2) Realiza un protocolo de la siguiente secuencia

Durante la sesión 5 se desarrollaron las actividades 13, 14 y 15 las cuales se diferencian del trabajo realizado hasta el día de hoy, porque en las dos sesiones anteriores se trabajaron modelos con configuraciones puntuales, en este día, las tres actividades estarán relacionadas a la búsqueda de patrones con modelos representas empleando cuadrados. La cantidad de preguntas de cada actividad disminuye, sin embargo aumenta la complejidad, en las tres actividades se presenta el crecimiento de cuadrados empleando cuadrados de dos colores diferentes (blancos y negros), en la actividad 13 se presenta el desarrollo aritmético de la secuencia, y en la actividad 15, se da un modelo posible y se emplea una tabla para facilitar los datos del problema. Para la casa se le asigna la actividad 16 y se les sugiere la lectura del artículo del profesor Freddy González titulado “Las centenas cuadriculadas: un material matemáticamente potente para ilustrar el tránsito de la Aritmética al Álgebra”, también se les entrega el cuestionario 4 (Anexo 5), que consta de tres (03) preguntas para que los participantes evalúan las respuestas de los estudiantes y propongan una explicación plausible de los razonamientos presentados.

Durante la quinta sesión de clase se desarrollaron las actividades, 13, 14, y 15, estas actividades tienden a alejarse de las configuraciones puntuales de la sesión anterior, y con secuencias graficas donde el gran protagonista es un polígono, se relacionan con el cuadrado, se presentan tres actividades que básicamente son secuencias gráficas crecientes, donde el participante se le presenta cuadrados, divididos en unidades (por lo que a su vez están conformados por cuadrados) empleando dos colores, es decir, es una secuencia más compleja, y se le da mayor libertad al estudiante para buscar sus propios caminos de solución. Como actividad para el hogar se propone la actividad 16, donde se presenta un enunciado escrito, sin tabla, ni dibujos, donde el participante debe dibujar los términos de la secuencia.

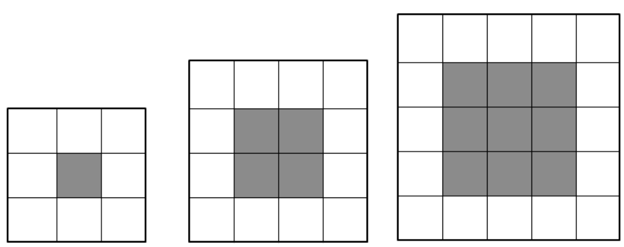
Actividad 13: Crecimiento de cuadrados: (13.1) Describe el patrón que se muestra en la figura mediante lenguaje matemático. (13.2) Realiza el dibujo de la figura siguiente. (13.3) Como se puede expresar el tamaño de la figura n. (13.4) Escribe todas las ideas involucradas en la realización de esta actividad



Actividad 14:

(14.1) Encuentre una regla de formación general para la siguiente secuencia

(14.2) Escribe todas las ideas involucradas en la realización de esta actividad

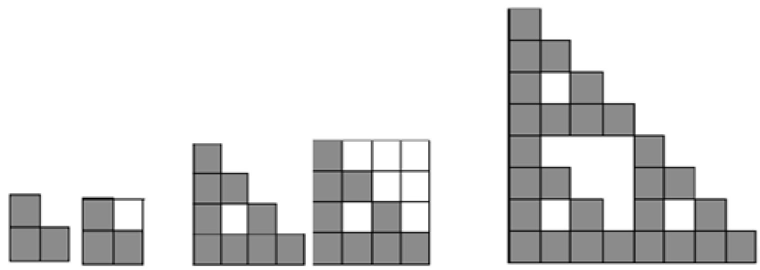


Actividad 15:

(15.1) Construye un modelo para la secuencia que se muestran en la siguiente tabla

Figura	1	2	3	4	5	6	8	9
Cuadros Blancos	1	7	37					
Cuadros de color	3	9	27					
Total de cuadros	4	16	64					

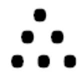
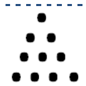
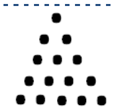
(15.2) Complete la tabla. (15.3) Encuentre una regla de formación general para la siguiente secuencia. (15.4) Escribe todas las ideas involucradas en la realización de esta actividad. (15.5) Intenta crear otro modelo diferente. Una idea para crear el modelo es: (1) Colorea en el papel cuadriculado la figura L del tetris, (2) 2. Completa el cuadrado, (3).Realiza las figuras de la secuencia (Adaptado de Guzmán, 2013)



Actividad No.16: Realiza un protocolo para determinar la cantidad de diagonales que puede tener un polígono de cualquier número de lados. Sugerencia (NO SON PREGUNTAS): Dibuja polígonos de distintas cantidades de lados y traza sus diagonales. Crea una tabla para comparar la cantidad de lados y la cantidad de diagonales de cada polígono

La sexta sesión está dedicada a los números poligonales, y se desarrollaron cinco (05) actividades, la actividad 17 esta relacionada con los números triangulares, modelo con el que se trabajo en la actividad 4 y 12, sin embargo, la actividad 17 guarda estrecha relación con la 18 que esta dedicada a los números cuadrados, la actividad 19 esta dedicada a los números pentagonales, la actividad 20 a los números hexagonales y la actividad 21 a la búsqueda de una fórmula general para la obtención de cualquier número poligonal. Los números poligonales, es una actividad que engloba la de las dos sesiones anteriores, las configuraciones puntuales de la tercera sesión y los polígonos de la cuarta. Aunque, en apariencias, la actividad 17 tiene muchas interrogantes, la cantidad de preguntas van disminuyendo, hasta que la actividad 21 tiene sólo una. También es importante mencionar, que la secuencia de los números triangulares esta presente en las actividades 4,12 y 17.

ACTIVIDAD 17:

Numero de la Figura	**Figura**	**Cantidad total de Puntos**	**Cantidad de Puntos (sumando las fila)**	**Notación Sugerida**	**Relación entre dos números triangulares consecutivos (T_n y T_{n-1})**
1		1	1	T_1	$T_1=1$
2		3		T_2	$T_1+\square=T_2$
3			1+2+3	T_3	
4		10		T_4	
5				T_5	$T_4+\square=T_5$
6		21		T_6	

(17.1) Explica todo lo que observas en la formación de la secuencia, incluyendo las posibles relaciones existentes

(17.2) ¿Cuántos puntos en total debe tener la figura 15?, ¿Cómo están desglosados por sumandos?

(17.3) Explica sí 26 está o no en la secuencia, ¿es o no un número triangular?

(17.4) Explica la relación que existe entre dos números triangulares consecutivos, intenta establecerlo de forma escrita/oral y gráfica

(17.5) Encuentra una formula general para encontrar cualquier número triangular conociendo su posición, por ejemplo, T_{23}, T_{56}, T_{100},T_n

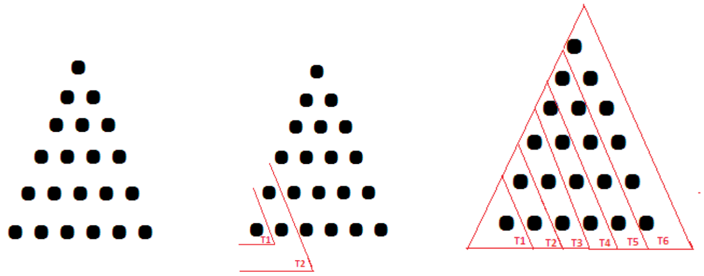
(17.6) Calcula el valor de 1+2+3+…+97+98+100 sin realizar las 99 sumas

(17.7) 26 a pesar de que no es un número triangular se puede expresar como la suma de dos o tres números triangulares (no necesariamente distintos):

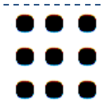
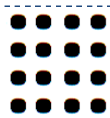
$$26 = 15 + 10 + 1 = T_5 + T_4 + T_1$$

Expresa los siguientes números como la suma de números triangulares: 4, 9, 16, 25, 36, 49 (tomada de Rangel, 2012)

Números triangulares: Se llama número triangular un número que puede ser representado por medio de un triángulo como se observa en la segunda columna de la tabla.



Actividad 18:

Numero de la Figura	Figura	Cantidad total de Puntos	Cantidad de Puntos (sumando las fila)	Notación Sugerida	Relación entre los números triangulares y Cuadrados (T_n y C_m)
1		1	1	C_1	$T_1=C_1$
2		4	3+1	C_2	$\square+T_1=C_2$
3				C_3	
4		16		C_4	
5				C_5	$\square+T_5=C_5$
6				C_6	

(18.1) Explica todo lo que observas en la formación de la secuencia, incluyendo las posibles relaciones existentes

(18.2) ¿Cuántos puntos en total debe tener la figura 15?, ¿Cómo están desglosados por sumandos?

(18.3) Explica sí 146 está o no en la secuencia, ¿es o no un número cuadrado?

(18.4) Explica la relación que existe entre los números triangulares y cuadrados, intenta establecerlo de forma escrita/oral y gráfica

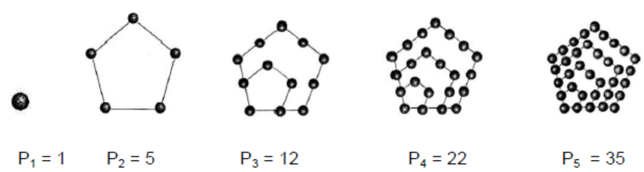
(18.5) Encuentra una formula general para encontrar cualquier número triangular conociendo su posición, por ejemplo, C_{23}, C_{56}, C_{100}, C_n

(18.6) 310 a pesar de que no es un número cuadrado se puede expresar como la suma de cuatro números cuadrados, no necesariamente distintos:

310=289+16+4+1= $C_{17}+C_4+C_2+C_1$. Expresa los siguientes números como la suma de cuatro números cuadrados: 50, 90, 160, 250.

(18.7) Explica qué son los Números Cuadrados (tomada de Rangel, 2012)

Actividad 19: Números Pentagonales



(19.1) Encuentra los pentagonales P8, P10, P15. (19.2) Establece de manera escrita/oral y gráfica la relación entre dos números triangulares consecutivos y un número pentagonal. (19.3) Expresa simbólicamente la relación anterior. (19.4) Encuentra una fórmula general para los números pentagonales. (tomada de Rangel, 2012)

Actividad 20: Números Hexagonales

(20.1) Dibuja la secuencia de los números hexagonales. (20.2) Establece una definición para los números hexagonales. (20.3) Establece una fórmula general para los números hexagonales

Actividad 21: Números Poligonales

(21.1) Observa el siguiente cuadro, establece una definición para los números poligonales, e intenta establecer una fórmula general para los números poligonales

Nombre	Orden									
	1 º	**2 º**	**3 º**	**4 º**	**5 º**	**6 º**	**7 º**	**8 º**	**9 º**	**10º**
Triangular	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Cuadrado	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Pentagonal	1	5	12	22	35	51	70	92	117	143
Hexagonal	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
Heptagonal	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235
Octogonal	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280
Nonagonal	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325
Decagonal	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370

VALIDACIÓN DE LAS ACTIVIDADES DEL TALLER

Con la intención de certificar que los instrumentos diseñados se podían emplear como medio de recolección de la información para indagar los objetivos planteados anteriormente, se realizó una aplicación ad-hoc en la Unidad Educativa "San Vicente" ubicada en la parroquia Los Tacariguas en el estado Aragua. Para ello se solicitó la autorización a la directora, y la colaboración a los docentes de la asignatura Matemática de dicha institución, quienes muy amablemente suscribieron toda la información requerida. La ejecución de las actividades conjuntas se realizaron en las horas libres, y otras actividades las realizaron de forma individual a conveniencia de su tiempo disponible. Contamos con la participación de los tres docentes que imparten la asignatura en la institución, de los cuales: uno tenía el título de Profesor de Matemática egresado del Instituto Pedagógico de Maracay, otro era Profesor de Informática egresado del Instituto Pedagógico de Maracay, y el otro era Ingeniero en Sistemas, participante de una de las Micro-misiones Educativas, cursando los días sábados una capacitación para titularse Profesor de Matemática de Educación Media. Este proceso se empleo para mejorar la redacción de los instrumentos, para verificar los tiempos a dedicar a cada pregunta, precisar las posibles inquietudes que podían surgir en el proceso, a pesar de que fue muy fructífero por la colaboración de los docentes, la información surgida en esta fase no será de análisis en esta investigación. Esta tuvo lugar durante el primer lapso del año escolar 2017-2018.

IMPLEMENTACIÓN DEL TALLER

Una vez, que verificados los instrumentos verificados en una evaluación a priori, se procedió a recolectar la información, para ello se conto con la participación y colaboración de los estudiantes del Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara" cursantes de la asignatura Álgebra Lineal durante el semestre 2018-I, se trabajo en el horario de la tarde, el mismo día martes que asistían a la asignatura, por no contar con posibilidad de trasladarse varios días al recinto universitario, se le ofrecía una pequeño comida y se les facilito todo el material de papelería que requirieron los participantes antes de comenzar cada una de las sesiones de trabajo. No se puede dejar de mencionar la realidad país que tenemos en Venezuela (problemas con el dinero en efectivo, poco transporte público, falta de comedores en las distintas universidades, migración de la población joven en edad universitaria). El trabajo comenzó con los cinco (05) estudiantes inscritos en la asignatura Álgebra Lineal presentes en la primera sesión, sin embargo, luego en varias sesiones asistieron sólo tres (03) estudiantes, ya que dos decidieron abandonar la materia, y uno de los estudiantes presentes estuvo muy disperso, entrando y saliendo del salón, sin llegar a completar las actividades del encuentro.

A continuación de los aspectos considerados a lo largo del tiempo que perduró La ejecución del taller destinado a la recolección de la información de esta investigación que consta de seis (6) sesiones de trabajo. En el cuadro se utiliza códigos para identificar las actividades referidas a competencias matemáticas (CM) y competencias didácticas (CD), y las asignaciones (-t)

Cuadro 14
Línea del tiempo de las sesiones de trabajo de campo para la recolección de la información

Sesiones de a Recolección de la Información	
Datos de la sesión	**Aspectos tratados**
Sesión 1 Martes 27/02/18 Inicio: 11:45 a.m. Final: 1:35 p.m.	Se les dio un saludo fraternal de colegas a los participantes, se sostuvo una amena conversación para sensibilizar, explicar e informarles la intencionalidad investigativa. El docente expuso la planificación del curso Se procedió a aplicar dos (2) instrumentos iniciales: Cuestionario No.1 (CM), Cuestionario No.2 (CD)
Sesión 2 Martes 06/03/18 Inicio: 12:15 a.m. Final: 2:55 p.m	El docente expuso la resolución del Cuestionario No.2 y se realizó una plenaria sobre algunos ejercicios. Se procedió a aplicar dos (2) instrumentos: la Prueba EVAPAL (CM) y el Cuestionario No.3 (CD). Se realizó una discusión de los contenidos algebraicos en el Programa de Educación Media General, y se asignó la selección de un tema algebraico
Sesión 3 Martes 13/03/18 Inicio: 12:15 a.m. Final: 4:25 p.m	Los participantes realizaron las actividades 1(CM), 2(CM), 3(CM), 4 (CD) en el aula de clases. Se les hizo entrega del artículo impreso escrito por el profesor Freddy González, se les explico a groso modo qué es un protocolo y se les asigno la actividad 5(CM-t)
Sesión 4 Martes 20/03/18 Inicio: 12:15 a.m. Final: 4:30 p.m	Los participantes realizaron en el aula de clases las actividades 6(CM), 7(CM), 8(CM), 9(CM), 10(CM), y 11(CM). Se les entregó la versión preliminar de un artículo y se les asigno la actividad 12 (CM-t), se les facilito copia de un libro del tema algebraico seleccionado. Los alumnos hicieron entrega del protocolo de la actividad 5
Sesión 5 Martes 03/04/18 Inicio: 12:15 a.m. Final: 4:45 p.m	Los participantes realizaron en el aula de clases las actividades 13(CM), 14(CM),15 (CM). Entregaron la descripción de un tema en un texto. Se les asigno de tarea la actividad 16 (CM-t) y el cuestionario No.4 (CD-t)
Sesión 6 Martes 10/04/18 Inicio: 12:15 a.m. Final: 4:45 p.m	Los participantes realizaron en el aula de clases las actividades 17(CM), 18(CM), 19(CM), 20 (CM), 21(CM). Se les asigno la realización de un protocolo sobre esta actividad, sin embargo, no fue posible realizar otro encuentro

A continuación se presenta un cuadro donde se esbozan las distintas actividades realizadas en cada una de las sesiones de trabajo:

Cuadro 15

Plan de didáctico de las actividades realizadas durante la implementación del taller

	Desempeño del docente	Desempeño de los participantes	Asignaciones	Limitaciones	Materiales y recursos
Sesión No.1	Darles la cordial bienvenida a los estudiantes, auparlos a llevar esta experiencia del Taller con la mejor disposición posible. El docente mantuvo una actitud motivadora, tratando de sensibilizar a los estudiantes sobre la importancia de la información que suministren por ser de carácter investigativa y no evaluativa. Se les ofreció un refrigerio dulce a los estudiantes con un jugo mientras el docente expuso la planificación del Taller. Al finalizar el docente repartió a los estudiantes los cuestionarios con un lápiz para su llenado, ofreció colores y resaltadores que coloco en el escritorio. Se comenzó por el cuestionario No. 1, al estudiante que terminaba se le entregaba el no.2. Se respeto el ritmo de cada estudiante, y al finalizar los cuestionarios, uno a uno los estudiantes se fueron retirando	En esta sesión los estudiantes, participaron realizando preguntas al docente, preocupados por la evaluación, que influirá o no en la asignatura que cursan de Álgebra Lineal. Observaron la presentación no.1, no emitieron comentarios al respecto, ni formularon ninguna pregunta. En esta sesión se trabajo de manera totalmente individual y cada uno de los estudiantes presentes completaron dos instrumentos: Cuestionario No.1 referido a las competencias matemáticas/algebraicas, y Cuestionario No.2, referido a las competencias didácticas	En este caso no se dejo ninguna asignación	No se logró establecer las expectativas de los estudiantes, no dieron mayor información de qué esperaban con este taller, más allá de la influencia del curso sobre la calificación de Álgebra lineal	Refrigerio dulce y jugo. Computadora, video beam; Presentación No.1: Planificación del taller Formato de los instrumentos: Cuestionario No.1, Cuestionario No.2 Lápices, resaltadores y colores
Sesión No.2	Se les ofreció como un gesto de cortesía un pequeño almuerzo a los estudiantes porque venían de ver clase toda la mañana, no está el comedor funcionando, y deben emplear parte de su tiempo de la tarde para participar en el taller. El docente resolvió el cuestionario no. 1, se generó una discusión grupal de las respuestas y el docente trató de disipar las dudas de los estudiantes. El docente repartió a los estudiantes la prueba EVAPAL, luego, el cuestionariono.3, y al finalizar, se	Los estudiantes realizaron preguntas sobre algunas dudas surgidas de la resolución del instrumento, todos querían ver sus instrumentos, compararlos y corregirlos. Los estudiantes respondieron de manera individual la prueba EVAPAL referida a competencias matemáticas/algebraicas, y el Cuestionario No.3 dirigido a indagar las competencias didácticas	Escoger uno de los temas algebraicos del currículo, buscarlo en un libro cualquiera de Matemática y realizar una descripción de cómo se aborda el tema en el texto (no un	No funcionó el internet, no se pudo responder la pregunta No.11 del cuestionario	Almuerzo Computadora, video beam; Presentación No.2: Resolución del Cuestionario No.1, Conexión inalámbrica a internet. Formato de los instrumentos: prueba EVAPAL, Cuestionario No.3. Lápices, resaltadores y colores LAnP#1: Matemática,

	realizó una discusión del Programa de Matemática de Educación media y se resaltaron los contenidos algebraicos, entregándole impreso, a cada estudiante, el apartado de Matemática de las Áreas de Formación en Educación Media General, 2017 del Ministerio del Poder popular para la Educación para que lo lean con detenimiento en su hogar. Cada estudiante debía seleccionar un tema algebraico y buscar un libro de Matemática y describir cómo se aborda el contenido-no es un resumen-, para la próxima clase sólo debían traer el posible tema.		resumen)		enfoques (pp.140-153)
Sesión 3	Se les ofreció un pequeño almuerzo a los estudiantes. Se conformaron dos grupos de trabajo, y se les repartió las hojas para realizar las actividades 1, 2, 3, y 4. Se explicó a groso modo lo que se entiende por protocolo, y cómo elaborarlos, se les entrego la actividad 5 a cada estudiante para que la realizaron en su hogar, y el artículo escrito por el profesor Freddy González sobre los protocolos escritos.	Los estudiantes se dividieron en dos grupos de trabajo, y desarrollaron en el aula de clases las actividades 1, 2, 3 y 4. Atendieron la explicación del docente sobre lo qué es un protocolo, realizaron algunas preguntas	Leer el artículo, realizar la evaluación-reflexión, escribir un protocolo de la actividad No.5	No hubo energía eléctrica, durante toda la sesión	Almuerzo. Grabadores Formatos de las Actividades: 1, 2, 3, 4, y 5. LAnP#2: Los protocolo escritos…, (pp.1-8) Lápices, resaltadores y colores
Sesión 4	Se les ofreció un pequeño almuerzo a los estudiantes. Se conformó sólo un grupo de trabajo, y se les repartió las hojas para realizar las actividades 6, 7, 8, 9, 10, 11. Se les entregó la actividad 12 a cada estudiante para que la realizaron en su hogar, y la versión preliminar del artículo escrito La Búsqueda de un Patrón	Los estudiantes presentes trabajaron en un solo grupo, y desarrollaron en el aula de clases las actividades 6, 7, 8, 9, 10 y 11.	Leer el artículo, realizar la evaluación-reflexión, escribir un protocolo de la actividad No.12		Almuerzo. Grabadores Formatos de las actividades 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12. LAnP#3: La búsqueda de un patrón. Lápices, resaltadores y colores. Arandelas, botones, semillas de tamarindo. Lápices, resaltadores.
Sesión	Se les ofreció un pequeño almuerzo a	Los estudiantes presentes	Escribir un		Almuerzo. Grabadores

5	los estudiantes. Se conformó sólo un grupo de trabajo, y se les repartió las hojas para realizar las actividades 13, 14 y 15. Se les entregó la actividad 16 a cada estudiante para que la realizaron en su hogar	trabajaron en un solo grupo, y desarrollaron en el aula de clases las actividades 13, 14, 15, y 16.	protocolo de la actividad No.16		Formato de las Actividades 13, 14, 15 y 16. Lápices, resaltadores y colores
Sesión 6	Se les ofreció un pequeño almuerzo a los estudiantes. Se conformó sólo un grupo de trabajo, y se les repartió las hojas para realizar las actividades 17, 18, 19, 20 y 21.	Los estudiantes presentes trabajaron en un solo grupo, y desarrollaron en el aula de clases las actividades 17, 18, 19, 20 y 21			Almuerzo. Grabadores Formato de las Actividades 17, 18, 19, 20, y 21. Lápices, resaltadores y colores

ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN

Una vez que se termino con la ejecución del taller era el momento de ordenar la información recolectada, y la información se organizó al realizar las actividades de archivar, escanear y transcribir. En una carpeta de tres anillos, empleando fundas de plástico se fue archivando la información recolectado por día y por actividad de manera de garantizar su buen estado y de ubicarlo con facilidad, se emplearon hojas blancas como separadores donde se realizaron todas las anotaciones referidas al encuentro presencial. Luego, de tener organizados los datos, se procedió a digitalizar toda la información y se les asigno un código para su escaneo, que coincide con el nombre que se le dio al archivo, es importante mencionar, que existen algunos documentos cuya resolución no es óptima, sin embargo, permite leer con claridad lo escrito, aunque fueron escrito con lápiz muy clarito por el estudiante en hojas amarillentas. Asimismo, es importante mencionar, que los audios de las grabaciones de las conversaciones de los participantes se resguardaron, realizando grabaciones en C.D de los audios, luego se procedió a su transcripción escrita en hojas de reciclaje y con lápiz (a mano), y posteriormente fueron transcriptos en la computadora en archivos de Word. A continuación se presentan los códigos asignados a los distintos artefactos recolectados durante la implementación del taller:

Cuadro 16
Código de escaneado asignado a los formatos recolectados en la sesión 1

	Cuestionario 1	**Cuestionario 2**
Alumno 1	d1C1A11	d1C2A11
	d1C1A12	d1C2A12
	d1C1A13	d1C2A13
Alumno 2	d1C1A21	d1C2A21
	d1C1A22	d1C2A22
	d1C1A23	d1C2A23
Alumno 3	d1C1A31	d1C2A31
	d1C1A32	d1C2A32
	d1C1A33	d1C2A33
		d1C2A34

		d1C2A35
Alumno 4	d1C1A41	d1C2A41
	d1C1A42	d1C2A42
	d1C1A43	d1C2A43
Alumno 5	d1C1A51	d1C2A5
	d1C1A52	d1C2A52
	d1C1A53	d1C2A53

Cuadro 17
Código de escaneado asignado a los formatos recolectados en la sesión 2

	EVAPAL	**Cuestionario 3**	
Alumno 1	EVA11	d2C3A11	d2C3A12
	EVA12	d2C3A13	d2C3A14
	EVA13	d2C3A15	d2C3A16
Alumno 2	EVA21	d2C3A21	d2C3A22
	EVA22	d2C3A23	d2C3A24
	EVA23	d2C3A25	d2C3A26
Alumno 3	EVA31	d2C3A31	d2C3A32
	EVA32	d2C3A33	d2C3A34
	EVA33	d2C3A35	d2C3A36
Alumno 4	EVA41	d2C3A41	d2C3A42
	EVA42	d2C3A43	d2C3A44
	EVA43	d2C3A45	d2C3A46
Alumno 5	EVA51	d2C3A11	d2C3A12
	EVA52	d2C3A13	d2C3A14
	EVA53	d2C3A15	d2C3A16

Cuadro 18
Código de escaneado asignado a los formatos recolectados en la sesión 3

	Código	
Actividad 1	d3act1A1	
	d3act1A2	
	d3act1A3	
	d3act1A4	
	d3act1A51	
	d3act1A52	
Actividad 2	d3act2g11	d3act2A2
	d3act2g12	d3actt2A3
	d3act2g13	

Actividad 3	d3act3g11	d3act3g21
	d3act3g12	d3act3g22
	d3act3g13	d3act3g23
	d3act3g14	d3act3g24
	d3act3g15	
Actividad 4	d3act4g1	d3act4g2

Cuadro 19
Código de escaneado asignado a los formatos recolectados en la sesión 4

	Código				
Actividad 5	t1A11	t1A21	t1A31	t1A41	t1A51
	t1A12	t1A22	t1A32	t1A42	t1A52
		t1A23		t1A43	
		t1A24		t1A44	
		t1A25			
		t1A26			
		t1A27			
		t1A28			
Actividades 6, 7, 8, y 9	d4actgU1				
	d4actgU2				
	d4actgU3				
	d4actgU4				
	d4actgU5				
	d4actgU6				
Actividades 10, y 11	d4actgU7				
	d4actgU8				

Cuadro 20
Código de escaneado asignado a los formatos recolectados en la sesión 5

	Código		
Actividad 12	t2A11	t2A21	
	t2a12	t2A22	
	t2A13	t2A23	
		t2A24	
Descripción del texto	t3A11	t3A21	
	t3A12	t3A22	
	t3A13		
Actividades 13, 14, 15	d5actgU1	d5actgU6	d5actgU11
	d5actgU2	d5actgU7	d5actgU12
	d5actgU3	d5actgU8	d5actgU13
	d5actgU4	d5actgU9	d5actgU14

	d5actgU5	d5actgU10	d5actgU15

Cuadro 21
Código de escaneado asignado a los formatos recolectados en la sesión 6

	CÓDIGO		
Actividad 16	t4A11	t4A21	
	t4A12	t4A22	
	t4A13	t4A23	
		t4A24	
		t4A25	
		t4A26	
Cuestionario 4	c4A11	c4A21	
	c4A12	c4A22	
	c4A13	c4A23	
	c4A14		
	c4A15		
Actividades 17, 18, 19, 20, y 21	d6actgU1	d6actgU6	d6actgU11
	d6actgU2	d6actgU7	d6actgU12
	d6actgU3	d6actgU8	d6actgU13
	d6actgU4	d6actgU9	d6actgU14
	d6actgU5	d6actgU10	d6actgU15

Luego del escaneo de los artefactos, se procede a transcribir las repuestas ofrecidas por los estudiantes a los diversos instrumentos aplicados, en la medida de lo posible se han intentando reproducir los distintos dibujos, tablas u otro bosquejo realizados, sin embargo, en algunos casos ha sido imposible porque son muy complejos, pero como esta información ya fue escaneada, en caso de requerirse para visualizar algún ejemplo durante el proceso de análisis se insertaran figuras provenientes de la digitalización ya realizada.

Para facilitar la lectura de las respuestas dadas por los participantes a cada uno de los instrumentos se organizó un documento independiente, con su índice propio, titulado:

Corpus del Estudio: "El Álgebra Escolar: Una mirada desde los Profesores de Matemática en Formación Inicial"

CAPÍTULO V

ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

En este capitulo expondremos el análisis de la información empleando como técnica el análisis de contenido, comenzaremos, escrutando los aportes de los primeros cuatro (04) cuestionarios, luego, se presentaran el análisis de algunas actividades realizadas por los profesores de matemática en formación inicial, para este particular escogimos las cuatro (04) actividades, donde los profesores de matemática se enfrentaron con total libertad, sin una lista de interrogantes, a la búsqueda de la generalidad en el reconocimiento de patrones. Asimismo, escogimos las últimas cinco actividades, para realizar una comparación entre las expresiones orales obtenidas de las transcripciones de la grabación de los diálogos y las expresiones escritas escaneadas de los artefactos recolectados de los cálculos y deducciones realizados por los profesores de matemática en formación inicial cuando se enfrentan a distintas actividades referidas al reconocimiento de patrones.

ANÁLISIS INICIAL DE LOS CUESTIONARIOS

En este apartado se incluye un análisis primario de los cuatro los instrumentos aplicados para caracterizar las condiciones asociadas a los procesos relacionados con el pensamiento algebraico de los profesores de matemática en formación inicial que participaron en este estudio

Se realizó un sondeo para indagar el significado que los profesores en formación le atribuyen a ciertas palabras relacionadas con este estudio, para lo cual los participantes debían definir las palabras, ejemplificar su uso escribiendo una oración, nombrar sinónimos, comenzaremos estableciendo la definición de cada palabra para compararla con el señalado por los estudiantes.

Partiendo de que El pequeño Larousse Ilustrado (2007) define serie "como un conjunto de cosas relacionadas entre sí y que se suceden unas a otras…Suma infinita cuyos términos son los de una sucesión (u_n) de términos reales o complejos" (po.925), posteriormente hace referencia a lo que la "Formación de una serie cuya suma representa esta función en un intervalo dado" (p.925) se entiende en matemática como el desarrollo de una función en serie. Por su parte el Larousse diccionario esencial de Matemáticas (2009) define serie como:

> Sucesión de la forma s_1, s_2, s_3,…s_n en la que cada término es la suma parcial de otra sucesión. El término general de una serie se expresa como $Sn=a_1+a_2+…a_n$; así pues el primer término de una serie es $S_1=a_1$, el segundo $S_2=a_1+a_2$, el tercero $S_3=a_1+a_2+a_3$, etc.(p.340)

La serie la podemos entender como la suma de una sucesión ordenada de términos, y resumiendo las explicaciones de serie que ofrecen los profesores de matemática en formación inicial tenemos: "*secuencia, orden, cosas seguidas, continuidad, tiene que ver algo que se repite, un conjunto de elementos que tienen una secuencia predeterminada*", estos puntos de vistas, que todos son acertados se relacionan más con la definición coloquial, ósea que la lógica social ha impactado más que la formación matemática que han recibido hasta el momento, sin embargo, en el comentario "*tiene que ver algo que se repite*" puede estar inmerso el hecho de que los términos anteriores se repiten en el siguiente, ya que $S_1=a_1$, $S_2=(a_1)+a_2$, $S_3=(a_1+a_2)+a_3$, en este caso vemos que el sumando a1 se repite en cada uno de los términos, más aún, $S_1=a_1$, $S_2=S_1+a_2$, $S_3=S_2+a_3$, en este caso, el que se repite es el término anterior como uno de los sumandos. Ahora, si comparamos "*un conjunto de elementos que tienen una secuencia predeterminada*" con la suma de una sucesión ordenada de términos, la secuencia predeterminada y la sucesión ordenada de términos pueden estar estrechamente relacionados, y podemos conectar un conjunto de elementos con una sucesión de la forma s_1, s_2, s_3,…s_n, es decir, es decir, se pueden encontrar rasgos matemáticos en las dos últimas oraciones ofrecidas para describir la palabra serie.

Si bien, el léxico secuencia no tiene una aserción propiamente matemática, esta relacionada con el tema que estamos trabajando, por lo cual es importante saber que El pequeño Larousse Ilustrado (2007) define secuencia como una “Serie ordenada de cosas que guardan entre sí cierta relación…Sucesión ininterrumpida de imágenes o escenas que forman un conjunto y que refieren a una misma parte o aspecto del argumento” (p.914), mientras que los profesores de matemática en formación inicial se refieren a secuencia como “*Orden requerido para obtener meta u objetivo, Sucesión ordenada, Organización, Orden, Algo que se alinea uno detrás del otro*”

En cuanto a razonamiento, El pequeño Larousse Ilustrado (2007) lo explica como la acción de razonar y como un encadenamiento de conceptos para demostrar algo, y en cuanto a razonar expresa que es “Pensar, ordenando ideas en la mente, para llegar a deducir una consecuencia o conclusión” (p.858). A este mismo respecto, Rojo (1976) expresa que: “Llamamos razonamiento a un par ordenado ($\{p_i\}$;q)siendo $\{p_i\}$ un conjunto finito de proposiciones, llamadas premisas, y q una proposición, llamada conclusión, respecto de la cual se afirma que deriva de las premisas”, y en el razonamiento deductivo, que es el concerniente a la matemática, las certeza de las se obtiene de la verdad de la conclusión. Mientras que, los profesores de matemática en formación inicial al referirse a razonamiento escriben: “*Análisis reducidos de casos requeridos (Problemas matemáticos); Formas de pensar, aplicar o usar la razón; Proceso lógico para llegar a una conclusión, Uso del conocimiento; Pensar, hacer cosas lógicas*”, en los enunciados de “*Formas de pensar, aplicar o usar la razón; Uso del conocimiento; Pensar*” se observa el predominio de la visión coloquial de la palabra, sin embargo, en el “*Análisis reducidos de casos requeridos (Problemas matemáticos), hacer cosas lógicas*, Proceso lógico para llegar a una conclusión” podemos inferir un acercamiento a la definición matemática, en el fondo razonamiento lo relacionan con la lógica, las proposiciones y la forma de reducirla.

En cuanto a progresión, El pequeño Larousse Ilustrado (2007), la define como:

> Acción de progresar. **2**. MAT. Sucesión de números entre los cuales hay una ley de formación constante.◇ **Progresión aritmética** MAT. Progresión de números en que cada término se obtiene sumando al anterior un número fijo, llamado *razón o diferencia*. **Progresión geométrica** MAT. Progresión de números en que cada término se obtiene multiplicando el anterior por un número fijo llamado *razón*. (p.831)

Los profesores de matemática en formación inicial al referirse a progresión escriben "*Sucesión; Secuencia ascendente, que aumenta; Proceso lógico para llegar a una conclusión, Sucesión con reglas establecidas; Tiene que ver con el progreso, ir hacia adelante*", en el enunciado "*Tiene que ver con el progreso, ir hacia adelante*" se ve la acción de progresar, y uso coloquial de la palabra, el proceso lógico para llegar a una conclusión se relaciona más con razonamiento que con progresión, por lo que se puede considerar una concepción errada, "*secuencia ascendente que aumenta*" se puede considerar una concepción limitada porque en realidad una progresión también puede disminuir, y los que se refieren a progresión como "*sucesión o sucesión con reglas establecidas*", están mostrando una perspectiva matemática, es importante mencionar que una sucesión es un conjunto ordenados de números de acuerdo a una ley.

En cuanto a Seriación los profesores de matemática en formación inicial lo relacionan con "*Clasificación, secuencia, Colocar en serie un conjunto de elementos, Manera ordenada de colocar elementos, Hacer una serie*"

Al referirse a generalización El pequeño Larousse Ilustrado (2007) lo refiere a la acción de generalizar, y generalizar la define como "Abstraer lo que es común y esencial a muchas cosas para formar un concepto que las comprenda a todas" (p.482). En cuanto a los profesores de matemática en formación inicial lo relacionan con "*Globalización de temas o argumentos utilizados, Capacidad para enunciarlas características o particularidades que cumplen ciertos objetos, Mostrar la idea* *general en torno a una particular, Universalidad; Generalizar, tratar de establecer una igualdad de medida*"

En cuanto al Principio de Inducción en El pequeño Larousse Ilustrado (2007) explican que se refiere a "Principio según el cual si una propiedad de los números naturales se verifica para el cero, y si verificándose para un número natural n también se verifica para su siguiente n', entonces todo número natural posee dicha propiedad" (p.558), los profesores de matemática en formación inicial al referirse a Inductivo escriben "*Particularización, comenzar desde adentro; De lo micro a lo macro. De las partes al todo, Proceso de llevar de lo particular a lo general, Especifico a lo general, Ir de lo particular a lo general*"

Al referirse a deductivo El pequeño Larousse Ilustrado (2007) explica que se deriva por deducción lógica, y la deducción lógica es el "razonamiento que, partiendo de hipótesis, conduce a la verdad de una proposición usando reglas de inferencia" (p.319), mientras que los profesores de matemática en formación inicial se refieren a deductivo como "*Generalización, ir de lo macro a lo micro, Desde lo más grande a lo más pequeño. De lo general a lo concreto, Proceso de llevar de lo general a lo particular, General a lo específico, Sacar una conclusión a partir de un argumento*"

El pequeño Larousse Ilustrado (2007) define recurrencia como la "Propiedad de una secuencia en la que cualquier término se puede calcular conociendo los precedentes" (p.685), mientras que los profesores de matemática en formación inicial se refieren recurrencia como a algo "*Que ocurre con cierto grado de repitencia, Aparición de un mismo elemento constantemente, Varias veces seguidas, Volver a cometer un delito*", sin embargo podemos constatar que todas las perspectivas presentadas son erróneas pues la relacionan con repetir y con delinquir.

La repetición El pequeño Larousse Ilustrado (2007) lo referencia como la acción de repetir, y repetir lo definen como "Volver a hacer o decir lo que se había hecho o dicho…Suceder varias veces una misma cosa" (p.879). Los profesores de matemática explican repetición como "*Volver a realizar un mismo caso/ Hacer las cosas de la misma manera, Que vuelve a ocurrir; Nuevo, regularidad; Mismos patrones, mismas características; Volver a hacer o decir lo mismo*", los cuales son aserciones que se ajustan en menor o mayor grado a lo establecido por el diccionario.

El pequeño Larousse Ilustrado (2007) refiere Regularidad como una cualidad de regular y define regular como "Sometido a una regla. **2**. Que presenta similitud o continuidad en su conjunto, desarrollo, distribución o duración" (p.871), por su parte, los participantes del taller relacionan regularidad con "*Reincidir con peculiaridad; Que cumple un patrón, un convenio; Igualdad, aparición de un mismo elemento en variadas ocasiones; Frecuente; Regular, bonito, polígonos*"

Un patrón es una sucesión de signos que se construyen siguiendo una regla, de repetición o recurrencia, se pueden considerar como un caso especial de regularidades, y El pequeño Larousse Ilustrado (2007) define a patrón como "Ejemplo o modelo que se compara con algo o que se utiliza para referirse a otra cosa de la misma especie…Plantilla taladrada que sirve para pintar letras, números o adornos" (p.776). Los profesores de matemática en formación inicial se refieren a patrón como la "*Forma a seguir o establecido para plantear o realizar un trabajo; Forma en la que se repite. Molde, plantilla o guía; Relación establecida en torno a una secuencia predeterminada; Conducta; Es un molde*", en estas aserciones resalta la perspectiva matemática en la oración "*Relación establecida en torno a una secuencia predeterminada*", mientras que en las otras aserciones se evidencia el carácter coloquial en las afirmaciones: "*Forma a seguir o establecido para plantear o realizar un trabajo; Forma en la que se repite. Molde, plantilla o guía; Conducta; Es un molde*"

La razón según El pequeño Larousse Ilustrado (2007) es la:

> Facultad de pensar…Argumento que tiende a justificar o a probar una cosa… MAT. Cociente entre dos cantidades…Razón de una progresión Diferencia constante entre cada dos términos consecutivos de una progresión aritmética o cociente constante entre cada dos términos consecutivos de una progresión geométrica (p.859)

La razón es un "*Argumento valido o certero para dar fuerza; Capacidad de discernir, coherencia; División, parte de un argumento; Conocimiento; Lo que siempre tiene Zapata, algo verdadero, correcto*" de acuerdo a lo escrito por los profesores de matemática en formación inicial, todas y cada una de estas aserciones ofrecidas se relacionan con facultad de pensar o con el razonamiento de un argumento motivo por el cual en la perspectiva que manifiestan los participantes del taller no se refleja la matemática resaltando que el significado de la palabra razón proviene de la cotidianidad.

Cuadro 22
Aserción dadas por los profesores de matemática en formación inicial a ciertas palabras

	Concepciones provenientes de cotidianidad	**Concepciones que reflejan perspectiva matemática**
Serie	*secuencia, orden, cosas seguidas, continuidad*	*tiene que ver algo que se repite, un conjunto de elementos que tienen una secuencia predeterminada*
Razonamiento	*Formas de pensar, aplicar o usar la razón; Uso del conocimiento; Pensar*	*Análisis reducidos de casos requeridos (Problemas matemáticos), hacer cosas lógicas, Proceso lógico para llegar a una conclusión*
Progresión	*Tiene que ver con el progreso, ir hacia adelante*	
Patrón	*Forma a seguir o establecido para plantear o realizar un trabajo; Forma en la que se repite. Molde, plantilla o guía; Conducta; Es un molde*	*Relación establecida en torno a una secuencia predeterminada*
Razón	*Argumento valido o certero para dar fuerza; Capacidad de discernir, coherencia; División, parte de un argumento; Conocimiento; Lo que siempre tiene Zapata, algo verdadero, correcto*	

En la pregunta 2 se presenta una sucesión de cinco números que comienza en el 8 y que se obtienen al multiplicar el número anterior por dos, y los dos últimos números son desconocidos, la interrogante es justamente, calcular el último número de la sucesión denotado con la letra B: Enunciado de la pregunta: A partir del número 8, cada número que sigue se forma multiplicando el número anterior por 4 y dividiéndolo por 2 ¿Qué número debe ir en la casilla B? 8, 16, 32, **A**, **B**

Nótese que al multiplicar por 4 y dividir por 2, obtenemos el mismo resultado que al multiplicar por 2 solamente, este problema fue resuelto sin mayor complicación por los profesores de matemática, algunos observaron la simplificación antes mencionada, y en general calcularon los términos de la secuencia empleando el término A para hallar el valor de B, ninguno intentó deducir directamente el valor de B aunque los cálculos eran muy sencillos.

En la pregunta 3, cuatro de los participantes llegaron sin dificultad a la solución, pero llama la atención que uno de los participantes, dio dos respuestas diferentes y las dos fueron erróneas, en la primera escribe como orden: Morales, Castillo y Palacios, se percata del error y lo tacha (no lo borra, podemos apreciar la respuesta) dibuja una flecha para señalar la nueva respuesta y escribe Morales Castillo Morales, otra respuesta errónea que ahora no considera al señor Palacios. El argumento presentado es sencillo, consideramos que la confusión provino de que el primero que se menciona es el último que esta en la fila: En un banco se encuentran tres clientes realizando una cola para ser atendidos en la taquilla, el señor Morales está ubicado después del señor Castillo (claramente se observa que Castillo está delante que Morales), y el señor Castillo está después del señor Palacios (Palacios está delante de Castillo). Indica el orden en la cola de los clientes,

Si empleamos **x** para denotar la edad de José, **y** para denotar la edad de Pedro, **z** para denotar la edad de Juan, tenemos que: La edad de José es el triple de la de Pedro ($x=3y$), la de Juan el doble de la de José ($z=2x$). Si las tres edades suman 130 años (x+y+z=130) ¿Qué edad tiene cada uno de ellos? Al realizar los cálculos pertinentes encontramos que José tiene 39, Pedro 13, y Juan 78. Pero a pesar, de la sencillez del razonamiento y de los cálculos involucrados no hubo respuesta correcta, pues la edad de José no la logro acertar ninguno de los profesores de matemática en formación inicial, ya que de los cuatro que resolvieron esta pregunta escribieron: Edad de José: 36, 20, 36, 22, los dos que escribieron 36 acertaron la edad de Pedro y de Juan , entonces ese error se puede relacionar con la multiplicación de 13x3, y con la omisión de la comprobación, ya que al sumar las tres edades (13+36+78=127) se hubiesen percatado de la equivocación. La segunda respuesta errada, llama poderosamente la atención que cumple con dos de los tres datos dados: la edad de José es el triple de la de Pedro (x=3y), y ofertan como solución: Edad de Pedro 60, Edad de José 20, (60 es el triple de 20, 60=3.20), Edad de Juan 40, la de Juan el doble de la de José (z=2x), (40 es el doble de 20, 40=2.20), sin embargo, el tercer dato de que las tres edades suman 130 no es cumplida en esta solución, o bien, porque no terminaron de leer el enunciado, no le dieron importancia, al momento de cumplir dos de las cuestaciones se asume que también se cumplirá la tercera, pero al no realizar la comprobación no se percata de lo incorrecto de la respuesta dada. La otra respuesta parece dada al azar porque no cumple ninguna de las condiciones: Edad de Pedro 65, Edad de José 22, Edad de Juan 33, sin embargo, la suma de las tres edades es 120 (65+22+33=120), puede ser que se enfocará en la suma de las tres edades, pero igual de forma errada consideró a 120 en lugar de 130.

En cuanto a la secuencia de las piezas de domino, y de las agujas del reloj no se presentaron mayor dificultad, sin embargo, en la carta que presentaba tres elementos (letra, dibujo y número) simultáneamente, uno de los participantes obvio el número (sólo consideró la letra y la figura adecuadamente), la forma de la figura la consideraron correctamente todos los participantes, sin embargo, la figura estaba pintada (rellena) y esto sólo lo aprecio una persona. En cuanto a la pareja del dibujo todos los participantes apreciaron como diferencias: el brote de la flor, el insecto, la hoja chica, el rizo del caracol, y el asterisco de la hierba, pero hubo dos participantes que no lograron apreciar que los dibujos se diferenciaban en una raya.

En cuanto a las secuencias numéricas planteadas, los cuatro participantes que la realizaron lo hicieron de forma correcta. En relación a la secuencia gráfica de tres figuras geométricas que sufre un cambio y este cambio debe ser trasladado a la secuencia de balones, cuatro participantes realizaron la permuta sin problema de forma gráfica, pero el otro participante traslado los dibujos a una secuencia de palabras, sin embargo, escribe Balón Balón Pelota, pero no hace referencia cuál es la figura que considera Balón y cuál es la figura que considera Pelota. En cuanto al problema de la lancha que involucra establecer la proporcionalidad entre la distancia recorrida al cabo dos horas, sabiendo que avanza 4 kilómetros cada 30 minutos, los participantes respondieron de forma correcta.

La pregunta 10 correspondiente a dibujar el quinto término dada una secuencia grafica que comienza con una circunferencia, se obtiene la segunda figura agregando tres círculos a la anterior, se obtiene la tercera figura agregando tres circunferencias a la anterior, y la cuarta figura se obtiene al agregar tres círculos a la figura 3, entonces para obtener la figura solicitada (el quinto diseño) se debe agregar tres circunferencias a la anterior. Sin embargo, no existe uniformidad en las respuestas ofrecidas: un participante añade sólo una circunferencia; otro participante escribe 10+3=13 evidenciando que le da mayor relevancia al aspecto numérico, sin importar que la interrogante alude al diseño, es decir a la figura de la secuencia, si bien el quinto diseño lleva 13 círculo como lo plantea el estudiante ¿cuántos están pintados o rellenos y cuántos no?, no podemos evidenciar si está añadiendo círculos o circunferencias, otro participante da 13 como respuesta, otro participante escribe 8N +6B 14, asumimos que 8N se refiere a las circunferencia y 6B a los círculos, y consideramos dos explicaciones plausibles, uno se equivocó al contar mentalmente, porque no realizo dibujo alguno, y en vez de siete contó ocho, o dos, anexó cuatro circunferencia al cuarto diseño para obtener la respuesta dada, es importante resaltar la única respuesta completa que se puede considerar correcta, ya que el participante señalo con una flecha cada uno de los diseños: 1,2,3,4,5 y escribe que se le añaden 3 negras al 4 diseño

El patrón grafico conformado por figuras de gato y perro no presentó mayor dificultad al buscar su correspondiente en letras, dadas diferentes opciones. Sin embargo, cuando se da el patrón gráfico empleando tobos y deben trasladarlo a letras, tres de los participantes lo hacen correctamente, pero los otros dos se equivocan en el último dibujo, uno repitió la penúltima letra como si los últimos dos dibujos fueran iguales, y a su vez igual al tercero, el otro en cambio asigno una nueva letra al último dibujo como si fuera diferente a todos los anteriores.

En cuanto a elegir una figura entre cuatro opciones para sustituirla por el signo de interrogación en una secuencia dada, un participante consideró en repetir el dibujo anterior y el otro en relacionar los dos intermedios, aunque se debía trasladar lo que sucedía en los dos primeros a los dos últimos.

En cuanto al Cuestionario No.2, dirigido a indagar las actitudes afectivas y emocionales hacia el Álgebra, podemos considerar que los profesores en formación inicial, caracterizan el álgebra resaltando los siguientes procesos: generalización, y demostración, mientras que resalta como objetos de estudio: las estructuras abstractas, estructura y características de los objetos matemáticos, los razonamientos, estructuras algebraicas y espacios vectoriales. En cuanto a la importancia que le dan a su estudio resaltan la comprensión de la razón, el pensar, la capacidad para resolver problemas, la exploración de las ideas, el movimiento sinérgico del cerebro, en conclusión la importancia del estudio del álgebra otorgada por los profesores de matemática en formación inicial lo relacionan con procesos propios del pensamiento. Asimismo, manifiestan entender álgebra cuando la practican con anterioridad o con frecuencia, son capaces de realizar las demostraciones, resaltándose ellos mismos como garantes de su aprendizaje, es decir, implícitamente, en estos comentarios muestran que ellos se consideran responsables de su aprendizaje de álgebra y que su éxito esta relacionado con su ahínco y tesón al estudiar. Sin embargo, existen otros comentarios que aluden directamente al profesor: "*los profesores colocan varios* *ejemplos y me muestran como aplicarlos, la explican paso a paso, despacio y sin apuros*", aquí se evidencia la responsabilidad que le atañen al docente como garante de los aprendizajes algebraicos.

También resulta importante resaltar la inexistencia de referencia al uso del lenguaje, la notación, ni a los tópicos vistos en los distintos cursos de álgebra, es decir, no emplearon, ni relacionaron las característica, y la importancia con los cursos de Introducción al Álgebra, Introducción al Álgebra Lineal, y Estructuras Algebraicas que deben tenerla aprobadas para estar cursando Álgebra Lineal. A continuación se muestra un cuadro comparativo de los respuestas dadas por los participantes a las interrogantes relacionadas con la caracterización, la importancia y las condiciones en las que logran entender álgebra:

Cuadro 23
Caracterización del álgebra, la importancia del estudio y en qué condiciones logran entenderla los profesores de matemática en formación inicial

El álgebra…	**Estudiar álgebra es importante…**	**Entiendo álgebra cuando…**
combina los elementos con las estructuras abstractas	*debo comprender la razón de todo*	*repaso con anterioridad el contenido*
estudia las estructuras y características de los objetos matemáticos. Se encarga de generalizar las propiedades que cumplen	*ayuda a pensar en generalizaciones y a pesar de un pensamiento centrado en lo particular a lo abstracto. Propicia la comprensión de lo que "sostiene" las matemáticas que conocemos, lo que la sustenta*	*puedo realizar demostraciones y deducir cosas por mí misma. Cuando uso apropiadamente definiciones y teoremas, y sé que lo hago con propiedad y seguridad*
generalidad las nociones particulares. Expresa en forma general lo particular. Resume ideas	*supongo que mejora nuestra capacidad para resolver problemas. Nos permite ver las generalidades de los conceptos y estudiar indiferentemente de los objetos o la situación*	*los profesores colocan varios ejemplos y me muestran como aplicarlos. Hacerme razonar en torno al planteamiento*
demuestra a través de razonamientos como se generan los enunciados matemáticos dando explicaciones lógicas de dichos razonamientos	*pone a mover sinérgicamente mi cerebro, explorando ideas nuevas, realzando la creatividad y justificando enunciados y proposiciones del diario vivir*	*ejercito con mucha frecuencia los problemas planteados buscando su solución*
se relaciona con la generalización, las estructuras algebraicas, los espacios vectoriales, y sobre todo las demostraciones	*te pone a pensar, a repensar, a dudar*	*la explican paso a paso, despacio, sin apuros*

A pesar que al caracterizar el álgebra ninguno de los participantes hizo mención al lenguaje, este parece ser la estrella cuando se les pregunta qué es lo más difícil que encuentran al estudiar álgebra: un participante, alude el lenguaje como lo más difícil al estudiar álgebra, y justamente lo que más le gusta es la argumentación empleando el lenguaje abstracto, y lo que no le gusta es el no poder comprender con rapidez lo abstracto, a este participante le gusta lo difícil.

Un segundo participante alude a la notación y la simbología que emplean los libros (esto se puede entender como el lenguaje algebraico con el que están escritos) y cómo abordar las demostraciones como lo más difícil que encuentra, siendo la redacción de los razonamientos justificados y ordenados de las demostraciones lo que no le gusta del álgebra, pero considera apasionante comprender el uso de símbolos y notaciones algebraicas, además de encontrar la explicación de tantas convenciones que aparecen a lo largo de la matemática.

Otro participante también hace referencia al lenguaje, sólo que éste relaciona lo difícil específicamente con la notación y la incomprensión de los enunciados, que se traduce en no entender el lenguaje algebraico, lo que más le gusta es el estudio abstracto de los objetos, y lo que no le atrae es lo pesado, aburrido, largo, fastidioso, minucioso de algunos procedimientos, a este participante también le gusta lo que considera difícil.

Otro de los participantes alude a la sustentación que se logra evidentemente con la demostración en álgebra como lo que más le gusta, y lo más difícil que consigue es de índole personal pues se relaciona con el poco tiempo que tiene para dedicarle al estudio; el otro participante alude a los temas de sistema de ecuaciones y matrices como lo que más le gusta del álgebra, y lo que menos le gusta lo relaciona con lo pesado que resultan algunas demostraciones, siendo justamente la demostración, lo más difícil al estudiar álgebra aunado a que se realizan los problemas a ciegas porque los libros no presentan la solución como en los problemas de los libros de cálculo.

Cuadro 24
Lo que le gusta, no le gusta y lo más difícil que encuentran al estudiar álgebra los profesores de matemática en formación inicial

Le gusta del álgebra	No le gusta del álgebra	Lo difícil al estudiar álgebra
sus argumentos en lenguaje abstracto	*el no poder entender lo abstracto rápidamente*	*dominar el lenguaje matemático empleado*
usar símbolos y notaciones no tan familiares y comprender lo que hago. Saber de donde vienen muchas cosas que "asuminos"	*tener que justificar todo y redactar coherentemente lo que intento probar*	*las diferentes notaciones y simbologías de algunos libros. Saber por donde abordar algunas demostraciones*
como plantea otra visión del mundo. Que se estudian los objetos indiferentemente de lo que sean, en especifico su componente abstracto,	*lo tedioso de algunos procedimientos*	*la notación (recordarla), no puedo resolver un ejercicio porque no comprendo lo que el enunciado quiere decir, no se traducir el enunciado*
la manera en la que se llega a un conocimiento sustentado		*el tiempo para hacer ejercicios y problema*
los sistemas de ecuaciones, las matrices	*lo tedioso de las demostraciones*	*demostrar, nunca se si lo que se me ocurre hacer es correcto o no, no encuentras la solución, como en los libros de cálculo*

En relación a las repuestas ofrecidas por los profesores de matemática en formación inicial sobre la asignatura del área de álgebra que les pareció más fácil, la que más les gusto y los contenidos en los que se sienten más exitosos, podemos inferir que no hay una dependencia entre ellos, pues sólo uno de los participantes mantuvo sus respuestas enfocadas hacia una sola asignatura: la asignatura que más le gusto y le parece más sencilla es Sistema Numérico y el tema donde es más exitoso es el conjunto de los números naturales (perteneciente a dicha asignatura), otro, relacionó el tema donde es más exitoso, en este caso matrices, con la asignatura Introducción al Álgebra Lineal como la que más fácil le parece, otro relacionó la asignatura que le parece más sencilla Estructuras Algebraicas con el tema donde se siente más exitoso: grupos.

Cuadro 25
Comparación entre la asignatura más fácil con la prefería del área de Álgebra de los profesores de matemática en formación inicial con el tema en el que se consideran más exitosos

Asignatura más fácil	Asignatura preferida	Tema que comprendo
Sistema	Sistema Numérico	El conjunto de N (sistema)
Introducción al Álgebra	Estructuras algebraicas	Grupos
Estructuras Algebraicas	Introducción al Álgebra lineal	Ninguno en particular
Introducción al Álgebra lineal	Introducción al Álgebra	Ecuaciones, matrices
Sistema numérico	Estructuras	Dibujando diagramas de Venn

En cuanto a la asignatura que les parece tiene un grado mayor de dificultad, la que no les gusto y el contenido que más les costo aprender, tampoco, podemos establecer una relación entre ellas, pues un solo participante se mantuvo enfocado en la asignatura Álgebra Lineal como la más difícil, la que menos le gusta y la que tiene el contenido más dificultoso para él, en este caso los polinomios, otro relacionó la asignatura más difícil con el contenido, en este caso, Estructuras algebraicas y teoría de grupos, pero no especifico cual asignatura no le gusto.

Cuadro 26
Comparación entre la asignatura más difícil con la que no les gusto del área de Álgebra a los profesores de matemática en formación inicial, y el tema en el que se le costo aprender

Asignatura más difícil	Asignatura que no le gustó	Tema que le costo aprender
Álgebra 1	Álgebra lineal	Espacio vectorial
Introducción al Álgebra lineal	Ninguna	No recuerdo
Introducción al Álgebra lineal	Sistemas numéricos	Ley de composición interna, transformaciones
Estructuras algebraicas		Teoría de grupo
Álgebra lineal	Álgebra lineal	Los polinomios de Álgebra lineal

En virtud de la importancia que algunos participantes acuñan al profesor que enseña álgebra para propiciar el entendimiento de los tópicos de esta asignatura, a continuación se resume en un cuadro las características que le adosan a dicho docente:

Cuadro 27
Caracterización de los Profesores que imparten las asignaturas de Álgebra realizada por los profesores de matemática en formación inicial

Los profesores enseñan álgebra	**Un profesor debería**	**Un profesor puede hacer por mí**
de superficial no se profundiza	*comprender que algunos estudiantes somos más lentos al comprender lo abstracto*	*exigirme cada día más tanto como da*
escasa y deficientemente, los profesores de matemática evitan enseñar álgebra	*estar pendiente si sus estudiantes comprenden las definiciones … aplicar teoremas a tal nivel que puedan abordar demostraciones*	*inducirme a pensar más allá de lo que dice el enunciado. Trabajar las demostraciones con naturalidad*
de modo mecánico, se centran en la resolución de ejercicio	*hacer pensar a los estudiantes acerca de lo que quiere decir el ejercicio. Colocar ejemplos de aplicación sobre algunas definiciones o procedimientos*	*explicarme alguna de las aplicaciones de los conceptos que se abordan en una signatura. Mostrar si es posible representar los conceptos, en casos particulares si es posible*
como forma para generar inquietudes sobre los contenidos matemáticos y a su vez dar las explicaciones necesarias de por qué son así	*compartir conocimiento, haciendo lo abstracto, tangible, que se conozca y comprenda*	*develar los contenidos matemáticos abstractos*
de forma compleja, escriben mucho en la pizarra, mandan ejercicios interminables e incomprensibles	*ser paciente con los estudiantes, recordar siempre que fue estudiante, ayudar a los estudiantes en las evaluaciones*	*hacer preguntas entendibles en los exámenes*

En cuanto a cómo se sienten en las clases de álgebra, lo profesores de matemática en formación inicial escriben: "*explorando un mundo dimensional nuevo, a veces expresado lengua extraña; algunas veces desubicada, y en otras ocasiones me siento "ilumninada", como si puedo ver todo con claridad. Cuando eso ocurre, se despierta en mí esa pasión por la matemática que muchas veces olvido, y me motiva a seguir; normal, generalmente muy animado cuando el profesor explica contenido que desconozco. Mal cuando el profesor explica un contenido 1 que depende conocimiento de un contenido 2 y no recuerdo con exactitud el contendido 2; muy agradable, cómodo, y enriquezco mis conocimientos con el fin de llevarlos a mis estudiantes y ponerlos en práctica en mi día a día; asustado, estresado, preocupado, raspado, el profesor parecía que hablaba en chino y los estudiantes español*". A continuación se detallan, los distintos sentimientos y positivos manifestados por los docentes de matemática en formación inicial:

Cuadro 28
Los sentimientos positivos versus los sentimientos negativos que afloran cuando estudian álgebra manifestado por los profesores de matemática en formación inicial

Sentimientos positivos afloran cuando…	Sentimientos negativos afloran cuando…
argumento determinados temas y el profe u otros compañeros me felicitan; comprenden mi cara de que no entendí y me vuelven a explicar (hasta lograrlo)	*no enlazo los contenidos, lo cual es esencial; soy irresponsable y no estudio; no logro el objetivo (comprender-entender)*
pasa el tiempo y puedo explicar un tema que vi hace tiempo sin necesidad de repasar. Cuando obtengo buena nota pero sé que es que comprendo el contenido; sé que internaliza los contenidos y el/la profesor/a se esforzó para eso	*no logro comprender un contenido, no me apropio de las definiciones y propiedades y no puedo demostrar nada; no estudio ni repaso nada y presento una evaluación, en un nuevo contenido desconocido no comprendo la primera clase; de una guía de ejercicios son más os que no logro hacer que los que hago, cuando no puedo explicar o ayudar a otros con un contenido que se supone domino*
mi esfuerzo a valido la pena. Si estudio y logro comprender; el reconocimiento por realizar algún problema o comprender alguna definición	*no puedo solucionar algún ejercicio planteado por el docente siento impotencia; no poder abordar un problema que se abordo con anterioridad; estoy estudiando en compañía y no puedo aportar ideas en torno a la resolución de un problema*
doy con enunciados y soluciones; con el colectivo logro llegar a consenso a problemas planteados	*no doy con las soluciones, y en ocasiones cuando tengo las soluciones y no las digo;*
logro aprobar; el profesor me ayuda en los exámenes	*no se ni que dicen los ejercicios; el profesor me descubre copiándome; me toca repetir la materia a pesar de estudiar*

En cuanto a su experiencia en el aprendizaje del álgebra en la UPEL, los participantes manifestaron: "*se me ha incentivado a esforzarme más para el aprendizaje, la preparación de fomentar bases fuertes para cumplir con el perfil docente que se requiere, por necesaria formación profesional; En los primeros semestres es un choque adaptarse a las notaciones y simbologías; así como al lenguaje utilizado para redactar demostraciones. Es de gran ayuda la preparaduría en álgebra para afrontar demostraciones y entender tanta formalidad. Que los profesores del área que me han dado clase, tienen un compromiso con "enamorar" y ganarse para el álgebra a los estudiantes; la revisión de los libros de texto de bachillerato para que determináramos cuando que estructuras algebraicas se encontraban en dichos textos, antes de ello no se me hubiera ocurrido que en bachillerato se estudiaran nociones básicas de teoría de grupos, mas aun en algún* *momento llegue a pensar que el estudio del algebra solo se realizaba en la universidad, el profesor asigno exposiciones donde teníamos que relacionar los contenido espacios vectoriales con su respectiva representación grafica en R2 y R3, me parece muy interesante tener que analizar ejercicios mas allá de lo planteado de forma escrita; Las bondades que el álgebra nos da como seres pensantes y creativos. En la formación docente es indispensable por ser el álgebra capaz de mover neuronas y lograr chispas de sabiduría en los futuros docentes; Recuerdo aquellos pizarrones grandotes llenos de muchas letras, el profesor habla, habla, y habla; mientras los estudiantes observan, contemplan eso, "perdidos", ese silencio de cuando conocí una demostración en álgebra.*”

Respecto a la experiencia de aprender álgebra en el liceo, los profesores de matemática en formación inicial, manifestaron: “*NUNCA realicé una demostración en el liceo; la incorporación de algunos temas algebraicos para facilitar algunos contenidos programáticos del bachillerato, a saber, polinomios, ecuaciones de primer grado, matrices y sus operaciones; Recuerdo que la asignatura de matemática me gustaba mucho, por eso decidí estudiar en el pedagógico Matemática, no recuerdo ninguna demostración, eran muchos cálculos, sobre todo eran números, cuentas. Ciertamente, en 5to año vimos matrices, en 2do año los polinomios, que no son ni parecidos a la locura que el profesor de Álgebra lineal tiene en su libro, un bendito indeterminado que aún no se de que rayos esta hablando.*”

En cuanto al tercer instrumento aplicado, la Prueba EVAPAL, se cotejaran las repuestas dadas por los profesores de matemática en formación inicial con las institucionales encontradas en González (2016), en la primera pregunta se solicita qué representan las letras en cada una de las siguientes expresiones.

De acuerdo a Larousse diccionario esencial Matemáticas (2009) la ecuación es una “Igualdad entre dos expresiones matemáticas formadas por datos conocidos e incógnitas (datos desconocidos)” (p.115), de aquí se desprende que las incógnitas son los datos desconocidos de una ecuación; mientras que define variable como la “Cantidad simbolizada por una letra (generalmente x,y,z) que puede tomar diferentes valores”(p.378)

1.1) En la expresión *3+a+a+a+10*, de acuerdo a la respuesta institucional de González (2016): “La letra es cualquier número y no es de interés un valor particular” (p.237), sin embargo, para los participantes representa: “*una letra; un número; representa una variable, un número desconocido; una incógnita*”, la única aserción errónea es la de incógnita porque no estamos en presencia de una ecuación, lo otro que podemos argumentar es lo genérico de las respuestas ya que no consideraron detalle alguno.

1.2) En la expresión *3+a+a+a=10*, de acuerdo a la respuesta institucional de González (2016): “La letra no es cualquier número, es único y sí importa conocer su valor, *a* es 7/3” (p.237), y para los participantes representa: “*una incógnita; representa una variable, un número desconocido; variables*”, en este caso estamos en presencia de una ecuación donde lo único desconocido es ***a*** (la incógnita), la aserción de variable es errónea porque por definición una variable puede tomar diferentes valores, sin embargo, en este caso el único valor que puede tomar *a* es 7/3 para mantener la igualdad numérica.

1.3) En la expresión *3+a+a+a=b*, de acuerdo a la respuesta institucional de González (2016): “La letra *a* es un sumando cualquiera y la letra *b* es una suma que depende de los valores que tome *b*; más que conocer valores particulares de estas letras lo que importa es reconocer que esta expresión recoge una relación entre ellas” (p.237), y para los participantes representa: “*una incógnita; representa una variable, un número desconocido; variables*”, justamente estamos en presencia de variables, si realizamos ciertas operaciones matemáticas indicadas tenemos que: *3.(1+a)=b*, entonces sí a=1, b=6, si a=0, b=3, etc, así podemos seguir calculando valores para la variables a y b, una de ellas es una variable independiente, y la otra es una variable dependiente porque va a depender del valor que asuma la independiente.

En la segunda pregunta: ¿A qué es igual $a+b+c$, si se sabe que $a+b=9$?, la respuesta institucional de González (2016) expresa: "Aquí lo importante es sustituir la expresión a+b por su valor 9 quedando entonces $a+b+c=9+c$ ó simplemente $a+b+c$ es $9+c$" (p.237). Esta pregunta no presenta mayor controversia porque todos los participantes llegaron a la respuesta institucional 9+c, tres de los estudiantes presentan la respuesta directamente, otro escribe una implicación lógica ($a+b=9 \wedge a+b+c \Rightarrow a+b+c=9+c$), donde el antecedente esta conformado por los datos dados unidos mediante una conjunción, mientras el otro participante realiza un despeje de b ($b=9-a$), sin embargo, parece no haber usado esta información para nada, pues posteriormete, imaginamos que a la expresión algebraica $a+b=9$ le sumo c a ambos lados de la igualdad, obteniendo $(a+b)+c=9+c$.

En la tercera pregunta: ¿Qué significa la expresión *1500L+2000S*?, sabiendo que se compraron *L* lápices a Bs.*1500* cada uno y S sacapuntas a Bs.*2000* cada uno, en la respuesta institucional de González (2016) expresa: "La expresión *1500L* representa el total invertido en lápices y *2000S* es el total invertido en sacapuntas, por lo que *1500L+2000S* representa el total de bolívares invertidos en la compra" (p.237). En cuanto a las repuestas escritas por los participantes es importante resaltar que dos dieron con la respuesta correcta, uno escribió: "*Representa el total invertido en lápices y sacapuntas en Bs.*", el otro en cambio "*se invirtió 225000bs en lápices y 4000000 bs en sacapuntas*" de la respuesta dada por este participante es importante resaltar el uso incorrecto del signo igual empleado en el lenguaje natural. Las siguientes dos respuestas se pueden catalogar de inconclusas: un participante planteó la operación "*1500x1500+2000x2000"* como respuesta sin dar mayores explicaciones, y el otro escribió "*1500L* $\Rightarrow$ *significa 1500 lápices, 2000S* $\Rightarrow$ *significa 2000 sacapuntas"*, de esta respuesta es rescatable el mal uso del símbolo de la implicación lógica para denotar el significado de una expresión numérica. Finalmente, podemos decir, que sólo un alumno dio una respuesta errónea al decir que significaban "*Cantidad de lápices y sacapuntas comprados"*.

Para la cuarta pregunta: ¿Para cuáles valores de a y b es cierta la igualdad $(a+b)^2=a^2+b^2$?, González (2016) ofrece como respuesta institucional: “La igualdad es cierta sólo cuando $2ab=0$, es decir, cuando $ab=0$, y esto ocurre cuando al menos una de las letras es cero” (p.237). Esta pregunta fue contestada por cuatro estudiantes, tres de los cuales dan como certeza que ambos deben ser simultáneamente cero, $a=b=0$, si bien es una solución, sólo es una, no es la solución general, el otro participante respondió con otra solución particular: $a=1$ y $b=0$, ninguno de los participantes realizó el desarrollo del producto notable dado: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, no se percataron que para que el segundo sumando fuera cero basta con que uno de los valores de *a ó b* sea cero.

Para la quinta pregunta ¿Cuál es el valor de $z+x$?, sabiendo que los números *61, 59,56, 52, z, y, x*, se generaron siguiendo un cierto patrón de regularidad, González explica que “En primer lugar se debe determinar el patrón de regularidad para conocer los valores de las letras; hecho esto se sabe que $z=47$, $y=41$ y $x=34$, con lo cual $z+x=81$”(p.237). En cuanto a las respuestas dadas por los participantes, dos escribieron la respuesta correcta $z+x=81$, otro dos escribieron inconcluso la respuesta al indicar solamente los valores de z y x, sin realizar la suma, y el otro participante escribió una repuesta errónea: $49+43=9$, producto de que no logró identificar el patrón establecido en la secuencia numérica dada.

En cuanto a la sexta interrogante ¿A qué es igual 8Δ2?, si se sabe que aΔb=a+(b.a), la respuesta institucional ofrecida por González (2016) es: “Aplicando la definición a los valores de a=8 y b=2 se consigue que 82=8+(2.8)=24”(p.237). Esta interrogante fue respondida acertadamente por cuatro estudiante, pero hubo uno que escribió no se!, sin embargo, realiza el despeje matemático del símbolo empleado para identificar la operación, es decir, su solución se centró en buscar el valor de ∇, demostrando que no entendió el enunciado, ni que se trataba simplemente de operar los números 8 y 2, empleando la operación (no usual) definida como ∇.

En relación a la séptima pregunta ¿En cuánto tiempo se llenará el resto de una botella?, sabiendo que ¾ de ella se ha llenado en 2 minutos, González (2016) explica que:

> En este problema la expresión “el resto de la botella” hace referencia a un cuarto de ella; así lo que está planteado es una relación entre los tres valores para hallar un cuarto valor (regla de tres simple). Esta relación puede ser modelada a través de la expresión $\frac{3/4}{2} = \frac{1/4}{t}$ donde la letra t representa el tiempo. Al despejar se consigue que $t = \frac{2}{3}$, como el tiempo se está midiendo en minutos cada tercio de él son 20 segundos, por lo tanto la respuesta es 40 segundos. (p.237)

De los cinco participantes, sólo dos llegaron a la respuesta correcta al dividir 120 entre 3, mientras que otros dos llegan a 2,6, planteando la regla de tres considerando en cuánto tiempo se llena la botella completa, pues escribe las relaciones (x→1) y (2--2/3) y obviando que están trabajando con tiempo y se deben respetar las equivalencias respectivas (1 minutos corresponde a 60 segundos), el otro participante llega a 2/3 de minutos como respuesta.

La pregunta 8 ¿Cuál es el valor de X?, si 7.7.7.7.8=7.7.x.7. no presenta mayor dificultad para cuatro de los participantes que ofrecieron como respuesta x=56 ó x=7.8, en concordancia con la respuesta institucional de González (2016): “Se espera que se reconozca que los números pueden ser colocados en cualquier orden en la multiplicación y que es lícita la aplicación de la ley de cancelación en la igualdad para obtener 56=x”(p.237), sin embargo, uno de los estudiantes ofreció como respuesta errónea 7, sin escribir mayor cálculo.

En cuanto a la novena pregunta ¿Cuál es el grado del siguiente polinomio $(x^2+1)^4(x^3+1)^3$?, la respuesta institucional convenida en González (2016) explica que:

> Se debe reconocer que este polinomio es el producto de dos polinomios, siendo así basta con conocer los grados de cada uno de los factores por separado para luego sumarlos. El primer factor es una potencia cuarta de un

> polinomio de grado 2 por lo que su grado es 8; el segundo factor es una potencia cúbica de un polinomio de grado 3 por lo que su grado es 9. Con todo esto el grado buscado es 17. (p.237)

En cuanto a las variadas respuesta dada por los participantes, hay que acotar que sólo uno escribió la respuesta correcta Grado 17, sin dar mayores explicaciones, otro, considero que por descuido escribió Grado 7 en lugar de 17, ya que realizo separó de forma correcta las potencias dadas como el producto de dos potencias: $(x^2+1)^2.(x^2+1)^2(x^3+x)^2.(x^3+1)$, luego cálculo bien el grado de cada uno de los factores: x^4, x^4, x^6, x^3 pero luego se equivoca al escribir el resultado final. Otro estudiante escribió 4, imaginamos que sólo considera el mayor grado que aparece en el enunciado, sin importar las operaciones indicadas, otro participante da como respuesta Grado 9, especulamos que comparo el grado de los factores y consideró la potencia mayor como la respuesta. La otra respuestas escrita es Grado 432, donde el participante aplica de forma errónea las propiedades de potenciación: en lugar de multiplicar los exponentes para calcular la potencia de una potencia, eleva un exponente a la cantidad que dice el otro exponente: $(x^2)^4=x^{16}$, y en lugar de sumar las potencias para calcular el producto de dos potencias de igual base multiplican los dos exponentes: $x^{16}.x^{17}= x^{432}$.

Para la pregunta 10, ¿Cuál es el valor de X en 5mx+2=0?, siendo m≠0, González (2016) plantea que "Se debe reconocer que la letra X es la incógnita mientras m es cualquier valor (parámetro) no nulo del cual no interesa conocer un valor particular. Al despejar se consigue que $x = \frac{-2}{5m}$ " (p.237). Esta pregunta no presentó mayor dificultad, un participante respondió cualquier número, no se sabe si por flojera o porque realmente estaba convencido de ello, los otros cuatro llegaron a coincidir con la respuesta institucional, pero además ofreció una respuesta particular, cuando m=1, x=-2/5.

En cuanto a la segunda parte, la pregunta 1 se refiere definir ecuación y dar un ejemplo, González (2016) plantea como repuesta institucional que: “Una ecuación es una igualdad establecida en la que interviene al menos un término no determinado llamado incógnita y que sólo es satisfecha para un único valor de esa incógnita” (p.238). En cuanto a los ejemplos presentados todos son correctos: $x+1=2$; $2x+5=0$; $y=x^2$; $x+1=0$; $x=-5$; $3x+2=6$, sin embargo, al definir ecuación se necesita la presencia de dos palabras claves: igualdad e incógnita, las cuales no están presentes en la definición dada por uno de los participantes: “*Oración matemática que contiene constantes y una o más variables*” la expresión empleada oración matemática es muy ambigua, y hasta carente de un significado establecido, podemos especular que la usa como sinónimo proposición. Las otras se ajustan mejor a describir una ecuación aunque también presentan cierto grado de ambigüedad: “*Una ecuación es una igualdad que satisface una incógnita, Es una función que describe un valor matemático, Una ecuación es una igualdad donde están involucrados términos, Es una equivalencia entre dos miembros donde se desconoce un término en uno de ellos al que se denomina incógnita*”

En la pregunta 2 se solicita corregir la igualdad y explica la decisión: $7+4=9$, en cuanto a la respuesta institucional, sólo se menciona la existencia de una variedad de opciones, colocando como ejemplo $7+4=9+2$, en este particular, un participante decidió eliminar el signo de igualdad para corregir la igualdad, y escribió: $7+4 \neq 9$, otro en cambio calculo la suma planteada en el primer miembro y el resultado (en este caso 11) lo sustituyo en el segundo miembro: $7+4=11$, es decir, sustituyo el 9 dado por 11 para corregir la igualdad, y su explicación fue “*por la operación de adición”*, empleo incorrectamente el signo de la implicación lógica ($7+4=9 \Rightarrow 7+4=11$) porque el consecuente no se desprende del antecedente falso planteado, otro estudiante decidió sustituir una de los sumandos para corregir la igualdad, sustituyo el 7 por 4, y así: $5+4=9$, ofreció como explicación que “La suma de las partes es igual al todo; en este caso no cumple”, los otros dos estudiantes sustituyeron el sumando 4 por 2, y así: $7+2=9$

La tercera pregunta se refiere a definir vector y matriz, dos conceptos trabajados en Introducción al Álgebra Lineal, asignatura que todos los participantes presentes tienen aprobada, es decir, han tenido ardua experiencia en el uso de estos dos elementos, González (2016) define vector como "Cualquier elemento de un espacio vectorial"(p.238), al precisar las repuestas de los profesores de matemática en formación inicial: "*Segmento orientado con módulo, dirección y sentido, es un segmento orientado, Es un resultado cuya magnitud se conoce, Es un magnitud con dirección y sentido, Es un segmento de recta orientado con módulo, dirección y sentido*" observamos que están directamente influenciadas sólo por la física de bachillerato, es decir, el paso por el estudio de espacios vectoriales se hace intangible en estas definiciones.

En cuanto a la definición de matriz, González (2016) propone como respuesta institucional "Cualquier arreglo rectangular de números reales en filas y columnas" (p.238), mientras que las definiciones de los participantes no se alejan mucho de la institucional: "*Vector compuesto por filas y columnas, es un arreglo rectangular, Disposición de variables alfanuméricos en forma cuadrado o rectangular, Un conjunto de vectores posicionados en orden, No me acuerdo*"

En la cuarto pregunta se dan tres enunciados matemáticos en lenguaje natural y se les solicita escribirlo simbólicamente en lenguaje simbólico las siguientes expresiones: (4.1) El cuadrado de un número, aumentado en uno, no supera el doble del mismo número, disminuido en tres, González (2016) lo expresa como "$x^2+1\leq 2x-3$"(p.238), curiosamente de los cuatro estudiantes que lograron establecer simbólicamente x^2+1 *y* $2x-3$, sólo uno llegó a establecer la relación correcta, ya que dos propusieron una desigualdad estricta, y el otro construyo una igualdad. El otro participante propuso la siguiente igualdad: $a^2+2a^2=4a^2-3a^2$, a la cual no se le encuentra relación alguna con la expresión original. La siguiente expresión, (4.2) alude al setenta por ciento de un número, al respecto González (2016) explica que:

“Considerando X como un número cualquiera, el 70% de X viene dado por $\frac{70}{100}x$, lo que es equivalente a 0,7x.” (p.238) esta pregunta no presento mayor dificultad, salvo para un participante que escribió sesenta en lugar de setenta, poniendo en evidencia la dificultad que debe tener para diferencias el sesenta del setenta. La otra expresión (4.3) Todos los números reales entre menos uno y uno, es formulada por González (2016): “$\{x\in R|-1<x<1\}=(-1,1)$” (p.238), a esta pregunta sólo tenemos una repuesta incorrecta, de un participante que sólo consideró los números enteros: (-3-2-1 0 1 2 3 $\Rightarrow$ -1, 0, 1).

En cuanto a la pregunta 5: Expresa con tus propias palabras la siguiente propiedad: $|-x|=|x|$, González (2016) alude: “Una forma es: El valor absoluto del opuesto de un número es igual al valor absoluto del número, Otra forma es: Un número y su opuesto tienen el igual valor absoluto”(p.238), en este apartado no se presento mayor problema como se aprecian en las diferentes respuestas obtenidas:
“El valor absoluto de un número es igual al valor absoluto de su opuesto, El valor absoluto de un número negativo es igual al valor absoluto del mismo número pero positivo, Valor absoluto, El valor absoluto del opuesto de un número es igual al valor absoluto del mismo, El valor absoluto de un número es igual al valor absoluto del opuesto aditivo del mismo número”

En la pregunta 6, multiplica por 6 la expresión n+7, todos los participantes lo hicieron correctamente.

En la pregunta 7, Considera S como el conjunto de los enteros positivos menores o iguales a veinte, y el conjunto $A=\{x\in S|x \text{ es primo}\}$. Exhibe un elemento de A y un elemento que no esté en A. Justifica tu elección, González (2016) ofrece como respuesta institucional:

> Se debe comprender que S y A son conjuntos finitos, además que $S=\{1,2,3,4,\ldots,20\}$ y $A=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$. De tal forma que, por ejemplo 7 está en A pues es primo y menor que 20. Un elemento fuera de A es 37 el cual es primo pero no menor que 20 (p.238)

En cuanto a las tres respuestas dadas por los participantes, sólo una es correcta: plantea a 2 como el elemento de A y a 1 como un elemento que no esta en A: *$2 \in A \wedge 1 \notin A$. 1 es entero y no es primo*, otra de las respuesta no hace mención en ningún momento al conjunto A, sin embargo considera a los números primos y compuestos: $2 \rightarrow$ por primo, $4 \rightarrow$compuesto$\notin$S, y la otra respuesta escribe al conjunto A como un conjunto unitario cuyo único elemento es el 1, escribe: *A={1} y A {2}*, en esta respuesta podemos inferir que el participante no recordó cómo expresar la relación de pertenencia, sin embargo, nombro un elemento de A, en este caso el 2, y un elemento que no está en A, en este caso el 1, pero no logró concretar la respuesta acertada, surge otra duda, será que el participante consideró el 1 como un número primo y como un elemento de A, sin lograr precisar bien la notación para escribir esta idea, y consideró al 2 como un número no primo y tampoco consiguió una forma de expresar esta relación.

En relación a la pregunta 8: Escribe un trinomio cuadrado no perfecto y explica brevemente, González (2016) explica que "x2+x+1 es un trinomio cuadrado no perfecto pues 1^2-4(1)(1)<0, también (x+1)(x-8) = x^2-7x-8 es un trinomio cuadrado no perfecto pues $(-7)^2$-4(1)(-0)$\neq$0"(p.238), un participante no contesto, otro escribió: "*No lo conozco [subrayo trinomio cuadrado no perfecto en el enunciado]*", otro relaciona el trinomio cuadrado perfecto con una expresión cúbica, y el cuadrado no perfecto con los números irracionales, escribió: *"$(a+b)^3$ es un trinomio cuadrado perfecto. Para que no sea el valor de $a = \sqrt{2}$*". Los otros dos participantes dieron ejemplos correctos al enunciado dado, escribieron: "*x^2+2x+2, no surge de una expresión de la forma $(x \pm a)^2$; y $2x^2$+5x-4. No es cuadrado perfecto porque tiene dos raíces*". Esta pregunta resulta interesante porque si se le pregunta a cualquier persona que hubiese estudiado los productos notables en 2do año de bachillerato, dar un ejemplo de un trinomio cuadrado perfecto, con seguridad, escribirían hasta la fórmula general, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, entonces este enunciado puede hasta catalogarse de cultura matemática general, sin embargo, de los cinco profesores de matemática en formación inicial encuestados, sólo dos pudieron entender que se trataba de dar un contraejemplo de un trinomio cuadrado perfecto.

En la pregunta 9 se solicita escribir los tres primeros términos de la sucesión definida por 4n-3, $n \in N$, y González (2016) indica que: "Aplicando el concepto de sucesión a 1, 2 y 3 se consiguen los números 4(1)-3=1, 4(2)-3=5 y 4(3)-3=9" (p.238). Dos participantes llegaron a la respuesta correcta, otro sólo llego a la sustitución de los tres primeros términos en la secuencia dada, le falto realizar los cálculos planteados para poder identificar los tres primeros términos de la sucesión, otro participante no contesto la pregunta, y el otro llegó a la siguiente solución: "x_1=-3, x_2=1, x_3=5" evidentemente los números naturales considerados fueron: 0,1 y 2.

En la última pregunta utilizar la notación de llaves, y a través de una propiedad, describir el (10.1) conjunto vacío y (10.2) un conjunto con infinitos elementos, González (2016) plantea como respuesta: "10.1) $\{x \in R | x \neq x\}$. 10.2) $\{x \in R | x < 1\}$" (p.238). En cuanto a la descripción del conjunto vacío, todos los estudiantes emplearon la notación de llaves, pero sólo lo definió empleando una propiedad: "$\phi=\{x/x\neq x\}$", otros dos lo definieron por extensión: "$\{\}$", y otros dos lo definieron erróneamente por extensión como un conjunto unitario: "$\{0\}$ y $A=\{\phi\}$".

En el cuestionario 3, respecto a la listar a priori los contenidos algebraicos que recuerdas que se imparten en cada año del Sistema Educativo venezolano en el nivel de media general y subraye los contenidos programáticos de la asignatura Matemática en los distintos años de Educación Media general, que usted considera que corresponden al área de Álgebra no encontramos como agrupar la información, pues son muy disparejas las respuestas, unas muy largas, otras muy cortas, parece que no entendieron la finalidad de estas dos actividades, motivo por el cual no se ofrece un análisis de las mismas

En tercera pregunta, se procura evidenciar el criterio empleado para determinar los contenidos algebraico, al respecto los profesores de matemática en formación inicial escribieron: "*Las relaciones que hay entre los números, sus operaciones y propiedades. La transición que hay de lo particular a lo general. La relación que existe de la aplicación del contenido del objetivo con la vida cotidiana; Realicé comparación con los libros de álgebra y programas utilizados en la universidad; Todos porque sus definiciones, propiedades emplean un lenguaje algebraico; Contenidos relacionados a los conjuntos numéricos y sus propiedades*". En cuanto a las criterios señalados podemos mencionar, lo más lógico "*comparación con los libros de álgebra y programas utilizados en la universidad*", contrastar los contenidos de bachillerato con los universitarios estudiados en los distintos cursos de álgebra; otra forma de identificarlo es por el lenguaje algebraico, pero curiosamente, el participante que empleo este criterio señalo que todos, evidenciando que considera que las matemáticas se escriben en el lenguaje algebraico; el método deductivo, es lo que expone el participante en la expresión "*La transición que hay de lo particular a lo general"* , mientras los participantes que aluden a los números, sus operaciones y propiedades reiteran el criterio de comparar los contenidos con lo estudiado específicamente en el curso de Sistemas Numéricos.

En cuarta pregunta, defina, explique con sus propias palabras qué es Álgebra, los participantes respondieron: "*En aritmética trabajamos con números y cuatro operaciones: suma, resta, multiplicación y división. Aprendemos a entender y a manejar expresiones como 3-2, 5/4,2x5, etc. En álgebra se hace lo mismo, pero es preferible escribir a-b, x/y,m.n,etc. Sin especificación precisamente qué números están representando por las letras. Esta determinación de dejar sin especificaciones (de no saber quienes son a, b, m, n, x, y) ofrece ventajas enormes; Es la parte de la matemática donde se relacionan números y letras donde se hacen generalizaciones de los conceptos matemáticos; Álgebra, disciplina que se encarga del lenguaje abstracto a través de simbologías para la demostración de teoremas, axiomas; Parte de la matemática que se apoya en la lógica para probar propiedades relacionadas a* *operaciones numéricas, a través de un sistema axiomático*”. En el comentario que en el álgebra se hace lo mismo que en la aritmética, y que las letras se emplean para no especificar números se observa una tendencia a definir el álgebra como aritmética generalizada, en el comentario se hacen generalizaciones de los conceptos matemáticos, se resalta el uso del proceso de generalización en el álgebra, otro aspecto que resalta es el uso del lenguaje abstracto y la simbología empleados en la demostración, entonces aquí se distingue un lenguaje propio, el algebraico, y los métodos de demostración como características intrínsecas del álgebra, que se apoyan en la lógica proposicional, todo esto ocurre en el contexto de un sistema axiomático.

En la pregunta.5, construya con sus propias palabras una definición de lo que entiende por Álgebra Escolar, los profesores de matemática en formación inicial explicaron: “En el álgebra escolar es donde los estudiantes empiezan a formar sus propios conceptos de la relación que existe entre los números y tener conciencia del resultados entre ellos para poder deducir su concepto particular y a medida que tomen dicha conciencia podrán generalizarlo con variables (x, y, a, b,…) y así poder tomar decisiones; Estudio de números y letras y generalización de conceptos; Lenguaje abstracto para que los alumnos comprendan en un lenguaje artificial las definiciones, teoremas, axiomas, postulados; Se refiere a la aplicación de propiedades en elementos relacionados a través de una operación”

En la sexta pregunta ¿Por qué es importante la presencia del álgebra en el currículo de educación media general?, los participantes escribieron: “*Es importante porque el estudiante en la transición de este nivel debe de tener una conciencia del traslado de una parte aritmética a una algebraica y viceversa. Si eso no es así el currículo habría que tomar ciertas condiciones para mejorarlo. Además hay que tener claro que en nuestra vida cotidiana siempre esta involucrada el álgebra tanto en casos particulares como generales; Es importante porque permite la abstracción del campo real a lo imaginario y contribuye con los contenidos posteriores a nivel universitario, como plataforma en otras áreas, Promueve el razonamiento abstracto y la* *transferencia de un lenguaje natural y artificial, Permite comprender la relación entre elementos, conjuntos y operaciones*", entre los aspectos más resaltantes podemos mencionar: porque ocurre la transición de la aritmética al álgebra donde se promueve la abstracción y el uso del lenguaje algebraico.

En la pregunta 7, ¿El álgebra escolar contribuye en el desarrollo cognitivo del estudiante? Explique, los profesores de matemática en formación inicial, los profesores de matemática en formación inicial contestaron: "*Claro, que el álgebra siempre va a contribuir con nuestro desarrollo cognitivo, desde que empezamos a tener conciencia del valor numérico y conceptual de ciertas cosas. La cual nos va a ayudar a diferenciar lo bueno de lo malo, valor mayor, valor menos, ganancias, perdidas. Hasta que llegamos a nivel que podremos generalizar las cosas y todo este proceso es una acumulación como ente de la sociedad; Si, por supuesto, ya que brinda una perspectiva más amplia del saber y ayuda al estudiante en la abstracción y generalización de conceptos; Si promueve el pensamiento abstracto; Si, ya que fomenta el desarrollo del pensamiento abstracto*", lo más relevante encontrado en las respuestas es que contribuye a fomentar la abstracción y la generalización de conceptos y el pensamiento abstracto en los estudiantes.

En la octava pregunta: En una situación hipotética, que se eliminar el contenido de polinomios del currículo escolar, ¿qué consecuencias traería? Argumente, la presencia o ausencia del contenido de polinomios del currículo de educación media, los profesores de matemática argumentaron: "*Si este contenido se llegara a eliminar del currículo escolar simplemente nuestros estudiantes no tendrían un aprendizaje tan fundamental de funciones para niveles venideros (nivel universitario) Esto va a acarrear el fracaso de muchos estudiantes cuando inicien sus estudios universitarios; El contenido de polinomios es importante en el currículo, su ausencia elimina parte fundamental para el estudio del cálculo, ya que es utilizado en ingeniería, estudios arquitectónicos, entre otros, esto sería como perder un plataforma; Que los alumnos no logren obtener la destreza cognitiva o razonamiento para operar con símbolos lógicos; Ese contenido tiene tantas aplicaciones, que eliminarlos supondría reducir*

<u>*la matemática únicamente a la aritmética*</u>”. Entre las repuestas llama poderosamente la atención que el interés se centra en que obstaculizaría el posterior estudio del cálculo, en las universidades o al aprendizaje especifico del tópico de funciones, en comentario de la reducción de la matemática a la aritmética, olvidan la estadística y la geometría y equiparan a sostener el álgebra en los brazos de los polinomios, el otro aspecto, es la reducción del razonamiento para operar con símbolos.

En la pregunta 9 y 10 se evidencia que los participantes no conocen alguna didáctica específica del álgebra. La pregunta 11, observa el video del enlace: https://youtu.be/xkbQDEXJy2k. A pesar de que está en otro idioma, realiza un análisis didáctico de las actividades matemáticas desarrolladas. La proyección de este video no se logro concretar porque, a pesar de que tomamos las previsiones del caso, se llevo la computadora, el video beem y el bam para acceder a internet, ese día no logramos conectarnos a internet, la computadora envía el mensaje, dispositivo no disponible, luego en la siguiente sesión no hubo suministro de energía eléctrica en el recinto universitario.

En la pregunta No.12: En una evaluación, se solicito ejemplificar la propiedad asociativa de la adición en Z, y un estudiante escribió: (28+30)+48=58+(18+30). Realiza un análisis de este ejemplo. Los profesores de matemática en formación inicial argumentaron: “*Este estudiante no tiene claro el concepto de propiedad asociativa que es lo que se le está pidiendo. Pero el proceso como tal no está malo, el estudiante fue un poco más allá, al lado derecho sumo los dos primeros términos y descompuso el segundo en dos términos que le diera lo mismo. Dentro de la parte conceptual de cualquier docente la tomaría como malo, pero si es un docente investigador o curioso puede conversar o hacerle una entrevista a dicho estudiante para ver que estaba pensando en ese momento o cual es su parte conceptual con respecto a esta propiedad (escribiéndole otros ejercicios y que hable de lo que piensa al resolver y se graba); El estudiante no aplico asociativa, realizó una descomposición de números; La asociativa implica que los sumandos deban ser los* *mismos y en la misma posición relativa a los otros sumandos. El estudiante pudo pasar por alto esta característica y enfocarse únicamente en el orden de las operaciones*".

Uno de los participantes, consideró que el estudiante no tiene claro el concepto de la propiedad asociativa, dio una explicación plausible de lo que hizo el estudiante: "*al lado derecho sumo los dos primeros términos y descompuso el segundo en dos términos que le diera lo mismo*", también consideró el plantearle otros ejercicios al estudiante y propiciar una entrevista para indagar el razonamiento del estudiante, mostrando preocupación por lo que estaba pensando el estudiante. Cuando un participante dice: "*realizó una descomposición de números"*, se debe referir al hecho de que el estudiante escribió 48=18+30, pero obvió el hecho que el estudiante también escribió (28+30)=58, y aquí está presente una asociación de números para posteriormente sumarlos. Otro participante, relato lo que entiende por propiedad asociativa: "*La asociativa implica que los sumandos deban ser los mismos y en la misma posición relativa a los otros sumandos*", hace mención al orden de las operaciones, pero sólo aparece una: la adición, si nos enfocamos en lo que plantea Rojo (1976) la propiedad asociativa es inherente a una ley de composición interna * en un conjunto $A\neq\phi$, y expresa que: "*: $A^2\rightarrow A$ es asociativa $\Leftrightarrow$ (a*b)*c=a*(b*c) cualesquiera que sean a, b y c en A."(p.144), de aquí se puede desprender el hecho de que tres números se pueden combinar o asociar de distintas maneras, de tal forma que las distintas asociaciones de los mismos números se obtengan un resultado idéntico, pero en ningún momento trato de dar una explicación de lo que estaba planteado por el estudiante, se puede pensar que este profesor al corregir una evaluación si el ejercicio no se ajusta a la definición o al método tratado en la clase no hay nada que discutir la resolución es incorrecta, es tajante apegado al uso estricto de las definiciones y propiedades.

En el Pequeño Larousse Ilustrado (2007) explican que la asociatividad es "Mat. Propiedad de una ley de composición T, según la cual pueden asociarse varios factores de un sistema ordenado y sustituirlos por el resultado de la operación parcial efectuada con ellos, sin modificar el resultado final" (p.112), entendemos que podemos agrupar los números de la manera que nos convenga, sustituir por resultados parciales, siempre y cuando no se altere el resultado final, cuando hablamos de operación binaria nos referimos a que podemos operar los números por pares según la definición de la operación, y justamente cuando tenemos más de dos y la operación cumple con la propiedad asociativa, podemos hacer uso de dicha propiedad, ir agrupando empleando paréntesis de dos en dos, ir sustituyendo por su resultado parcial y seguir operando hasta obtener el resultado final, y la elección de esa agrupación es totalmente libre y no altera el resultado final. :

Cuando escudriñamos el ejemplo de la propiedad asociativa escrito por el estudiante (28+30)+48=58+(18+30), están presente la agrupación de sumando por pares empleando paréntesis, no se altera el resultado final, y se presenta una sustitución parcial de la adición efectuada. ¿Será que el estudiante no tiene alguna noción de la propiedad asociativa?, y si el estudiante en lugar de lo escribió estaba intentando expresar: (28+30)+(18+30) = 58 + 48.

En la pregunta 13: Para ejemplificar la propiedad conmutativa de la multiplicación en N, un estudiante escribió: 43+12=34+21. Realiza un análisis de este ejemplo. Los profesores de matemática en formación inicial escribieron: "*El estudiante no tiene claro el concepto de la propiedad conmutativa. El cree que dicha propiedad se le aplica a los elementos de los términos. En este caso porque los elementos de los términos son dos ¿Qué pasaría si a uno de esos términos se le diera el valor de 3+25 ó 7+3?; No aplica propiedad conmutativa resuelve una operación para obtener el mismo resultado; Deformó la propiedad, relacionándola al orden de las cifras, quizás porque la palabra 'número' fue mal interpretada, por el estudiante. El profesor pudo decir en clases 'El orden de los números no altera la suma' en lugar del 'orden de los sumando no altera la suma'*"

Es importante mencionar que en el ejemplo dado por el estudiante no aparece indicado el signo de la multiplicación, el primer participante realiza un argumento válido qué haría el estudiante si se le solicitara un ejemplo que sólo pueda tener números de una cifra, se especula que el estudiante relaciona la propiedad conmutativa con la permuta de los dígitos de los números. El otro participante resalta el hecho de que se obtiene el mismo resulto, pero que no esta presenta la propiedad conmutativa. Mientras que el otro participante considera que el estudiante sí aplico la propiedad conmutativa que logro entender en la clase, lo cual se pudo deber a una interpretación errónea por parte del estudiante, o a una información trasgredida por el docente de la asignatura que pudo originar un obstáculo didáctico. Y si el estudiante obvió por algún motivo el signo de multiplicación, y para él, el enunciado escrito fue: 4.3+1.2 = 3.4+2.1

En la pregunta 14 se dan dos ejemplos de la resolución de la ecuación 3x+6=12 realizada por los estudiantes, y se solicita realizar un análisis de las soluciones planteadas por los estudiantes. Los profesores en formación inicial argumentaron: "*En la (S1) el estudiante no tiene claro el MCD, por lo que se observa que este estudiante que al tomar un número que divide al primer término que de exacto ese es uno, al segundo término otro número y de exacto la división ese es el número y así sucesivamente (error grave) y además no tiene conciencia la transposición de términos. En cambio el estudiante de la (S2) si tiene claro el MCD y su proceso de aplicación que no lo escribe es otra cosa (3/3x+6/3=12/3), lo hace directo además el concepto de transposición de términos lo tiene claro y la operación de diferencia entre dos números. Pero en ambas soluciones (S1) y (S2) no se observa la comprobación con el resultado que obtuvieron para verificar si está mala o buena; Se puede observar que los estudiantes no tiene un nivel de comprensión de las reglas básicas para dar solución a las ecuaciones por lo que los pasos realizados son incorrectos; En ambos casos se cometen errores al simplificar, dividiendo cada término entre un número que genere una división exacta, por lo que se aprecia el desconocimiento de lo que implica el signo de igualdad, ya que una misma operación debe repetirse en ambos miembros para no alterarla*".

$$\begin{array}{c} 3x+6=12 \\ x+6/2=12/6 \\ x+2=2 \\ x=2+2 \\ x=4 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} 3x+6=12 \\ x+2=6 \\ x=6-2 \\ x=4 \end{array}$$

El primer participante alude los errores al mal uso del máximo común divisor y de la trasposición de términos en el primer caso, mientras que en el segundo no percibe el hecho de 12/3=4, y que el alumno escribió 6, pudiendo deberse a un error al calcular la división o al hecho de que la división realizada fue 12/2=6 con lo que también hizo un mal uso del máximo común divisor, este participante resalta ala falta de comprobación por parte de los alumnos al resolver las ecuaciones. Otro participante, se enfoca en lo incorrecto de los pasos debido a que los estudiantes no tienen clara las reglas para dar solución a las ecuaciones, sin realizar mayor especificidad en dichas reglas, y el otro participante resalta la importancia de realizar paralelamente la misma operación a ambos lados de la igualdad para no alterarla, y evidencia el hecho de que los estudiantes realizan divisiones de los términos por separado sin tomar en cuenta que deben mantener la correspondencia planteada.

ANÁLISIS DE LOS PROTOCOLOS ESCRITOS

A continuación se presentara el análisis de los protocolos escritos de los profesores de matemática en formación por considerar que al realizarlos mostraron libremente la forma en que abordan los problemas referidos al reconocimiento de patrones, en contraposición con aquellas actividades donde se les entregaba una guía de preguntas que marcaban el camino a seguir en la solución.

Las actividades seleccionadas son: la Actividad No.1, realizada en el aula de clases por ser la primera actividad donde el profesor de matemática en formación inicial se enfrenta de manera libre a descubrir la fórmula de una secuencia presentada de forma gráfica, esta actividad fue resuelta por cinco participantes, las Actividades No.5, No.12 y No.16 que la realizaron en su hogar, en su tiempo y en las condiciones que considerasen óptimas, es importante señalar que la actividad no.5 la realizaron cinco (5) participantes y todas se consideraron para el análisis, sin embargo, la actividad No.12 la realizaron dos (2) personas y sólo una se consideró para el análisis, por considerar que en la otra la fórmula fue copiada. En cuanto a la actividad No.16 la realizaron dos (2) personas y los dos protocolos se analizaran.

Para el análisis de los protocolos de los profesores de matemática en formación inicial emplearemos la teoría de los registros semióticos Duval (1998, 1999, 2002, 2004, 2006, 2009) referenciada en el capítulo II. Sin embargo, cabe destacar que a pesar de que este autor plantea los registros numéricos y aritméticos como uno sólo y los considera Registros Numéricos (RN), en esta investigación se consideraran, como registros numéricos a los que provienen de una numeración, y a los Registros Aritméticos (RAr) aquellos donde se presenten cálculos, sustitución en fórmulas, etc. Otro registro que consideraremos, que no existe en la teoría original, es el Registro Emocional-Afectivo (REA) y si bien se puede considerar inmerso dentro de lo que Duval (1998, 1999, 2002, 2004, 2006, 2009) denomina Registro de la lengua natural (RLN), en esta investigación es importante resaltar las actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra, motivo por el cual introduciremos dicho registro.

Luego de identificar los registros realizados por los participantes, e incluso de establecer el recorrido de los registros nos percatamos que la actividad de describir el proceso empleado, no todos los participantes la realizó de manera explicita, motivo por el cual nos pareció relevante ir estableciendo dicho proceso a través de la huella o los pasos que si explicitaron los participantes, a esto lo denominamos el Rastreo del Silencio (RS), que es simplemente la especulación que realizamos como investigadores del proceso para calcular la fórmula general de un patrón a partir de lo explican los participantes, pero aunque a nuestro parecer esta inmerso en lo que escribieron o dijeron, aunque no lo hicieron explicito.

Finalmente, estableceremos las competencias matemáticas desplegadas por los profesores de matemática en formación inicial cuando se enfrentan a las actividades de reconocimiento de patrones.

Actividad No.1: Encuentra una fórmula general que te permita calcular cualquiera de los términos de la secuencia siguiente:

Describa el proceso empleado para encontrar dicha fórmula

Identificación de los Registros de la Actividad 1

A continuación se comenzará a identificar los registros empleados por los profesores de matemática en formación inicial (PMFI), se escribirá en letra cursiva la información de los participantes, empleando las transcripciones realizadas de los protocolos originales y en la escritura normal se podrá leer la exaltación del registro realizada por la investigadora. Comenzaremos con la solución de la Actividad No.1 del resolutor (PMFI) ①, cuya solución se puede encontrar escaneada con el código d3act1A1:

El participante encerró en un círculo el punto donde se interceptan la fila y la columna de cada figura, es decir el punto en común que articula el dibujo, esto se puede entender como un Registro Figural−Icónico (RFI) que se identifica en la siguiente figura 1, justamente, es ese círculo que dibuja en la bisagra de cada uno de los elementos de la secuencia dada lo que constituye el registro figural−icónico, inmediatamente, *arriba de cada dibujo coloco 3 sobre la figura 1, 5 arriba de la figura 2, y 7 arriba de la figura 3,* esos números que el participante obtiene del conteo de la cantidad de puntos que ofrece cada una de las figuras de la secuencia dada constituyen un Registro Numérico (RN)

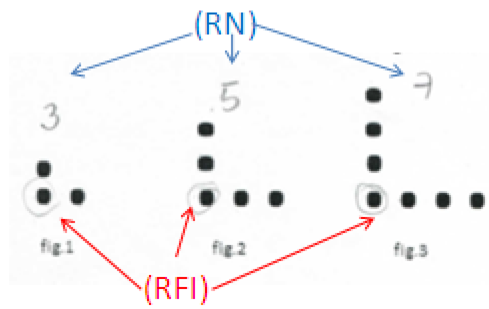


Figura 1
Identificación de los Registros Numéricos y los Registros Figural-Icónicos en la actividad No.1 del participante registrado como ①

Luego el participante escribe $\boxed{S_n=1+2n}$, esta fórmula constituye un Registro Algebraico (RA), y el recuadro empleado para encerrarla constituye un registro figural-icónico, lo próximo que se presenta es la sustitución del número 1 en la fórmula, lo que constituye un Registro Aritmético (RAr), luego sustituye (sin nombrarlos) los números 2 y 3 en la fórmula, que también constituye un registro aritmético, y que justamente coincide con la cantidad de puntos de cada figura dada en la secuencia, ya que la figura 1 tiene 3 puntos, la figura 2 tiene 5 puntos y la figura 3 tiene 7 puntos, la cantidad de puntos calculados de cada figura concuerdan con el registro numérico ofrecido por el participante:

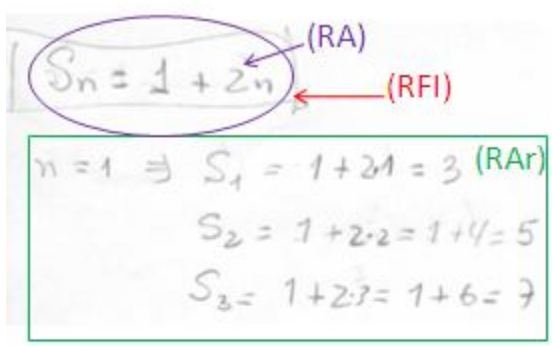


Figura 2
Identificación del Registro Algebraico, el Registro Figural-Icónico y los Registros Aritméticos en la actividad No.1 del profesor de matemática en formación inicial ①

Escribió, y borro: *se asigno un número*, esta lectura se al colocar la luz a través del papel, y, a pesar de que este participante no ofrece información alguna sobre el proceso empleado para encontrar la fórmula, se tratará de realizar una reconstrucción plausible del proceso a partir de los datos registrados y del esquema de los registros realizados obedeciendo a la distribución de los datos escritos en el papel, no se tiene garantía de que cosa fue lo primero que escribió el participante, lo que si se puede decir, es que esta ordenado, presenta tres borrones: el primero al escribir la fórmula, el segundo cuando realizó los cálculos aritméticos y el tercero cuando hizo un intento por describir el proceso, es el siguiente el recorrido que ofrecen los registros:

RN → RFI → RA+RFI → RAr

Es importante mencionar que este recorrido o cambio de registro es lo que Duval (1998, 1999, 2002, 2004, 2006, 2009) denomina conversión, emplearemos el signo + para resaltar que existen dos registros juntos, así que el esquema anterior ofrece las conversiones identificadas realizadas por el profesor de matemática en formación inicial denotado como ① al realizar la actividad 1, el cual comienza con un registro numérico continua con un registro figural–icónico para seguir con un registro algebraico unido a un registro figural-icónico y finalizar con un registro aritmético, cada registro permitió identificar diferentes procesos realizados por el participante, empleando lo que hemos denominado el Rastreo del Silencio:

El registro numérico es muestra del conteo de la cantidad de puntos en cada una de las figuras de la secuencia dada, realizada por el participante, se presume que es la primera actividad realizada. Inferimos que la primera actividad es el uso del dibujo de la secuencia dada para contar la cantidad de puntos de cada figura.

El registro figural-icónico constituido por la muesca realizada en el punto de intersección de las filas y las columnas hace presumir que, sin considerar dicho punto, el participante se percato que la cantidad de elementos alineados horizontalmente coincidían con la cantidad de elementos alineados verticalmente y que a su vez coincidían con el número de la figura, es decir, en la figura 1 se coloca un punto vertical, uno horizontal y el que los une, en la figura 2 se colocan dos puntos verticales, dos horizontales y el que los une, en la figura 3 se colocan tres puntos verticales, tres horizontales, y el que los une para presentar la figura de L simétrica, consideramos que la identificación de la simetría de la L dibujada y que la cantidad de puntos horizontales y verticales (sin contar el de la bisagra) coinciden con el número de la figura fue revelado por la demarcación del punto central de la L en cada dibujo. Inferimos que la segunda actividad esta relacionada con analizar lo común de las figuras de la secuencia dada

Justamente, con la caracterización de lo común en la figuras dadas se obtiene una potencial fórmula, para realizar el siguiente registro el algebraico+figural icónico, el participante tomó la decisión de identificar la figura con la letra n y denotar la cantidad de puntos de cada figura como S_n, esta selección (la cual no está explicita) constituye un registro algebraico previo al escrito, porque además trasciende en una relación entre el número de la figura y la cantidad de puntos. Inferimos que la tercera actividad fue identificar la fórmula y decidir la denotación a emplear.

El registro algebraico+figural icónico, siguiente muestra la consolidación de la fórmula buscada, para lo cual el participante escribió la igualdad S_n=1+2n, (en cuanto al lenguaje, es importante destacar que no emplea punto para indicar la multiplicación, escribe 2n), especulamos que cuando el participante realizó comprobaciones, puede ser mentales, de lo acertado de la fórmula y decide encerrarla en un recuadro para enfatizar que la fórmula encontrada funciona, entonces el registro figural-icónico es posterior al algebraico (aunque aparecen juntos) e indica que la fórmula fue corroborada de alguna manera. En este momento, es importante mencionar, que no tenemos registro escrito de otra formula, sin embargo, existen borrones en la hoja que permite especular que el participante realizo varios intentos antes de hallar la fórmula correcta. Inferimos que la cuarta actividad es la de expresar la fórmula en un recuadro, muestra de que fue comprobada.

Es importante resaltar que se mencionaron la selección no explicitada de dos registros algebraicos previos al enunciado de la fórmula, lo cual constituye un tratamiento en la teoría de Duval, que son transformaciones efectuadas en un mismo registro

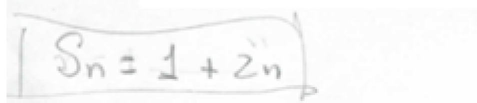
(RA_1) **n**: denotar el número de la figura

↓

(RA_2) $\mathbf{S_n}$: denotar la cantidad de puntos de la figura

↓

(RA_3) Enunciar la fórmula: $\mathbf{S_n=1+2n}$



(RFI) Encerrar la fórmula en un recuadro

Figura 3
Descomposición posible del registro algebraico+registro figural icónico presente en la actividad No.1 del profesor de matemática en formación inicial ①

El registro aritmético está constituido por el cálculo de los tres primeros de la secuencia empleando la fórmula encontrada, para lo cual el participante escribe una implicación lógica (a pesar de que el símbolo $\Rightarrow$ se encuentra un poco deforme) el antecedente lo constituye la expresión n=1, y el consecuente $S_1=1+2.1=3$, luego en la siguiente línea se ofrece unos cálculos enlazados con igualdades: $S_2=1+2.2=1+4=5$, y análogamente presenta escrito en la siguiente línea $S_3=1+2.3=1+6=7$, a pesar de que las dos últimas líneas no presenta una implicación, S_3 aparece debajo de S_2, que a su vez se escribe debajo de S_1. Es importante expresar la diferencia que se realiza entre la cantidad de puntos y el número de la figura, que aunque están relacionados, aparecen perfectamente diferenciados por el participante. Inferimos que la quinta actividad es la comprobación de la fórmula, sustituyendo los tres primeros números naturales y obteniendo los tres primeros números de la secuencia dada (implícitos en el dibujo)

También es posible que el participante haya encerrado la fórmula en un recuadro después de realizar este registro aritmético y que la comprobación no hubiese sido mental, sino que lo último que el participante escribe en la hoja es el recuadro de la fórmula como muestra de su comprobación, afirmando que es la correcta.

En el Registro aritmético de la actividad se observa la presencia del tratamiento que realiza el participante al escribir la secuencia de tres registros consecutivos: Como primer registro aritmético (RAr_1) tenemos una implicación lógica, donde antecedente lo constituye la igualdad n=1 y el consecuente es la proposición $S_1=1+2.1=3$, en este caso estamos en presencia de la propiedad transitiva de la igualdad para establecer que $S_1=3$, es decir, se parte del registro S_1 y se llega al número 3, en el intermedio tenemos la aplicación de la definición del producto en los números naturales, y posteriormente aplican la definición de la adición en el conjunto de los números naturales. El segundo registro aritmético (RA_2) comienza con S_2 y culmina con el número 5, que se obtiene a través de operaciones aritméticas realizadas explícitamente. El tercer registro aritmético (RAr_3) comienza con S_3 y termina con el número 7 obtenido de la sustitución del número 3 en la fórmula y de los cálculos que ello implica.

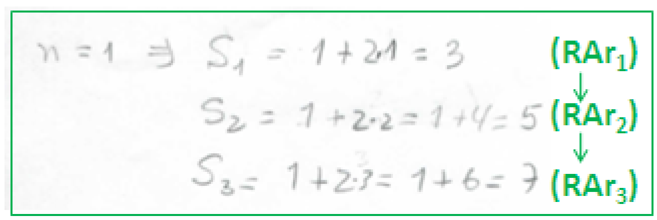


Figura 4
Descomposición del registro aritmético de la actividad 1 del profesor de matemática en formación inicial ①

Para simplificar, creemos que el participante comenzó contando la cantidad de puntos, identifico lo común en la secuencia, luego, infirió a partir del dibujo la fórmula, la enunció y finalmente, corroboró la fórmula al realizar los cálculos aritméticos, que coinciden con el registro numérico escrito por el participante.

Cuando intentamos describir el proceso no escrito pero seguido por el participante estamos en el Rastreo del Silencio (RS) identificando a través de explicito lo implícito: lo primero que el participante debió realizar fue una observación ingenua, un vistazo de lo ofrecido en la secuencia, luego debió realizar una observación crítica, donde intenta establecer alguna relación entre los tres dibujos de la secuencia para identificar la regularidad: cuenta la cantidad de puntos de cada figura, establece la simetría que existen entre la cantidad de puntos distribuidos horizontalmente con la cantidad de puntos distribuidos verticalmente, asimismo, percibió la segregación de cada figura en tres: puntos distribuidos de forma horizontal, puntos distribuidos de forma vertical, y un punto de unión que hace las veces de una bisagra, el punto que a la vez esta en la distribución horizontal y vertical es considerado como un tercer elemento. Otro aspecto importante es la observación de que la cantidad de puntos horizontales coinciden con la cantidad de puntos verticales coinciden además con el número de la figura, así, el participante decidió emplear la letra n para designar el número de la figura y S_n para designara la cantidad de puntos de la figura n, aunado a que la cantidad de puntos de la figura se puede obtener sumando el punto de la bisagra que es una constante identificada por el participante a través de la acción de encerrar en un círculo dicho punto en las figuras de la secuencia presentada, con la cantidad de puntos horizontales (n) con la cantidad de puntos verticales (n), así se logra establecer que S_n=1+n+n=1+2.n, que es la fórmula presentada por el participante (S_n=1+2.n). Finalmente, el participante, ofrece a nivel de confirmación, el cálculo de la cantidad de puntos de las tres primeras figuras. Un aspecto importante a resaltar de este participante, es que no dibujo, no cálculo o no hizo referencia alguna a otra figura de la secuencia, no sintió la necesidad de realizar la figura 4, puede ser que haya realizado de forma mental y no lo escribió, o que empleara otro papel para hacer cálculos y dibujos preliminares a pesar de la indicación de dejar todo lo escrito en una hoja, sin embargo, por lo escrito por este participante los tres dibujos de la secuencia, y la numeración de las figuras constituyen información suficiente para encontrar la fórmula general.

La actividad 1 realizada por el profesor de matemática en formación inicial denotado por ② esta escaneada y se le hizo corresponder el código d3act1A2, es la siguiente: *Dibujo las dos figuras siguientes correctamente, sin numerarlas, debajo de cada una de las figuras escribió: 1x1, 2x2, 3x3, 4x4, 5x5*. Al dibujar las dos siguientes figuras realizó un Registro Gráfico (RG), el cual hizo correctamente, si comparamos, al participante anterior le pareció suficiente con los dibujos de la secuencia dada para realizar la actividad, en este caso el participante corrobora la información que cree estar percibiendo a través de la seguidilla de los dibujos de la secuencia. Inferimos que la primera actividad fue realizar el dibujo de los dos figuras que siguen en la secuencia.

Seguidamente, intenta identificar la cantidad de puntos, pero parece estar influenciado por el orden de las matrices, y coloca debajo de figura 1: 1x1, debajo de la figura 2: 2x2, y así sucesivamente, realiza un registro numérico porque pretende, desde nuestra perspectiva, contar la cantidad de puntos, sin embargo, no se aventura a llegar a una fórmula general. Inferimos que la segunda actividad fue contar los puntos de la figura, aunque no logro expresarlo de forma correcta. En resumen este resolutor realiza el proceso, que se presenta en la siguiente figura:

RGr → RN

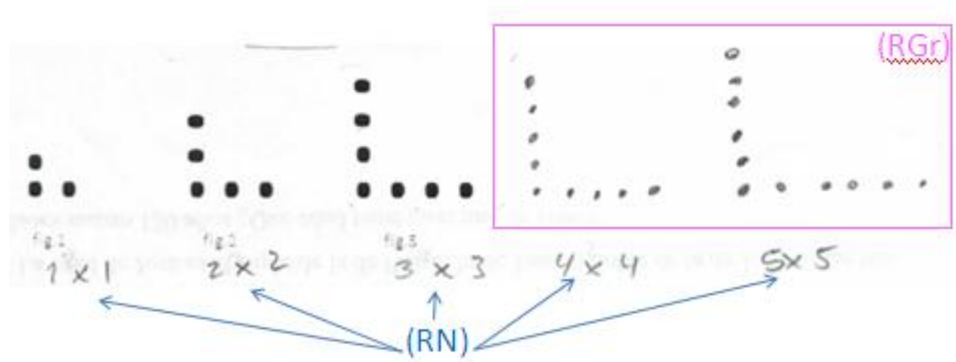


Figura 5
Identificación de los Registros Gráficos y los Registros Numéricos en la actividad No.1 del profesor de matemática en formación inicial ②

Cuando intentamos inferir el proceso que el estudiante no explico para llegar al resultado ofrecido, empezamos con el Rastreo del Silencio (RS), el participante observó la forma y la cantidad de elementos de cada figura y bosquejo los siguientes dos dibujos correctamente, consideró necesario mostrar los dos elementos siguientes de la figura, de donde se infiere que logró captar los invariantes de la secuencia, la forma de L, la simetría que existe, la correspondencia que hay entre la cantidad de puntos horizontales y la cantidad de puntos verticales, logró entender como se comporta la secuencia, sin embargo, imaginamos que contó los elementos, y que lo hizo de modo correcto, en la figura 1 hay 3 puntos, en la figura 2 hay 5 puntos, en la figura 3 hay 7 puntos, y dibujo la figura 4 con 9 puntos y la figura 5 con 11 puntos, y como producto del conteo escribió 1x1 en la figura 1 refleja que contó la cantidad de los elementos de la fila y la cantidad de los elementos de la columna, que coinciden con el número de la figura, pero a pesar de que logro entender que la secuencia se obtiene aumentando dos puntos: uno horizontal y otro vertical no logro plasmar por escrito de forma numérica ni algebraica esta idea, establece alguna relación entre la cantidad de puntos horizontales, verticales y el número de la figura, pero no logra establecerlo de forma correcta, puede ser influenciada por la notación de orden de las matrices que establece un producto o por el hecho de que se repite y en lugar de establecer el duplo (x2) escribió 1x1, en lugar de 1+1, o de 2x1. Otro aspecto interesante que se refleja es el hecho de que no se visualiza de forma numérica el punto de la bisagra, pero al dibujar la secuencia si aparece, es decir, esta consciente que además de los puntos horizontales y verticales hay un tercer elemento y lo dibuja, pero no logra encajarlo en el conteo de los puntos. La consciencia de la incompletitud del proceso realizado conlleva a no establecer una fórmula general, es decir, este participante esta consciente de que hay algo que no está considerando no está conforme con su secuencia numérica ofrecida por eso prudentemente, no llega a establecer una expresión algebraica cuando se puede inferir fácilmente de lo planteado que la más natural sería nxn, cuando estamos en la figura n, sin embargo, parece que el participante se atreve a escribir expresiones numéricas incorrectas pero no algebraicas, necesita una confirmación un palpito interior, una validación para escribir la fórmula general.

La respuesta dada a la actividad No.1 del profesor de matemática en formación inicial designado como ③ esta escaneada y se le asigno el código d3act1A3, y este participante aunque no llegó a generar una fórmula correcta especificó gran parte del proceso: *El participante escribió los siguientes cálculos al lado de los dibujos dados de la secuencia: (1=2x2, 2=3*3, 3=4*4)⇒ n*2*. Este participante comenzó con un registro numérico igualando en el primer miembro de la igualdad 1,2,3 (suponemos que en el primer miembro colocó el número de la figura)a 2x2, 3*3, 4*4 respectivamente (entendemos por lo escrito posteriormente que esto constituye el número de puntos de cada figura), pero 2x2=4, 3*3=6 y 4*4=8 según se infiere del relato de la participante, por lo que llega a una regla general de *n*2* que constituye un Registro Algebraico.

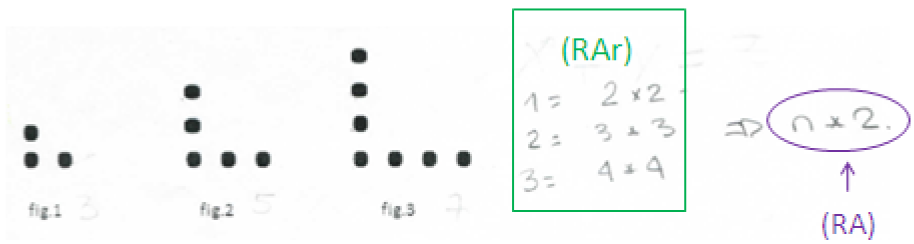


Figura 6
Identificación de los Registros Aritméticos y del Registro Algebraico en la actividad 1 del profesor de matemática en formación inicial ③

En cuanto al uso del signo de igualdad, lo emplea para escribir expresiones que no son equivalentes, pues 1=2x2, es una proposición falsa, ya que1 2x2=4, así el participante está escribiendo 1=4, aunque lo hace para simplificar notación pues, 1 es el número de la figura, y 2x2 es la cantidad de puntos de la figura 1. También resulta importante el uso de x y de * para denotar la operación de multiplicación. Otro aspecto, es la generalización realizada, pues de los productos 2x2, 3x3, 4x4 se debería generalizar como nxn, y no n*2 como lo hace el profesor de matemática en formación inicial. No muestra una notación para identificar el número de la figura, ni para la cantidad de puntos de cada figura.

Escribió en Registro de la Lengua Natural (RLN) el desarrollo del proceso que realizó: *Lo primero que hice fue <u>reflejar visualmente con números como crece</u>* (RAr), *según mi entender* (REA), *la secuencia. Y pude notar que <u>crece en forma igual horizontal y en forma vertical</u>* (percepción de invariantes en la figura). *Up´s!* (REA)

Cuando lo iba a entregar me di cuenta que mi percepción estaba errada; ya que contaba horizontal y vertical la misma cantidad de puntos, sin tomar en consideración que <u>*uno de los puntos es el mismo para la fila y columna*</u> (percepción de invariantes en la figura); *por lo que yo contaba 4, 6 y 8* (RN) *de allí que considere que aplicaba n*2* (RA). *Pero ahora veo que son 3, 5, 7* (RN). *Y entiendo que existe una progresión equitativa del crecimiento, es decir, que crece igual horizontal y vertical; pero realmente* <u>*no encuentro como reflejarlo en una fórmula*</u>.

I need help! Sorry! (REA)

El desarrollo del proceso del participante se puede resumir, a priori, según se presenta en la escritura del papel, como:

RAr → RA → RLN+ (RAr)+(REA)+(REA)+(RN)+(RA)+(RN)

Ahora, uniendo lo escrito en el discurso Registrado en la Lengua Natural, podemos realizar un Rastreo del Silencio del proceso que realizó este participante: observó los dibujos de la secuencia, contó los puntos de la figura (4, 6, y 8) percibió como invariantes en la figura que crecen vertical y horizontalmente de forma pareja, realizo los cálculos que escribió: *(1=2x2, 2=3*3, 3=4*4)⇒ n*2*, y generalizó la fórmula n*2,. Vuelve a contar los puntos de cada figura (3, 5, y 7), se percata del error: cuenta la cantidad de puntos de la fila y la cantidad de puntos de la columna *sin tomar en consideración que uno de los puntos es el mismo para la fila y columna.*

La primera actividad es contar los números de la figura (4,6,8), aunque no realiza un registro explicito, este registro considerado numérico se corrobora en el RLN, además, se verifica cuando el participante escribe 2x2, 3*3,4*4, en realidad está reflejando el conteo 4, 6, 8 (por eso es que llega a la fórmula n*2), así inferimos que la primera actividad realizada es el conteo (errado) de la cantidad de puntos de cada una de las figuras dadas en la secuencia

Inferimos que la segunda actividad está relacionada con analizar lo común de las figuras de la secuencia dada: *pude notar que crece en forma igual horizontal y en forma vertical*. La tercera actividad es calcular la cantidad de puntos que le corresponde a cada una de las figuras *(1=2x2, 2=3*3, 3=4*4),* esto constituye un registro aritmético. La cuarta actividad se trata de escribir la fórmula para calcular la cantidad de puntos de cualquier figura: n*2

Inferimos que la quinta actividad se trató de contar nuevamente la cantidad de puntos de cada figura (3, 5 y 7), esto constituye un nuevo registro numérico, y se reconoce en el RLN. Mientras que la sexta actividad vuelve a estar relacionada con analizar lo común de las figuras de la secuencia dada: hay un punto que está simultáneamente en la fila y en la columna del dibujo que había sido contado dos veces. Finalmente la séptima actividad es escribir en registro de la lengua natural el proceso realizado, donde se distingue la presencia de algunos registros emocional-afectivos que fueron resaltados, empleando una letra color naranja. Así podemos reorganizar, el siguiente recorrido para describir el proceso que ofrecen los registros

RN→RAr→RA→RN→RLN (REA)

Es importante mencionar que se empleo el paréntesis para expresar que el registro emocional-afectivo se encuentra inmerso en el registro de la lengua natural.

A continuación se presenta la resolución de la actividad 1, escaneada y registrada bajo el código d3act1A4, por parte del profesor de matemática en formación inicial denotado como ④: este participante comenzó con un registro tabular relacionando el término (número de la figura) con el número de cuadritos (cantidad de puntos de la figura), luego realiza un registro de la lengua natural identificando la sucesión de los números impares, finalmente pasa a un registro algebraico identificando al número de término como i, mientras que al número de cuadritos lo identifica como (2i+1), ofreciendo la fórmula i=(2i+1). Este participante realizó el siguiente recorrido:

RT → RLN → RA

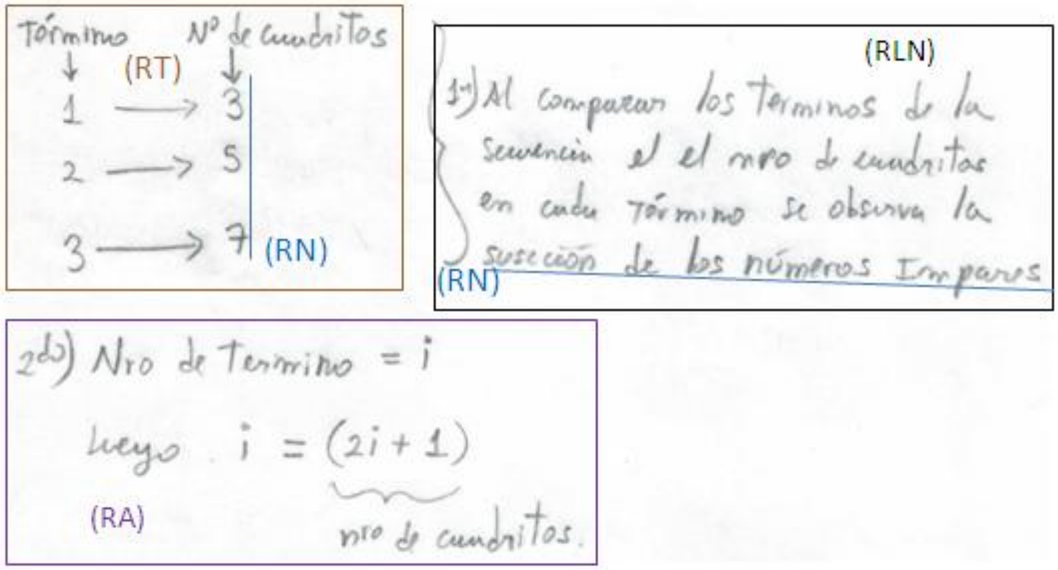


Figura 7
Identificación del Registro Tabular, el Registro en la Lengua Natural y el Registro Algebraico en la actividad No.1 del profesor de matemática en formación inicial ④

Retomando, lo primero que presenta este participante es una tabla de doble entrada (que constituye un registro tabular), de términos (número de la figura) versus número de cuadritos (cantidad de puntos o cuadros de la figura), donde muestra que realizó un conteo de la cantidad de puntos de cada figura, a saber: 3, 5, y 7, por lo cual está implícito en esta actividad un registro numérico, es importante resaltar que en el registro de la lengua natural el participante identifica la sucesión de los números impares, (aunque el número 1 es impar y no está en la columna del número de cuadritos), imaginamos que el participante identificó la secuencia 3,5,7,9,11,13,15,… y esto constituye un registro numérico inmerso en el registro de la lengua natural, y como los números impares se pueden escribir de la forma: 2n+1 ó 2n-1; el participante decidió denotar con i el número de términos (el número de la figura), y luego decir que el número de cuadritos viene dado por 2n+1 (esta deducción la pudo haber obtenido de la forma como se escriben los números impares), lo cual constituye un registro algebraico, resalta el uso del signo igual: (1) lo emplea para denotar la simbología dada para el número de términos en lugar de ":", ósea lo emplea como signo de puntuación, y (2) lo emplea para la expresión algebraica i=(2i+1), de donde se lee que el número de términos es igual al número de cuadritos, es decir, la cantidad de puntos en la figura viene dada por el número de la figura, esto se debe a que no logro identificar una relación simbólica entre el término y la cantidad de cuadritos, a pesar de que encuentra una expresión algebraica correcta 2i+1 para calcular la cantidad de puntos de la figura no logra establecerlo a través de una fórmula algebraicamente correcta, y plantea una ecuación i=(2i+1) cuya solución es i=-1. Recapitulando el recorrido viene dado por:

RT (RN) → RLN (RN) → RA

Al identificar el proceso seguido por el participante inferimos que la primera actividad realizada fue dibujar una tabla de doble entrada de el número de la figura versus la cantidad de puntos de la figura, donde realizo implícitamente el conteo de los puntos de cada figura. El segunda actividad fue identificar la relación que existe entre la secuencia de los números impares con la cantidad de puntos de la figura. La tercera actividad fue escribir la fórmula algebraica que relaciona el número de la figura con la cantidad de puntos de cada figura.

La respuesta dada a la actividad No.1 del profesor de matemática designado como ⑤ esta escaneada y se le asigno los códigos d3act1A51 y d3act1A52: el participante encerró en un recuadro la figura anterior, es decir, en la figura 2 enmarco la figura 1, en la figura 3 enmarco la figura 2 (RFI), consideramos según el relato que la próxima actividad es contar la cantidad de puntos de cada figura, en este caso, 3, 5 y 7 (RN); luego se establece una relación entre el número de la figura, el cual se denota con n (aunque no lo declara explícitamente), y la cantidad de puntos de la figura que la denota con S(1), S(2), S(3) (RA) y establece que al sumarle 2 a la cantidad de puntos de la figura 1 obtenemos la cantidad de puntos de la figura 2, y al sumarle 2 a la cantidad de puntos de la figura 2 obtenemos la cantidad de puntos de la figura 3, realiza una tabla de doble entrada (x,y) (RT) (no explica la notación empleada: x, y, n, Sn) donde coloca en la columna de la x el número de la figura, y en la columna de la y la cantidad de puntos de la figura (provenientes del conteo realizado), el siguiente paso es escribir en lenguaje natural (RLN): "*La secuencia esta formada por una L* *(ele), el dibujo de una L que se obtiene añadiendo uno a cada lado, aumenta de dos en dos la serie va aumentando de 2 en 2, y como comienza en 3 que está malo solo funciona s(1)=1+2=3*"(RAr), en este momento imaginamos que escribe la fórmula y=x+2 (RA), y realiza los cálculos de y(2)=2+2=4, y(3)=3+2=5 (RAr), cálculos que refleja a un lado de la tabla debajo de la palabra NO, evidenciando que la fórmula y=x+2 sólo funciona para cuando n=1, luego sigue otro escrito, donde retoma la fórmula Sn=2n+1 (RA) y realiza los cálculos de las imágenes empleando esta nueva fórmula.

Es importante mencionar, que este participante, aunque hizo un relato del proceso no evidencio ningún registro emocional-afectivo, asimismo, no intento en ningún momento realizar otro dibujo de la secuencia dada, es decir, no se necesito la continuación de la secuencia para obtener la fórmula correspondiente.

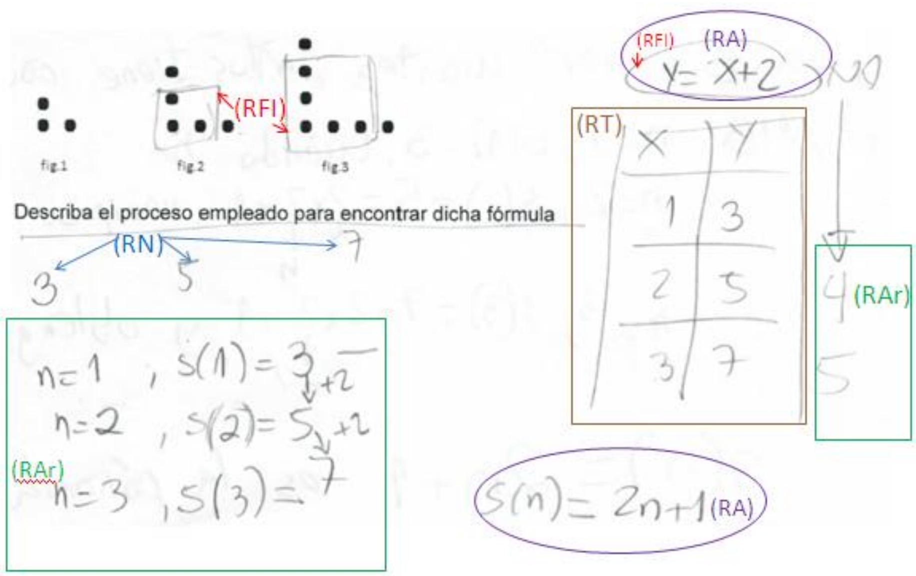


Figura 8
Identificación del Registro Figural-Icónico, del Registro Numérico, de los Registros Aritméticos y de los Registros Algebraicos en la actividad No.1 del profesor de matemática en formación inicial ⑤

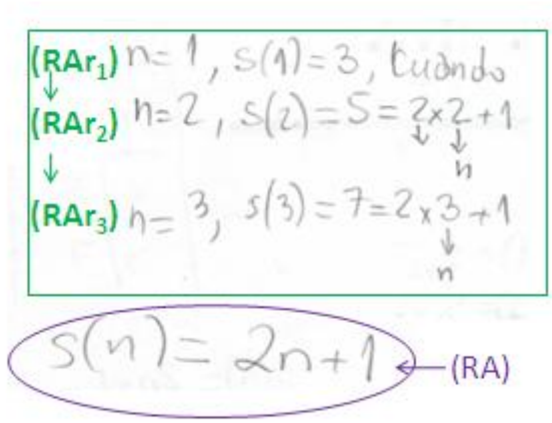


Figura 9
Descomposición de un registro aritmético de la actividad 1 del profesor de matemática en formación inicial ⑤

Este participante presenta muchos saltos en la escritura, de acuerdo a la lógica de la lectura, la secuencia que presumimos siguió es la siguiente: Inferimos que la primera actividad realizada es la encapsulación de la figura anterior en una figura dada, lo cual es congruente con el primer trazo presente en la hoja y que corresponde al Registro figural-icónico realizado sobre las figuras de la secuencia. La segunda actividad realizada debe ser el conteo de la cantidad de puntos de cada figura. La tercera actividad pudo haber sido realizar una tabla de doble entrada (x,y), que aunque no se explica la notación empleada, se asume que x corresponde al número de la figura, y a la cantidad de puntos de la figura (que se obtiene del conteo). La cuarta actividad es la designación de n para el número de la figura (Sn para la cantidad de puntos de la figura, aunque no aparece de modo explicito, se desprende de la información escrita).

La quinta actividad el reconocimiento de los invariantes en la figura: la forma de L del dibujo, se obtiene añadiendo uno a cada lado de la figura anterior, la serie va aumentando de 2 en 2 (esto también está reflejado en la designación de n y Sn). La sexta actividad pudo ser escribir el primer párrafo, donde se percata del error en la fórmula ideada, y encierra en un cuadro las palabras “está malo”.

La séptima actividad se refiere a explicitar la fórmula incorrecta, encerrándola en un ovalo, y luego calcular la asignación de las imágenes, mediante la fórmula y=x+2, de 2 y de 3, escribiendo los resultados debajo de la palabra NO, como muestra de que no se obtienen los resultados buscados. Inferimos que la formulación incorrecta se origino después del comentario va aumentando de 2 en 2, que se confundió en cómo expresarlo en el proceso ese 2, y asumió que la mejor forma sería mediante la adición.

La octava actividad pudo haber sido escribir la fórmula correcta debajo de la tabla de datos. La novena actividad seguir con el registro escrito en la lengua natural donde están inmersos unos cálculos, que se usan como la comprobación de la fórmula y la definición nuevamente de la fórmula correcta.

El recorrido del proceso es un poco difícil de establecer por los saltos que se presentan en la lectura, pero luego de identificar los posibles pasos seguidos, postulamos el siguiente recorrido:

RFI→RN→RT →RAr→RLN+RFI→RA→RAr→RA→RLN+(RAr)+(RA)

Identificación de las Competencias Matemáticas de la Actividad 1

Cuando intentamos identificar las competencias matemáticas expuestas por los estudiantes al resolver la actividad 1, encontramos:

En cuanto a la solución planteada por el profesor de matemática en formación inicial designado como ①, (sus escritos originales están escaneados bajo el código d3act1A1): El participante ofrece una fórmula general correcta, sin embargo, no describe el proceso para llegar a dicha fórmula, que conforma parte de la actividad a realizar, es decir, no logró realizar todas las actividades, bien porque no entendió, no leyó el enunciado, o por la costumbre de sólo presentar soluciones con números y fórmulas, en este caso no existen argumentos escritos que acompañen la justificación del proceso para la obtención de la fórmula.

Sin embargo, podemos identificar en el razonamiento seguido por el participante que el contar la cantidad de puntos directamente sobre el dibujo fue una de las estrategias que empleo, y localizar que en cada dibujo de la secuencia hay un punto central que comparten la fila y la columna de cada dibujo conlleva a descubrir atributos invariantes en la secuencia, inferimos que ubico la simetría de la cantidad de puntos para la fila y la columna de cada figura (no hay evidencia escrita de este razonamiento), y sin considerar el punto central de la figura (bisagra), cada fila y cada columna tenía tantos puntos como el número de la figura, creemos que la cantidad de puntos la logro descomponer como la suma del punto central más la cantidad de puntos de la fila más la cantidad de puntos de la columna, por ejemplo: 3=1+(1+1); 5=1+(2+2); 7=1+(3+3), de donde deduce 3=1+2.(1); 5=1+2.(2); 7=1+2.(3), correspondiendo, en cada caso, el número que está multiplicado con el número de la figura. Es importante no pasar por alto, que según nuestra inferencia, el estudiante descompuso el dibujo en tres partes: filas, columnas y el punto en común (bisagra), evidenciando una posible simetría sobre el punto común.

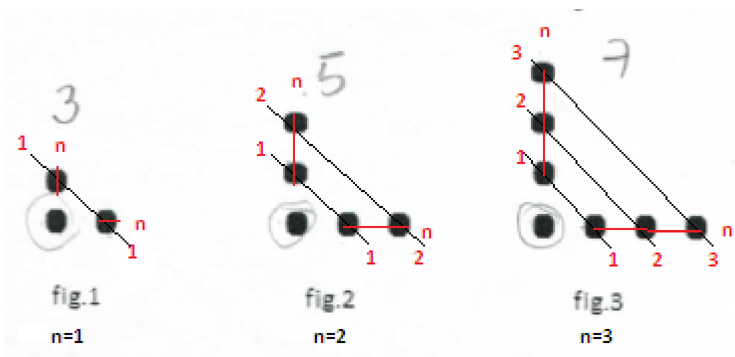


Figura 10
Posible descomposición realizada en la actividad No.1 del profesor de matemática en formación inicial ①

Lo siguiente fue designar de manera consciente (aunque no escrito) “n” como el número de la figura, y Sn para la cantidad de puntos de la figura, posteriormente, escribir la fórmula general Sn=1+2.n, y finalmente propiciar una comprobación de la fórmula para los tres primeros términos de la secuencia.

Las distintas representaciones empleadas por el participante se encuentran resumidas en el recorrido establecido como: **RN → RFI → RA+RFI → RAr**

A continuación sinterizaremos en un cuadro, las competencias matemáticas evidenciadas en el proceso de la solución de la actividad 1 del participante ①, emplearemos la letra cursiva para señalar las competencias que inferimos como investigadores:

Cuadro 29
Competencias matemáticas inferidas de la solución de la actividad 1 del profesor de matemática en formación inicial ①:

Competencia de Representación	* Empleo representaciones: numérica, figural-icónica, algebraica y aritmética: **RN → RFI → RA+RFI → RAr**
Competencia de Simbolización y Formalismo	* *Designar "n" como el número de la figura, y Sn para la cantidad de puntos de la figura.* * Establecer la fórmula Sn=1+2.n * No emplea ningún símbolo para identificar la multiplicación (2n) * Uso de la implicación lógica $n=1 \Rightarrow S_1=1+2.1=3$ * No escribe el valor de n al calcular S_2 y S_3. *Uso del signo de igualdad: operador $S_1=1+2.1=3$; expresión de una relación funcional Sn=1+2.n;
Competencia de Ayudas y herramientas	* Contar la cantidad de puntos de cada dibujo de la secuencia * *Descomponer la figura en tres partes: fila, columna y bisagra* * *Identificar la simetría de las figuras de la secuencia* * Comprobar la fórmula para números particulares (n=1,2,3) * No necesito continuar la secuencia gráfica * No identifico explícitamente la forma de las figuras de la secuencia
Competencia de Pensamiento Matemático	* Deducción de la fórmula general de la secuencia a partir de la información gráfica aportada e inferida. * Estable la relación entre las variables independiente n, dependiente Sn * Uso casos particulares como método de comprobación * Muestra habilidad para usar el lenguaje algebraico en la comunicación de ideas * Muestra indicios del pensamiento algebraico simbólico * Emplea la abstracción para deducir la fórmula a partir de la información gráfica
Competencia de Planteamiento y Resolución de Problemas	* Logra establecer la fórmula general Sn=1+2.n * Muestra la comprobación de la fórmula para números particulares (n=1,2,3) * No describe el proceso empleado para encontrar la fórmula
Competencia de Razonamiento Matemático	* Contar la cantidad de puntos de cada dibujo de la secuencia * *Descomponer la figura en tres partes: fila, columna y bisagra* * Identificar atributos invariantes en la secuencia: punto común en la fila y columna, *coincidencia de la cantidad de puntos de la columna con la cantidad de puntos de la fila y con el número de la figura, simetría de la figura respecto a la bisagra* * *Designar "n" como el número de la figura, y Sn para la cantidad de puntos de la figura.* * Establecer la fórmula Sn=1+2.n * Comprobar la fórmula para números particulares (n=1,2,3)

A pesar de que el participante ② no logró establecer una fórmula general podemos buscar las competencias matemáticas en el proceso que realizó: el participante no describe el proceso que es una de las actividades solicitadas, básicamente muestra el dibujo de las dos figuras siguientes de la secuencia y la cantidad de puntos de cada figura: 1x1, 2x2, 3x3. En función a la descripción anteriormente realizada del proceso, a continuación sinterizaremos en un cuadro, las competencias matemáticas evidenciadas en el proceso de la solución de la actividad 1 del participante ②, emplearemos la letra cursiva para señalar las competencias que inferimos como investigadores:

Cuadro 30
Competencias matemáticas inferidas de la solución de la actividad 1 del profesor de matemática en formación inicial ②:

Competencia de Representación	* Empleo representaciones: gráfica y numérica: **RGr → RN**
Competencia de Ayudas y herramientas	* *Contó la cantidad de puntos de cada dibujo de la secuencia* * *Identificó la forma de L, la simetría que existe, la correspondencia que existe entre la cantidad de puntos horizontales y la cantidad de puntos verticales* * Continuó la secuencia gráfica, dibujando las siguientes dos figuras
Competencia de Pensamiento Matemático	* No muestra habilidad para usar el lenguaje algebraico en la comunicación de ideas * No muestra indicios del pensamiento algebraico simbólico, ni contextual * Establece erróneamente la cantidad de puntos de cada figura: 1x1, 2x2, 3x3 * No intenta generalizar la cantidad de puntos de la figura
Competencia de Razonamiento Matemático	* *Contar la cantidad de puntos de cada dibujo de la secuencia* * *Identificar atributos invariantes en la secuencia: la forma de L, la simetría que existe, la correspondencia que existe entre la cantidad de puntos horizontales y la cantidad de puntos verticales* * Continuar la secuencia gráfica, dibujando las siguientes dos figuras * Establecer de forma errónea la cantidad de puntos de cada figura: 1x1, 2x2, 3x3 * No intenta generalizar la cantidad de puntos de la figura

En relación con las competencias matemáticas expuestas en el desarrollo de la actividad No.1 del profesor de matemática en formación inicial designado como ③, podemos resaltar el proceso que lleva a la expresión n*2: el participante comienza contando la cantidad de puntos de cada figura: 4,6,8,(figura 1, figura 2 y figura 3 respectivamente) casualmente estos números se pueden escribir como el duplo de otro número, así: 4=**2**x2, 6=**2**x3 y 8=**2**x4, sin embargo, al obviar el 2 (que será la constante en la expresión algebraica), tenemos que deben corresponder a la figura 2, 3 y 4, pero el participante no continuo la secuencia, así que no hace mención a la figura 4. Por otro lado, presenta una correspondencia entre la figura y la cantidad de puntos de la figura de la siguiente manera: (*1=2x2, 2=3*3, 3=4*4⇒ n*2)* de donde deduce la expresión algebraica n*2, pero en honor a la verdad, de ese antecedente se deduce la fórmula n*n. Ahora resulta importante mencionar que el participante estaba consciente que existían la misma cantidad de elementos de forma horizontal y vertical en cada figura, así que contó en la figura 1 dos puntos en la fila y dos puntos en la columna, así 2+2=4, en la figura 2 contó tres puntos en la fila y tres puntos en la columna así 3+3=6, en la figura 3 contó cuatro puntos en la fila y cuatro puntos en la columna, así 4+4=8, pero para expresar está observación escribió elementos *1=2x2, 2=3*3, 3=4*4)*en lugar de 1=2+2, 2=3+3, 3=4+4 que era lo que estaba tratando de decir, confundió no se si el signo para expresar la suma, o la operación que estaba realizando porque de lo escrito en el registro de la lengua natural, se deduce que el participante pensaba en la suma, al punto que la generalización es n*2 y no n*n, hubo problemas para identificar la adición.

Cuadro 31
Competencias matemáticas inferidas de la solución de la actividad 1 del profesor de matemática en formación inicial ③:

Competencia de Representación	* Empleo representaciones: numérica, aritmética, algebraica, en la lengua natural y emocial-afectivas: **RN→RAr→RA→RN→RLN (REA)**
Competencia de Simbolización y Formalismo	** Designar "n" como el número de la figura* * No emplea ninguna variable para denotar la cantidad de puntos de la figura. * Establecer una expresión algebraica errónea n*2 * Uso de dos símbolos diferentes para identificar la multiplicación (x,*) * Uso de la implicación lógica: (1=2x2, 2=3*3, 3=4*4)⇒n*2 * Uso del signo de igualdad: para indicar cierta correspondencia (1=2x2, 2=3*3, 3=4*4), entre el número de la figura y la cantidad de puntos de la figura
Competencia de Ayudas y herramientas	* Contar la cantidad de puntos de cada dibujo de la secuencia, de forma errónea: 4, 6, 8 * Descomponer la figura en dos partes: en forma horizontal y forma vertical * Escribir una correspondencia entre el número de la figura y la cantidad de puntos (1=2x2, 2=3*3, 3=4*4) ** Designar "n" como el número de la figura.* * Recontar la cantidad de puntos de cada dibujo de la secuencia: 3, 5, 7 * No necesito continuar la secuencia gráfica * No identifico explícitamente la forma de las figuras de la secuencia
Competencia de Pensamiento Matemático	* Escribir 4, 6, 8 como 2x2, 3*3, 4*4, (*en lugar de 2+2, 3+3, 4+4*) y generalizarlo como n*2 *Confusión entre el signo x, *, cuando se quería referir a una suma * No establece la relación entre las variables * Emplea la abstracción para deducir la expresión n*2, partir de 2x2, 3*3, 4*4
Competencia de Planteamiento y Resolución de	* Establece una expresión algebraica para la cantidad de puntos: n*2 * Describe el proceso empleado para encontrar la fórmula *Uso del reconteo como método de verificación

Problemas	
Competencia de Razonamiento Matemático	* Contar erradamente la cantidad de puntos de cada dibujo de la secuencia: 4, 6, 8 * Descomponer la figura en dos partes: en forma horizontal y forma vertical * Identificar atributos invariantes en la secuencia: crece igual en forma horizontal y forma vertical * Escribir una correspondencia entre el número de la figura y la cantidad de puntos (1=2x2, 2=4*4, 3=4*4) * Escribir 4, 6, 8 como 2x2, 3*3, 4*4, (*en lugar de 2+2, 3+3, 4+4*) y generalizarlo como n*2 ** Designar "n" como el número de la figura.* * Identificar un punto en común en la fila y la columna de cada dibujo * Recontar la cantidad de puntos de cada dibujo de la secuencia: 3, 5, 7 * Reconocer que la expresión para calcular la cantidad de puntos es errada * Reconocer que crece igual horizontal que verticalmente * Reconocer que no encuentra una fórmula para expresarlo

Al identificar las competencias matemáticas en el desarrollo de la actividad 1 realizada por el profesor de matemática en formación inicial denotado por ④, observamos la capacidad de síntesis del participante para expresar las ideas con claridad, es conciso y preciso, además no realizó la descripción del proceso empleado para hallar la fórmula, pero hay un aspecto resaltante que discutir, es el hecho de que con su conocimiento de cómo se expresan los números impares logra establecer una expresión algebraica correcta para calcular el número de puntos de cada figura que es (2i+1), donde se paso por alto el uso del signo de multiplicación, y el hecho de que el número 1 que es impar, no aparecía en la secuencia 3,5,7, sin embargo recalcamos que logró establecer una expresión algebraica correcta, sin embargo, no concibe la fórmula general de la secuencia, a pesar de haber designado explícitamente a "i" como el número de la figura, y a (2i+1) como la cantidad de puntos de la figura i, consideramos que el participante estaba consciente de la relación de dependencia de la cantidad de puntos de la figura con respecto al número de la figura, pero la falta de una variable para designar la cantidad de puntos de la figura, lo llevo a igualar i a 2i+1 generándose una ecuación cuya única solución es i=-1. La falta de algún método de comprobación no le permitió visualizar el error. Se lee y relee la actividad para tratan de evidenciar si hubo algún intento de diferencias las i, pero no se logra percibe diferencia entre la i del primer miembro de la fórmula y la empleada para designar el número de la figura. A continuación se presentan sintetizadas en un cuadro, las competencias matemáticas del participante ④:

Cuadro 32
Competencias matemáticas inferidas de la solución de la actividad 1 del profesor de matemática en formación inicial ④:

Competencia de Representación	* Empleo representaciones: numérica, figural-icónica, algebraica y aritmética: **Rt (rN) → RLN (RN) → RA**
Competencia de Simbolización y Formalismo	* Designar "i" como el número de la figura, (emplea la palabra Nro de término) * No emplea variable para la cantidad de puntos de la figura. * Establecer la fórmula i=(2i+1) * No emplea ningún símbolo para identificar la multiplicación (2i) * Uso del signo igual: para indicar cierta conexión o correspondencia (Nro de término = i); expresión de una relación funcional i=(2i+1)
Competencia de Ayudas y herramientas	* Cuenta la cantidad de puntos de cada dibujo de la secuencia * Realiza una tabla de doble entrada * No comprueba la fórmula * No necesita continuar la secuencia gráfica * No identifica explícitamente la forma de las figuras de la secuencia
Competencia de Pensamiento Matemático	* No estable la relación entre las variables * No se percata de haber generado una ecuación en lugar de una fórmula general * No emplea ningún método para validar la fórmula Muestra habilidad para usar el lenguaje algebraico en la comunicación de ideas * Muestra indicios del pensamiento algebraico simbólico * Emplea la abstracción para deducir una fórmula a partir de la información gráfica * Identifica la secuencia de los impares (a pesar de que el 1 no está presenta) * Muestra capacidad para sintetizar las ideas
Competencia de Planteamiento y Resolución de Problemas	* Logra establecer una fórmula general i=(2i+1) * No describe el proceso empleado para encontrar la fórmula
Competencia de Razonamiento Matemático	* *Contar la cantidad de puntos de cada dibujo de la secuencia* * Realizar una tabla de doble entrada * Identificar la cantidad de puntos de la figura con la sucesión de números impares * *Conocimiento de la forma de expresar los números impares (2i+1; 2i-1)* * Designar "i" como el número de la figura * Identifica a (2i+1) como la cantidad de puntos de la figura * Establecer la fórmula i=(2i+1)

El proceso complejo mostrado por el participante denotado por ⑤ evidencia que apuntaba hacia la fórmula S(n)=3+2.(n-1), sin embargo, al descomponer la cantidad de puntos de la figura 1 como s(1)=1+2, en vez de s(1)=3+0, lo llevó a generar la fórmula errada y=x+2. La inferencia de la fórmula S(n)=3+2.(n-1) se obtiene de que el participante intento identificar en una figura la figura anterior, como se logra aprecia, en la figura 2 enmarcó la figura 1, en la figura 3 resaltó la figura 2. También es posible que intentará una expresión como S(n)=S(n-1)+2, todo esto, es deducible de la figura siguiente:

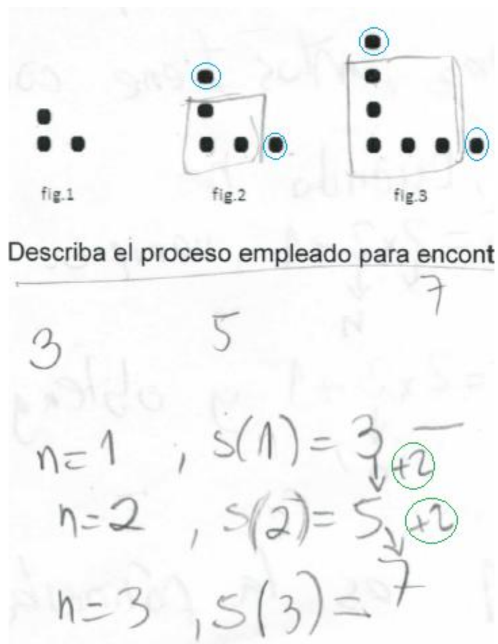


Figura 11
Evidencia de la identificación de que los término de la secuencia se obtiene sumándole 2 al anterior por parte del profesor de matemática en formación inicial ⑤

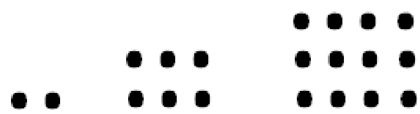
Luego del estableciendo de la fórmula errada y=x+2, observamos que el participante realizó los cálculos de la cantidad de puntos de cada figura y los coloca a un lado de la tabla, evidenciando que la comparación con la cantidad de puntos de cada figura obtenidas a través del conteo, es lo que permite desestimar la fórmula, ya que sólo funciona cuando n=1. No existe evidencia tangible del surgimiento de la fórmula S(n)=2n+1, sin embargo, se vuelve a evidenciar el uso de la comparación de los valores obtenidos a través del cálculo con los del conteo de la cantidad de puntos de cada figura para comprobar la certeza de la fórmula

Cuadro 33
Competencias matemáticas inferidas de la solución de la actividad 1 del profesor de matemática en formación inicial ⑤:

Competencia de Representación	* Empleo representaciones: figural-icónica, numérica, tabular, algebraica y aritmética, de la lengua natural: **RFI→RN→RT →RA+(RAr)→RLN+RFI→RA→RAr→RA→RLN+(RAr)+(RA)**
Competencia de Simbolización y Formalismo	* Designa "n" como el número de la figura, *y Sn para la cantidad de puntos de la figura.* ** Designa "x" como el número de la figura, y "Y" para la cantidad de puntos de la figura.* * Emplea distintas notaciones para establecer el número de la figura, n, x, también para la cantidad de puntos de la figuras S(n), Sn, y * Establece las fórmulas: y=x+2; S(n)=1+2.n; Sn=1+2.n * No emplea ningún símbolo para identificar la multiplicación (2n) *Uso del signo igual: operador S(1)=1+2.1=3; expresión de una relación funcional Sn=1+2.n; y=x+2
Competencia de Ayudas y herramientas	* Contar la cantidad de puntos de cada dibujo de la secuencia * Dibujar la contención de la figura anterior en una figura dada * Realiza una tabla de doble entrada (x,y) * Identifica la forma de la figura "L" * *Identifica filas y columnas en la figura* * No necesito continuar la secuencia gráfica * Identifico explícitamente la forma de las figuras de la secuencia
Competencia de Pensamiento Matemático	* Deducción de la fórmula general de la secuencia a partir de la información gráfica aportada e inferida. * Estable la relación entre las variables independiente n (x), dependiente Sn (y) * Uso casos particulares como método de comprobación * Muestra habilidad para usar el lenguaje algebraico en la comunicación de ideas * Muestra indicios del pensamiento algebraico simbólico * Emplea la abstracción para deducir la fórmula a partir de la información gráfica * Uso del cálculo versus el conteo como método de comprobación
Competencia de Planteamiento y Resolución de Problemas	* Establece una fórmula errada y=x+2 * Logra establecer la fórmula general Sn=1+2.n * Muestra la comprobación de la fórmula para números particulares (n=1,2,3) * Describe el proceso empleado para encontrar la fórmula
Competencia de Razonamiento Matemático	* Identifica la contención de la figura anterior en una figura dada * Cuenta la cantidad de puntos de cada dibujo de la secuencia * Realiza una tabla de doble entrada (x,y), *"x" denota el número de la figura, "y" para la cantidad de puntos de la figura* * Designar "n" como el número de la figura, y *S(n) para la cantidad de puntos de la figura.* * Identifica la forma de la figura "L" * *Identifica filas y columnas en la figura* * Identifica que se la secuencia crece añadiéndole 1 a cada lado (*de la L*) * Identifica que cada término se obtiene sumando 2 al anterior * Identifica el primer término de la secuencia 3 * Descompone S(1)=1+2=3 * Establece la fórmula y=x+2 * Calcula la cantidad de puntos de cada figura empleando la fórmula y=x+2, y obtiene 4 para la segunda figura, y 5 para la tercera figura ** Compara la cantidad de puntos de cada figura calculada con la fórmula y=x+2 con la contada en la secuencia dada*

	* Identifica que la fórmula y=x+2 está mala. * Establece la fórmula S(n)=2n+1 * Comprueba la fórmula calculando la cantidad de puntos de cada figura dada

Actividad No.5: Lee el artículo escrito por Freddy González: *Los Protocolos Escritos como medio para evaluar la comprensión matemática aplicando el análisis semiótico al proceso de resolución de problemas matemáticos*, y realiza un protocolo del proceso seguido para encontrar la fórmula general de la siguiente secuencia, (dibujo de la secuencia tomada de Rutas hacia el/Raíces del Álgebra, p.129)



Identificación de los Registros de la Actividad 5

El resolutor ① entregó el protocolo de la actividad 5 empleando sólo dos caras de una hoja de examen (código de escaneo: t1A11, t1A12) estructuró el escrito en ocho párrafos comenzándolos con la hora, comienza con un registro en la lengua natural, donde luego de observar la figura y no conseguir preguntas que responder, piensa en imitar las actividades realizadas en la clase o en comunicarse con un compañero (registra 00:59 como hora), considera que es muy tarde y no le va a responder, luego a las 01: 01, escribe: “(RLN) *Observo nuevamente la imagen y ya me doy cuenta de cómo se comporta, cómo aumenta, creo* (REA) *que debo hallar la fórmula que genere la secuencia de puntos*.” Seguidamente muestra una tabla de doble entrada (RT) sin identificar, y expone: “(RLN) *Estoy comiendo, prefiero* (REA) *seguir comiendo que pensar en el ejercicio. ¿Será que intento* (REA) *dibujar las dos figuras que siguen?. Es que no encuentro un patrón de comportamiento, no logro ver cómo pasa de la figura 2 a la 3. Estoy distraída* (REA). Lo que se sigue se muestra en la figura

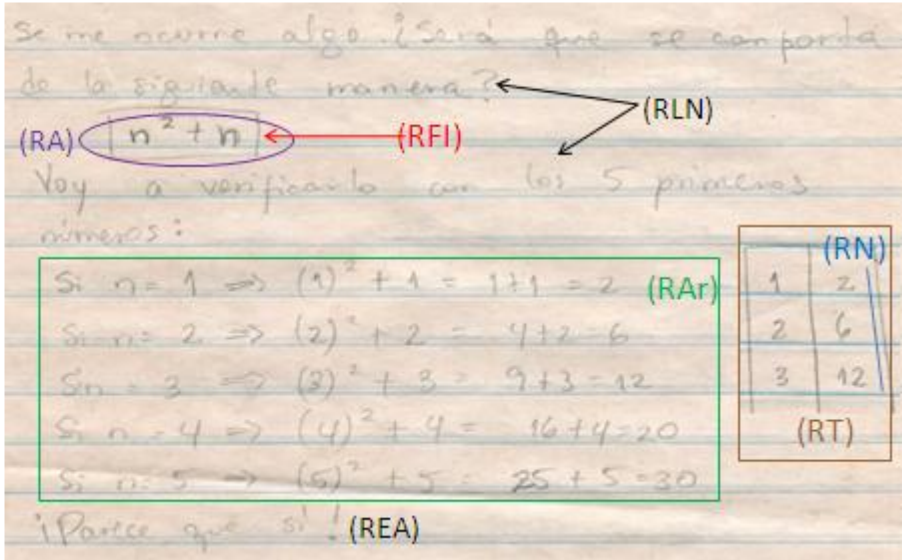


Figura 12
Identificación de Registro de la actividad 5 del profesor de matemática en formación inicial ①

Pasado dos minutos escribe: "(RLN) *Creo* (REA) *que encontré la función que genera la secuencia de puntos. Si me pidieran calcular la figura número 35, lo puedo hacer fácilmente* $(35)^2+35=1260$ (RAr). *Antes de hallar esa función que me genera la secuencia, había pensado que se comportaba "<u>2 por algo</u>"* (RA). *Luego pensé que era <u>2 por el número de la figura más el resultado anterior</u>* (RA), *por ejemplo 2.2+2* (RAr), *Ahora veo esa como que también servía, pero me genera dudas con el primer término. Así que asumiré que es la que conseguí ¡Ja!* (REA)". Este enunciado refleja que hay parte del proceso realizado por el resolutor no incluido en el protocolo, también pone al relieve que intentó con varias formulaciones antes de llegar a la exitosa n^2+n, pero la notación no la ayudó, el enunciado "*<u>2 por el número de la figura más el resultado anterior</u>*" lo puedo escribir como: S(n)=2.n+S(n-1), muestra duda sobre cómo aplica está formula para la primera figura: $S_1=2.1+S_0$ inferimos que la duda a la que se refiere es ¿quién es S_0?

Una vez que se identificaron los registros siguiendo el relato consideramos que el recorrido seguido por el profesor de matemática en formación inicial ① es el siguiente: **RLN (REA) → RT (RN) → RLN (REA) → RA+RFI → RAr → RLN (REA) (RAr) (RA) (RAr) (REA)**

Cuando intentamos identificar el proceso seguido por el resolutor, encontramos algunos vacíos, por lo que emplearemos el Rastreo del silencio: lo primero que registra es la observación de la imagen, pensando en duplicar las actividades de la clase, y en consultar a un compañero. La segunda acción sigue siendo la observación de la figura, con lo que logra ver que aumenta. La tercera acción debe ser contar la cantidad de puntos de cada figura de la secuencia, aunque no hay ningún registro de ello, lo necesita para realizar la cuarta acción que es la tabla de doble entrada de número de la figura versus cantidad de puntos de la figura (no existe encabezado en la tabla). La quinta acción, debió ser intentar seguir la secuencia, sin lograrlo, porque dice: "*no logro ver cómo pasa de la figura 2 a la 3*", en cinco minutos logra encontrar la fórmula, imaginamos que como sexta acción realizó una descomposición gráfica de la figura, separando cada figura en dos partes, contó la cantidad de puntos, evidenciando la suma de un número más su cuadrado, la séptima, es la consolidación de la expresión n^2+n, la octava, escrita en las palabras del resolutor es "*verificarlo con los 5 primeros números*", aquí surge la duda contra qué verifica los cálculos aritméticos, inferimos que en algún momento continuó dibujando la secuencia (al menos los 5 primeros términos). La novena décima acción es calcular la cantidad de puntos de la figura 35 (generalización lejana, propuesta por el resolutor), al final explica que intentó con varias fórmulas: "2 por algo, 2 por el número de la figura más el resultado anterior" esto puede ser insertado en la sexta acción.

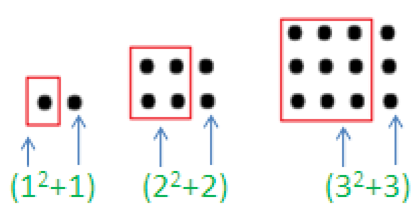


Figura 13
Posible 6° acción ejecutada por el profesor de matemática en formación inicial ① antes de llegar a la expresión n^2+n

En uno de los Registros Aritméticos de la actividad se observa la presencia del tratamiento que realiza el resolutor al escribir cinco registros consecutivos, hay que destacar que el resolutor integra el significado con el uso del símbolo en la implicación lógica (siendo p y q dos proposiciones, p implica q o si p, entonces se denota $p \Rightarrow q$): Como primer registro aritmético (RAr_1) tenemos una implicación lógica, donde antecedente lo constituye "Si n=1" y el consecuente es la proposición "$(1)^2+1=1+1=2$", los siguientes cuatro registros mantiene una estructura análoga al anterior, en el antecedente se registra el número de la figura y en el consecuente se calcula a través de la expresión n^2+n la cantidad de puntos de la figura correspondiente al número escrito en el antecedente, se muestra en la figura siguiente:

$$(RAr_1) \quad \text{Si } n=1 \Rightarrow (1)^2+1 = 1+1 = 2$$
$$\downarrow$$
$$(RAr_2) \quad \text{Si } n=2 \Rightarrow (2)^2+2 = 4+2 = 6$$
$$\downarrow$$
$$(RAr_3) \quad \text{Si } n=3 \Rightarrow (3)^2+3 = 9+3 = 12$$
$$\downarrow$$
$$(RAr_4) \quad \text{Si } n=4 \Rightarrow (4)^2+4 = 16+4 = 20$$
$$\downarrow$$
$$(RAr_5) \quad \text{Si } n=5 \Rightarrow (5)^2+5 = 25+5 = 30$$

Figura 14
Descomposición de un Registro Aritmético de la actividad 5 del profesor de matemática en formación inicial ①

Aunque identificar los registros seguidos por el resolutor ② al realizar la actividad 5 parecía inalcanzable, por lo largo del protocolo (8 hojas) y la cantidad de registro, se tratará de hacerlo apegado al escrito original para que el lector pueda seguir los razonamientos de esta solución, comenzaremos trabajando con la transcripción y se procurará insertar las imágenes en el lugar donde se deduce que aparecen, la narración del proceso la realiza en cinco hojas, pero adicional entrega 3 hojas con los cálculos intermedios realizados. El profesor de matemática en formación inicial realiza un protocolo por detallado, donde no se apreciaron saltos, se aprecia que es un proceso de días el llegar a idear la solución, donde expresa: "(RLN) *(Lunes, 4:00) Por fin me tomare el tiempo para realizar el ejercicio, buscar la solución, realmente* *no me había tomado el tiempo de hacerlo porque se menciono que era un ejercicio sencillo tomado de un libro para niños, además, luego de realizar un ejercicio similar en clase* (REA) *creo tener plasmado en mi mente cómo debo analizarlo para encontrar la solución. Aunque lo anterior es cierto igual siento* (REA) *el peso de la irresponsabilidad sobre mis hombros, y si quizás no puedo encontrar su solución…ya… mejor veo el ejercicio, no lo he visto desde el día que se me entrego, además, no quise analizarlo para disfrutar* (REA) *este momento. Bueno iniciare buscando una hoja blanca, eso me da mayor libertad para escribir. Veré el ejercicio por fin. Tres figuras, digo tres conjuntos de puntos mejor los paso a la hoja* [dibuja en la hoja de examen los tres términos de la secuencia dados en el enunciado]

Posterior al dibujo continúa el relato: "*Cuando resolví un ejercicio similar en clase me ayudo construir una tabla* (RT: primera tabla), *veré si sirve ahora. Mi primera observación es que la cantidad de puntos esta dada como múltiplos de 2* (RAr). *Anexare otra columna al cuadro.* (REA) *Siento ganas inmensas de continuar la resolución sin escribir el protocolo* (REA) *siento que me detiene en alguna medida. Voy a tomar agua antes de continuar. Pensé que podían ser potencias de 2 pero el 6 no es potencia de 2, mejor continúo con la idea de múltiplo* (RAr). *No se me ocurre nada, mejor veo que cantidad se le suma al valor inicial para obtener el siguiente. En el primer caso se requieren 4 unidades para obtener el valor siguiente y en el segundo caso se requieren de 6 unidades para obtener el siguiente valor* (RAr), *ahora que lo pienso (REA) donde coloque las sumas puede dificultar algo mejor las bajo un escalón* (RT: segunda tabla)

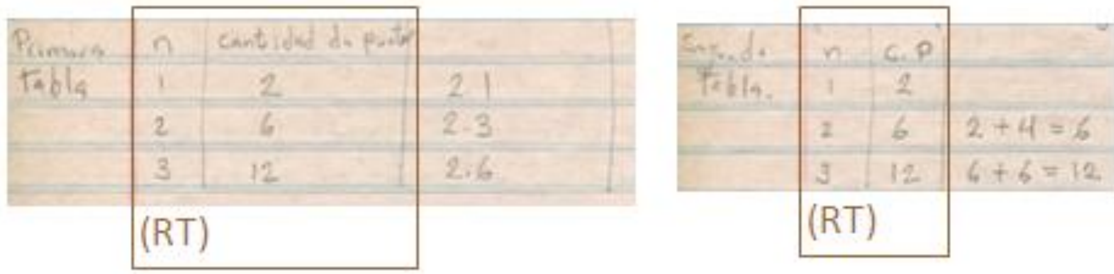


Figura 15
Registros Tabulares realizados en la actividad 5 por el profesor de matemática en formación inicial ②

Luego de la segunda tabla, despliega: “*Realmente me llama la atención que <u>el número del elemento al multiplicarlo por 2 sea la cantidad (el valor) que al sumar al término anterior se obtenga el siguiente, podría plantear una ecuación de la siguiente forma $P_n=ant+2n$</u>* (RA) *"ant" realmente se me hace gracioso* (REA), *no creo poder usar dicho término en una evaluación pero facilita mi análisis. Usare la hoja blanca*”, [en este momento se insertan los datos que se denotaron con (1) que se observan en la figura 16] “*he obtenido que* $\boldsymbol{P_3=2+4n}$ ***donde*** $\boldsymbol{n=3}$ (RA) *y ahora pienso en regresar y mirar el dibujo (la figura) y me pregunto* (REA) *¿podré determinar el siguiente término sin establecer una función? Me percato de algo interesante que no observe que vi vez que vi las figuras. Considerando la figura 1 la siguiente se forma colocando un punto a la derecha y luego completando la fila de arriba* [inserta en la hoja de examen el registro gráfico (RGr) que se encuentra en la figura 16] *la siguiente figura se forma colocando, o agregando otra columna a la derecha (de dos puntos) y anexando una fila del largo de las filas resultantes por el agregado anterior* (RAr)”

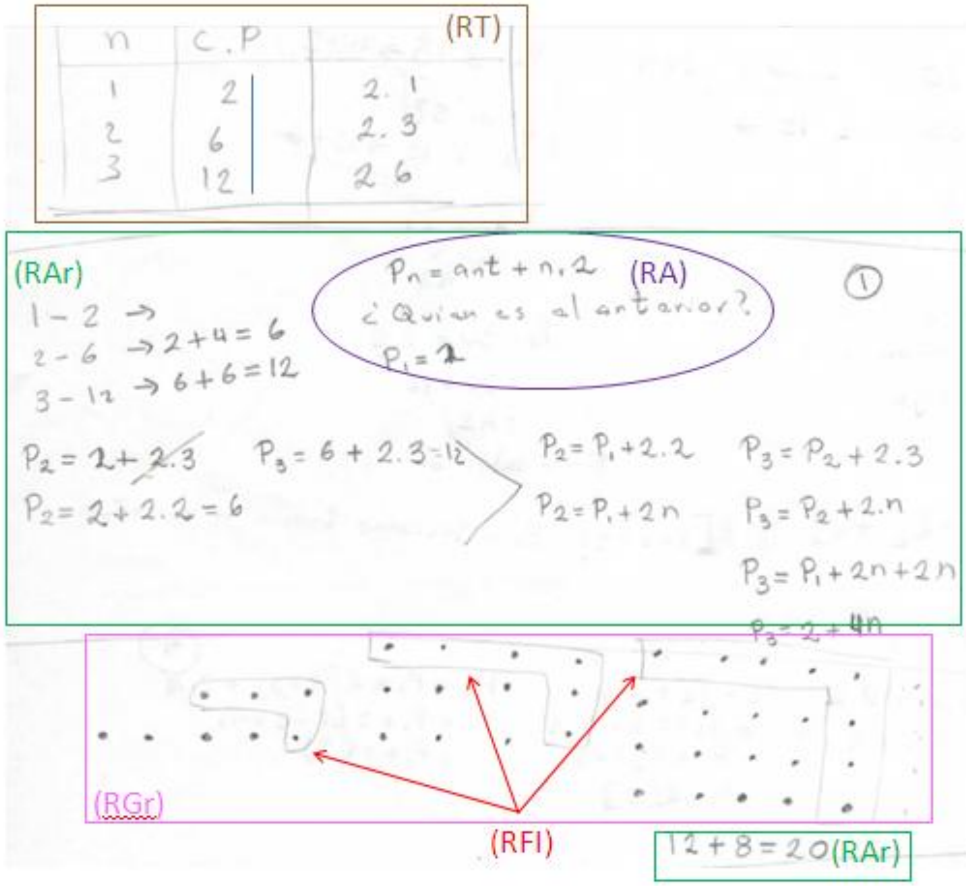


Figura 16
Identificación de los registros de la hoja auxiliar, referenciados en el protocolo como (1), en la actividad 5 por el profesor de matemática en formación inicial ②

"*Me tomare un tiempo para analizar la conclusión. Creo* (REA) *que la siguiente figura tendrá 20 puntos, esto lo deduje por la relación que encontré entre el aumento en la cantidad de puntos de la figura* (RA). *Me percato que esta conclusión es similar a la planteada en la segunda tabla, mi suposición era que el siguiente valor se encontraba multiplicando 2 por el número correspondiente a la figura más la cantidad de puntos de la figura anterior* (RA). *Mejor compruebo la figura 4 con 20 puntos (la que determine yo)* $P_4=12+2.8 = 20$ (RAr) *Creo* (REA) *que estoy por encontrar la solución, pero tengo la necesidad de un baño hace algo de calor necesito* (REA) *refrescarme y a mis ideas continuare luego. (05:27) regrese realizaré* *algunos cálculos en la hoja blanca* [en este momento se insertan los datos que aparecen en la hoja blanca denotado con (2) que se observan en la figura 17]

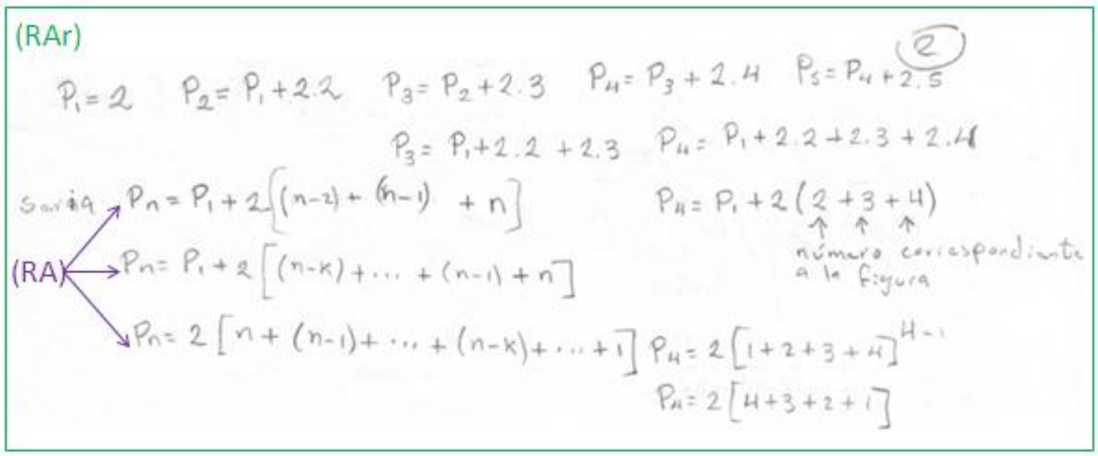


Figura 17
Identificación de los registros de la hoja auxiliar, referenciados en el protocolo como (2), en la actividad 5 por el profesor de matemática en formación inicial ②

El resolutor sigue en la hoja de examen escribiendo de manera más organizada los cálculos que se encuentran en la figura K: "*Llegue a la siguiente*

$P_1=2$ $P_2=P_1+2.2$ $P_3=P_2+2.3$ $P_4=P_3+2.4$ $P_5=P_4+2.5$ (RAr)

$P_3=P_1+2.2+2.3$ $P_4=P_1+2.2+2.3+2.4$

$P_3=P_1+2(2+3)$ $P_4=P_1+2.(2+3+4)$

número correspondiente a la figura

[se inserta lo que falta de los cálculo anteriores que se encuentran en la hoja en blanco]

Sería $P_n = P_1+2[(n-2)+(n-1)+n]$

$P_n = P_1+2[(n-k)+\ldots+(n-1)+n]$

$P_n = 2[n+ (n-1)+\ldots+(n-k)+\ldots+1]$ $P_4=2[1+2+3+4]$

$P_4=2[4+3+2+1]$

Continúa el relato: "*Podría concluir* $P_n = 2[n+ (n-1)+\ldots+(n-k)+\ldots+1]$ (RA). *La anterior aunque difumina en parte mi mente me lleva a recordar la primera tabla, (la* *observe) donde me percato que la cantidad de puntos es un múltiplo de 2* (RA). *Veré si se cumple para la figura 4 (la que yo determine)*" [en este momento se insertan los datos que aparecen en la hoja blanca denotado con (3) que se observan en la figura 18]

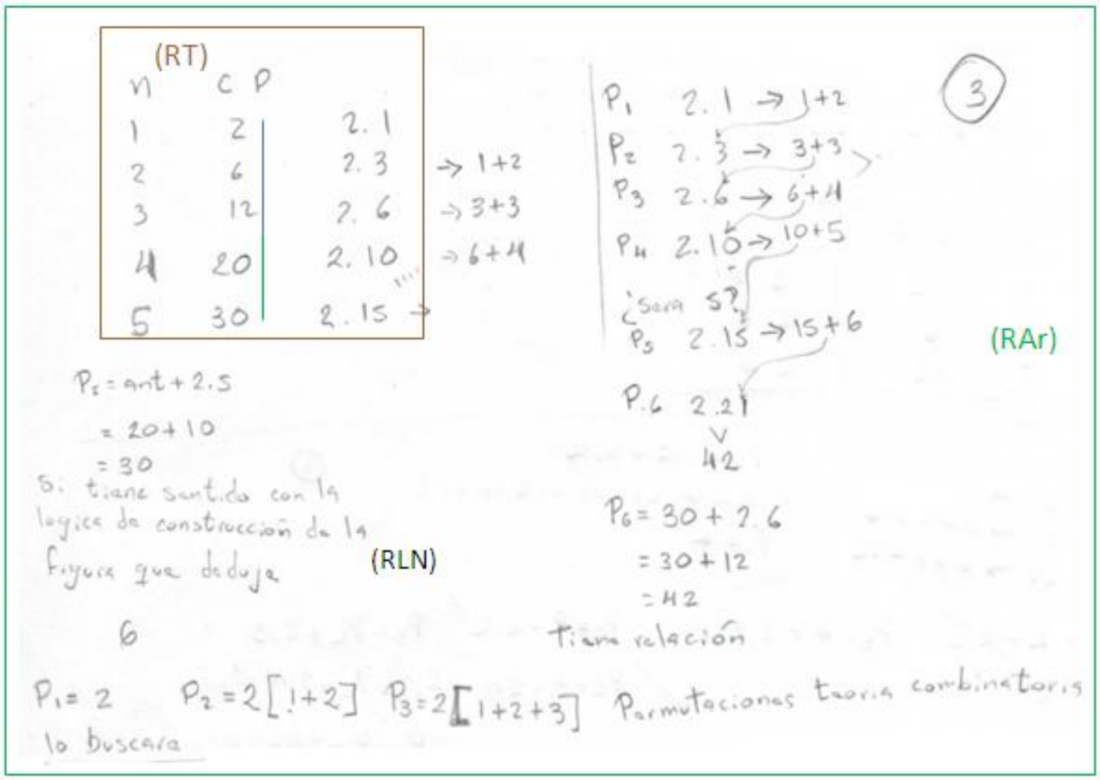


Figura 18
Identificación de los registros de la hoja auxiliar, referenciados en el protocolo como (3), en la actividad 5 por el profesor de matemática en formación inicial ②

En el relato, expresa que logro relacionar la fórmula, con algo ya estudiado: "*Mientras intentaba encontrar la solución algo me recordó a lo visto en una materia "Teoría combinatoria" la buscare y luego continuo. (6:00) fue una perdida de tiempo, recordé mal la definición de a!. seguiré en la hoja blanca*" [en este momento se insertan los datos que aparecen en la hoja blanca denotado con (4) que se observan en la figura 19]

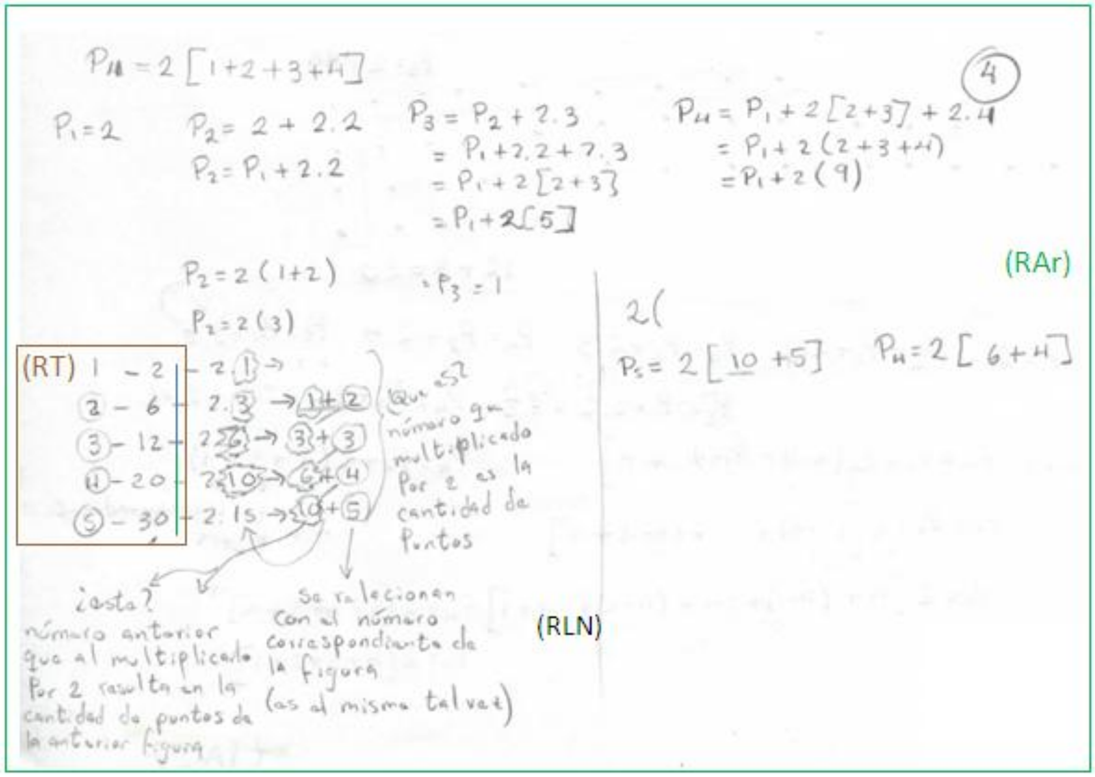


Figura 19
Identificación de los registros de la hoja auxiliar, referenciados en el protocolo como (4), en la actividad 5 por el profesor de matemática en formación inicial ②

El resolutor muestra frustración al momento de no conseguir avance, y decide descansar: "*No creo (REA) estar llegando a una conclusión, pareciera que dio vueltas en el mismo sitio. Veré las figuras nuevamente. La única solución que encuentro es* $P_n = 2[n + (n-1) + \ldots + 1]$ *(RA) lo dejará por hoy hasta aquí. (Jueves, hora 2:13 p.m.) No esperaba (REA) continuar la resolución, pensé que ya podría continuar pero paso. Hace algunas horas una chica de biología me pidió que le explicara que unos ejercicios sobre integrales y área sobre la curva, en un principio titubee pero luego de sentarme con calma fue invadiéndome poco a poco hasta que el ejercicio se dio por concluido, luego de quedarme para otra clase regrese a mi casa e intente nuevamente busque un libro de cálculo integral, cuál fue la sorpresa*

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Encontré $P_n = [1+...+(n-1)+n]$ puedo percatarme se su similitud así se me ocurrió que $P_n = 2\sum_{i=1}^{n} i$ lo cual es $P_n = 2.\frac{n(n+1)}{2}$ al simplificar $P_n=n(n+1)$ (RA) ¿será? (REA) Construiré una tabla

n	$P_n=n(n+1)$	P_n
1	$P_1=1(1+1)$	$P_1=2$
2	$P_2=2(2+1)$	$P_2=6$
3	$P_3=3(3+1)$	$P_3=12$
4	$P_4=4(4+1)$	$P_4=20$
5	$P_5=5(5+1)$	$P_5=30$

Observo la tabla y veo que están coincidiendo con los valores de las anteriores, ***estoy emocionado*** *(REA) voy por n=3 continuare a ver que pasa. Voy por n=4 siguen coincidiendo (reviso cuadros anteriores) me parece que es suficiente,* ***realmente no creía que pudiera*** *(REA) obtener una forma más sencilla pero por obra del destino ocurrió. Además* ***aprendí*** *que puede considerar algunas sucesiones de números entero,* ***me encuentro satisfecho*** *(REA) valió la pena explicarle a la chica.*"

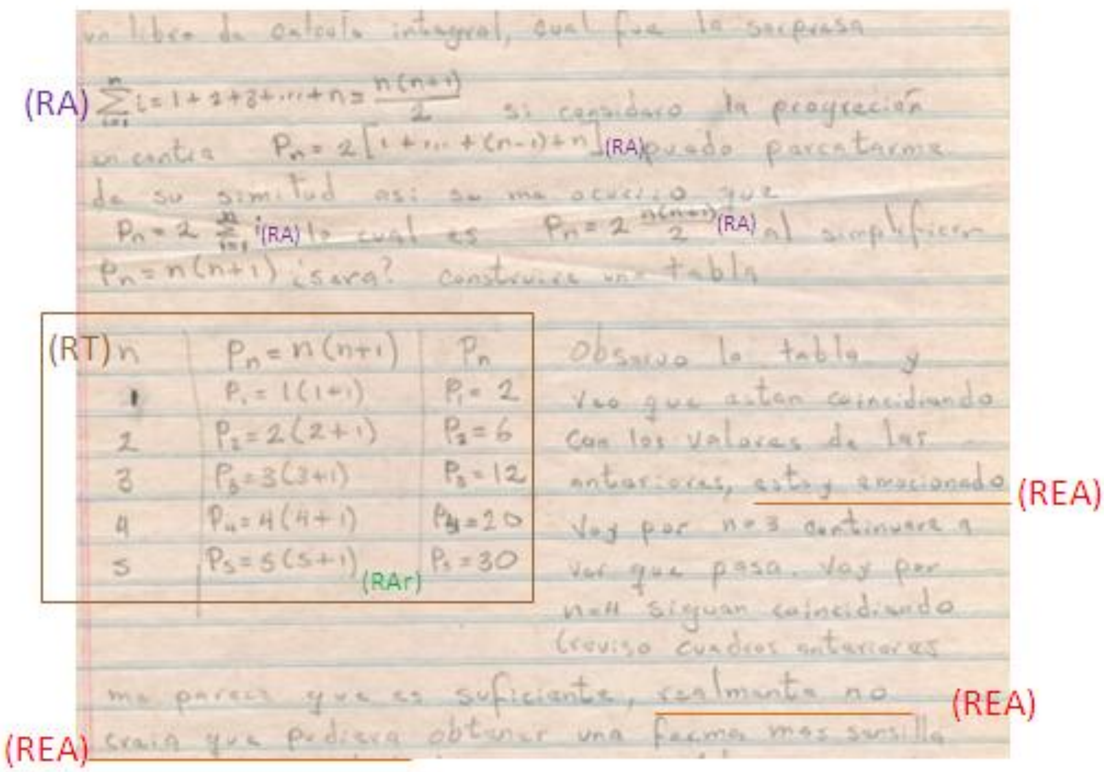


Figura 20
Identificación de registros en parte del relato del protocolo original realizado por el profesor de matemática en formación inicial ②

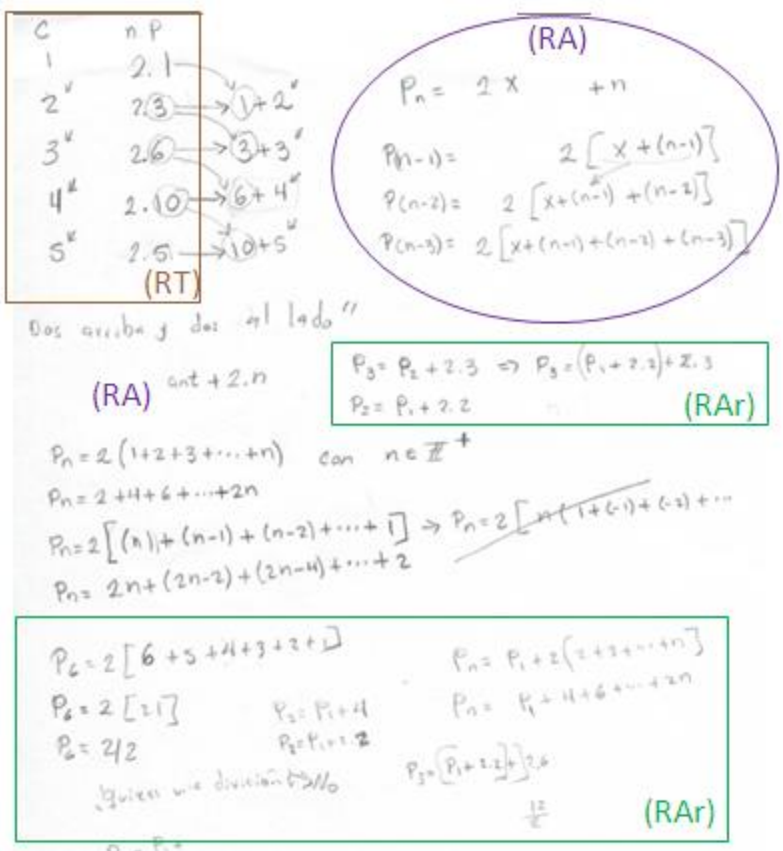


Figura 21
Identificación de registros en cálculos auxiliares realizados en la actividad 5 por el profesor de matemática en formación inicial ②

El recorrido realizado por el profesor de matemática en formación inicial ②, en el protocolo de la actividad 5 es el siguiente: **RLN (REA) → RGr → RT → RLN (RAr → REA → RAr → REA) → RT → RLN (RA → REA) → RT (RN) → RAr (RA) → RGr (RFI) → RAr → RLN (RA → REA → RAr) → RGr (RFI) → RLN (REA → RA →RAr → REA) → RAr → RA → RAr → RA → RLN (RA) → RT (RN→RAr) → RAr → RLN → RAr → RT (RN→RAr) → RLN (REA → RA → REA) → RT → RLN (REA).** Adicional, los cálculo auxiliares que se muestran en la figura w que no fueron citados durante el protocolo presentan el siguiente recorrido: **RT (RAr) → RA → RAr → RA → RAr**

El resolutor ③ sigue los dibujos de la secuencia planteada de forma correcta, identifica la figura con su respectivo número, cuenta la cantidad de puntos, y calcula la diferencia de puntos entre dos dibujos consecutivos, lo señala en la parte inferior, denota los tres dibujos de la secuencia como a, b, c, intenta hacer algunos cálculos a+3a+2b+c, pero no llega a nada, a figura, luego presenta una tabla de doble entrada de la cantidad de puntos versus la diferencia entre ellos, explica que leyó sobre sucesiones, y llega a la expresión: "*para encontrar la cantidad de números de la siguiente sucesión debería sumar dos a la diferencia anterior más los puntos anteriores*". El recorrido planteado por el resolutor es el siguiente:

RLN→RN→RGr→RAr→RLN→RT→RLN

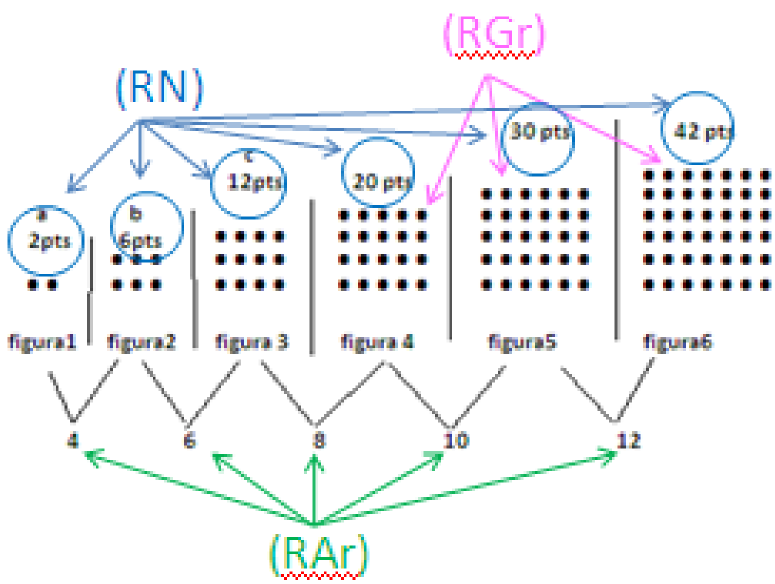


Figura 22
Identificación de los Registro Figural-Icónico, Registro Aritmético, y Registro Numérico de la transcripción del profesor de matemática en formación inicial ③

La transcripción del protocolo del resolutor ④ de la actividad 5, se empleó para identificar el cambio de los registros realizados: "(RLN) *Observo la formación de puntos ordenados en filas y columnas. Primero se tienen dos puntos, luego se* *agregan cuatro para sumar seis* (RAr)*, y se agregan una cierta cantidad para sumar doce* (RAr*). Es decir, la secuencia es 2, 6, 12,* (RN*) Presiento* (REA) *que si sumo números pares consecutivos* (RA) *podré obtener un patrón regular de secuencias y por ende la cantidad de puntos y la figura que desee en lo sucesivo. Ahora bien, quiero ver cual es la próxima figura, por lo tanto voy a dibujarla* (RGr)", lo que sigue se muestra en la figura:

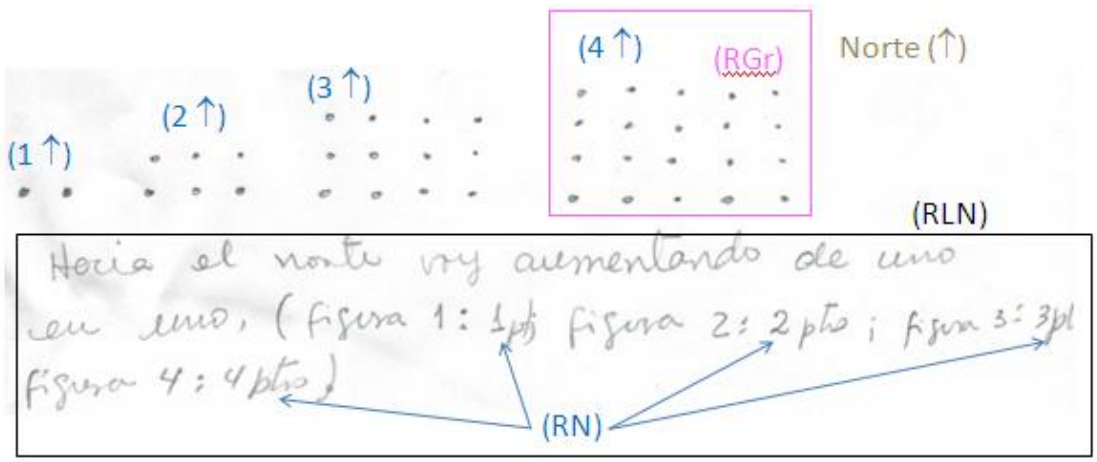


Figura 23
Identificación del registro Gráfico, Registro de la Lengua Natural, y Registro Numérico de la actividad 5 del profesor de matemática en formación inicial ④

"(RLN) *Siento* (REA) *que daré con la respuesta, solo con ver la conformación de ptos, bien sea hacia el norte (vertical) como hacia el este (horizontal). Voy a intentar lo que veo como solución: m: se mueven los puntos horizontales* (RA); *n: se mueven los puntos verticales* (RA). *Puedo decir entonces que la figura tendrá tantos puntos como m y n se tengan* (RA). *Mejor dicho, el producto de mxn* (RA) *será la cantidad de puntos que obtendré para la figura que desee formar. Entonces voy a plasmar lo siguiente: (Voy a tomar un poco de agua para airear ideas). Ok, aquí voy:*"

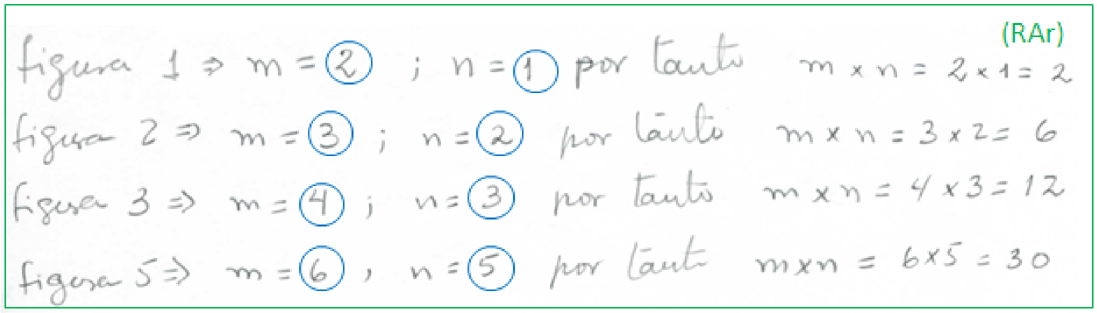


Figura 24
Identificación de los Registros Numéricos y Registros Aritméticos realizados en la actividad 5 por el profesor de matemática en formación inicial ④

"*Como ya se que la figura 4 tiene 20 puntos (5x4=20)* (RAr) *puedo construir cualquier figura adicional (figura 5 ⇒ 6x5 = 30)* (RAr).*Veo que en la medida en que aumento los puntos hacia la horizontal, disminuyo en 1 lo de la vertical.* (RA). *Pensándolo bien, tengo que ~~m~~ n = m-1 ⇒ mx(m-1)* (RA) *siendo la formula que me va a generar la figura con la cantidad de puntos que necesito. Vamos a darle un poco d e color!!* (REA). $F^{n}_{m} = mx(m-1)$ (RA), *claro debo hacer notar que n=m-1* (RA), *que para efectos de F=mxn* (RA) *solo que para mayor facilidad y comprensión a n la descompuse en (m-1) de manera a manipular y obtener los resultados con mayor facilidad de F=mxn con de n=m-1 y m≥2 siendo m ∈N.* (RA). *Creo* (REA) *que di con una explicación valedera. No fue muy complicado* (REA), *por el tipo de ejercicio, debido a que visualmente se muestra y se deduce con mayor facilidad el comportamiento del mismo*".

RLN (RAr → RN → REA → RA) → RGr → RLN (RN) → RLN (REA → RA) → RAr → RLN (RAr → RA → REA → RA → REA)

El resolutor ⑤ realiza un protocolo (código de escaneo: t1A51, t1A52) corto y conciso, identificaremos los registros en la transcripción realizada: "(RLN) *Una vez realizada la lectura de Freddy González. Busque la manera de cómo realizar el protocolo de la siguiente secuencia.-comencé a pensar que iba a ser con esos puntos, luego me pregunte que estrategia puedo aplicar. -le coloque una letra a cada figura (A, B, C)* (RA) *luego comencé a pensar que debo activar mi conocimiento y buscar se* *solucionar que iba a ser con esos puntos de cada figura, observe que los puntos aumentaban la fila y columnas de cada figura -comencé a pensar que debo hacer una tabla* (RT) *para indicar la cantidad de puntos verticales y horizontales que contienen las muestra -Luego se ocurrió en aplicar una ecuación que es* ***E=(N-1)^2+(N-1) con N≠0 y siendo N el número de puntos deseado en la base,*** (RA) *para luego realizar los cálculos matemáticos* (RAr) *de las figuras en los puntos en los puntos*”. De donde se desprende que el recorrido realizado por el estudiante es el siguiente:

RLN (RA)→ RT→ RLN (RA) → RAr →RLN

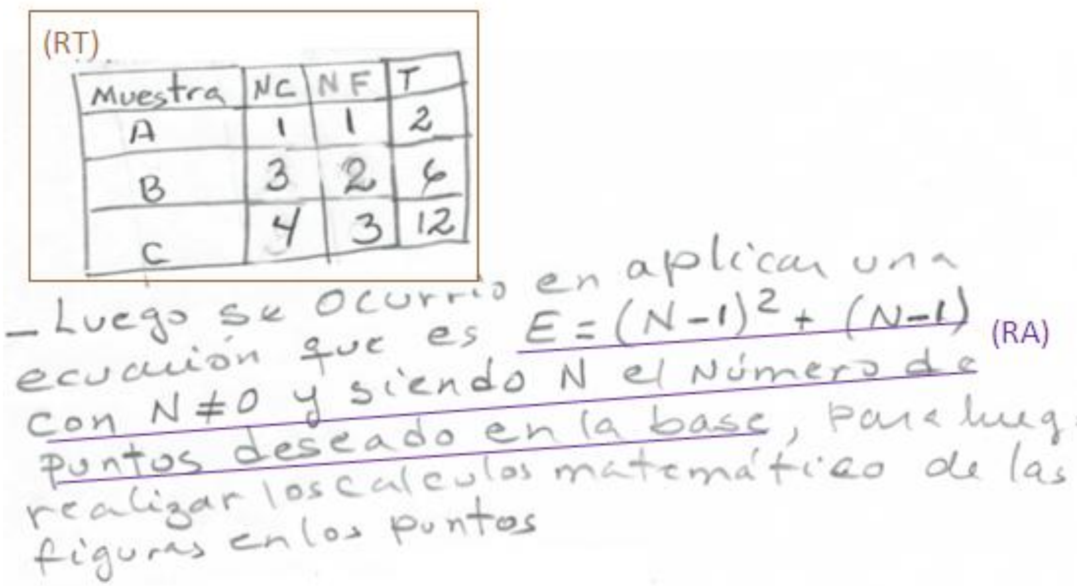


Figura 25
Identificación del Registro Tabular y el Registro Algebraico de la actividad 5 realizada por el profesor de matemática en formación inicial ⑤

(RAr)

$$
\begin{array}{ll}
E=(1-1)^2+(1-1)=0 & (\mathrm{RAr}_1)\\
 & \downarrow\\
E=(2-1)^2+(2-1)=1+1=2 & (\mathrm{RAr}_2)\\
 & \downarrow\\
=(3-1)^2+(3-1)=4+2=6 & (\mathrm{RAr}_3)\\
 & \downarrow\\
E=(4-1)^2+(4-1)=9+3=12 & (\mathrm{RAr}_4)\\
 & \downarrow\\
=(5-1)^2+(5-1)=16+4=20 & (\mathrm{RAr}_5)
\end{array}
$$

Figura 26
Descomposición del Registro Aritmético de la actividad 5 realizada por el profesor de matemática en formación inicial ⑤

Cuanto leemos con detenimiento el protocolo anterior nos percatamos que hay grandes vacíos en el relato, por ejemplo para llegar a la tabla, se infiere, empleando el Rastreo del Silencio, que contó la cantidad de filas y la cantidad de columnas de cada figura, se supone que decidió establecer que NC es la cantidad de columnas, y NF la cantidad de filas de una figura dada, donde la cantidad de puntos los designó con T. También resulta controversial el uso del término base y que en la tabla se puede observar (salvo en el error de la muestra A), que en la muestra B y C, NCxNF=T, y podría asemejarse al cálculo del área del rectángulo que se obtiene multiplicando la base por la altura respectiva, siendo justamente un rectángulo la forma que se observa en cada uno de los dibujos de la secuencia, esto también hace presumir que el resolutor se paseo por otra solución.

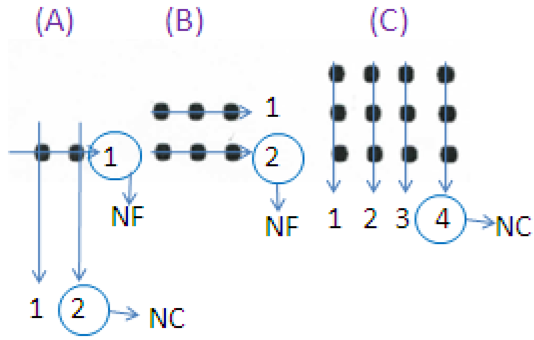


Figura 27
Posible proceso realizado por el profesor de matemática en formación inicial ⑤ previo a la realización de la tabla de la figura 25

Además, resulta interesante preguntarse de donde salió una ecuación tan poco natural como E=(N-1)^2+(N-1), y tratando de buscar una explicación plausible de cómo a partir de la observación del dibujo de la secuencia el resolutor llegó a esa ecuación tan rebuscada, presumimos que debió realizar una descomposición de la figura de donde a partir del conteo de la cantidad de puntos horizontales (lo cual llama, N base de la figura) observo un cierto (N-1) y un (N-1)^2, y al intentarlo graficar obtenemos la figura siguiente. De donde imaginamos que descompuso inicialmente la base en dos, como N=(N-1)+1, luego descompuso la figura también en dos y obtuvo un cuadrado de área (N-1)^2, y un rectángulo de base 1 y altura (N-1), por lo cual, la figura de la secuencia se obtiene a partir de la suma de (N-1)^2+(N-1).

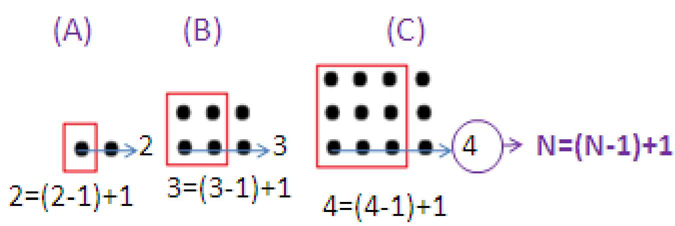


Figura 28
Posible aparición de la expresión de (N-1) a partir de la observación de la figura presentada por en la actividad 5 por el profesor de matemática en formación inicial ⑤

Para finalizar, que significado le dio el resolutor ⑤ al hecho de que cuando realiza los cálculos para N=1,2,3,4,5 obtiene 0,2,6,12,20, aunque no hace referencia alguna a que se obtiene **0 como la cantidad de puntos de la figura que tiene un (1) punto de base**, ¿cómo es esto?, simple esa figura no existe, porque la cantidad de puntos de la base con la que empieza la secuencia dada es "2" (dos), esto es muestra de lo mecánico con que se realizaron los cálculos.

Identificación de las Competencias Matemáticas de la Actividad 5

En la respuesta del resolutor ① de la actividad 5 resalta el hecho de que llegó a una expresión algebraica correcta (n^2+n) , donde n denota el número de la figura, no hay evidencia, pero se infiere que en algún momento continuó dibujando la secuencia, pero no empleo variable para designar la cantidad de puntos de la figura, a pesar de estar consciente de la dependencia que tiene del número de la figura, empleo las palabras fórmula y función indistintamente para referirse a la fórmula general buscada, y cabe preguntarse, si el resolutor esta consciente que es una función ¿por qué no empleo en ningún momento el signo de igualdad?, está tan consciente de la relación de dependencia que en la figura 14, donde se muestra los tratamientos aritméticos realizados, se observa explícitamente que emplea el número de la figura para calcular la cantidad de puntos de la misma, motivo por el cual se infiere que no logró concebir una forma correcta de denotar la relación de dependencia antes mencionada, motivo por el cual evitó el uso de una notación incorrecta. Resulta interesante preguntarle al resolutor cómo se escribe una función, o que ejemplifique una función para determinar sí involucra el signo de igualdad. Resulta significativo el comentario "*Antes de hallar esa función que me genera la secuencia, había pensado que se comportaba "2 por algo*". Luego pensé que era 2 por el número de la figura más el resultado anterior", en este comentario el resolutor muestra otra función que también funciona, pero no encontró como calcular el primer término empleando este enunciado.

Cuadro 34
Competencias matemáticas inferidas de la solución de la actividad 5 del profesor de matemática en formación inicial ①:

Competencia de Representación	* Empleo representaciones: en la lengua natural, emocional-afectiva, tabular, numérica, algebraica, figural-icónica, y aritmética: **RLN (REA) → RT (RN) → RLN (REA) → RA+RFI → RAr → RLN (REA) (RAr) (RA) (RAr) (REA)**
Competencia de Simbolización y Formalismo	* *Designa "n" como el número de la figura* * No emplea ninguna variable para denotar la cantidad de puntos de la figura. * Establecer la expresión n^2+n * Establece en lenguaje natural otra fórmula que funciona: 2 por el número de la figura más el resultado anterior *[S(n)=2.n+S(n-1)]* * Ejemplifica la forma alternativa como 2.2+2 * Uso de la implicación lógica Si $n=1 \Rightarrow (1)^2+1=1+1=2$ *Uso del signo igual: operador $(1)^2+1=1+1=2$
Competencia de Ayudas y herramientas	* Contar la cantidad de puntos de cada dibujo de la secuencia * *Descomponer la figura en dos parte, contó la cantidad de puntos de cada parte* * *Designar n como el número de la figura* * Comprobar la fórmula para números particulares (n=1,2,3,4,5,35) * *Continuar la secuencia gráfica* * No identifico explícitamente la forma de las figuras de la secuencia
Competencia de Pensamiento Matemático	* Deducción de una expresión a partir de la información gráfica aportada * Estable la relación entre el número de la figura y la cantidad de puntos, pero no entre variables * Uso casos particulares como método de comprobación * Muestra indicios de la habilidad para usar el lenguaje algebraico en la comunicación de ideas * Muestra indicios del pensamiento algebraico contextual y simbólico * Emplea la abstracción para deducir dos expresiones a partir de la información gráfica
Competencia de Planteamiento y Resolución de Problemas	* Logra establecer la expresión n^2+n * Muestra la comprobación de la fórmula para números particulares (n=1,2,3,4,5,35) * Logra establecer en lenguaje natural otra fórmula que funciona: 2 por el número de la figura más el resultado anterior * Describe, de forma incompleta, el proceso empleado para encontrar la fórmula
Competencia de Razonamiento Matemático	* Observar la secuencia y establecer que aumenta * Contar la cantidad de puntos de cada dibujo de la secuencia * Realizar una tabla de doble entrada *(número de la figura versus cantidad de puntos de la figura)* * *Continuar dibujando la secuencia* * *Descomponer la figura en dos parte, contó la cantidad de puntos de cada parte* * *Designar n como el número de la figura* * Establecer la expresión n^2+n * Verificar la expresión para números particulares (n=1,2,3,4,5) * Establece en lenguaje natural otra fórmula que funciona: 2 por el número de la figura más el resultado anterior *[S(n)=2.n+S(n-1)]* * Ejemplifica la forma alternativa como 2.2+2

En cuanto al escrito presentado por el resolutor ③, hay que resaltar, lo corto, que presenta una estrategia nueva, (no se había tratado en las actividades desarrolladas) que es la búsqueda de la regularidad empleando la diferencia entre la cantidad de puntos de dos figuras consecutivas, también hay que resaltar durante en el relato expresa: "*investigue de sucesiones*", sin embargo, no hace mayor referencia a que aprendió, que buscó, qué libros empleó. Y el otro aspecto que no se puede dejar de mencionar, es que evita el uso del lenguaje algebraico, lo cual es contradictorio por el hecho de ser un estudiante cursante de Álgebra Lineal.

Cuadro 35
Competencias matemáticas inferidas de la solución de la actividad 5 del profesor de matemática en formación inicial ③:

Competencia de Representación	* Empleo representaciones: en la lengua natural, numérica, gráfica, tabular: **RLN→RN→RGr→RAr→RLN→RT→RLN**
Competencia de Ayudas y herramientas	* Contar la cantidad de puntos de cada dibujo de la secuencia * *Continuar la secuencia gráfica* * No identifico explícitamente la forma de las figuras de la secuencia
Competencia de Pensamiento Matemático	* No muestra indicios de la habilidad para usar el lenguaje algebraico en la comunicación de ideas * Muestra indicios del pensamiento algebraico contextual * Emplea la abstracción para deducir un enunciado a partir de la información gráfica
Competencia de Planteamiento y Resolución de Problemas	* Logra establecer en lenguaje natural un enunciado que funciona * Describe, de forma incompleta, el proceso empleado para encontrar la fórmula
Competencia de Razonamiento Matemático	* *Identifica invariantes en la secuencia* * Continuar dibujando la secuencia * Contar la cantidad de puntos de cada dibujo de la secuencia * Realizar una tabla de doble entrada *(cantidad de puntos de la figura versus diferencia entre dos consecutivos)* * Establece en lenguaje natural la fórmula que funciona: "*para encontrar la cantidad de números de la siguiente sucesión debería sumar dos a la diferencia anterior más los puntos anteriores*"

En cuanto a la solución escrita del resolutor ④ es importante mencionar que muestra una descripción sencilla del proceso válido y correcto, aunque llega a una fórmula infuncional, no aplicable, porque para calcular la cantidad de puntos de una figura necesito como dato conocer la cantidad de puntos horizontales o verticales de la figura, este laberinto se genera porque explícitamente el resolutor no realiza la relación entre el número de la figura y la cantidad de puntos de la respectiva figura, (imaginamos que la observó, incluso que en algún momento la dio por sentada). Cuando escribió: "*figura 1 $\Rightarrow$ m=2; n=1 por tanto mxn =2x1=2*" se observa que n coincide con el número de la figura, pero esta deducción conllevo al resolutor a intentar escribir una fórmula de dos variables, pero al establecer la relación entre n y m como n=m-1 reformula la expresión mxn como mx(m-1). Otro hecho que pudo haber jugado en contra es el hecho de que no comprueba la fórmula F=mxn, sino realiza cálculos empleando la expresión mxn. También resalta el hecho de las variables empleadas m y n, mxn, rememora el orden de las matrices, consideramos que el resolutor estuvo influenciado por su conocimiento de matrices en la solución, en empleo de la F debió provenir de ser la f la letra con la que empieza la palabra fórmula y la mayúscula porque las matrices se denotan con letras mayúsculas, el hecho de que la figura fueran arreglos rectangulares que el resolutor descompuso en filas y columnas (corroborando la especulación), de un modo poco inusual empleando puntos cardinales (norte y sur) lo cual puede ser indicio de que el resolutor está influenciado por su práctica profesional que puede estar relacionadas con asignaturas como física, sociales o geografía.

Cuadro 36
Competencias matemáticas inferidas de la solución de la actividad 5 del profesor de matemática en formación inicial ④:

Competencia de Representación	* Empleo representaciones: en la lengua natural, emocional-afectiva, tabular, numérica, algebraica y aritmética: **RLN (RAr $\rightarrow$ RN $\rightarrow$ REA $\rightarrow$ RA) $\rightarrow$ RGr $\rightarrow$ RLN (RN) $\rightarrow$ RLN (REA $\rightarrow$ RA) $\rightarrow$ RAr $\rightarrow$ RLN (RAr $\rightarrow$ RA $\rightarrow$ REA $\rightarrow$ RA $\rightarrow$ REA)**
Competencia de Simbolización y Formalismo	* Designa m, movimiento de los puntos horizontales (*cantidad de columnas*) * Designa n, movimiento de los puntos verticales (*cantidad de filas*) * Establece una expresión para la cantidad de puntos de cada figura será mxn * Establece relación entre la cantidad de puntos horizontales y verticales: n=m-1 * Establece la notación de una función de dos variables $F_m^n = mx(m-1)$, pero la tacha * Establece la fórmula F=mxn con n=m-1 y m$\geq$2, m$\in$N * Uso de la implicación lógica: (Figura 1 $\Rightarrow$ m=2; n=1 por tanto mxn = 2x1 = 2), (figura 5 $\Rightarrow$ 6x5=30) *Uso del signo igual: operador 4x3=6, expresión de una relación de dependencia n=m-1, F=mxn
Competencia de Ayudas y herramientas	* Descompone la figura en dos parte: filas y columnas * Continua dibujando la siguiente figura de la secuencia * Calcula la cantidad de puntos de las figuras 1,2,3,4,5, identificando el número

	de la figura, la cantidad de puntos horizontales (m), la cantidad de puntos verticales (n) y e de la c * Comprueba la expresión para números particulares (n=1,2,3,4,5) * No identifico explícitamente la forma de las figuras de la secuencia
Competencia de Pensamiento Matemático	* Establece la contención de una figura en la siguiente: identifica la cantidad de puntos de cada figura, a partir de la anterior: 2, 2+4=6, 6+x=12 * Realiza la conjetura de sumar números pares consecutivos * Identifica que la cantidad de puntos crecen hacia el norte de 1 en 1, (aumento de la cantidad de filas de 1 en 1) * Establece una expresión para la cantidad de puntos de cada figura será mxn * Establece relación entre la cantidad de puntos horizontales y verticales: n=m-1 * Establece la notación de una función de dos variables $F_m^n = mx(m-1)$, pero la tacha * Establece la fórmula F=mxn con n=m-1 y $m \geq 2$, $m \in N$ * No establece relación entre el número de la figura y la cantidad de puntos * Deducción de una expresión a partir de la información gráfica aportada * Uso casos particulares como método de comprobación * Muestra indicios de la habilidad para usar el lenguaje algebraico en la comunicación de ideas * Muestra indicios del pensamiento algebraico contextual y simbólico * Emplea la abstracción para deducir dos expresiones a partir de la información gráfica
Competencia de Planteamiento y Resolución de Problemas	* Realiza la conjetura de sumar números pares consecutivos * Muestra la comprobación de la expresión para números particulares (n=1,2,3,4,5,35) * Establece una expresión para la cantidad de puntos de cada figura será mxn * Establece la notación de una función de dos variables $F_m^n = mx(m-1)$, pero la tacha * Establece la fórmula F=mxn con n=m-1 y $m \geq 2$, $m \in N$ * Muestra una fórmula infuncional * Describe el proceso empleado para encontrar la fórmula
Competencia de Razonamiento Matemático	* Observa filas y columnas en las figuras de la secuencia * Identifica la cantidad de puntos de cada figura, a partir de la anterior: 2, 2+4=6, 6+x=12 * Identifica la secuencia 2, 6, 12 * Realiza la conjetura de sumar números pares consecutivos * Continua dibujando la siguiente figura de la secuencia * Identifica que la cantidad de puntos crecen hacia el norte de 1 en 1, (aumento de la cantidad de filas de 1 en 1) * Designa m, movimiento de los puntos horizontales (*cantidad de columnas*) * Designa n, movimiento de los puntos verticales (*cantidad de filas*) * Establece una expresión para la cantidad de puntos de cada figura será mxn * Calcula la cantidad de puntos de las figuras 1, 2, 3, 4 y 5, identificando el número de la figura, la cantidad de puntos horizontales (m), la cantidad de puntos verticales (n) * Establece relación entre la cantidad de puntos horizontales y verticales: n=m-1 * Establece la notación de una función de dos variables $F_m^n = mx(m-1)$, pero la tacha * Establece la fórmula F=mxn con n=m-1 y $m \geq 2$, $m \in N$ * No establece relación entre el número de la figura y la cantidad de puntos *No identifica explícitamente la forma de la figura *No identifica en lenguaje natural que m y n son números consecutivos, los relaciona en función de aumenta y disminuye

	* La fórmula no permite calcular la cantidad de puntos de una determinada figura, necesito saber la cantidad de puntos de m (de la fila) o de n (columna) para poder aplicar la fórmula

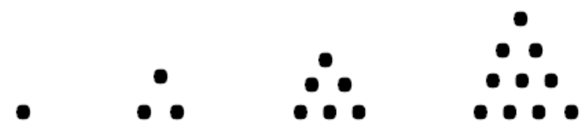
En cuanto al protocolo planteado del resolutor ⑤hay que resaltar que al igual que el resolutor ④ llegó a una fórmula infuncional, a primera vista la ecuación, como la llama el profesor de matemática en formación inicial, $E=(N-1)^2+(N-1)$, es equivalente a $E=n^2+n$, lo cual nos hace pensar en que la fórmula es correcta, el problema se presenta en quién es n, de acuerdo a lo establecido por el resolutor, "n es el número de puntos deseados en la base" debo saber cuántos puntos hay en la base de la figura x para poder calcular el número de puntos de esa figura. El resolutor muestra un error en el conteo de la cantidad de columnas de la muestra A, por los borrones en las filas siguientes se infiere que intento realizar una suma. No establece ninguna relación entre el número de la figura y la cantidad de puntos de la figura, puede obedecer al hecho de que el resolutor designo la figura 1 por A, la figura 2 por B, y la figura 3 por C, y al realizar la tabla el número de la figura no aparecía como dato. El resolutor uso de la palabra ecuación en lugar de fórmula general.

Cuadro 37
Competencias matemáticas inferidas de la solución de la actividad 5 del profesor de matemática en formación inicial ⑤:

Competencia de Representación	* Empleo representaciones: en la lengua natural, algebraica, tabular, numérica, y aritmética: **RLN (RA)→ RT→ RLN (RA) → RAr →RLN**
Competencia de Simbolización y Formalismo	* Designa como A a la figura 1, B a la figura 2, C ala figura3 * *Designa NC: cantidad de columnas de la figura, NF: cantidad de filas de la figura, T: cantidad de puntos de la figura* * Establece la ecuación $E=(N-1)^2+(N-1)$, con $N\neq0$, siendo N el número de puntos deseados en la base *Uso del signo igual: operador 1+1=2, expresión de una relación de dependencia $E= (N-1)^2+(N-1)$
Competencia de Ayudas y herramientas	* Designa como A a la figura 1, B a la figura 2, C ala figura3 * Observa que los puntos aumentaban la fila y las columnas de cada figura * *Designa NC: cantidad de columnas de la figura, NF: cantidad de filas de la figura, T: cantidad de puntos de la figura* **Cuenta la cantidad de filas y columnas de cada figura* * Realiza una tabla de cuatro entradas (muestra, NC, NF, T) donde se desprende del número de la figura al emplear las letras A, B, C * Cuentas la cantidad de puntos de cada figura y los coloca en la tabla en la columna T

	* Cuenta erróneamente el número de la columna de A (figura) *Realiza cálculos para N=1,2,3,4,5, obteniendo como resultado 0,2,6,12,20 * No continua dibujando la siguiente figura de la secuencia * No establece relación entre el número de la figura y la cantidad de puntos * No identifica explícitamente la forma de la figura * Descompone la figura en dos parte: filas y columnas
Competencia de Pensamiento Matemático	* No considera el número de la figura * No establece relación entre el número de la figura y la cantidad de puntos * Deducción de una expresión a partir de la información gráfica aportada * Uso casos particulares como método de comprobación * Muestra indicios de la habilidad para usar el lenguaje algebraico en la comunicación de ideas * Muestra indicios del pensamiento algebraico simbólico * Emplea la abstracción para deducir dos expresiones a partir de la información gráfica
Competencia de Planteamiento y Resolución de Problemas	* Realiza la conjetura de sumar números pares consecutivos * Muestra la comprobación de la expresión para números particulares (n=1,2,3,4,5,35) * Establece una expresión para la cantidad de puntos de cada figura será mxn * Establece la notación de una función de dos variables $F_m^n = mx(m-1)$, pero la tacha * Establece la fórmula F=mxn con n=m-1 y m$\geq$2, m$\in$N * Muestra una fórmula infuncional * Describe el proceso empleado para encontrar la fórmula
Competencia de Razonamiento Matemático	* Designa como A a la figura 1, B a la figura 2, C ala figura3 * Observa que los puntos aumentaban la fila y las columnas de cada figura * *Designa NC: cantidad de columnas de la figura, NF: cantidad de filas de la figura, T: cantidad de puntos de la figura* **Cuenta la cantidad de filas y columnas de cada figura* * Realiza una tabla de cuatro entradas (muestra, NC, NF, T) donde se desprende del número de la figura al emplear las letras A, B, C * Cuentas la cantidad de puntos de cada figura y los coloca en la tabla en la columna T * Cuenta erróneamente el número de la columna de A (figura) * Establece la ecuación $E=(N-1)^2+(N-1)$, con N$\neq$0, siendo N el número de puntos deseados en la base *Realiza cálculos para N=1,2,3,4,5, obteniendo como resultado 0,2,6,12,20 * No continua dibujando la siguiente figura de la secuencia * No establece relación entre el número de la figura y la cantidad de puntos * No identifica explícitamente la forma de la figura * La ecuación no permite calcular la cantidad de puntos de una determinada figura, necesito saber la cantidad de puntos de la base N

Actividad No.12: Lee la versión preliminar del artículo “Un protocolo escrito sobre la búsqueda de un patrón”, y realiza una reflexión-comparativa con el protocolo que elaboraste. Realiza un protocolo del proceso seguido en la búsqueda del patrón de la siguiente secuencia



Identificación de los Registros de la Actividad 12

Es posible que la primera acción del profesor de matemática en formación inicial ② al revolver la actividad 12 hubiese sido continuar la secuencia (RGr: dibujando la figura 5, 6), luego, establece el número de la figura (contando el número de la figura, RN:1,2,3,4,5,6), sigue demarcando en cada figura la anterior, (empleando un RFI dibuja un triángulo en cada figura resaltando la anterior), cuenta la cantidad de puntos de cada figura (RN:1,3,6,10,15,21), establece una relación entre la cantidad de puntos de una figura y la anterior (RAr:1+2=3), continua contando la cantidad de puntos de cada fila de la figura (RN: escribe a la derecha de cada fila la cantidad de puntos que tiene). Estas inferencias realizadas por la investigadora se relacionan con el Rastreo del Silencio a partir de la figura 29, es importante destacar que no se observó ningún registro algebraico.

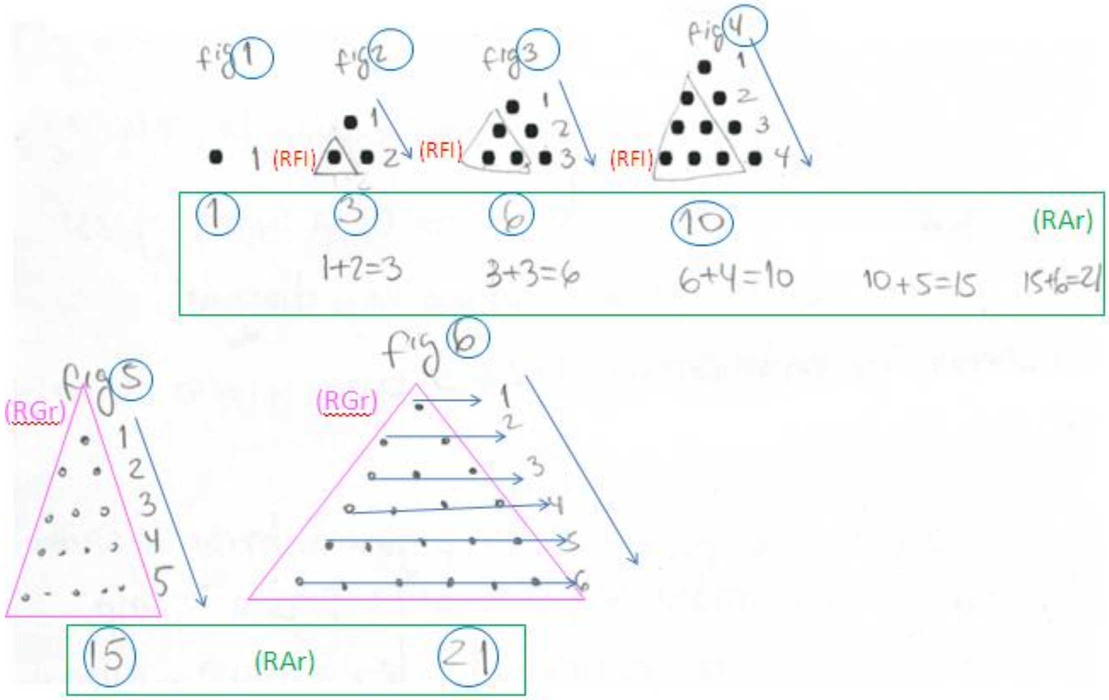


Figura 29
Identificación de los registros iniciales realizados por el profesor de matemática en formación inicial ②en la actividad 12

A continuación, seguiremos identificando los registros en la transcripción del protocolo realizado por el profesor de matemática en formación inicial ② en la actividad 12, los cual puede verificar o refutar el Rastreo del Silencio realizado en el párrafo anterior: "(RLN) *Encontré el comportamiento, el patrón como van aumentando, pero no se me ocurre* ***como diablos*** (REA) ***voy a decir todo eso que está en mi cabeza que observe****, dibuje, y comprobé a través del cálculo y el dibujo de la figura,* Voy a intentarlo, no quiero decir que pueda hacerlo (REA): *lo primero que hice fue contar puntos, contar la cantidad de cada figura y escribir el número correspondiente debajo, así escribí: 1, 3, 6, 10* (RN). *Estoy notando que las rayas diagonales que trace bien pudieron ser horizontales, bueno, continúo tratando de recoger los pasos: luego observo que la figura 1 está contendía en la 2, la segunda en la tercera, la tercera en la cuarta, y así, debe seguir, decido marcarlo con una raya diagonal* [RFI: se observa un triángulo no un raya diagonal]. *Observo que en la figura 2, 1+2=3* (RAr), *bueno quiero decir a la cantidad de puntos de la figura* *anterior le sumo 2 y obtengo la cantidad de puntos de la figura 2, me percato que no he numerado las figuras* (RN), *aunque implícitamente estoy considerando ese número, así: Cantidad de punto de la figura anterior + n de la figura= cantidad de puntos de la figura"* [RA: se observa en la figura 30, seguido de un REA]"

En este momento recapitularemos en el posible recorrido a través del Rastreo del Silencio que estaba ceñido en el primer párrafo del análisis como: RGr → RN → RFI → RN → RAr → RN, pero que al contrastarlo con el relato del resolutor en el párrafo anterior, existen ciertos hechos que no cambian los registros identificados sino su orden: "*lo primero que hice fue contar puntos, contar la cantidad de cada figura*", así reformamos el recorrido parcial que llevamos de la manera siguiente: **RN → RFI → RAr → RN → RGr → RN → RLN (REA→RA→REA)**

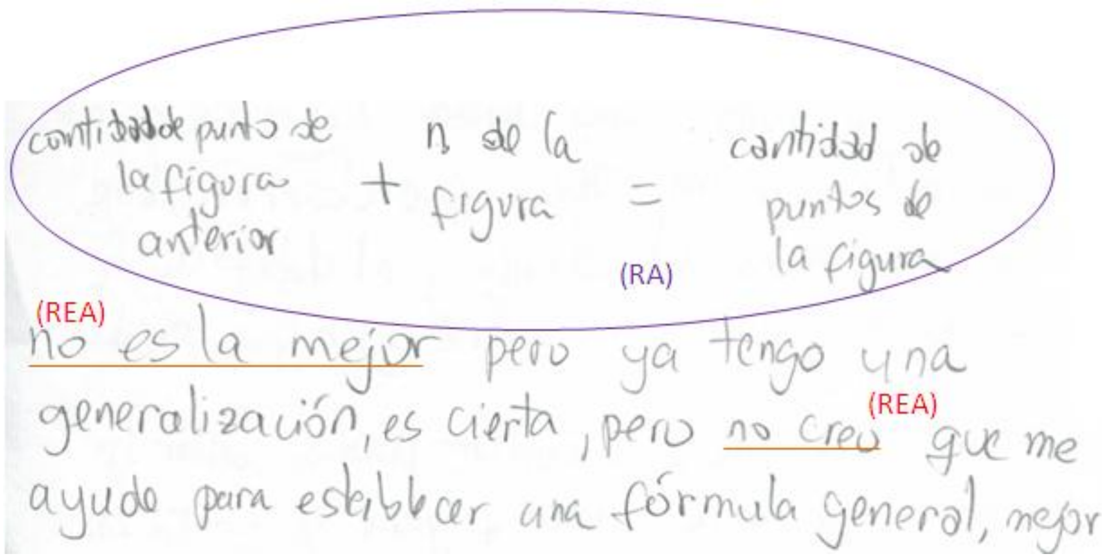


Figura 30
Identificación del registro algebraico realizado empleando la lengua natural para establecer una conjetura en la actividad 12 por el profesor de matemática en formación inicial ②

El siguiente paso desarrollado se observa en la figura 31, se puede apreciar que se organizaron en una tabla de doble (RT) entrada el números de la figura (n) y la cantidad de puntos de cada figura (S(n)), el empleo de las variables n y S(n) sin especificar quienes son (en ningún momento del protocolo que se realiza la denotación), lo siguiente, es el cálculo del número de puntos de una figura, considerando la relación entre n y S(n) y descomposición de dos sumando, siendo una de los sumandos la cantidad de puntos de la figura anterior. A esto último hay una consideración relevante, el resolutor escribe: “S(1)=1” y de 2 hasta 6, establece “S(2)=3=2+1” (RAr), pero ¿por qué no establece la suma también para S(1)?, será porque no concibe ¿cuál es la cantidad de puntos de la figura anterior a la figura 1?. La falta de la visualización de una relación conlleva a reconducir el proceso en torno a la multiplicación, y después de escribir S(6) empleando distintas operaciones (RAr) conjetura que S(n)=(n-1)(n-2)+1 (RAr), la desestima al no observarla en S(7).

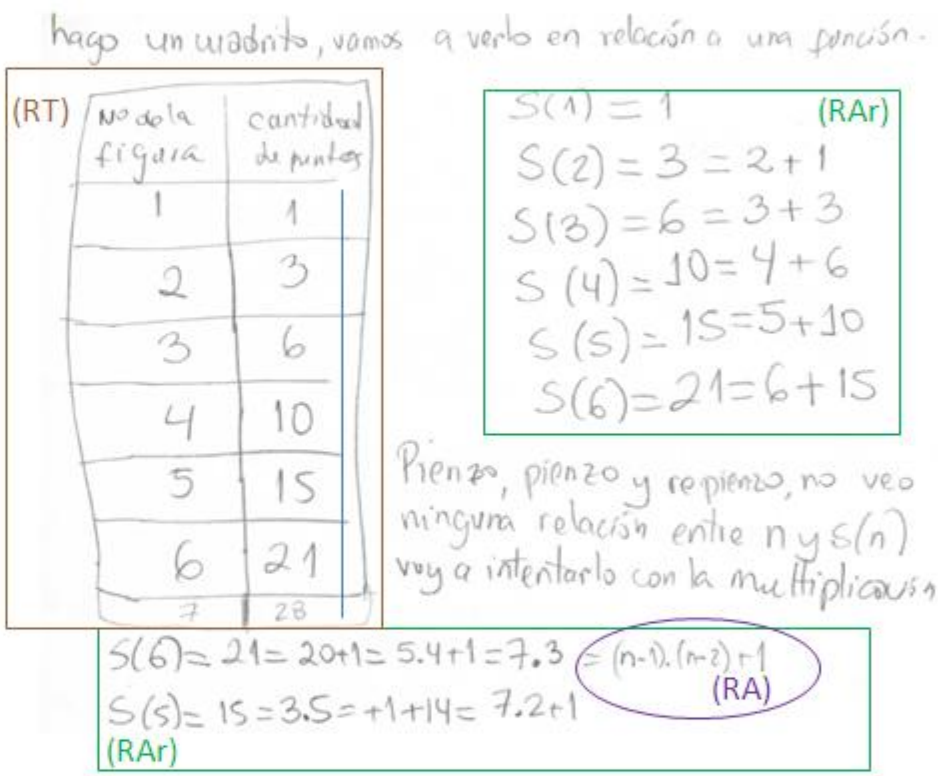


Figura 31
Identificación de Registros Aritméticos y Tabulares (vertical) realizados por el profesor de matemática en formación inicial ② en la actividad 12

Seguimos el análisis empleando la transcripción del protocolo: “(RLN) *Un paso pa´lante y tres para atrás, esto no me sirve, vamos otra vez,* (REA) *siento calor, hambre, hasta escucho el segundero del reloj que siempre pasa inadvertido seis y* *diez son pares, voy a volver a ver la secuencia de las figuras. El siguiente es la figura 7 tiene 28 puntitos, lo voy a anexar a la tabla, la figura 8 tiene 36, la 9 tiene 45, y la figura 10 tiene 54* (RAr) *empiezo a desesperarme, si soy capaz de ir sumando, tiene que haber un patrón para conseguir la fórmula voy a hacer la tabla* (RT), *pero esta vez horizontal*". La tabla horizontal se observa en la figura 32, donde también se aprecia un REA y el establecimiento de la conjetura que $S(n)=n^2-n+1$, y la desestima, porque sólo logra funcionar para n=1.

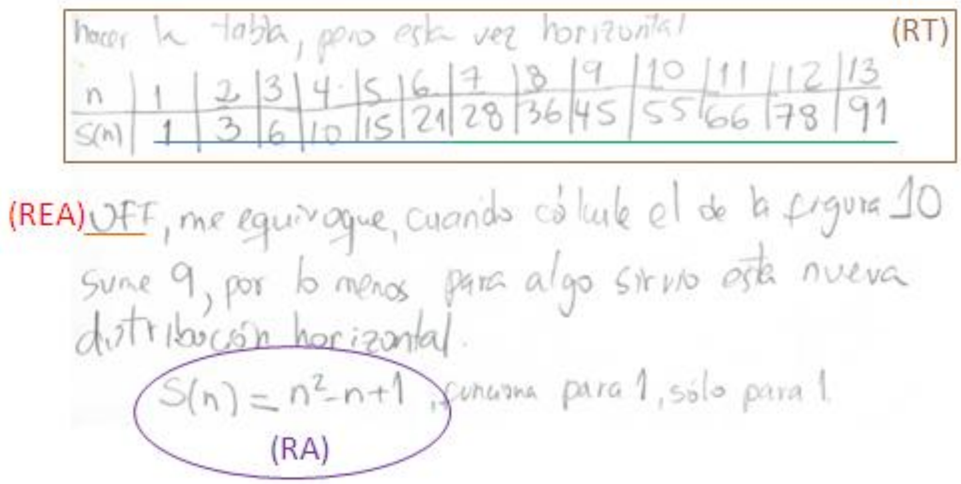


Figura 32
Identificación de Registros Tabular (vertical), Emocional-Afectivos y Algebraico realizados por el profesor de matemática en formación inicial ② en la actividad 12

Lo que sigue en el protocolo se observa en la figura 33, donde se emerge un Registro Geométrico: "***un triángulo por ser la mitad de un cuadrado***", que conlleva al resolutor a plantear una posible fórmula (RA) en función del área del cuadrado, la cual desestima emplearla para calcular la cantidad de puntos de la figura 1, 2, 3 y 4, luego, empleando un registro en lengua natural expresa: "*me siento* (REA) *cerca porque S(4) es 10 y obtuve 8, me falta algo*", continua con unos cálculo, donde se aprecia la multiplicación de dos números consecutivos divididos entre dos (RAr), luego se establece una fórmula del enunciado anterior (RA), y finaliza el protocolo con las siguientes palabras: "*Para llegar a esta fórmula me parece que fue clave* *observar* (REA) *que en la errada s(n)=n²/2, la imagen de 1, era ½, entonces debía multiplicar por 2, que es sencillamente el siguiente de "1""*

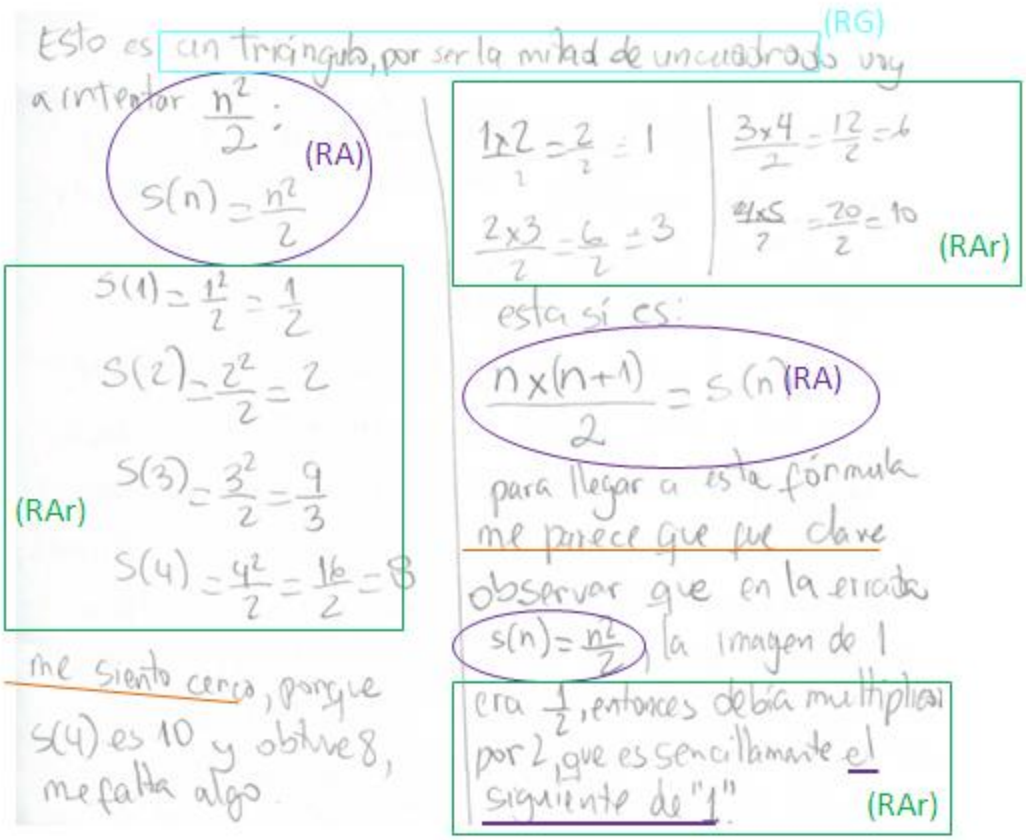


Figura 33
Identificación de Registro Geométrico (RG), entre otros realizados por el profesor de matemática en formación inicial ②en la actividad 12 para deducir la fórmula general de la secuencia dada de forma gráfica

Para finalizar, vamos a establecer el recorrido realizado por el profesor de matemática en formación inicial al resolver la actividad 12 referida al reconocimiento de patrones de una secuencia de configuraciones puntuales: **RN → RFI → RAr → RN → RGr → RN → RLN (REA → RA → REA) → RT (RN) → RAr → RLN (RA) → RAr → RA → RLN (REA → RAr) → RT (RN → RAr) → RLN (REA) → RA → RG → RA → RAr → RLN (REA) → RAr → RA → RLN (REA → RA → RAr → RA)**

Identificación de las Competencias Matemáticas de la Actividad 12

Cuadro 38
Competencias matemáticas inferidas de la solución de la actividad 12 del profesor de matemática en formación inicial ②:

Competencia de Representación	* Empleo representaciones: numérica, figural-icónica, grafica, aritmética, tabular, algebraica, en la lengua natural, emocial-afectivas, geométrica: RN → RFI → RAr → RN → RGr → RN → RLN (REA → RA → REA) → RT (RN) → RAr → RLN (RA) → RAr → RA → RLN (REA → RAr) → RT (RN → RAr) → RLN (REA) → RA → RG → RA → RAr → RLN (REA) → RAr → RA → RLN (REA → RA → RAr → RA)
Competencia de Simbolización y Formalismo	** Designar "n" como el números de la figura y S(n) la cantidad de puntos de cada figura* * Uso de dos símbolos diferentes para identificar la multiplicación (x,*) * Establece la fórmula general S(n)=nx(n+1)/2 * Uso del signo igual: para indicar cierta correspondencia (entre el número de la figura y la cantidad de puntos de la figura), operador (1+2=3), expresión de una relación de dependencia S(n)=n(n+1)/2
Competencia de Ayudas y herramientas	* Continua dibujando la secuencia * Identifica el número de la figura * Demarca en cada figura la anterior * Cuenta la cantidad de puntos en cada figura * Escribe a la derecha de cada fila la cantidad de puntos que tiene * Realiza una tabla de doble entrada número de la figura versus cantidad de puntos ** Designar "n" como el número de la figura y "S(n)" la cantidad de puntos de cada figura* * Realiza una tabla de doble entrada (vertical) número de la figura versus cantidad de puntos * Realiza una tabla de doble entrada (horizontal) número de la figura versus cantidad de puntos, y continua calculando la secuencia llega hasta S(13)=91 * No identifico explícitamente la forma de las figuras de la secuencia, sin embargo, estableció la relación con el cuadrado
Competencia de Pensamiento Matemático	* Identifica atributos invariantes de la figura: la anidación de la figura anterior, la descomposición en filas * Conjetura una relación entre la cantidad de puntos de una figura y la anterior * Conjetura S(n)=(n-1)(n-2)+1 * Desestima la conjetura S(n)=(n-1)(n-2)+1, al no identificarla en S(7) * Conjetura S(n)=n^2-n+1 * Desestima la conjetura S(n)=n^2-n+1, sólo funciona para 1 * Conjetura S(n)=n^2/2, a partir que un triángulo es la mitad de un cuadrado * Desestima la conjetura S(n)=n^2/2, al calcular S(1) * Establece S(n)=nx(n+1)/2 * Establece la relación del área del triángulo con el cuadrado en lugar del rectángulo * Estable la relación entre las variables * Emplea la abstracción para deducir diversas fórmulas posibles * Muestra indicios de la habilidad para usar el lenguaje algebraico en la comunicación de ideas * Muestra indicios del pensamiento algebraico contextual y simbólico *Uso casos particulares como método de comprobación (validar y desestimar)

	* Deducción de distintas fórmulas (erradas y correctas) a partir de la información gráfica aportada
Competencia de Planteamiento y Resolución de Problemas	* Realiza distintas conjeturas * Describe el proceso empleado para encontrar la fórmula
Competencia de Razonamiento Matemático	* Continuar dibujando la secuencia: figura 5 y 6 * Colocar el número de la figura * Contar la cantidad de puntos en cada figura * Identificar la figura anterior en la figura * Conjetura una relación entre la cantidad de puntos de una figura y la anterior * Identifica atributos invariantes de la figura: la anidación de la figura anterior, la descomposición en filas * Designar "n" como el número de la figura y "S(n)" la cantidad de puntos de cada figura * Realiza una tabla de doble entrada (vertical) número de la figura versus cantidad de puntos * Conjetura $S(n)=(n-1)(n-2)+1$ * Desestima la conjetura $S(n)=(n-1)(n-2)+1$, al no identificarla en $S(7)$ * Realiza una tabla de doble entrada (horizontal) número de la figura versus cantidad de puntos, y continua calculando la secuencia llega hasta $S(13)=91$ * Conjetura $S(n)=n^2-n+1$ * Desestima la conjetura $S(n)=n^2-n+1$, sólo funciona para 1 * Conjetura $S(n)=n^2/2$, a partir que un triángulo es la mitad de un cuadrado * Desestima la conjetura al calcular $S(1)$ * Establece $S(n)=nx(n+1)/2$ * Reconocer que formulaciones erradas * Reconocer que la secuencia aumenta

Actividad No.16: Realiza un protocolo para determinar la cantidad de diagonales que puede tener un polígono de cualquier número de lados. Se le sugiere dibujar polígonos de distintas cantidades de lados y traza sus diagonales. Crea una tabla para comparar la cantidad de lados y la cantidad de diagonales de cada polígono

Identificación de los Registros de la Actividad 16

El profesor de matemática en formación inicial ①, comenzó la realización de la actividad como se muestra en la figura 34, estableciendo las variables n y f(n), mostrando una tabla de doble entrada, y dibujando cuatro polígonos con sus respectivas diagonales (esta debe ser la primera acción ejecutada), luego presenta un escrito donde se observan dos interrupciones que lo alejan de lo distraen del proceso, y el error de llamar pentágono al polígono de siete (7) lados, en palabras del resolutor: “(RLN) *Primero empecé con un cuadrado (RG), debido a que el triángulo tiene 3 lados y no tiene diagonales, en cambio el cuadrado tiene 2 diagonales, realice mi figura geométrica y trace mis diagonales, me llamaron por teléfono, me levante atendí la llamada y a culminar la llamada, seguí el proceso de construcción. Pero tuve que leer de nuevo el problema para ver que es lo que estaba haciendo, seguí parea realizar la figura del pentágono y empecé a trazar las diagonales y a contarlas, las cuales me dieron cinco diagonales, fui agregando en la tabla al inicio los números de lados y el número de diagonales que se van contando* [RT(RN)]. *Comencé con la figura de un hexágono (6 lados) la dibuje toda fea, pero bueno, es una semejanza. Comencé a trazar las diagonales y a contarlas, después a escribirla en la tabla después de la figura del pentágono (7) lados, la dibuje y mi hijo llegó y me dijo que se eso era una malla o una figura para el estrés, yo le dije que no, que era un pentágono, ha el pentágono, como le dicen al sitio en el centro de la universidad y le dije si algo así. Bueno se me olvidó un poco lo que estaba haciendo en el proceso, me detuve, leí de nuevo que estaba haciendo y volví a retomar el desarrollo del problema, me faltaba trazar las diagonales empecé a trazarlas y a contarlas, el resultado lo escribí en la tabla. Bueno, ya con figuras geométricas de 4, 5, 6 y 7 lados y con sus números de diagonales podría deducir o tratar de generar una fórmula* (se observa un borrón)”

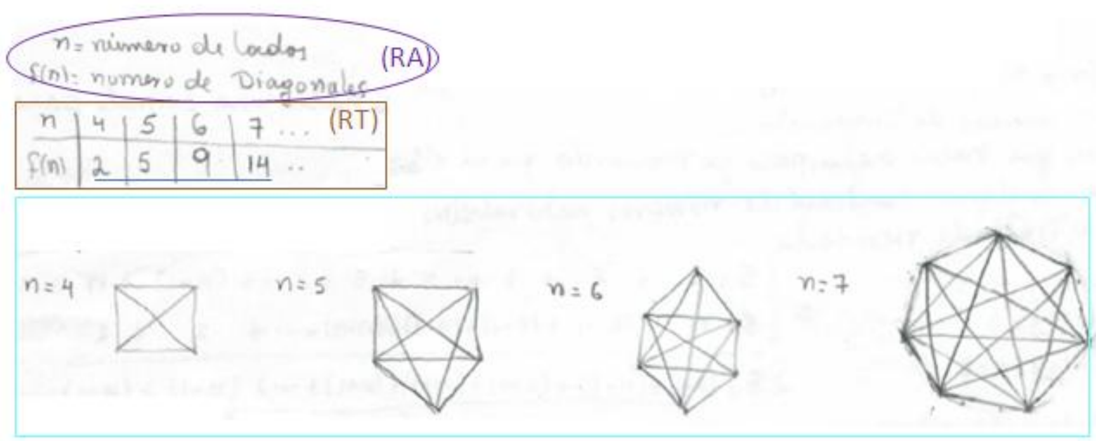


Figura 34
Identificación de los registro iniciales realizados por el profesor de matemática en formación inicial ① en la actividad 16

Luego, dibuja otra tabla de doble entrada, (figura 35) donde en lugar de f(n) emplea g(n), pero consideramos que son los mismos datos, no declara la variable g(n), motivo por el cual que consideramos que fue un descuido, por el comentario "*copiare la tabla de datos encontrados*", asumiremos que f(n)=g(n), designa S(n) como la suma de diagonales, luego deduce la fórmula para sumar "n" números naturales, estableciendo previamente la de sumatoria (en ambos caso, emplea la variable S), continua el relato: "(RLN) *¿por qué? Yo trate de deducir esta fórmula de sumas, como puede verse en la tabla anterior g(n) son el número de diagonales de acuerdo al número de lados de las figuras geométricas. Como puede verse que de dos diagonales pasa a cinco, después a nueve y después a catorce y así sucesivamente. No veo nada, no veo la relación. Me levanto de la mesa y dejo esa vaina ahí. Me voy* (REA) *al cuarto a dormir un rato son las 2 p.m. hasta luego.-Son las siete de la noche y vuelvo a retomar el problema. Lo leo con calma de nuevo haaa, Eureka! Veo ya luces (REA) como puede verse en la fig (1) cuando i_2 su suma (s) es 3 y el valor de g(n) que es el número de diagonales es 2, una diagonales menos, cuando es i_3 su suma es 6, el valor de g(n) es 5 una diagonal menos, cuando i_4 su suma es 10 y el valor de g(n) es 9 una diagonal menos y así sucesivamente.*"

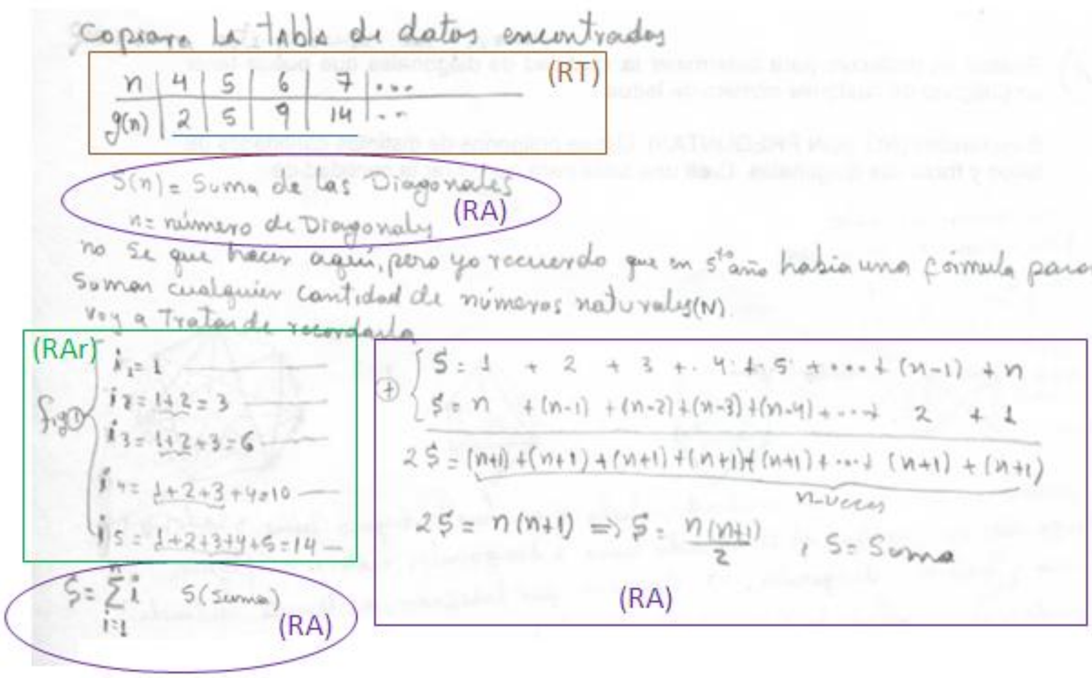


Figura 35
Identificación de los registro realizados por el profesor de matemática en formación inicial ① para deducir la fórmula de la suma de "n" números naturales

El relato del protocolo sigue en la figura II, donde el resolutor retoma la fórmula para sumar n números naturales y establece que g(4)=S(2)-1, [2=3-1] (en este caso, según el contexto, empleo S(n) para denotar la suma de los n números naturales), hay una diferencia de 1 entre los términos de la secuencia g(n) y S(n) (compara empleando el orden), es decir, el primer término de g(n) es g(4), el primer término de S(n) es S(2), el segundo término de g(n) es g(5), el primer término de S(n) es S(3), y así sucesivamente, g(5)=S(3)-1, g(6)=S(4)-1, g(7)=S(5)-1, [14=15-1], aunque esto no plantea tan explícitamente empleamos el Rastreo del Silencio a partir de la declaración en el párrafo anterior: *"una diagonal menos"*. Luego, siguiendo el relato, nos percatamos, que este razonamiento se corrobora en la figura identificado rastreando 37, lo que confirma que con el Rastreo del Silencio podemos inferir el razonamiento empleado por nuestros estudiantes a partir de lo escrito.

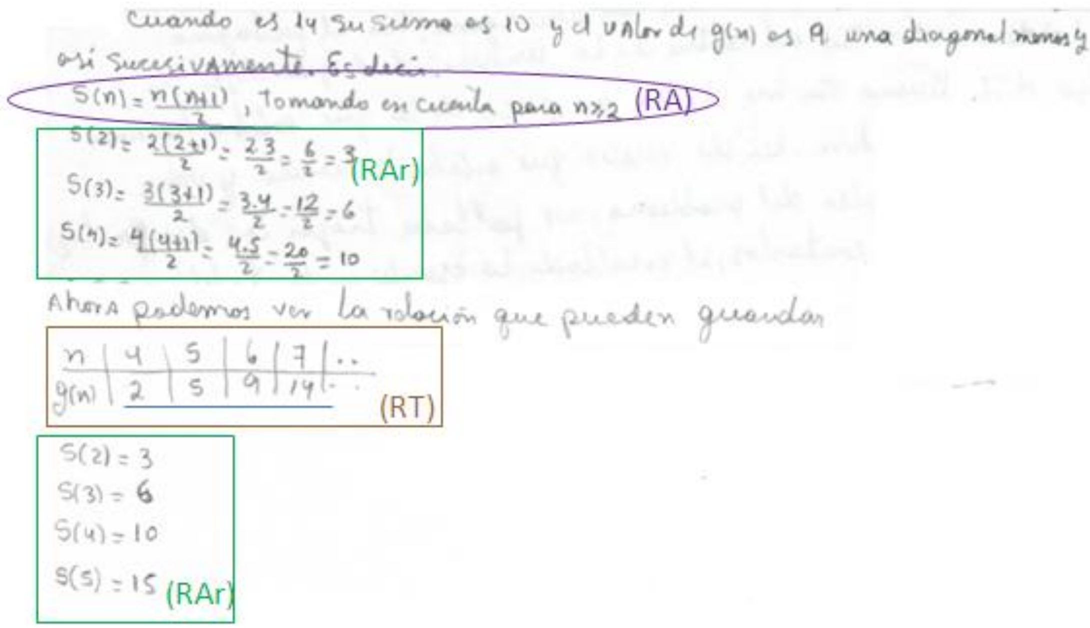


Figura 36
Comparación ingenua de dos secuencias numéricas realizadas por el profesor de matemática en formación inicial ① en la actividad 16

La continuación del protocolo se aprecia en la figura 37, donde se confirma la suposición hecha por la investigadora, empleando el Rastro del Silencio, y donde el profesor de matemática en formación inicial establece la relación entre las dos secuencias numéricas con las que esta trabajando, la cantidad de diagonales de los polígonos y la suma de los n números naturales. Es importante mencionar, que hasta este momento el empleo de la secuencia de los números naturales surgió de la idea de calcular la suma de las diagonales, idea expresada en la figura 36, aunque no llegó a consolidarse, conllevo a la incorporación de una secuencia auxiliar.

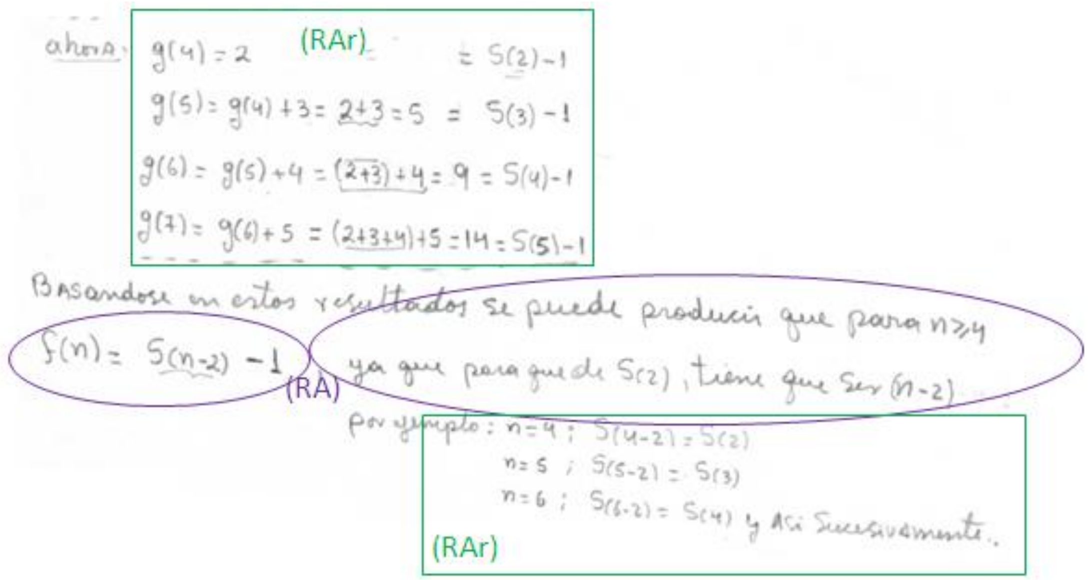


Figura 37
Establecimiento de la relación entre dos secuencias numéricas realizada por el profesor de matemática en formación inicial ① en la actividad 16

El relato sigue, y finaliza en la figura 38, donde luego de establecer la relación entre f(n) y S(n), calcula el término S(n-2) de la sucesión S(n) y la sustituye en la relación encontrada, y consigue una fórmula general para calcular la cantidad de diagonales de un polígono, y finalmente la verifica para n=4,5,6

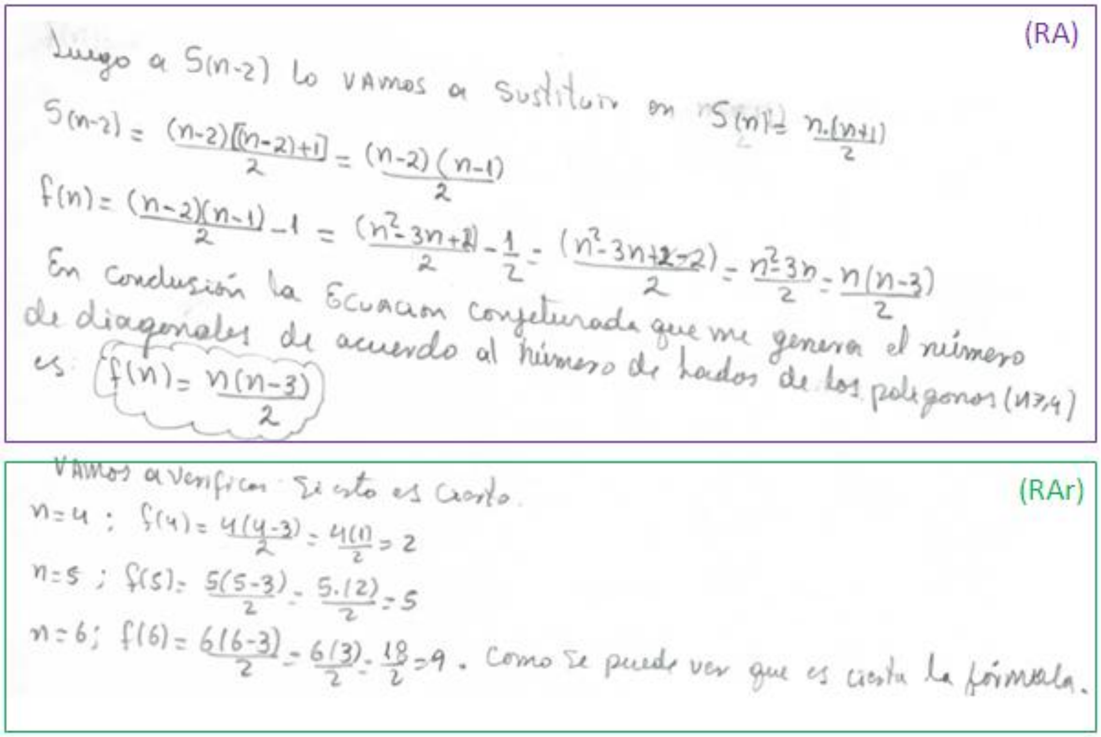


Figura 38
Establecimiento de la fórmula general realizada por el profesor de matemática en formación inicial ① en la actividad 16

Para finalizar, vamos a establecer el recorrido realizado por el profesor de matemática en formación inicial ① al resolver la actividad 12 referida al reconocimiento de patrones de una secuencia de configuraciones puntuales: **RG (RN) → RA → RT (RN) → RLN → RT (RN) → RA → RLN → RAr → RA → RA → RLN (REA) → RA → RAr → RT (RN) → RAr → RAr → RA → RAr → RA → RAr**

El profesor de matemática en formación inicial ② empieza el protocolo de la actividad 16, con un registro de la lengua natural donde explica que el enunciado se le hace muy conocido, sigue como se muestra en la figura 39, dibujando cinco polígonos: un triángulo, un cuadrado, un pentágono y dos hexágonos, traza y cuenta las diagonales de cada polígono y las resume en una tabla de dos columnas, en una columna identifica: “# de vértice = # de lados” y en siguiente línea escribe: “n=3”, de donde se observa que establece que trabajara con una variable que denotará como “n” a la cual le acredita dos significados equivalentes: número de vértice y número de lados, entre las cosas curiosas, comienza n=3 porque comienza la secuencia con un triángulo; mientras que el la otra columna, la etiqueta “diagonales”.

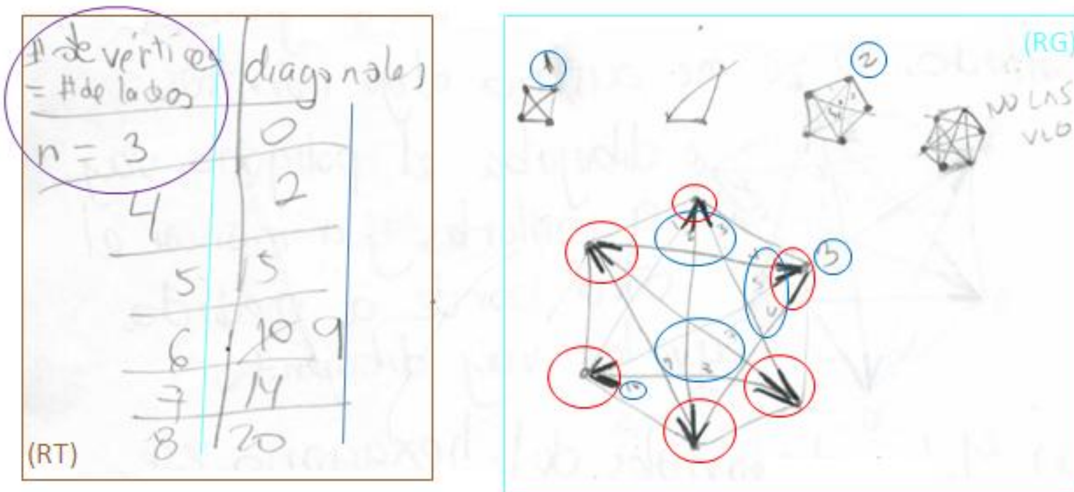


Figura 39
Identificación de los registro iniciales realizados por el profesor de matemática en formación inicial ② en la actividad 16

El protocolo continua con el narración: “(RLN) *Me esta costando un poco contar las diagonales del hexágono (del polígono de seis lados) por la forma del dibujo, pero hay algo que observe: de cada vértice de un cuadrado (4 lados) sale sólo una (1), de un pentágono (5 lados) salen dos (02) diagonales, pero aún no se cuántas diagonales tiene el hexágono, intenté contarlas, pero inicialmente conté 10, pero aún, el hexágono que dibuje primero era muy pequeño, claro tampoco soy la mejor dibujante, voy a hacer un tercer hexágono, dicen que a la tercera va la vencida, me estoy molestando, ya me parece un poco tedioso el no logran el resultado* (REA). *Ya se me ocurrió algo mientras dibujaba el polígono, voy a contarlas y a marcar el otro borde a medida que las voy dibujando* (RFI). *Son 9 las diagonales del hexágono, ese procedimiento lo voy a tener que implementar para el heptágono y el octágono. Hasta el momento he contado las diagonales de cuatro polígonos*”. Lo establecido en este párrafo se evidencia en la figura 40, donde el resolutor realiza una marca para indicar que la diagonal fue contada ya desde el otro vértice, también se aprecia la conjetura de que la cantidad de diagonales que sale de cada vértice varía según la cantidad de lados del polígono: “*de cada vértice de un cuadrado (4 lados) sale sola una (1) (1), de un pentágono (5 lados) salen dos (02) diagonales*”.

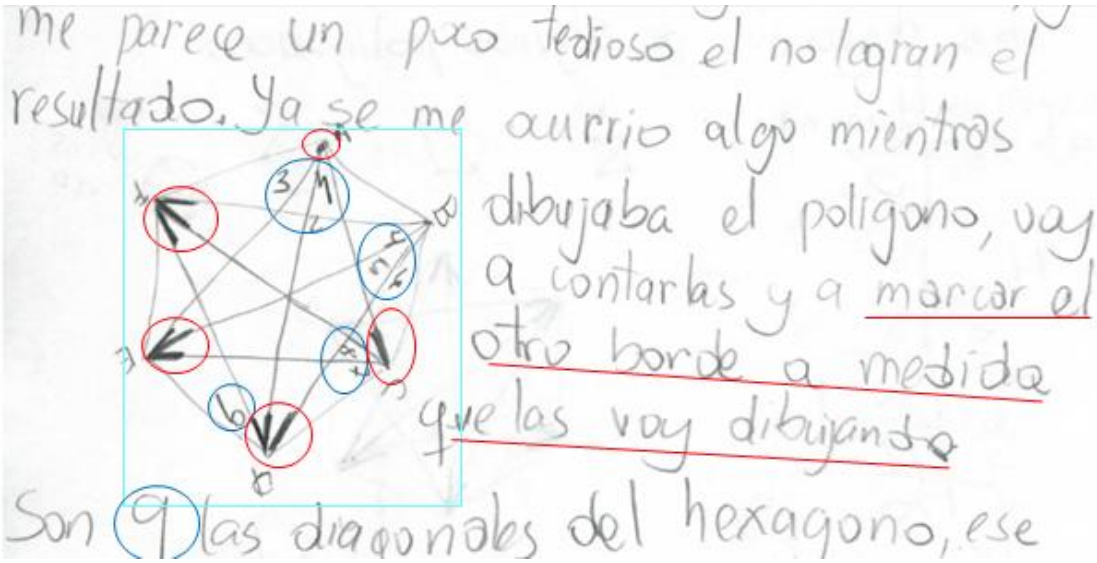


Figura 40
Establecimiento del método para contar las diagonales en relación a los vértices de un polígono realizado por el profesor de matemática en formación inicial ② en la actividad 16

El resolutor sigue con el protocolo: “*Veo los dibujos, volteo la hoja pa´lante pa´atrás, a ver si la hoja habla y me dice la solución. Me voy a parar a tomar algo, a ver si pienso mejor sigo con mis dibujos. JE, je, je, esto si me gusta* (REA) *son 4 las diagonales que salen de vértice de heptágono. Voy a tratar de describir este proceso del trazado de las diagonales para calcularlas mejor (como el lobo feroz); en el primer vértice (A) trace y conté mis 4 diagonales, en B sólo cuento tres porque la primera ya la conté (la AB); en el tercer vértice se cuenta tres (3) diagonales (la CA ya esta contada). Tengo que volver a empezar, se me perdió una diagonal, no puede ser me salte un vértice por lo feo de mi dibujo*”. Se identifica las marcas empleadas para el conteo de las diagonales de cada vértice, indicándose junto al vértice, también se aprecia la incompletitud del dibujo, pues de cada vértice deben salir 4 diagonales por ser un heptágono, sin embargo del vértice denotado por C sólo se observan 2, igual que los vértices (que no están identificados con letras) que le siguen a la izquierda en el sentido de las agujas del reloj, lo cual hace especular (RS) que el participante considera un vértice, traza las diagonales, las cuenta, las marcas, y sigue el mismo proceso para el otro vértice.

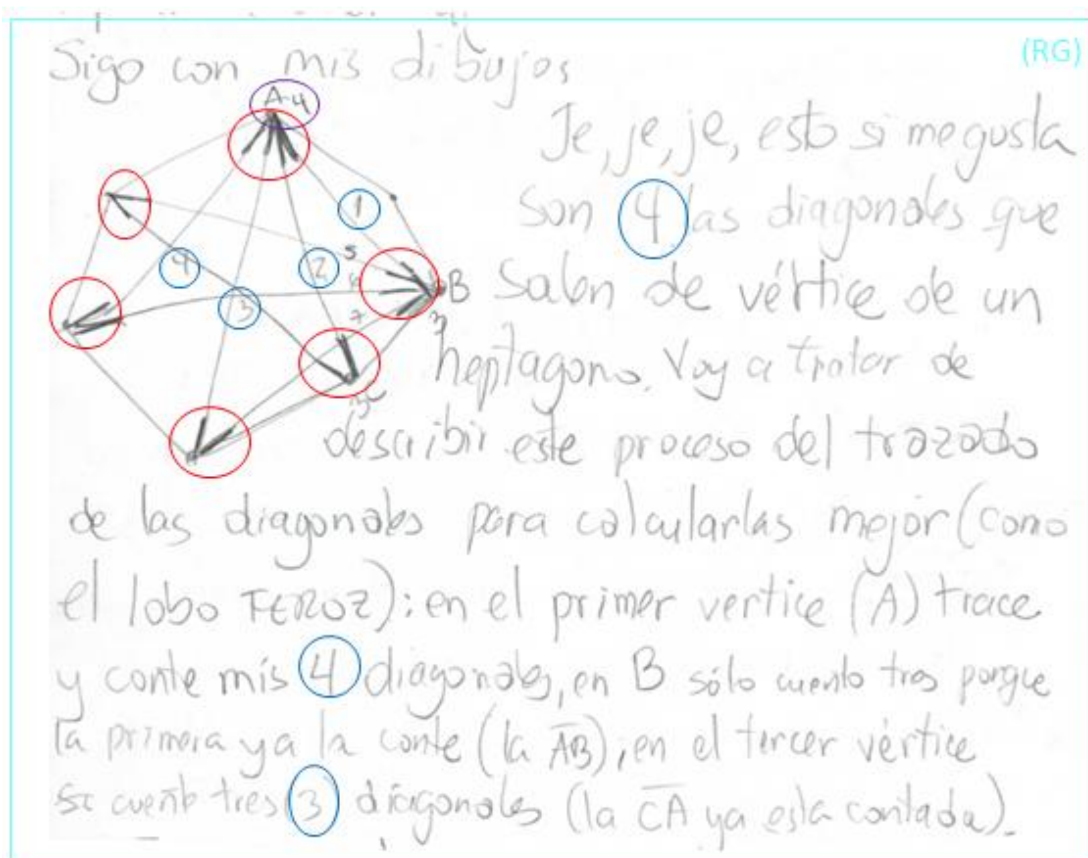


Figura 41
Establecimiento de marcas para contar las diagonales en cada vértice de un polígono realizado por el profesor de matemática en formación inicial ② en la actividad 16

En párrafo anterior, vemos que se están contando las diagonales que salen de cada vértice, el relato continúa en la figura 42, donde se establece la cantidad total del heptágono considerándolo como la suma de las diagonales que sale de cada vértice, y vemos el establecimiento de una nueva notación refinada (cuyo surgimiento arcaico se observa 41, donde se colocada abajo, delante A4, 3B, 3B), uso del subíndice en el nombre de los vértices para indicar la cantidad de diagonales que se cuentan en cada vértice, es importante, mencionar que la cantidad de diagonales que se cuentan difieren en algunos casos de la cantidad de diagonales que salen, debido a que cada diagonal debe ser contada una sola vez.

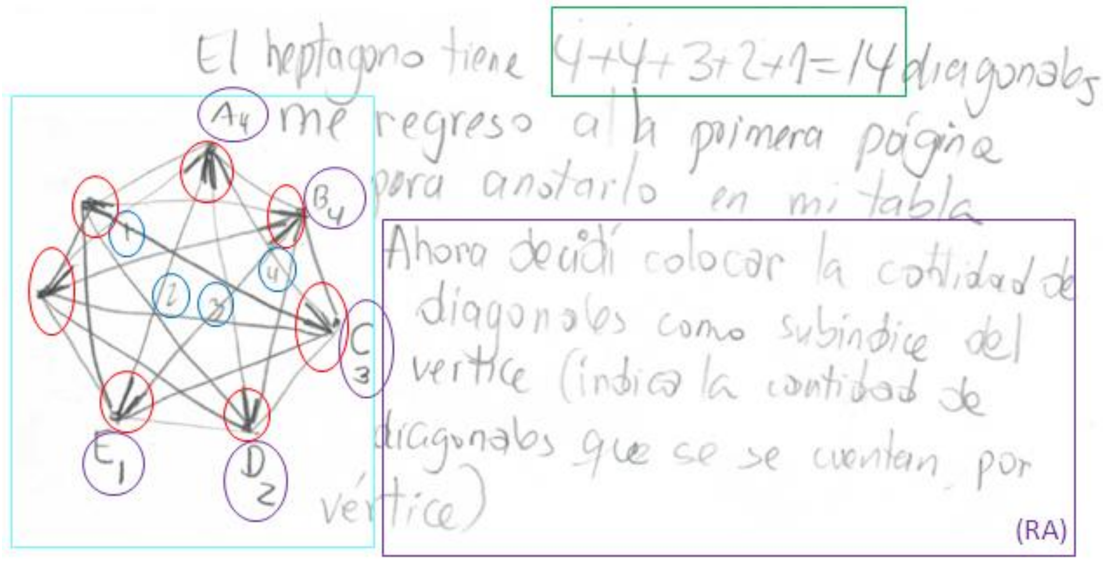


Figura 42
Establecimiento de método para contar las diagonales en cada vértice de un polígono realizado por el profesor de matemática en formación inicial ② en la actividad 16

Lo siguiente del protocolo se visualiza en la figura 43, donde se visualiza lo depurado del método para contar las diagonales, y su ventaja sobre los dibujos feos. También se observa el establecimiento de una relación, empleando una tabla horizontal, entre el número de vértices de un polígono, el número de diagonales por vértice y la cantidad de diagonales del polígono (denotado como total de diagonales). Se puede establecer que la secuencia observa en el número de diagonales por vértice coincide con los números naturales (comenzando desde 0). El otro aspecto resaltante de en la figura es el registro aritmético, que corresponde al producto de $9x6=54^2$ (en el texto original se aprecia una tachadura, que puede indicar simplificación) el 2 que se aprecia como un exponente, se intuye que es un divisor de 54, inferimos (RS) que el participante esta observando que: 3x0/2=0, 4x1/2=2, el semiproduto del número de vértice por el número de diagonales por vértice da como resultado el total de diagonales.

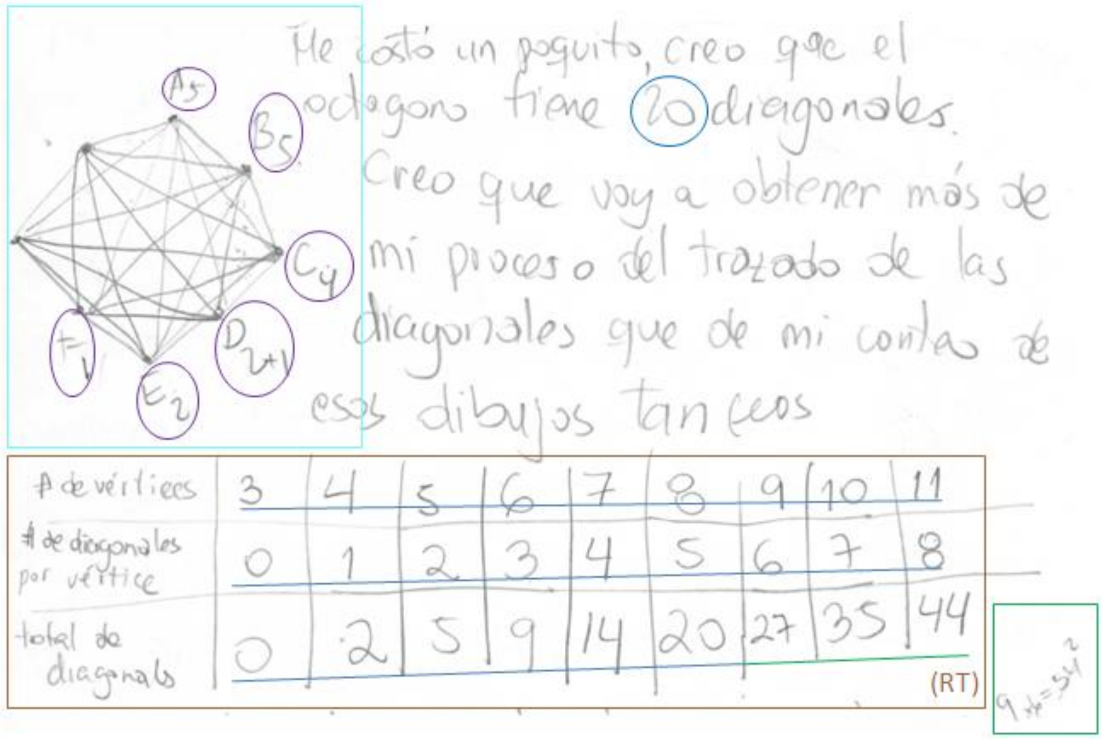


Figura 43
Establecimiento de la relación del número de vértice, el número de diagonales por vértice y la cantidad de diagonales de un polígono a través de una tabla realizada por el profesor de matemática en formación inicial ② en la actividad 16

El relato continua directo del protocolo: "*Lo tengo, lo sabía, puedo alargar la tabla, multiplico 9x6=* ~~*54*~~ *2* (RAr) *el número de vértice por la cantidad de diagonales que sale de cada vértice y lo divido entre dos* (RA). *Tengo, tengo, tengo, tu no tienes nada, tengo una fórmula en una cabaña,* (REA) *voy a buscar la relación de la cantidad de diagonales por cada vértice con el número de vértice*" Realiza los cálculos que se observan en la figura 44, y luego continua: "*entendiendo que una diagonal es un segmento que une dos vértices no contiguos de un polígono*" (RG).

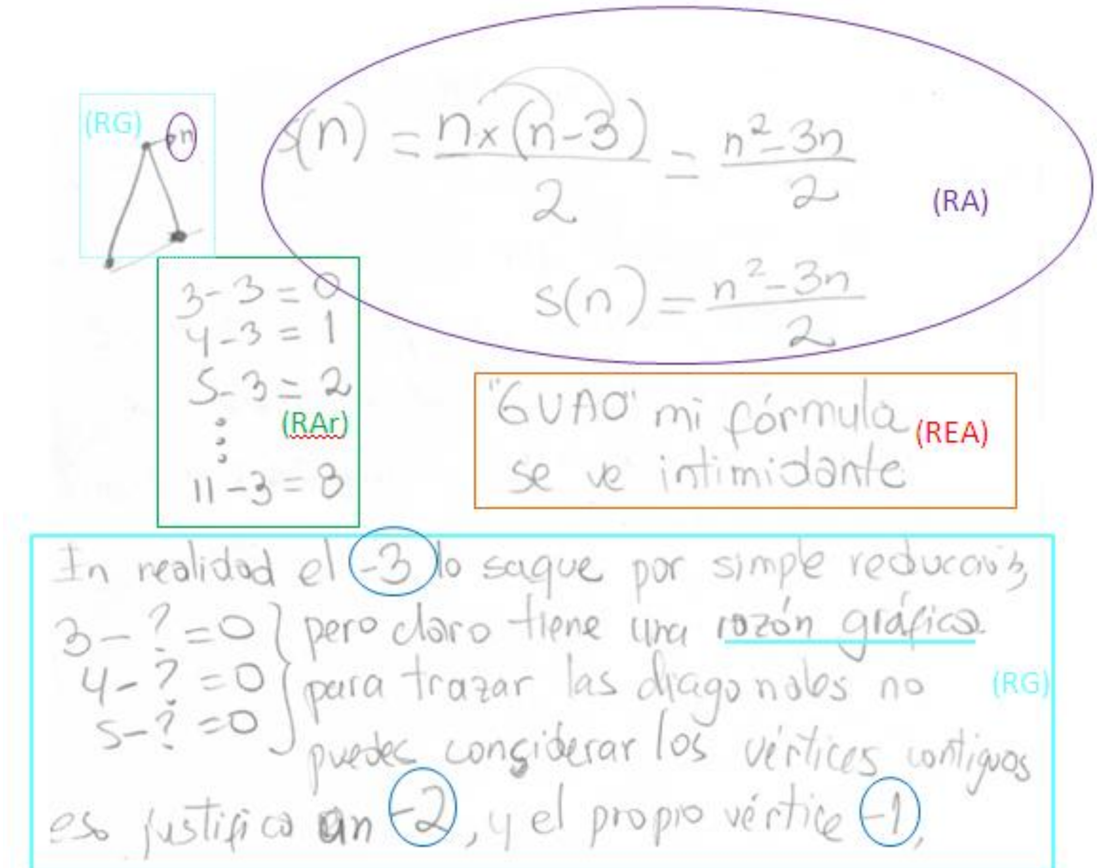


Figura 44
Establecimiento de la fórmula general realizada por el profesor de matemática en formación inicial ② en la actividad 16

Finaliza el protocolo: "*Ahora, el dividir entre 2 lo deduzco de la tabla pero la diagonal que une dos vértices A y B es una sola AB y BA es la misma diagonal. De este ejercicio me pareció más complejo* (REA) *contar diagonales que buscar la regla. Imagino que si me hubiesen dado la tabla la fórmula sería más fácil, aunque, no creo*, (REA) *porque lo que facilito el proceso fue el bendito conteo, y me llevó a fijarme cada vez más en el proceso d aparición de mis diagonales por lo feo, impreciso e irreconstruible de mis dibujos*". El recorrido realizado por el profesor de matemática en formación inicial ② empleado al realizar la actividad 16 se puede establecer como: **RLN → RG (RFI → RN) →RT (RA → RN) → RLN (REA) → RG (RFI → RN) → RLN (REA) → RG (RFI → RN → RA) → RLN (RAr →**

RA) RG (RFI → RN → RA) → RAr → RG (RA → RN) → RT (RN → RAr) → RAr → RLN (RAr → RA → REA) → RG (RA) → RAr→ RA → REA → RLN (RG → REA)

Identificación de las Competencias Matemáticas de la Actividad 16

Cuadro 39
Competencias matemáticas inferidas de la solución de la actividad 16 del profesor de matemática en formación inicial ①:

Competencia de Representación	* Empleo representaciones, siguiendo el recorrido: **RG (RN) → RA → RT (RN) → RLN → RT (RN) → RA → RLN → RAr → RA → RA → RLN (REA) → RA → RAr → RT (RN) → RAr → RAr → RA → RAr → RA → RAr**
Competencia de Simbolización y Formalismo	* Designa "n" como el número de lados y f(n) como el número de diagonales * Designa "S(n)" como suma de las diagonales * Empleo de la variable S, en tres cosas distintas * Empleo la palabra pentágono para designar un polígono de 7 lados * Uso de la implicación lógica * Uso del signo igual: operador (1+2=3), expresión de una relación de dependencia S(n)=n(n-3)/2
Competencia de Ayudas y herramientas	* Dibuja cuatro polígonos diferentes con sus respectivas diagonales * Realiza una tabla de doble entrada (horizontal) número de lados versus cantidad de diagonales * Comparación de la secuencia de los números naturales con la secuencia del número de diagonales * Empleo de una secuencia como auxiliar para establecer la secuencia buscada
Competencia de Pensamiento Matemático	* Deduce la fórmula de Sumatoria: $S = \sum_{i=1}^{n} i$ * Deduce la fórmula para sumar n números naturales S(n)=n(n+1)/2 * Comparación de la secuencia de los números naturales con la secuencia del número de diagonales * Establecimiento que g(4)=S(2)-1, g(5)=S(3)-1, g(6)=S(4)-1, g(7)=S(5)-1 * Identificación de la relación f(n)= S(n-2)-1, (f=g), con n≥4 * Calcula el término S(n-2) de la sucesión S(n) * Sustitución de S(n-2) en la relación f(n)= S(n-2)-1 * Establece la fórmula para calcular la cantidad de diagonales de un polígono de n lado, f(n)=n(n-3)/2 * Empleo de una secuencia como auxiliar para establecer la secuencia buscada * Estable la relación entre las variables * Emplea la abstracción para deducir diversas fórmulas posibles * Muestra indicios de la habilidad para usar el lenguaje algebraico en la comunicación de ideas * Muestra indicios del pensamiento algebraico contextual y simbólico *Uso casos particulares como método de comprobación (validar y desestimar) * Deducción de distintas fórmulas (erradas y correctas) a partir de la información gráfica aportada
Competencia de Planteamiento y Resolución de	* Realiza distintas deducciones * Describe el proceso empleado para encontrar la fórmula

Problemas	
Competencia de Razonamiento Matemático	* Dibuja cuatro polígonos diferentes con sus respectivas diagonales * Designa “n” como el número de lados y f(n) como el número de diagonales * Realiza una tabla de doble entrada (horizontal) número de lados versus cantidad de diagonales * Designa “S(n)” como suma de las diagonales * Deduce la fórmula de Sumatoria: $S = \sum_{i=1}^{n} i$ * Deduce la fórmula para sumar n números naturales S(n)=n(n+1)/2 * Empleo de la variable S, en tres cosas distintas * Empleo la palabra pentágono para designar un polígono de 7 lados * Comparación de la secuencia de los números naturales con la secuencia del número de diagonales * Establecimiento que g(4)=S(2)-1, g(5)=S(3)-1, g(6)=S(4)-1, g(7)=S(5)-1 * Identificación de la relación f(n)= S(n-2)-1, (f=g), con n≥4 * La ejemplifica para n=4,5,6 * Calcula el término S(n-2) de la sucesión S(n) * Sustitución de S(n-2) en la relación f(n)= S(n-2)-1 * Establece la fórmula para calcular la cantidad de diagonales de un polígono de n lado, f(n)=n(n-3)/2 * Ejemplifica la fórmula para n=4, 5, 6 * Empleo de una secuencia como auxiliar para establecer la secuencia buscada

Cuadro 40
Competencias matemáticas inferidas de la solución de la actividad 16 del profesor de matemática en formación inicial ②:

Competencia de Representación	* Empleo representaciones: RLN → RG (RFI → RN) →RT (RA → RN) → RLN (REA) → RG (RFI → RN) → RLN (REA) → RG (RFI → RN → RA) → RLN (RAr → RA) RG (RFI → RN → RA) → RAr → RG (RA → RN) → RT (RN → RAr) → RAr → RLN (RAr → RA → REA) → RG (RA) → RAr→ RA → REA → RLN (RG → REA)
Competencia de Simbolización y Formalismo	* Identifica los vértices del polígono con letras mayúsculas * Denota los vértices con letras mayúsculas y subíndices (indica la cantidad de diagonales que se cuentan por vértice) * Designación gráfica de n como un vértice * Uso del signo igual: operador (4+4+3+2+1=14), expresión de una relación de dependencia S(n)=n(n+1)/2
Competencia de Ayudas y herramientas	* Dibuja cuatro polígonos diferentes con sus respectivas diagonales *Cuenta la cantidad de diagonales de los polígonos dibujados * Realiza una tabla de doble entrada (vertical) número de lados versus cantidad de diagonales * Manifiesta dificultad para contar las diagonales * Identifica los vértices del polígono con letras mayúsculas * Marca ambos lados de las diagonales al contarlas * Cuenta la cantidad de diagonales que sale de cada vértice del polígono * Establecer la cantidad de diagonales como la suma de las que sale de cada vértice * Denota los vértices con letras mayúsculas y subíndices (indica la cantidad de diagonales que se cuentan por vértice) * Dibujo del heptágono para contar sus diagonales

	* Dibujo del octágono para contar sus diagonales * Uso del cálculo mental para sumar las diagonales del octágono señaladas en los vértices *Realiza una tabla (horizontal) para relacionar: el número de vértices de un polígono, el número de diagonales por vértice y la cantidad de diagonales del polígono
Competencia de Pensamiento Matemático	*Estable que la cantidad de lados de un polígono coincide con la cantidad de vértice, *los designa "n"* * Conjetura que la cantidad de diagonales que sale de cada vértice de un polígono varía según la cantidad de sus lados * Establecer la cantidad de diagonales como la suma de las que sale de cada vértice *Identificación de la secuencia de los números de la cantidad de diagonales por vértice como la de los números naturales * Conjetura que la cantidad de diagonales de un polígono se obtiene al multiplicar *el número de vértice por la cantidad de diagonales que sale de cada vértice y lo divido entre dos* ** Una diagonal es un segmento que une dos vértices no contiguos de un polígono* *Establecimiento de la formula $s(n)=(n^2-3n)/2$ * Estable la relación entre las variables * Emplea la abstracción para deducir diversas fórmulas posibles * Muestra indicios de la habilidad para usar el lenguaje algebraico en la comunicación de ideas * Muestra indicios del pensamiento algebraico contextual y simbólico *Uso casos particulares como método de comprobación (validar y desestimar) * Deducción de distintas fórmulas (erradas y correctas) a partir de la información gráfica aportada
Competencia de Planteamiento y Resolución de Problemas	* Realiza distintas deducciones * Describe el proceso empleado para encontrar la fórmula
Competencia de Razonamiento Matemático	* Dibuja cuatro polígonos diferentes con sus respectivas diagonales *Cuenta la cantidad de diagonales de los polígonos dibujados *Estable que la cantidad de lados de un polígono coincide con la cantidad de vértice, los designa "n" * Realiza una tabla de doble entrada (vertical) número de lados versus cantidad de diagonales * Manifiesta dificultad para contar las diagonales * Identifica los vértices del polígono con letras mayúsculas * Marca ambos lados de las diagonales al contarlas * Cuenta la cantidad de diagonales que sale de cada vértice del polígono * Conjetura que la cantidad de diagonales que sale de cada vértice de un polígono varía según la cantidad de sus lados * Establecer la cantidad de diagonales como la suma de las que sale de cada vértice * Denota los vértices con letras mayúsculas y subíndices (indica la cantidad de diagonales que se cuentan por vértice) * Dibujo del heptágono para contar sus diagonales * Dibujo del octágono para contar sus diagonales * Uso del cálculo mental para sumar las diagonales del octágono señaladas en los vértices *Realiza una tabla (horizontal) para relacionar: el número de vértices de un polígono, el número de diagonales por vértice y la cantidad de diagonales del

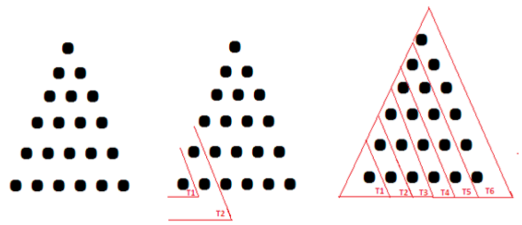
	polígono *Identificación de la secuencia de los números de la cantidad de diagonales por vértice como la de los números naturales * Conjetura que la cantidad de diagonales de un polígono se obtiene al multiplicar el número de vértice por la cantidad de diagonales que sale de cada vértice y lo divido entre dos * Una diagonal es un segmento que une dos vértices no contiguos de un polígono * Designación gráfica de n como un vértice *Establecimiento de la formula $s(n)=(n^2-3n)/2$

ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES 17, 18, 19, 20 Y 21

ACTIVIDAD 17: Números triangulares: Se llama número triangular un número que puede ser representado por medio de un triángulo como se observa en la segunda columna de la tabla.

Numero de la Figura	Figura	Cantidad total de Puntos	Cantidad de Puntos (sumando las fila)	Notación Sugerida	Relación entre dos números triangulares consecutivos (T_n y T_{n-1})
1	●	1	1	T_1	$T_1=1$
2	● ● ●	3		T_2	$T_1+\square=T_2$
3	● ● ● ● ● ●		1+2+3	T_3	
4	● ● ● ● ● ● ● ● ● ●	10		T_4	
5	● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●			T_5	$T_4+\square=T_5$
6	● ●	21		T_6	

(17.1) Explica todo lo que observas en la formación de la secuencia, incluyendo las posibles relaciones existentes. (17.2) ¿Cuántos puntos en total debe tener la figura 15?, ¿Cómo están desglosados por sumandos? (17.3) Explica sí 26 está o no en la secuencia, ¿es o no un número triangular? (17.4) Explica la relación que existe entre dos números triangulares consecutivos, intenta establecerlo de forma escrita/oral y gráfica. (17.5) Encuentra una formula general para encontrar cualquier número triangular conociendo su posición, por ejemplo, T_{23}, T_{56}, T_{100},T_n. (17.6) Calcula el valor de 1+2+3+…+97+98+100 sin realizar las 99 sumas. (17.7) El número 26, a pesar de que no es un número triangular se puede expresar como la suma de dos o tres números triangulares (no necesariamente distintos): 26 = 15 + 10 + 1 = $T_5 + T_4 + T_1$. Expresa los números 4, 9, 16, 25, 36, 49 como la suma de números triangulares.



Transcripción de la grabación de las Actividad 17

En este caso para facilitar la transcripción de la conversación, se emplearan los guarismos 1, 2, 3, etc. Y la notación T3, cuando expresan te tres.

Proceso de identificación previo a la conjetura de la fórmula:

JOSÉ: T3 es igual a 6…

MARÍA: Aja, T3 es igual a 6. ¿Qué más? 4 por aquí abajo, T2 mas T1 más 2 es igual a T3… aja y porque T3 es igual…

JOSÉ: Es igual a 6…

MARÍA: No, otra, otra… T3 es igual a 2 por T2, o T2 mas T2 pues… porque es tres mas tres…

JOSÉ: Si, son seis…

MARÍA: Dos veces… T3 es dos veces T2… ok… ahora vámonos con la 4…

JOSÉ: Esto sería… esta si es más larga, vámonos con…

MARÍA: T4 es igual a T#, que serían 6… más T2 mas T1… aja, esa si… T3 esta vale 6, este vale 3 y este vale 1. 6 más 3, 9, más 1, 10.

JOSÉ: Entonces aquí podemos decir que T4 es igual a 10…

MARÍA: Aja…

JOSÉ: ¿Después viene?

MARÍA: Después viene T5…

JOSÉ: T5 es T4 más…

MARÍA: ¡Ahhh, ya va! ¡Mira, mira! Vamos otra vez… T4… para ponerlo en relación a este… T4 es igual a T3…

JOSÉ: Al anterior…

Declaración de la fórmula general de los números triangulares

MARÍA: … más 4. Claro, fíjate que ya hay una fórmula que aparece…

MARÍA: T sub n es igual…

M-JOSÉ: A T sub n menos 1 más n.

MARÍA: O sea, la relación es T sub n es igual a T sub n menos 1 más n. Esa es una relación. Aja, termina aquí el 5. ¡Cuántos hay ahí?

JOSÉ: 1, 3, 8, 12, 17… déjeme contar otra vez…

MARÍA: Debe haber 15…

JOSÉ: A ver 3, 7, 11…

MARÍA: ¿Cuántos hay?

JOSÉ: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15… ¡15!

MARÍA: Si, porque ellos van aumentando. Si aquí hay 10, le vas a aumentar una fila con 5 elementos… entonces sumando las filas 1 y 2, más 3, más 5, más 5… y aquí seria T4 más 5, ya dijimos que serían 10… aquí en el cuadrito…

JOSÉ: Entonces, este señor de aquí es T5…

MARÍA: Entonces aquí T4, aquí seria un 5…

JOSÉ: Pero aquí T4 viene siendo 10… más 5… 15…

MARÍA: 15… entonces T5 es 15… vamos con la otra que es 1 más 2, más 3, más 4, más 5, más 6… Mira T sub n, es igual a la sumatoria desde i igual 1, hasta n de i… ¡mira! La fórmula dice i nada más…

JOSÉ: Exactamente… D es igual a 1 hasta n, y esto te va a generar la suma del todo…

MARÍA: Esto es parte del conflicto que tenemos con el tema anterior… ¡¡¡ja ja ja! ¡Pero no voy a pensar en eso ahorita!

JOSÉ: Esta si es la fórmula de esta señorita que está aquí…

MARÍA: ¡Aja!!!

Cuadro 41
Establecimiento de comparación entre la expresión oral y escrita de la fórmula que relaciona dos números triangulares consecutivos.

Expresión Oral	Registro Escrito
T sub n es igual…A T sub n menos 1 más n. O sea, la relación es T sub n es igual a T sub n menos 1 más n. Esa es una relación	$t_n = t_{n-1} + n$ (RA) $t_n = \sum_{i=1}^{n} i =$

JOSÉ: Entonces, aquí seria T5 más 6, igual a T6, T5 vendría siendo…

MARÍA: 10 más 5, 15… más 6, 21… perfecto…

JOSÉ: Es T6… entonces, fíjese n menos 1 más 1…

MARÍA: Explica todo lo que observas es la formación de la secuencia, incluyendo las posibles relaciones existentes, bueno… primero… estamos hablando de números en forma de triángulo… que van aumentando de 1 en 1 las filas… es decir, en la figura 1, tiene solo 1 fila con 1 elemento. ¡Ahhh! Cada fila tendrá tantos elementos como sea el número de la fila…

C. Si, tienes razón… jajaja…

MARÍA: Donde cada fila tendrá el número de elementos que corresponde a su ubicación, es decir, el número de la fila; la fila 1 tendrá 1 elemento, la fila 2 tendrá 2 elementos; la fila 3 tendrá 3 elementos, y así sucesivamente… la suma de las filas nos va a dar el número de elementos… No, la suma de los números hasta el número de la figura, nos va a dar la cantidad total del os elementos… o algo así… o sea, la suma de esta hasta 6…

JOSÉ: Es decir, que la suma…

M. Es como un factorial, pero sumando… porque sabes que el factorial es 6 por 5, por 4, por 3, por 2, por 1… claro, el factorial es una multiplicación, pero esto es sumando…

JOSÉ: Entonces, aquí seria la cantidad total de la… la cantidad total de los elementos…

MARÍA: La cantidad total de elementos de la figura n… esta es la figura n, ponle ahí… se va a generar sumando los números desde 1 hasta n

JOSÉ: Si. ¿Qué más tienes ahí?

MARÍA: Que digas todo lo que ves allí… ¡Ah! ¿Este, este, esta? Esta relación que tenemos aquí, que un número…

JOSÉ: De acuerdo a la posición de la fila, la anterior, la posición… ¡Ay! No sé cómo explicar que es la 2…

MARÍA: La cantidad de elementos de una figura n, se obtiene sumando la cantidad anterior a el numero n, o sea, vamos a sumar T sub n menos 1 más n… otra vez… vamos a utilizar esta notación. Si llamamos T sub n a la cantidad total de puntos de la figura n, si llamamos T sub n a la cantidad de puntos totales de la figura n…

JOSÉ: Nos podría generar…

MARÍA: ¡Aja!... podríamos calcular T sub n, sumando T sub n menos 1 más n… que es la fórmula que tenemos aquí…

JOSÉ: Exactamente…

MARÍA: Al principio sumando T sub n… ¡Aja! Ahora si…

JOSÉ: A T sub n 14

MARÍA: Pero no sabemos quién es T sub n 14… mejor lo hacemos con esta sumatoria… 15 más 14, más 13, más 12, más 11, más 10, más 9, más 8, mas7, más 6, más 5, más 4, más 3, más 2, más 1… ¡te acuerdas lo que me dijiste de Gauss?

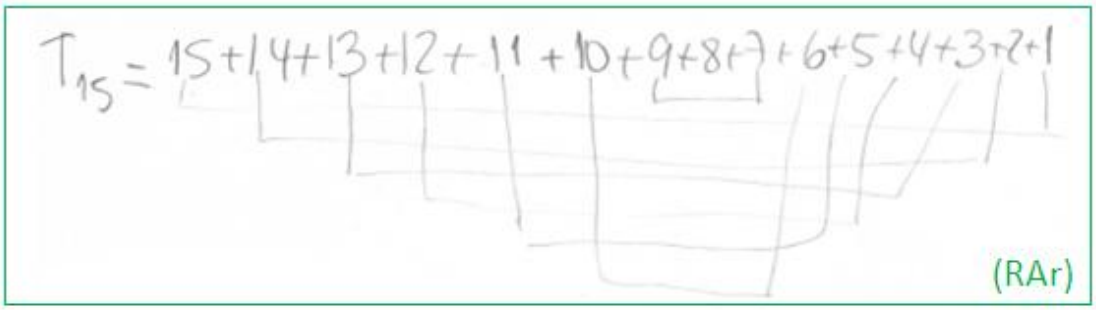
JOSÉ: Si…

MARÍA: Si yo sumo este 15 con este 1, este 14 más este 2, este 13 más este 3…

JOSÉ: 120 puntos…

MARÍA: ¿120 puntos?

Cuadro 42
Establecimiento de comparación entre la expresión oral y escrita de la aplicación de la fórmula de Gauss

Expresión Oral
Al principio sumando T sub n…A T sub n 14…Pero no sabemos quién es T sub n 14… mejor lo hacemos con esta sumatoria… 15 más 14, más 13, más 12, más 11, más 10, más 9, más 8, mas7, más 6, más 5, más 4, más 3, más 2, más 1… ¡te acuerdas lo que me dijiste de Gauss?...Si…Si yo sumo este 15 con este 1, este 14 más este 2, este 13 más este 3…120 puntos…¿120 puntos?
Registro Escrito


JOSÉ: ¡Hazlo, hazlo, hazlo!... para ver…

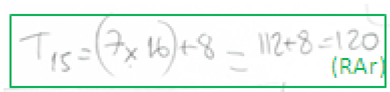
MARÍA: No, no lo estoy sumando… ¡estoy como tú!

JOSÉ: jajaja…

MARÍA: 12 más 4, 11, más 5, 10 más 6, 9 más 7, 1, 2, 3, 4, 5, 6… 7… no sé, T sub n 15 es igual a 7 por 16 más 8… ¡Yo no sé de donde saque esa relación!... vamos a ver cuándo te da a ti… y de todas maneras lo sumamos… 7 por 16 igual a 112 más 8, me da 120… ¿Cuánto te da a ti?

JOSEÉ: Igual…

Cuadro 43
Establecimiento de comparación entre la expresión oral y escrita del cálculo de T_{15} empleando la fórmula de Gauss

Declaración Oral	Registro Escrito
T sub n 15 es igual a 7 por 16 más 8… ¡Yo no sé de donde saque esa relación!... vamos a ver cuándo te da a ti… y de todas maneras lo sumamos… 7 por 16 igual a 112 más 8, me da 120… ¿Cuánto te da a ti? .Igual…	

MARÍA: ¡Eso! ¿Cuál es la fórmula tuya?

JOSÉ: La suma de cualquier cantidad de números enteros; T sub n es igual a n, que multiplica a n más 1 entre 2. Esto es lo que hizo Gauss.

MARÍA: ¡Aja! Esta es la fórmula de Gauss.

JOSÉ: Si… que yo dije, este carrizo… jajaja…

MARÍA: La fórmula de Gauss que estábamos comentando antes de la clase… y esta fórmula me da el número total de puntos… ¡Ah, claro! Esto que tú me dices que n por n menos 1, es la sumatoria de los números hasta n…

Cuadro 44
Fragmentos de los diálogos de los profesores de matemática en formación estableciendo la fórmula general de los números triangulares

Declaración Oral	Registro Escrito
¿Cuál es la fórmula tuya?. La suma de cualquier cantidad de números enteros; T sub n es igual a n, que multiplica a n más 1 entre 2. Esto es lo que hizo Gauss. ¡Aja! Esta es la fórmula de Gauss.	$T_n = \frac{n.(n+1)}{2}$ (RA)

JOSÉ: Exactamente…

MARÍA: ¡Aja! Sigamos pues… como están desglosados, ¿por sumando?... ¡aja! 15 por 16… ya lo desglosamos ¡como lo hicimos aquí… ah… 1.3?

JOSÉ: Indica si 26 se encuentra o no en la secuencia. ¿Si 26 está o no en la secuencia…?

MARÍA: ¡Ah, claro!... fíjate lo siguiente, lo que pasa es que aquí tenemos los números 1, 3, 6, 10, 15, 21…

JOSÉ: No, no cabe…

MARÍA: Aquí le sumamos 6, ahora súmale 7.

JOSÉ: Seria 28.

MARÍA: 28. Sumale 9.

JOSÉ: 37.

MARÍA: Sumale 10.

JOSÉ: 47.

MARÍA: 11…

JOSÉ: Seria 58.

MARÍA: 12.

JOSÉ: Seria 70.

MARÍA: Ahora súmale 13.

JOSÉ: 83.

MARÍA: 14.

JOSÉ: Seria 97.

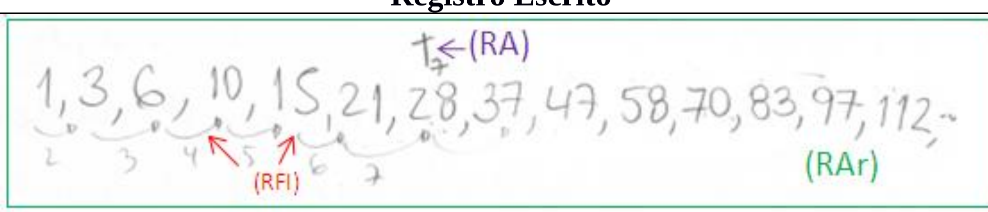
MARÍA: 15.

JOSÉ: Seria 112…

MARÍA: Y así sucesivamente… de aquí en adelante sumas 2, sumas, 3, sumas 4, y así vamos. Si nosotros teníamos 5 y al sumarle 6 nos daba 21, al siguiente le sumamos 7 y da 28… o sea, 26 no está…

JOSÉ: No está en la secuencia, no es un número triangular…

Cuadro 45
Establecimiento de comparación entre la expresión oral y escrita de la secuencia de los números triangulares

Expresión Oral
enemos los números 1, 3, 6, 10, 15, 21…No, no cabe…Aquí le sumamos 6, ahora súmale 7…Seria 28…28. Sumale 9...37...Sumale 10...47...11…Seria 58…12...Seria 70...Ahora súmale 13…83…14…Seria 97…15…Seria 112…Y así sucesivamente… de aquí en adelante sumas 2, sumas, 3, sumas 4, y así vamos. Si nosotros teníamos 5 y al sumarle 6 nos daba 21, al siguiente le sumamos 7 y da 28… o sea, 26 no está…
Registro Escrito


MARÍA: 1.3, 26 no está en la secuencia.

JOSÉ: Y por no estar en la secuencia, no es un número triangular.

MARÍA: ¡Aja! ¿Después que viene?

JOSÉ: Explica la relación que existe entre dos números triangulares consecutivos.

MARÍA: Ya la escribimos, pero no la explicamos… que es esta…

JOSÉ: Que si tenemos 2 números triangulares consecutivos, siempre va a ser 1 menos más el número…

MARÍA: Cuando tenemos 2 números triangulares consecutivos… No, 2 números no… ¿Un número triangular se puede escribir como la suma del número triangular anterior, más el número de la figura que está ocupando?

JOSÉ: Si, porque n y n es 5 en este caso…

MARÍA: Ya va… vamos a ver… n se puede escribir como la sumatoria del número triangular anterior, vamos a sustituirla; mas n, que sería la cantidad?

JOSÉ: la cantidad de puntos hasta esa fila…

MARÍA: Donde n seria el número de la figura que coincide con la cantidad de puntos que se le anexa o suman a las nueve filas…

MARÍA: Mira, vamos a sustituirlos… como ellos nos están pidiendo la relación, vamos a numerar aquí… 1 y 2… como ellos nos están pidiendo, vamos a decir que T sub n es igual a T sub n menos 1 más n **[AR_1]…** ¿pero quién es ese según la fórmula de Gauss?... Esto es n menos 1 por n menos 2 entre 2.

JOSÉ: Es n, n menos 1…

MARÍA: ¡Bueno! Pero es que es n menos 1… ¿estás viendo?

JOSÉ: ¡Ah, sí!

MARÍA: Te explico… para yo saber cuándo vale una figura en relación a la anterior, yo necesito saber cuántos puntos tiene la figura anterior, y si no lo conoces, pues lo puedo calcular porque tengo la formula…

JOSÉ: Si, exacto…

MARÍA: Ves… que sería este… n menos 1, más n menos 2, entre 2… ¡Ah!, no mentira… ¿n por n más 1?

JOSÉ: n por n más 1 entre 2…

MARÍA: Entonces es n menos 1 por n, no es menos 2, es por n, porque este es n menos 1 y este es el más 1, serian n… n directamente ¿o ponemos más 1 menos 1?

JOSÉ: No, lo dejamos en n… [**AR**$_2$] entonces vamos a hacer un caso particular…

MARÍA: No, vamos a desarrollar la formula…

JOSÉ: ¡Ah!, bueno…

MARÍA: Esto sería n cuadrado, menos n entre 2 más n [**AR**$_3$]… aplicamos factor común, porque este tiene denominador 1… suma de fracciones n cuadrado menos n más 2n entre 2 [**AR**$_4$]… esto es igual a n al cuadrado más n entre 2 **[AR**$_5$**]**…

MARÍA: Que es la misma fórmula, porque si tú multiplicas aquí n por n, te da n cuadrado… n por 1 n, entre 2… es la misma fórmula de Gauss…

JOSÉ: Si.

MARÍA: ¡Perfecto! Creo… sigamos pues…

Cuadro 46
Establecimiento de comparación entre la expresión oral y escrita entre la equivalencia de fórmulas para calcular los números triangulares

Expresión Oral	Registro Escrito	Registro
…vamos a decir que T sub n es igual a T sub n menos 1 más n.…	$t_n = t_{(n-1)} + n$	**RA**$_1$
... Esto es n menos 1 por n menos 2 entre 2…Es n, n menos 1…¡Bueno! Pero es que es n menos 1… ¿estás viendo?...¡Ah, sí!...… n menos 1, más n menos 2, entre 2… ¡Ah!, no mentira… ¿n por n más 1?... n por n más 1 entre 2……Entonces es n menos 1 por n, no es menos 2, es por n, porque este es n menos 1 y este es el más 1, serian n… n directamente ¿o ponemos más 1 menos 1?...No, lo dejamos en n…	$t_n = \frac{(n-1).(n)}{2} + n$	**RA**$_2$
…Esto sería n cuadrado, menos n entre 2 más n…	$t_n = \frac{n^2-n}{2} + \frac{n}{1}$	**RA**$_3$

… aplicamos factor común, porque este tiene denominador 1…suma de fracciones n cuadrado menos n más 2n entre 2…	$t_n = \frac{n^2 - n + 2n}{2}$	**RA$_4$**
…esto es igual a n al cuadrado más n entre 2…	$t_n = \frac{n^2 + n}{2}$	**RA$_5$**

JOSÉ: Ahora viene… a ver… explique la relación que existe entre los números triangulares consecutivos. Intente establecerlos de forma escrita, oral y gráfica.
MARÍA: Grafica, es esto que tenemos aquí… Fíjate, este es la figura número 1, este triangulito, este es la figura número 2 y este es mi figura número 1.

$$(RA_1)\quad t_n = t_{(n-1)} + n$$

$$\downarrow$$

$$(RA_2)\quad t_n = \frac{(n-1).(n)}{2} + n$$

$$\downarrow$$

$$(RA_3)\quad t_n = \frac{n^2 - n}{2} + \frac{n}{1}$$

$$\downarrow$$

$$(RA_4)\quad t_n = \frac{n^2 - n + 2n}{2}$$

$$\downarrow$$

$$(RA_5)\quad t_n = \frac{n^2 + n}{2}$$

Figura 45
Identificación del tratamiento de representaciones aritméticas entre la equivalencia de fórmulas para calcular los números triangulares

JOSÉ: O sea que ya se puede hacer dentro de la misma actividad número 1, que están las figuras así dentro de las figuras y podemos trabajar…

MARÍA: Hay como una contención… vamos a hacerlo de forma gráfica… vamos a hacer la figura 6. 1, 2… 1, 2 y 3; 1, 2, 3, y 4; 1, 2, 3, 4 y 5…

JOSÉ: Parece el triángulo de Pascal…

MARÍA: Si, parece en triángulo de Pascal… 1, 2, 3, 4, 5 y 6… Mira, esta es la figura número 1, la dibujamos aquí en azul.

JOSÉ: ¡La punta del iceberg tenemos ahí!

MARÍA: Esta es la figura número 2…

JOSÉ: ¡Ah! Fíjate, así yo lo estaba haciendo…

MARÍA: Esta es la figura número 3… Fíjate que van contenidos unas en otras…

JOSÉ: Si, se van encajonando…

MARÍA: Esta es la figura… Ehhh… eso es lo que se llama la anidación de los conjuntos numéricos, fíjate que aquí también quedan anidados… este es la numero 4…

JOSÉ: Si…

MARÍA: Esta es la numero 5… fíjate… que ellos van creciendo… gráficamente vemos lo que en los conjuntos numéricos…

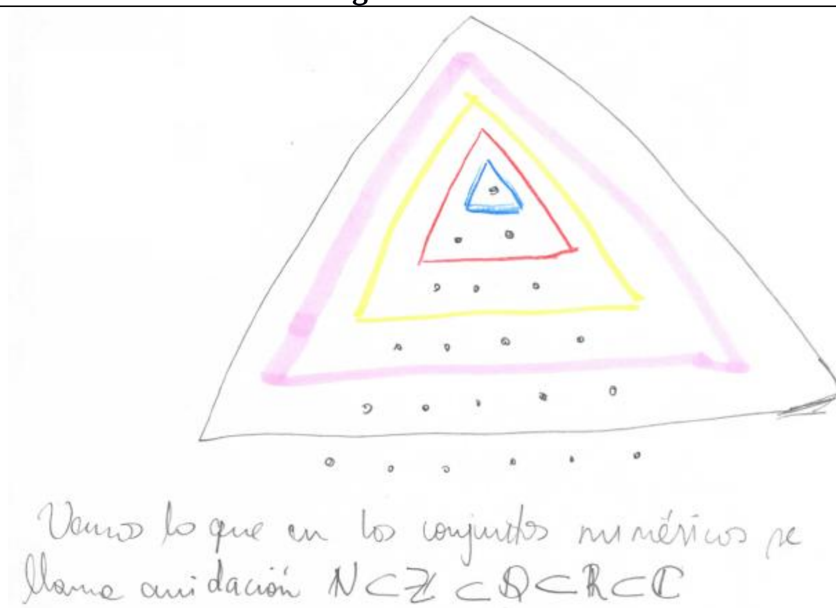
JOSÉ: Se llama Anidación…

MARÍA: N esta contenido en Z, Z está contenido en Q, en los racionales, los racionales están contenidos en los reales y los reales están contenidos en los complejos… o sea que cuando tu agarras los complejos, estas agarrando desde los naturales, porque todos están contenidos…

JOSÉ: ¿Y los racionales?

MARÍA: No, lo que pasa es que los irracionales están contenidos en los reales… pero los naturales, los enteros y los racionales no están contenidos en los números irreales… es una unión que tú haces, los vas anexando pues… Por ejemplo, los números negativos están en los enteros pero no están en los naturales… las fracciones impropias están en los racionales pero no están en los enteros… eso es lo que vas anexando… y los números irracionales, estos los agregas a los reales, para obtener complejos… los complejos son más, porque tienes números que son reales puros, imaginarios puros y aquellos que tienen una parte real y una parte imaginaria…

Cuadro 47
Establecimiento de comparación entre la expresión oral y gráfica de la anidación de los números triangulares

Expresión Oral
…O sea que ya se puede hacer dentro de la misma actividad número 1, que están las figuras así dentro de las figuras y podemos trabajar…Hay como una contención… vamos a hacerlo de forma gráfica… vamos a hacer la figura 6… 1, 2… 1, 2 y 3; 1, 2, 3, y 4; 1, 2, 3, 4 y 5…Parece el triángulo de Pascal…Si, parece en triángulo de Pascal… 1, 2, 3, 4, 5 y 6…Mira, esta es la figura número 1, la dibujamos aquí en azul…¡La punta del iceberg tenemos ahí!...Esta es la figura número 2…Esta es la figura número 3… Fíjate que van contenidos unas en otras…Si, se van encajonando…Esta es la figura… Ehhh… eso es lo que se llama la anidación de los conjuntos numéricos, fíjate que aquí también quedan anidados… este es la numero 4…Si…Esta es la numero 5… fíjate… que ellos van creciendo… gráficamente vemos lo que en los conjuntos numéricos…Se llama Anidación…N esta contenido en Z, Z está contenido en Q, en los racionales, los racionales están contenidos en los reales y los reales están contenidos en los complejos… o sea que cuando tu agarras los complejos, estas agarrando desde los naturales, porque todos están contenidos…   …Lo hicimos geométricamente aquí…
Registro Escrito


JOSÉ: Si, porque los complejos gozan de unas propiedades que o gozan los reales… por ejemplo, el dominio de las funciones, una función que sea compleja, puede pasar por un punto 100 veces, que es el mismo punto y sigue pasando por ahí…

MARÍA: Eso no lo conocía…

JOSÉ: Eso es las funciones de senos y cosenos, esa es la parte de señales… es más, con la parte de los complejos, yo puedo hacer figuras geométricas…

MARÍA: ¿Si? Eso sí que lo desconozco…

JOSÉ: Si.

MARÍA: ¿Cómo la que hicimos que no conseguimos la formula aun?... (risas de ambos)

JOSÉ: Déjale ahí… quieta… (risas)

MARÍA: Lo hicimos geométricamente aquí…

JOSÉ: Encuentre la formula general para encontrar cualquier número de triángulos con la siguiente ecuación… por ejemplo T 23…

MARÍA: ¡Ya la tenemos!

JOSÉ: ¡Bueno, vamos a escribirla!

MARÍA: Ya la escribimos, aquí… la escribimos por aquí… ¡mira!

JOSÉ: ¡Ahí esta!

MARÍA: T sub n, es igual a n por n más 1 sobre 2… en el caso de T 23, es igual a 23 por 24, entre 2… ¿Cuánto nos da? 23 por 24… entre 2… 276…

C. 276… ¡bueno!

MARÍA: ¿Qué más después?

JOSÉ: ¡No, ya está listo!

MARÍA: No, mira… calcula… sin realizar las 99 suma… esa es la de Gauss…

JOSÉ: La suma de n más…

MARÍA: ¿De 100?

JOSÉ: T sub n… T sub 1000…

MARÍA: T sub n, será igual a 100 por 101, entre 2. O sea, esto sería 50 por 101… da 5.050…

MARÍA: O algo así… 26, aunque no es un numero triangular, se puede expresar como la suma de 2 o 3 números triangulares, no necesariamente distintos… 26 es igual a T sub 5, más T sub 4, más T sub 1… aja… Exprese los siguientes números como números triangulares… ¡Dios! 4, 9, 16, 25, 36 y 49… vamos a empezar… 4 seria 3 más 1, T sub n 2 más T sub n1, que serían igual a 3 más 1; 9 seria 6 más 3…

JOSÉ: T sub n, más T sub 3…

MARÍA: ¿16? Diez más 6…

JOSÉ: T sub 3, más T sub 4…

MARÍA: Ok… 25.

JOSÉ: Seria 15 más 10. T sub 5, más T sub 4.

MARÍA: ¿36?

C. ¡Aquí esta!... 21 más 15… T sub 6, más T sub 5.

MARÍA: ¿Nosotros hicimos?... vamos a ver la secuencia que hicimos, porque nos falta el 49, pero no nos ayuda la hoja… después de 21 viene 28, ¿Cuánto es 28 más 21?... 49… este sería T sub 7, mas T sub 6…

JOSÉ: Seria 21 más 28…

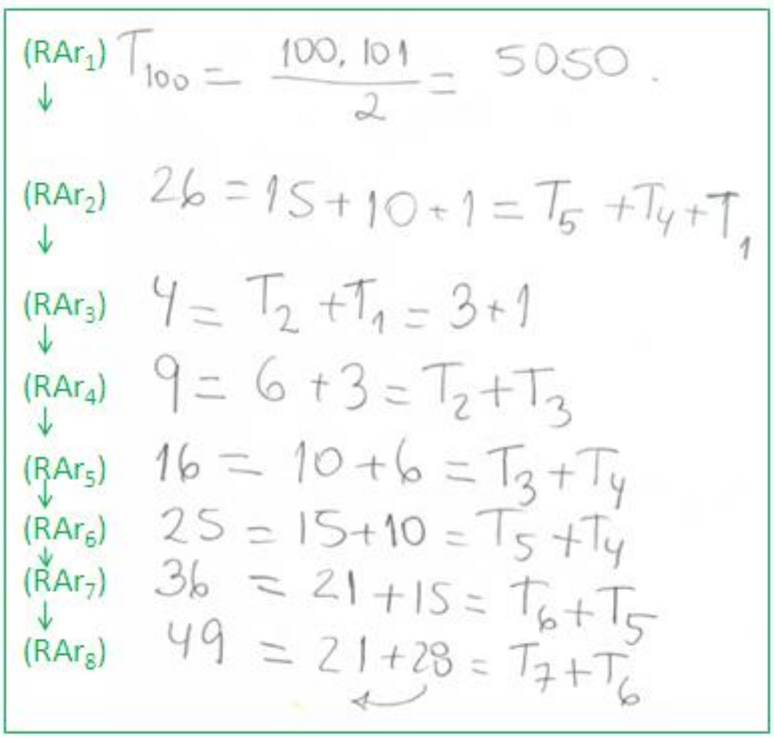


Figura 46
Identificación del tratamiento de representaciones aritméticas realizado en la actividad 17 por los profesores de matemática en formación inicial

MARÍA: ¡Aja!... bueno… ¿Cuál es la pregunta qué sigue?

JOSÉ: Exprese los siguientes números con la suma de dos números triangulares.

MARÍA: Es lo que acabamos de hacer…

JOSÉ: Aja… se llama números triangulares, los números que pueden ser representados por medio de un triángulo, como se observa en la siguiente figura…

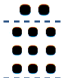
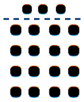
MARÍA: Nosotros lo hicimos… pero mira como lo hicimos… de arriba…

JOSÉ: De adentro hacia afuera…

MARÍA: ¡No, no, mira!... nosotros lo hicimos por fila, ellos lo hicieron por diagonal…

JOSÉ: Si, por diagonal… pero es el mismo proceso…

Actividad 18: **Números Cuadrados**

Numero de la Figura	**Figura**	**Cantidad total de Puntos**	**Cantidad de Puntos (sumando las fila)**	**Notación Sugerida**	**Relación entre los números triangulares y Cuadrados (T_n y C_m)**
1		1	1	C_1	$T_1=C_1$
2		4	3+1	C_2	$\square+T_1=C_2$
3				C_3	
4		16		C_4	
5				C_5	$\square+T_5=C_5$
6				C_6	

(18.1) Explica todo lo que observas en la formación de la secuencia, incluyendo las posibles relaciones existentes. (18.2) ¿Cuántos puntos en total debe tener la figura 15?, ¿Cómo están desglosados por sumandos?. (18.3) Explica sí 146 está o no en la secuencia, ¿es o no un número cuadrado?. (18.4) Explica la relación que existe entre los números triangulares y cuadrados, intenta establecerlo de forma escrita/oral y gráfica. (18.5) Encuentra una formula general para encontrar cualquier número triangular conociendo su posición, por ejemplo, C_{23}, C_{56}, C_{100}, C_n. (18.6) 310 a pesar de que no es un número cuadrado se puede expresar como la suma de cuatro números cuadrados, no necesariamente distintos: 310=289+16+4+1= $C_{17}+C_4+C_2+C_1$. Expresa los siguientes números como la suma de cuatro números cuadrados: 50, 90, 160, 250. (18.7) Explica qué son los Números Cuadrados

Transcripción de la grabación de las Actividad 18

MARÍA: Es lo mismo, sí, porque fíjate que aquí T sub 1, T sub 2, T sub 3; calculando diagonales, pero fíjate que la contención es la misma. Aja, terminamos con la actividad número 1. Vamos con la 2.

JOSÉ: Dice, explica todo lo observado en la formación de la secuencia, incluyendo las posibles relaciones existentes…

MARÍA: ¡Ah! Ese es de este cuadro… explica todo lo observado en el cuadro… otro cuadro… (Risas) ¿Entonces seria? ¿Ahí hay? ¿Cantidad de puntos?

JOSÉ: 9…

C. ¿Y aquí seria?... ah, pero anteriormente… T sub n… C sub 1…

MARÍA: C sub 1, es por lo que estamos hablando… fíjate lo que está apareciendo aquí… ¿Qué es esto?

JOSÉ: ¡Ah, un cuadrado!

MARÍA: Un cuadrado… y T sub 1, deben ser los triángulos que teníamos anteriormente. Triangular 1, es igual a cuadrado 1. Aja… cuadrado 2… vamos a regresarnos a nuestra tablita anterior. Fíjate que nos dice que es… 1 más 3… ¡Ah! Mira 1 más 3… T sub 1, T sub 2, o sea que en este va T sub 2… T sub 2, más T sub1 me da C sub 2…

C. Aquí da 9…

MARÍA: ¿9 seria?... ¡aquí esta, míralo!

JOSÉ: 6 más 3… C3, seria, T3 mas T2…

MARÍA: Aja. ¿Seria 16?

C. 10 más 6…

MARÍA: Eso es lo que acabamos de hacer, ¡míralo! T3 mas T4, igual a C4… entonces hay que hacer el dibujito, ahí son 5 por 5…

C. Es así, ¿no? ¿Porque es con los punticos así?

MARÍA: 1, 2, 3, 4, 5; 1, 2, 3, 4, 5…

JOSÉ: 1, 2, 3, 4, 5; 1, 2, 3, 4, 5; 1, 2, 3, 4, 5… 5 por 5…

MARÍA: ¡Perfecto! Serian 25, y 25 dijimos que es 15 más 10.

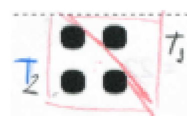
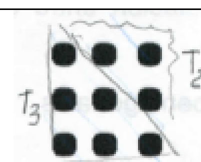
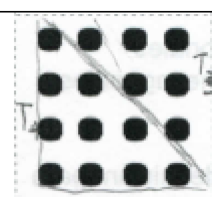
JOSÉ: Aja, entonces dijimos que es T sub 5, mas T sub 4… ¿el otro viene siendo?

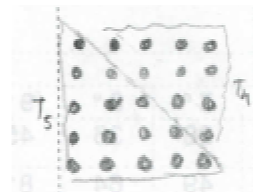
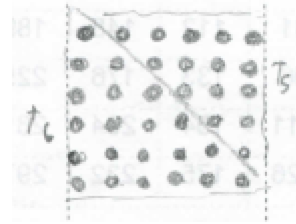
MARÍA: 6 por 6…

C. 36… 1, 2, 3, 4, 5, 6; 1, 2, 3, 4, 5, 6; 1, 2, 3, 4, 5, 6… 36…

MARÍA: 36… dijimos que es… 21 más 15; entonces dijimos que T sub 5, más 7 sub 6, es igual a C sub 6, mira ahí está la… T sub n, menos 1… ahí está la relación, T sub n, menos 1, más T sub n, es igual a C sub n… ya tenemos ahí la formula… las preguntas las tenemos aquí…

Cuadro 48
Establecimiento de comparación entre la expresión oral y escrita de la relación de los números cuadrados y los triangulares

Expresión Oral	Registro Escrito	
…cuadrado 2…vamos a regresarnos a nuestra tablita anterior. Fíjate que nos dice que es… 1 más 3… ¡Ah! Mira 1 más 3…T sub 1, T sub 2, o sea que en este va T sub 2… T sub 2, más T sub1 me da C sub 2…		$\overset{T_2}{\square}+T_1=C_2$
…Aquí da 9…¿9 seria?... ¡aquí esta, míralo!...6 más 3… C3, seria, T3 mas T2…		$T_3+T_2=C_3$
…Aja. ¿Seria 16?... 10 más 6…Eso es lo que acabamos de hacer, ¡míralo! T3 mas T4, igual a C4… entonces hay que hacer el dibujito,		$T_3+T_4=C_4$

<table>
<tr>
<td>…ahí son 5 por 5… Es así, ¿no? ¿Porque es con los punticos así?...1, 2, 3, 4, 5; 1, 2, 3, 4, 5…1, 2, 3, 4, 5; 1, 2, 3, 4, 5; 1, 2, 3, 4, 5… 5 por 5…¡Perfecto! Serian 25, y 25 dijimos que es 15 más 10…Aja, entonces dijimos que es T sub 5, mas T sub 4… ¿el otro viene siendo?</td>
<td>
</td>
<td>$\overset{T_4}{\square}+T_5=C_5$</td>
</tr>
<tr>
<td>…6 por 6…36… 1, 2, 3, 4, 5, 6; 1, 2, 3, 4, 5, 6; 1, 2, 3, 4, 5, 6… 36…36… dijimos que es… 21 más 15; entonces dijimos que T sub 5, más T sub 6, es igual a C sub 6, mira ahí está la…</td>
<td>
</td>
<td>$T_5+T_6=C_6$</td>
</tr>
<tr>
<td>…T sub n, menos 1… ahí está la relación, T sub n, menos 1, más T sub n, es igual a C sub n… ya tenemos ahí la formula…
… o sea, para hallar la figura C sub n, basta con sumar T sub n, más T sub n, menos 1…</td>
<td colspan="2">$\boxed{T_{n-1}+T_n=C_n}$</td>
</tr>
</table>

MARÍA: La primera, explica todo lo que observas en la formación de la secuencia anterior, incluyendo las posibles relaciones existentes. Aja…

JOSÉ: Entonces lo sumo…

MARÍA: La cantidad total de puntos de la figura n, viene dada por n al cuadrado. S no, C… C sub n, es igual a n al cuadrado. ¿La forma?... ¿Cómo se distribuyen los puntos? los puntos se distribuyen en forma de cuadrado. ¿Qué más? Este… esta relación que tenemos aquí…

JOSÉ: Para hallar cualquier tipo de cuadrado… cuadrado en 5… o sea, para hallar la figura C sub n, basta con sumar T sub n, más T sub n, menos 1…

MARÍA: O sea… ¡Ven acá!... ¡Alguna fórmula divide esto entonces!... divide esto ahí… entre 1 y 3… ¿estás viendo? ¡Míralo! Aquí tienes el numero triangular, ponle a esto T sub 2, y esto que tienes aquí, es T sub 1, ¿estás viendo? Este es T sub 2, ponle ahí, y este viene siendo T sub 1… ahora divide este…

C. ¿Aquí seria?

MARÍA: Pásala por esa diagonal, si, ¡exactamente! ¿Ahí tienes?... ¿6 puntos?

JOSÉ: Esto aquí es T… t sub 3…

MARÍA: Lo que pasa es que lo tienes en diagonal, ¿ves? 3, 2, 1… Eso es T sub 3; ¿y aquí tienes? 2 y 1… ¿esto sería?

JOSÉ: Seria… T sub 2… porque tengo…

MARÍA: Porque tienes dos filas… 1 y 2… ¿viste? Claro, que aquí las filas están camuflaje das, son las diagonales…

JOSÉ: Aquí seria…

MARÍA: ¡No! Esa figura esta mala, porque pasa por encima de la diagonal.

C. ¡Ah! Si… ya va…

MARÍA: ¡Esa si es la figura! ¡Perfecto!

JOSÉ: Aquí tenemos a T sub 4… que es la relación que tenemos aquí, y aquí esta T sub 3…

MARÍA: Un numero cuadrado simple, se puede escribir como la suma de dos triangulares consecutivos… numero cuadrado n, siempre se puede escribir… n y n, menos 1, para que sepan que siempre coinciden con el numero cuadrado que estoy escribiendo… estoy escribiendo 4, entonces T sub 4, menos el anterior, que sería T sub 3. Vámonos a la otra pregunta ya.

JOSÉ: ¿Cuántos puntos en total debe tener la figura 15?

MARÍA: ¡15! ¡15, Es 15 al cuadrado! ¿Cuánto es 15 al cuadrado? 225… aja, la figura 15 tendrá 15 al cuadrado puntos, es decir, 225. ¿Qué más?

JOSÉ: Dice. ¿Cómo están desglosados los sumandos?

MARÍA: Aja, 225 es igual a T sub 15, más T sub 14.

JOSÉ: Exactamente.

MARÍA: Aja, entonces nosotros tenemos la fórmula de números cuadrados, que era 15 por 16, entre 2. ¿Era el siguiente?

JOSÉ: Si.

MARÍA: 225 menos 120… ¿105? Vamos a ver, 14 por 15 entre 2, 105… está bien…

JOSÉ: Sumado debería dar 225…

MARÍA: Si da, porque yo calcule 105, restando a 225 120

MARÍA: Y después calcule el 14 para comprobarlo. Aja, que dice después…

C. La 2.3 dice: explica si 145 está o no en la secuencia. ¡Ah! Por aquí tú la tienes…

MARÍA: Le sacamos la raíz cuadrada ¿Cuál es el número?

C. 146.

MARÍA: Si le logramos sacar la raíz cuadrada… ¡ay Dios!!!

C. No, no da… no da…

MARÍA: No da exacto…

JOSÉ: No da exacto…

MARÍA: No, porque no es un cuadrado perfecto

JOSÉ: ¿Es o no un numero cuadrado?... No, no es cuadrado…

MARÍA: No, no es un cuadrado perfecto, y en la secuencia solo tenemos cuadrados perfectos; así, o sea, 1 al cuadrado, 2 al cuadrado, 3 al cuadrado, 4 al cuadrado y así sucesivamente. Aja.

JOSÉ: Luego dice: Explica la relación que existe entre los números triangulares y cuadrados. Intente establecer la formula oral, escrita y gráfica.

MARÍA: No, escita oral es porque si estas grabando, como el caso de nosotros, lo estas estableciendo oral, que lo escriba de la mejor manera, pues. De manera gráfica ya lo hicimos, porque fíjate que aquí…

JOSÉ: Si la relación entre los triángulos y…

MARÍA: Fíjate, mira lo siguiente: gráficamente que pasa ¿gráficamente? Se pasa una raya por encima de la diagonal…

JOSÉ: De la diagonal principal…

MARÍA: Si, se pasa una raya por encima de la diagonal principal y se divide el cuadrado en 2 triángulos…

MARÍA: ¡Exactamente! En 2 triángulos. El triángulo de abajo..

JOSÉ: El triángulo inferior…

MARÍA: El triángulo inferior, perfecto, será T sub n, y el superior será T sub n, menos 1, cuando estamos considerando al cuadrado n… Aja, ya lo tenemos gráficamente… ¿Qué más nos piden? En forma escrita, ya lo habíamos hecho, y la formula ya la sacamos también… aja… ¿Qué sigue?

JOSÉ: Encuentra una formula general para encontrar cualquier número de triángulos, conociendo su posición, por ejemplo, el cuadrado 23…

MARÍA: ¡Mira! No la hemos hecho, pero la tenemos, porque como tenemos… no, mentira, si la tenemos C sub n, igual a n al cuadrado. Podemos sacarla por los triangulares…

JOSÉ: Aja…

MARÍA: C sub n, es igual a T sub n, más T sub n menos 1. ¿Quién es T sub n?

JOSÉ: n por n, más uno sobre 2.

MARÍA: Aja ¿Y aquí seria?

C. Seria, n menos 1, por n entre 2.

MARÍA: Aja, C sub n es igual, -yo creo que nos va a dar la misma- n cuadrado, más n… ¿verdad? Propiedad distributiva; ahí me va a quedar n al cuadrado, menos n entre 2… ¿y porque yo puse un 2 aquí? Aquí no es un 2, aquí es más n sobre 2, más n y menos n se cancelan y me quede que C sub n, es igual a 2n cuadrado…

MARÍA: Entre 2, C sub n es igual a n cuadrado… podemos despejar la formula desde la suma de los números triangulares, o como ya lo hicimos nosotros, a través del conteo, C sub n, igual a n al cuadrado, ya tenemos la formula… que son cuadrados perfectos pues… ¿Qué tenemos allí?

JOSÉ: Dice por ejemplo, C sub n, es igual a 23 al cuadrado.

Cuadro 49
Fragmentos de los diálogos de los profesores de matemática en formación estableciendo la fórmula general de los números cuadrados

Expresión Oral
…C sub n, es igual a T sub n, más T sub n menos 1… ¿Quién es T sub n?...n por n, más uno sobre 2…Aja ¿Y aquí seria?...Seria, n menos 1, por n entre 2…Aja, C sub n es igual, -yo creo que nos va a dar la misma- n cuadrado, más n… ¿verdad? Propiedad distributiva; ahí me va a quedar n al cuadrado, menos n entre 2… ¿y porque yo puse un 2 aquí? Aquí no es un 2, aquí es más n sobre 2, más n y menos n se cancelan y me quede que C sub n, es igual a 2n cuadrado…Entre 2, C sub n es igual a n cuadrado… podemos despejar la formula desde la suma de los números triangulares, o como ya lo hicimos nosotros, a través del conteo, C sub n, igual a n al cuadrado, ya tenemos la formula… que son cuadrados perfectos pues…

Registro Escrito

(RA$_1$) $C_n = t_n + t_{n-1} = \dfrac{n.(n+1)}{2} + \dfrac{(n-1).n}{2}$

$\downarrow$

(RA$_2$) $C_n = \dfrac{n^2 + \cancel{n} + n^2 - \cancel{n}}{2}$

$\downarrow$

(RA$_3$) $C_n = \dfrac{2n^2}{2}$

$\downarrow$

(RA$_4$) $\boxed{C_n = n^2}$

MARÍA: ¿Cuánto es 23 al cuadrado? 529… ¿Qué más dicen allí?

JOSÉ: C sub 56…

MARÍA: ¿56 cuánto nos da? 56 al cuadrado… 3.136… ¿Cuál más?

JOSÉ: Y C sub 100.

MARÍA: C sub 100 es igual a 100 al cuadrado, que eso sería… ¿1, 2, 3, 4? 10.000…

JOSÉ: Y C sub n que ya sabe…

MARÍA: Ya la tenemos aquí… por ahí empezamos. ¿Después que viene?

JOSÉ: Ahora viene la 2.6. Dice: 310 a pesar de que no es cuadrado, se puede expresar como la suma de 4 números cuadrados, no necesariamente distintos.

MARÍA: ¿Quién sería? ¿Trescientos qué?

JOSÉ: 310… aquí lo dicen…

MARÍA: Si eso es un ejemplo… ahí lo hacen 289, más 16, más 4, más 1…

JOSÉ: Eso es igual a C sub17, mas C sub 4, más C sub 2, más C sub 1…

M. Ok… más fino… continúa…

JOSÉ: Expresa los siguientes números, como la suma de cuadrados… 4 números cuadrados de 50…

MARÍA: C 50 es igual… Seria C sub 7, más C sub 1, que sería a 49 más 1, y este 49 es 7 al cuadrado, más 1 al cuadrado… Está bien… estamos aprendiendo… (Risas)

JOSÉ: De 90, C sub90, seria 81, que sería C sub 9, seria 81 más C sub 3, que sería 9 al cuadrado más 3 al cuadrado… Seria 81 más 9…

MARÍA: ¡Perfecto! ¿Cuál más?

C. 160.

MARÍA: ¡Dios! Esa si no me la se…

C. Vamos a ver… 15 por 15…

MARÍA: No, 15 por 15 se pasa… 12 por 12 ¿sera?... 12 por 12 es 144…

JOSÉ: Y 13 por 13…

MARÍA: 169… se pasa…

JOSÉ: Se pasa…

MARÍA: Entonces, C sub 12 seria, 12 por 12, 144… vamos a ver… 160, menos 144, nos queda 16, más C sub 4 que seria 16, que sería 12 al cuadrado más 4 al cuadrado…perfecto…

JOSÉ: 250… hágalo ahí mismo, abajo…

MARÍA: ¿250? ¿Es el último? C de 250 es igual… vamos a hacerlo así, raíz de 250 que seria 15, C sub 15, más 15 por 15, nos da 225, mas C sub 5 que seria 25, entonces diría 225 más 25, que será igual a 15 al cuadrado más 5 al cuadrado…

Cuadro 50
Establecimiento de comparación entre la expresión oral y escrita de registros aritméticos realizados en la actividad 18 por los profesores de matemática en formación inicial

Expresión Oral	Registro Escrito
C sub 23…¿Cuánto es 23 al cuadrado? 529… ¿Qué más dicen allí?	$C_{23} = 23^2 = 529$
C sub 56…¿56 cuánto nos da? 56 al cuadrado… 3.136…	$C_{56} = 3136 = 56^2$
¿Cuál más?... Y C sub 100…C sub 100 es igual a 100 al cuadrado, que eso sería… ¿1, 2, 3, 4? 10.000…	$C_{100} = 100^2 = 10.000$

310 a pesar de que no es cuadrado, se puede expresar como la suma de 4 números cuadrados, no necesariamente distintos…eso es un ejemplo…ahí lo hacen 289, más 16, más 4, más 1…Eso es igual a C sub17, mas C sub 4, más C sub 2, más C sub 1…	$310 = 289 + 16 + 4 + 1$ $= C_{17} + C_4 + C_2 + C_1$
…C 50 es igual… Seria C sub 7, más C sub 1, que sería a 49 más 1, y este 49 es 7 al cuadrado, más 1 al cuadrado… Está bien… estamos aprendiendo…	$C_{50} = C_7 + C_1 = 49 + 1 = 7^2 + 1^2$
…De 90, C sub 90, seria 81, que sería C sub 9, seria 81 más C sub 3, que sería 9 al cuadrado más 3 al cuadrado… Seria 81 más 9…¡Perfecto!	$C_{90} = C_9 + C_3 = 9^2 + 3^2 = 81 + 9$
…160…¡Dios! Esa si no me la se…Vamos a ver… 15 por 15… No, 15 por 15 se pasa… 12 por 12 ¿sera?... 12 por 12 es 144…Y 13 por 13…169… se pasa…Se pasa…Entonces, C sub 12 seria, 12 por 12, 144… vamos a ver… 160, menos 144, nos queda 16, más C sub 4 que seria 16, que sería 12 al cuadrado más 4 al cuadrado…perfecto…	$C_{160} = C_{12} + C_4 = 144 + 16 = 12^2 + 4^2$
…250… hágalo ahí mismo, abajo…¿250? ¿Es el último? C de 250 es igual… vamos a hacerlo así, raíz de 250 que seria 15, C sub 15, más 15 por 15, nos da 225, mas C sub 5 que seria 25, entonces diría 225 más 25, que será igual a 15 al cuadrado más 5 al cuadrado…	$C_{250} = C_{15} + C_5 = 225 + 25 = 15^2 + 5^2$

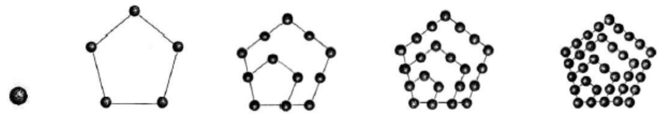
MARÍA: Ok… sigamos pues…

C. Ahora viene, ¿explique que son los números cuadrados?

MARÍA: ¿Explique que son los números cuadrados? Este numero 3 va por aquí, no por allá… aja… bueno, da la definición de los triángulos… ¿Qué dice aquí, los números triangulares? Se llama cuadrado un número que se puede representar por medio de un cuadrado como se observa… numero cuadrado es aquel que se puede representar a través de un cuadrado, que tiene la misma cantidad de filas de puntos y de columnas. Aja, ¿Qué más?

JOSÉ: Más nada…

Actividad 19: Números Pentagonales



$P_1 = 1$ $P_2 = 5$ $P_3 = 12$ $P_4 = 22$ $P_5 = 35$

(19.1) Encuentra los pentagonales P8, P10, P15. (19.2) Establece de manera escrita/oral y gráfica la relación entre dos números triangulares consecutivos y un número pentagonal. (19.3) Expresa simbólicamente la relación anterior. (19.4) Encuentra una fórmula general para los números pentagonales

Transcripción de la grabación de las Actividad 19

MARÍA: Venimos por aquí… Actividad numero 3… Números pentagonales ¡Na´guara! ¡Vamos bien! ¡Vamos bien! Aja, podemos hacernos una tablita, aquí la tenemos, numero de la figura 1, ahí tenemos el dibujito ¿Cuántos números tiene?

C. Tiene… T sub 2 es 5 cuadritos… un pentágono…

MARÍA: Si, ahora vamos con los números pentagonales.

C. 1, 5…

MARÍA: Cuando es 1, P sub 1 es igual a 1.

JOSÉ: 1 es igual a 1, ¿Cuándo es 2?

MARÍA: P sub 2, es igual a 5, ¿Cuándo es 3?

JOSÉ: Es igual a 12…

MARÍA: Mira, esta como el de los diagonales, ya empezó a crecer…

C. P sub 4, es igual a 22, P sub 5 es igual a 35.

MARÍA: Ok… ¿Qué nos preguntan? Encuentre los números pentagonales…

JOSÉ: P sub 8…

MARÍA: Ya va, vamos con calma, vamos a ver cuál es la relación entre ellos, porque no la veo…

JOSÉ: 5, 12, 22, 25…

M. Aquí sume 4, de aquí acá sume 4… ¿5 más 7?

JOSÉ: 2, 4, 5,… Si 7.

MARÍA: 12… de aquí para acá sume 10… sume 13… No, la suma no me da…

JOSÉ: A ver… seria… 14… 12…

MARÍA: Ahí os dieron unos dibujitos con los números… 1, 5, 12, 22 y 35… Aja, pero fíjate que como ya verificamos, ellos están quedando cuidados, o sea, que aquí tengo 1, 2, 3, 4, era lo que estaba tratando de ver… 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, sumo 7 y obtengo otro… sumo 10 aquí… aquí sumo 13…

JOSÉ: 1, 5, 12, 22… ya va… (Risas)

MARÍA: No los veo… ven acá… aquí seria 4 más 1… si sumo los 2 primeros cuadrados, me da este 5, pero este 12, ¿seria 9 más 3? Pero sería un numero cuadrado, más un número triangular… ¡Mira, si, si, si! 4 más 1, 4; 9 más 3, 12, ¿Cuánto me da 16 más 6?

MARÍA: ¡Lo tenemos ¡Ya está! Mira…

JOSÉ: Ah… ¿o sea que están relacionados?

MARÍA: Están relacionados los cuadrados con triangular. Mira pentagonal 1, es igual a cuadrado 1 más triangular 0, -triangular 0 no tengo-

C. No tengo---

MARÍA: Pentagonal 2 es igual… que sería este 5 al cuadrado, 2 más triangular 1, que sería 4 más 1… ¿sí?

JOSÉ: Seria 5…

MARÍA: Pentagonal 3 ¿seria? 12, 9 más 3… que sería cuadrado 3, más triangular 2… pentagonal 4, seria 22, que seria, cuadrado 4, más triangular 3, serian 16 más 6, me daría el 22. Pentagonal 5 seria 25 más 10 cuadrado 5, mas triangular 4, o sea, que pentagonal n es igual a cuadrado n, más triangular n-1. Claro, que aquí este T sub 0, seria 0, porque no tengo un triangular 0.

JOSÉ: Claro.

MARÍA: Partiendo desde allí, creo que la obtenemos…

JOSÉ: Claro. Y la secuencia…

MARÍA: Aja, pero vamos a sustituir la formula… Pentagonal n -¿Quién es el cuadrado n? ¿este es n al cuadrado y este sería n menos 1… por n?

JOSÉ: No.

MARÍA: Porque le voy a sumar 1.

JOSÉ: Si, por n.

MARÍA: Pentagonal n sería igual a 2 veces n al cuadrado, más n menos n, todo entre 2; entonces pentagonal n seria 3n al cuadrado, menos n entre 2. –No, ¡Nosotros lo que somos es genios! (risas)

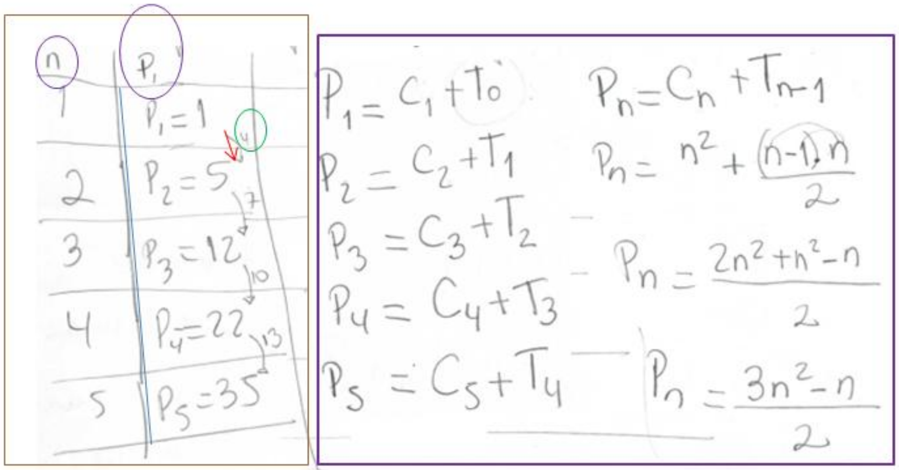
MARÍA: Dime el pentagonal que le están pidiendo.

JOSÉ: Pentagonal 8.

Cuadro 51
Fragmentos de los diálogos de los profesores de matemática en formación estableciendo la fórmula general de los números pentagonales

Expresión Oral
…P sub 1 es igual a 1... ¿Cuándo es 2?...P sub 2, es igual a 5, ¿Cuándo es 3?...Es igual a 12…Mira, esta como el de los diagonales, ya empezó a crecer… P sub 4, es igual a 22, P sub 5 es igual a 35…vamos con calma, vamos a ver cuál es la relación entre ellos, porque no la veo…5, 12, 22, 25…Aquí sume 4, de aquí acá sume 4… ¿5 más 7?..2, 4, 5,… Si 7… 12… de aquí para acá sume 10… sume 13… No, la suma no me da…A ver… seria… 14… 12…Ahí nos dieron unos dibujitos con los números… 1, 5, 12, 22 y 35… Aja, pero fíjate que como ya verificamos, ellos están quedando cuidados, o sea, que aquí tengo 1, 2, 3, 4, era lo que estaba tratando de ver… 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, sumo 7 y obtengo otro… sumo 10 aquí… aquí sumo 13…1, 5, 12, 22… ya va… (Risas)…No los veo… ven acá… aquí seria 4 más 1… si sumo los 2 primeros cuadrados, me da este 5, pero este 12, ¿seria 9 más 3? Pero sería un numero cuadrado, más un número triangular… ¡Mira, si, si, si! 4 más 1, 4; 9 más 3, 12, ¿Cuánto me da 16 más 6?...¡Lo tenemos ¡Ya está! Mira…¿o sea que están relacionados?...Están relacionados los cuadrados con triangular. Mira pentagonal 1, es igual a cuadrado 1 más triangular 0, -triangular 0 no tengo-No tengo---Pentagonal 2 es igual… que sería este 5 al cuadrado, 2 más triangular 1, que sería 4 más 1… ¿sí?...Seria 5…Pentagonal 3 ¿seria? 12, 9 más 3… que sería cuadrado 3, más triangular 2… pentagonal 4, seria 22, que seria, cuadrado 4, más triangular 3, serian 16 más 6, me daría el 22. Pentagonal 5 seria 25 más 10 cuadrado 5, mas triangular 4, o sea, que pentagonal n es igual a cuadrado n, más triangular n-1. Claro, que aquí este T sub 0, seria 0, porque no tengo un triangular 0….pero vamos a sustituir la formula… Pentagonal n -¿Quién es el cuadrado n? ¿este es n al cuadrado y este sería n menos 1… por n?...No...Porque le voy a sumar 1… Si, por n…Pentagonal n sería igual a 2 veces n al cuadrado, más n menos n, todo entre 2; entonces pentagonal n seria 3n al cuadrado, menos n entre 2. –No, ¡Nosotros lo que somos es genios! (risas)

Registro Escrito



MARÍA: Pentagonal 8, es igual a 3 por 8 al cuadrado, menos 8 entre 2… esto sería 64 por 3 -192- menos 8, me quedaría 184 entre dos y quedaría 92. Búscame quien es el cuadrado 8. –No, cuadrado 8 es 64- más el triangular 7… ¿Quién es el triangular 7? ¿No lo tenemos? Si, si lo tenemos, 28… Te acuerdas, 21, que le fuimos sumando, hicimos la secuencia, 21 después viene 28, este es el triangular 7, vamos a ponérselo aquí… aja, 64 más 28… vamos a ver 64 más 28, cruzamos los dedos y nos da 92… ¡perfecto! ¿Qué más dice?

JOSÉ: El pentagonal 10.

MARÍA: Me quedaría 10 al cuadrado, seria 100 por 3, serian 300 menos 10 entre 2, 590… serian ¿145?

JOSÉ: El pentagonal 15…

MARÍA: El pentagonal 15, sería un cuadrado… 225 por 3, 675 menos… ¿el triangular 15? No importa, nosotros tenemos aquí los triangulares… 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 (risas) ¿Qué fue lo que le estábamos sumando?

JOSÉ: 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14…

MARÍA: Ah, viene 15… me da 127…

JOSÉ: Menos 127…

MARÍA: ¿Para que quiero yo ese mismo?

JOSÉ: Para hacer la resta…

JOSÉ: La diferencia entre 12…

MARÍA: ¡No! No sé que estoy haciendo, porque este 675 ¿Quién es?

JOSÉ: n 3 veces…

MARÍA: 3 por 15 al cuadrado menos n, sería menos 15, yo no necesito triangular, porque estoy usando esta fórmula, no sé qué me paso… ya va… si… 675 menos 15 entre 2, 330… ¿Qué sigue después?... Establezca de manera oral y escrita la relación entre dos números triangulares positivos y un número pentagonal… ¿entre dos triangulares?

JOSÉ: Si, entre dos números triangulares consecutivos y pentagonales…

MARÍA: Nosotros establecimos relación entre cuadrados y triangulares… Si nosotros decimos que pentagonal, es igual a cuadrado n más T sub n menos 1, -este cuadrado en- es igual n 1, porque cuadrado n ya lo tenemos, hay que buscarlo, aquí esta – cuadrado n es igual a T sub n, más T sub n menos 1. Este es el cuadrado n. entonces el pentagonal es el mismo número de su triangular, más 2 veces el triangular anterior.

JOSÉ: Esa es la relación que existe entre un número triangular y los pentagonales…

MARÍA: También porque sacamos la relación entre un numero triangular y pentagonal anterior… este es el número 4, ¿después que viene?

JOSÉ: Expresa simbólicamente la relación anterior.

MARÍA: Ya la expresas…

JOSÉ: Encuentre la formula general para los números pentagonales.

MARÍA: Ya los hicimos… T sub n, es igual a 3n al cuadrado menos n entre 2, porque de hecho así lo calculamos. Aja, terminamos con los pentágonos.

Actividad 20: Números Hexagonales

20.1) Dibuja la secuencia de los números hexagonales

20.2) Establece una definición para los números hexagonales

20.3) Establece una fórmula general para los números hexagonales

Transcripción de la grabación de las Actividad 20

Vámonos con los hexagonales. Dibuja la secuencia de los números hexagonales. – Bueno, en virtud del tiempo, aquí lo tenemos. Aja, que vamos a hacer.

JOSÉ: Dice: dibuja la secuencia de los números hexagonales.

MARÍA: Para hexagonales, utilizaremos h… 1, h sub 1 es igual a 1; 2, h sub 2 es igual, aquí hay 6 puntos. En el 3, h sub 3, ¿Cuántos hay?

JOSÉ: 15.

MARÍA: 15. En el 4, h sub 4, 28…

JOSÉ: 4 en h sub 5, hay 45.

MARÍA: ¿Qué más?

JOSÉ: Dice: Establezca una definición para los números hexagonales.

MARÍA: Es parecido a los números triangulares… ¿Aquí está? Los números hexagonales…

JOSÉ: Se llaman números hexagonales a un número que puede ser representado por medio de un hexágono.

MARÍA: Aja… ahora viene…

JOSÉ: Establezca una formula general para los números hexagonales.

MARÍA: ¡Dios! Aja, vamos a ver… este es 6…este es 5, pero puede ser 5 más 1, no sabemos de dónde viene… este es 15, ¿puede ser cuánto? ¿12 más 3?

JOSÉ: 12 más 3 son 15…

MARÍA: Vamos con 28… eso es… 22 más 6… ¡listo!... vuélvelo a decir… Hexagonal n s igual, este 15 es 12 más 3… pentagonal n más triangular n menos 1… ¿sí o no? Entonces nosotros establecimos los números pentagonales con los triangulares… mira…

JOSÉ: los hexagonales son pentagonales…

MARÍA: ¡Míralo! Los números hexagonales es igual a… el pentagonal es T a la n más 2, T a la n menos 1, más T a la n menos 1; esto es igual a T a la n más 3, T a la n menos 1…

C. Sí señor, ya está la formación ahí…

MARÍA: Y si lo queremos hacer por formula, H sub n va a ser igual a 3 n cuadrado, menos n entre 2, más n menos 1 por n entre 2; entonces esto será igual a 3 n cuadrado, menos n, más n al cuadrado, menos n, más n sobre 2, entonces 3 más 1, 4… n al cuadrado, menos 2n entre 2, saco factor común, entonces hexagonal n es igual a 2 n al cuadrado menos n entre 2, hexagonal n es igual a 2n al cuadrado menos n. Tenemos la formula… (Risas) ¿Después que viene?

JOSÉ: Ya está listo, más nada…

Cuadro 52

Fragmentos de los diálogos de los profesores de matemática en formación estableciendo la fórmula general de los números hexagonales

Declaración Oral

…Para hexagonales, utilizaremos h… 1, h sub 1 es igual a 1; 2, h sub 2 es igual, aquí hay 6 puntos. En el 3, h sub 3, ¿Cuántos hay?...15…15. En el 4, h sub 4, 28…4 en h sub 5, hay 45…¡Dios! Aja, vamos a ver… este es 6…este es 5, pero puede ser 5 más 1, no sabemos de dónde viene… este es 15, ¿puede ser cuánto? ¿12 más 3?...12 más 3 son 15…Vamos con 28… eso es… 22 más 6… ¡listo!... vuélvelo a decir… Hexagonal n s igual, este 15 es 12 más 3… pentagonal n más triangular n menos 1… ¿sí o no? Entonces nosotros establecimos los números pentagonales con los triangulares… mira…los hexagonales son pentagonales… ¡Míralo! Los números hexagonales es igual a… el pentagonal es T a la n más 2, T a la n menos 1, más T a la n menos 1; esto es igual a T a la n más 3, T a la n menos 1…Sí señor, ya está la formación ahí…Y si lo queremos hacer por formula, H sub n va a ser igual a 3 n cuadrado, menos n entre 2, más n menos 1 por n entre 2; entonces esto será igual a 3 n cuadrado, menos n, más n al cuadrado, menos n, más n sobre 2, entonces 3 más 1, 4… n al cuadrado, menos 2n entre 2, saco factor común, entonces hexagonal n es igual a 2 n al cuadrado menos n entre 2, hexagonal n es igual a 2n al cuadrado menos n. Tenemos la formula… (Risas) ¿Después que viene?...Ya está listo, más nada…

Registro Escrito

(RT)

N	H
1	$H_1=1$
2	$H_2=6$
3	$H_3=15$
4	$H_4=28$
5	$H_5=45$

(RA_1) $H_n = P_n + t_{n-1}$

(RA_2) $H_n = t_n + 2(t_{n-1}) + t_{n-1} = t_n + 3(t_{n-1})$

(RA_3) $H_n = \frac{3n^2-n}{2} + \frac{(n-1).n}{2} = \frac{3n^2-n+n^2-n}{2} = \frac{4n^2-2n}{2}$

(RA_4) $H_n = \frac{2(2n^2-n)}{2}$

(RA_5) $\boxed{H_n = 2n^2-n}$ ←(RFI)

Actividad 21: Números Poligonales

21.1) Observa el siguiente cuadro, establece una definición para los números poligonales, e intenta establecer una fórmula general para los números poligonales

Nombre	**Orden**									
	1 º	**2 º**	**3 º**	**4 º**	**5 º**	**6 º**	**7 º**	**8 º**	**9 º**	**10º**
Triangular	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Cuadrado	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Pentagonal	1	5	12	22	35	51	70	92	117	143
Hexagonal	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
Heptagonal	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235
Octogonal	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280
Nonagonal	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325
Decagonal	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370

Transcripción de la grabación de las Actividades 21

Viene actividad de los polígonos…

MARÍA: Números poligonales. Observa el siguiente cuadro y establece la definición para los números poligonales e intente establecer una fórmula general para los números poligonales… (risas)

JOSÉ: ¡Esta listo!

MARÍA: ¡No!, ¡No! Porque fíjate lo siguiente, vamos a definir números poligonales; se llama número poligonal un número que puede ser representado por medio de un polígono… ¿y cuál es un polígono? Un triángulo. Un cuadrado, un pentágono, un hexágono… Aja, vamos a ver lo que tenemos hasta ahora. ¿Cuál es la fórmula de los números triangulares? T sub n, es igual a n por n, más 1 entre 2. C sub n, es igual a n al cuadrado. P sub n 3 n al cuadrado, menos n entre 2; h sub n, es igual a 2 n al cuadrado, menos n entre…

JOSÉ: No, entre nada…

MARÍA: Si nos vamos a esta fórmula, quien sería… claro 7 lados, para heptágono, vamos a ponerle ep, entonces ep de n, sería igual a T sub n más 4… 1, 2, 3, 4, n menos 1… que no sé si es verdad. Vamos a sustituir para ver…

JOSÉ: Claro, ahí se ve la secuencia…

MARÍA: Tenemos una tabla, después que determinemos la formula, podemos verificar si esto si da… Dijimos que T sub n, es igual a n por n, más 1, sobre 2. Más, ahora viene 4 veces.

JOSÉ: Que multiplica a T sub n menos 1

MARÍA: Que sería n menos 1 por n ¿verdad?

JOSÉ: Entre 2.

MARÍA: Entre 2, sí, pero este 2 y este 2 se van. Aja, esto me quedaría n cuadrado entre n menos 2 mas… ¿será que lo cancelamos o lo dejamos ahí?

JOSÉ: Todavía queda el 4… que multiplica n cuadrado, menos n, todo esto entre 2.

MARÍA: Vamos a dejar ese 2 ahí epn es igual a n cuadrado, mas n, mas 4n cuadrado, menos 4n, todo eso entre 2, epn es igual a 5 cuadrado, menos 3 n, entre 2. Este nos queda con denominador. El 5 nos queda con denominador, el 7 nos debería quedar con denominador. Los pares nos quedan sin denominador y los impares nos quedan con denominador. Vamos a comprobar que sean esos números; cuando n vale 1, 1 al cuadrado por 5 me da 5; 3 por 1 menos 3 me da 1; cuando vale 2, 2 al cuadrado seria 4 por 5, 2º menos 6, me daría 14, entre 2, a 7.

JOSÉ: Aquí esta.

MARÍA: Lo comprobamos por 3 y nos vamos… 3 al cuadrado 9, por 5, 45, menos 21, aquí estamos con 3 no…

JOSÉ: As, si, 9…

MARÍA: 9. Menos 9, 45 menos 9 serian 36… no queremos dudar, entre 2 da 18. Esa es la fórmula, ya tenemos la formula. Epn, es igual a 5 n al cuadrado, menos 3 n, entre 2. Vamos a buscar la del octágono… en otra hoja…

MARÍA: Triangular n, es igual a n, más n más 1, entre 2 cuadrado n, n cuadrado. Vamos a sustituir esta, este es n cuadrado más n entre 2, esta es n cuadrado, T sub n, es igual a 3 n cuadrado menos n entre 2, el hexágono a 2 por n cuadrado menos n. El heptágono, que este son 7, 5 n al cuadrado menos 3 n entre 2. Vamos a ver … Aparece en n cuadrado y un n en la formula.

JOSÉ: Si.

MARÍA: Vamos a colocarle a todos denominador y multiplicarlo por 2, colocarle n porque este no tiene n, el cuadrado seria n al cuadrado más 0 n entre 2, este ya lo tenemos así… ¿Este sería? ¿4?

JOSÉ: Si, seria 4… n al cuadrado, menos 2 n entre 2…

MARÍA: 5n cuadrado, menos 3n entre 2, vamos a colocar este, 3n cuadrado menos n entre 2. Aja, ¿este es? 3, 4, 5, 6, y 7… ya va… yo creo que aquí vamos a tener que utilizar 2 sub índice, uno para el hexágono, para el numero de polígono y otro para el numero dela figura. Porque fíjate que básicamente la tenemos… 1, 2, 3, 4, 5… Mira el octágono seria 0 sub n, esto es 6 n cuadrado, menos 4 n, entre 2, luego del octágono ¿Cuál viene?

JOSÉ: El nonágono.

MARÍA: El nonágono que son 10.

MARÍA: Ay, pero esta es n. Y después de nonagonal, ¿Qué viene?

JOSÉ: Decagonal.

MARÍA: Esta debería ser 7 n al cuadrado, menos 5 n entre 2 y este debería ser 8 n al cuadrado, menos 6 n al cuadrado entre 2. Vamos a ver si es verdad, 0 debería ser triangular n, más 5 veces triangular n, menos 1… ¿triangular 1 quién es? N por n más 1 no, n cuadrado más n, ya lo teníamos… n al cuadrado más n entre 2, esto es más 5… ¿Esto es?

JOSÉ: n menos 1 más n seria… n al cuadrado menos n entre 2. Eso es igual a 6 n cuadrado menos 4 n sobre 2.

MARÍA: Aquí esta… míralo… ¡Si nos dio! O sea, que esta fórmula está bien. Lo asumimos.

JOSÉ: Si.

MARÍA: Vamos a ver, la del octagonal la tenemos bien; ahora vine la nonagonal, que sería n, n que sería un igual a T sub n más 6, T sub n menos 1, esto sería igual a n cuadrado más n entre 2, más 6, que multiplique a n cuadrado menos n entre 2. Esto me va a dar 7 n cuadrado menos 5 n entre 2. Aparentemente esta es la fórmula. Ahora vamos a tratar de generarla. Números pentagonales poligonales, son es igual, cuando el polígono tiene L lados, va a ser L menos 2 por n cuadrado (que es el número de la figura) y L (el número de lados del polígono) L menos 2 n al cuadrado, menos L menos 4… ¡Tenemos la formula! Vamos a escribirla aquí en la 5… P sub L de n (porque tengo 2 variables) es igual a L menos 2 por n al cuadrado menos L menos 4 por n entre 2. Donde L es el número de lados del polígono y n es el número de la figura. ¡Listo!

A continuación se extraen fragmentos de los diálogos donde los resolutores idean las fórmulas generales de los números heptagonales, octogonales, nonagonales, y decagonales, asimismo, fragmentos donde se aprecia la construcción y la formulación de la regla general para calcular cualquier número poligonal.

Cuadro 53
Fragmentos de los diálogos de los profesores de matemática en formación estableciendo la fórmula general de los números heptagonales

Expresión Oral

…claro 7 lados, para heptágono, vamos a ponerle Ep, entonces Ep de n, sería igual a T sub n más 4… 1, 2, 3, 4, n menos 1… que no sé si es verdad. Vamos a sustituir para ver…Claro, ahí se ve la secuencia…Tenemos una tabla, después que determinemos la formula, podemos verificar si esto si da… Dijimos que T sub n, es igual a n por n, más 1, sobre 2. Más, ahora viene 4 veces…Que multiplica a T sub n menos 1…Que sería n menos 1 por n ¿verdad?...Entre 2.Entre 2, sí, pero este 2 y este 2 se van. Aja, esto me quedaría n cuadrado entre n menos 2 mas… ¿será que lo cancelamos o lo dejamos ahí?...Todavía queda el 4… que multiplica n cuadrado, menos n, todo esto entre 2…Vamos a dejar ese 2 ahí Epn es igual a n cuadrado, mas n, mas 4n cuadrado, menos 4n, todo eso entre 2, Epn es igual a 5 cuadrado, menos 3 n, entre 2. Este nos queda con denominador...

Registro Escrito

(RA$_1$) $EP_n = \frac{n.(n+1)}{2} + \frac{4[(n-1).n]}{2} = \frac{n^2+n}{2} + \frac{4(n^2-n)}{2}$

$\downarrow$

(RA$_2$) $EP_n = \frac{n^2+n+4n^2-4n}{2}$

$\downarrow$

(RA$_3$) $EP_n = \frac{5n^2-3n}{2}$

Cuadro 54
Fragmentos de los diálogos de los profesores de matemática en formación estableciendo la fórmula general de los números octagonales

Expresión Oral
…Mira el octágono seria 0 sub n…0 debería ser triangular n, más 5 veces triangular n, menos 1… ¿triangular 1 quién es?, n por n más 1 no, n cuadrado más n, ya lo teníamos… n al cuadrado más n entre 2, esto es más 5… ¿Esto es?...n menos 1 más n seria… n al cuadrado menos n entre 2. Eso es igual a 6 n cuadrado menos 4 n sobre 2….Aquí esta… míralo… ¡Si nos dio! O sea, que esta fórmula está bien. Lo asumimos…Vamos a ver, la del octagonal la tenemos bien
Registro Escrito
(RA$_1$) $O = t_n + 5(t_{n-1})$ ↓   (RA$_2$) $O = \frac{n^2+n}{2} + 5\left(\frac{n^2-n}{2}\right) = \frac{6n^2-4n}{2}$

Cuadro 55
Fragmentos de los diálogos de los profesores de matemática en formación estableciendo la fórmula general de los números nonagonales

Expresión Oral
…ahora vine la nonagonal, que sería n, n que sería un igual a T sub n más 6, T sub n menos 1, esto sería igual a n cuadrado más n entre 2, más 6, que multiplique a n cuadrado menos n entre 2. Esto me va a dar 7 n cuadrado menos 5 n entre 2. Aparentemente esta es la fórmula….
Registro Escrito
(RA$_1$) $N_n = t_n + 6(t_{n-1}) = \frac{n^2+n}{2} + \frac{6}{2}\cdot(n^2-n)$ ↓   (RA$_2$) $= \frac{7n^2-5n}{2}$

Consideramos que la estrategia empleado por los profesores de matemática, de alinear la ocho formulas de los números poligonales nombrados en la tabla con la actividad, fue definitoria en la deducción de la fórmula general, aunado al hecho de que le dieron la misma estructura: un cociente cuyo numerador es una diferencia, el minuendo se trata de múltiplos de n^2, y el sustraendo de múltiplos de n, ahora para deducir la fórmula se basta con establecer, la relación general entre los múltiplos nombrados y la cantidad de lado de cada polígono. Se observa sistematización, enfoque cuando lograr dar la estructura mencionada a Cn.

Cuadro 56
Fragmentos de los diálogos de los profesores de matemática en formación inicial construyendo la fórmula general de los números poligonales

Expresión Oral
T sub n, es igual a n por n, más 1 entre 2. C sub n, es igual a n al cuadrado. P sub n 3 n al cuadrado, menos n entre 2; h sub n, es igual a 2 n al cuadrado, menos n entre… No, entre nada…Si nos vamos a esta fórmula, quien sería…El 5 nos queda con denominador, el 7 nos debería quedar con denominador. Los pares nos quedan sin denominador y los impares nos quedan con denominador…Epn, es igual a 5 n al cuadrado, menos 3 n, entre 2….   …Vamos a ver…Aparece en n cuadrado y un n en la formula…Vamos a colocarle a todos denominador y multiplicarlo por 2, colocarle n porque este no tiene n, el cuadrado seria n al cuadrado más 0 n entre 2, este ya lo tenemos así… ¿Este sería? ¿4?...Si, seria 4… n al cuadrado, menos 2 n entre 2…5n cuadrado, menos 3n entre 2, vamos a colocar este, 3n cuadrado menos n entre 2. Aja, ¿este es? 3, 4, 5, 6, y 7… ya va… yo creo que aquí vamos a tener que utilizar 2 sub índice, uno para el hexágono, para el numero de polígono y otro para el numero de la figura. Porque fíjate que básicamente la tenemos… 1, 2, 3, 4, 5…   …Mira el octágono seria 0 sub n, esto es 6 n cuadrado, menos 4 n, entre 2, luego del octágono ¿Cuál viene?...El nonágono…El nonágono que son 10..Ay, pero esta es n. Y después de nonagonal…Esta debería ser 7 n al cuadrado, menos 5 n entre 2,… y este [Decagonal].debería ser 8 n al cuadrado, menos 6 n al cuadrado entre 2. Vamos a ver si es verdad…
Registro Escrito

$_3T_n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1n^2+n}{2}$	$_7EP_n = \frac{5n^2-3n}{2} = \frac{5n^2-3n}{2}$
$_4C_n = n^2 = \frac{2n^2+0n}{2}$	$_8O_n = \frac{6n^2-4n}{2}$
$_5P_n = \frac{3n^2-n}{2} = \frac{3n^2-n}{2}$	$_9N_n = \frac{7n^2-5n}{2}$
$_6H_n = 2n^2-n = \frac{4n^2-2n}{2}$	$D_n = \frac{8n^2-6n}{2}$

En los diálogos registrados para el establecimiento de la fórmula de los números poligonales observamos que los profesores de matemática en formación inicial están conscientes que necesitan el empleo de dos variables, es decir, deben generar una relación de NxN en N (aunque esto no lo dicen explícitamente), es posible que el cuadro que acompaña la actividad, les ayudará a esta intuición aunado a la forma en que alinearon las ocho fórmulas encontradas previamente, y que se muestran en el cuadro anterior. El uso de la notación puede generar confusión, pues para designar los números poligonales escogieron dos letras "PL", pero la P ya la estaban usando para designar los números pentagonales, la propensión al error se origina porque al ver la P es más fácil nombrarla pentagonal que ver quién la acompaña, además, se observa que hasta los creadores de PL dicen "Números pentagonales poligonales", esto de emplear dos letras no es usual para denotar relaciones, pudo haber sido más conveniente el empleo de G "gonales". Otro aspecto pesado respecto a la notación es el uso doble de la letra "ele", en mayúscula en el nombre de la fórmula, y en minúscula como una de las variables. G(x,y) pudo haber sido una opción más habitual para denotar la relación.

Cuadro 57
Fragmentos de los diálogos de los profesores de matemática en formación estableciendo la fórmula general de los números poligonales

Declaración Oral
Ahora vamos a tratar de generarla. Números pentagonales poligonales, son es igual, cuando el polígono tiene L lados, va a ser L menos 2 por n cuadrado (que es el número de la figura) y L (el número de lados del polígono) L menos 2 n al cuadrado, menos L menos 4… ¡Tenemos la formula! Vamos a escribirla aquí en la 5… P sub L de n (porque tengo 2 variables) es igual a L menos 2 por n al cuadrado menos L menos 4 por n entre 2. Donde L es el número de lados del polígono y n es el número de la figura. ¡Listo!

Registro Escrito

$$PL(l,n)=\frac{(l-2).n^2-(l-4).n}{2}$$

número de lado del polígono

número de la figura

CAPÍTULO VI

PROPUESTA DE UNIDAD CURRICULAR DE LIBRE ELECCIÓN (UNCLE) PARA LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA

El diseño instruccional (DI) puede entenderse como el esquema conceptual que se emplea para establecer la metodología de la planificación pedagógica sirviendo de referencia para producir una variedad de materiales educativos, atendiendo a las necesidades estudiantiles, y dirigido a buscar la calidad del aprendizaje; en consecuencia el DI tiene carácter prescriptivo, a diferencia de las teorías de aprendizaje que son de naturaleza descriptiva.

En esta investigación tomamos en cuenta el contexto real de transformación curricular de la UPEL el cual estipula la división de las unidades curriculares en obligatorias (UNCO) y electivas (UNCLE) para dar alcance al objetivo específico dirigido a diseñar, validar, implementar y evaluar una propuesta de programa de curso para la formación inicial de profesores de matemática orientado hacia la didáctica del álgebra. Atendiendo el llamado para la elaboración de propuestas en el seno del mencionado proceso de cambio curricular, y considerando los hallazgos de este estudio a continuación planteamos la propuesta de unidad curricular de libre elección que titularemos *Teoría y práctica del Álgebra Escolar*. Destacamos que la confección de esta propuesta se llevó a cabo siguiendo el diseño Instruccional establecido por Dick, Carey, y Carey (2001) por ser un modelo maleable, de metodología pragmática. A continuación se detallan las 10 fases de este modelo el cual sigue un enfoque de sistema para el diseño de la instrucción, y está basado en investigaciones y experiencia práctica:

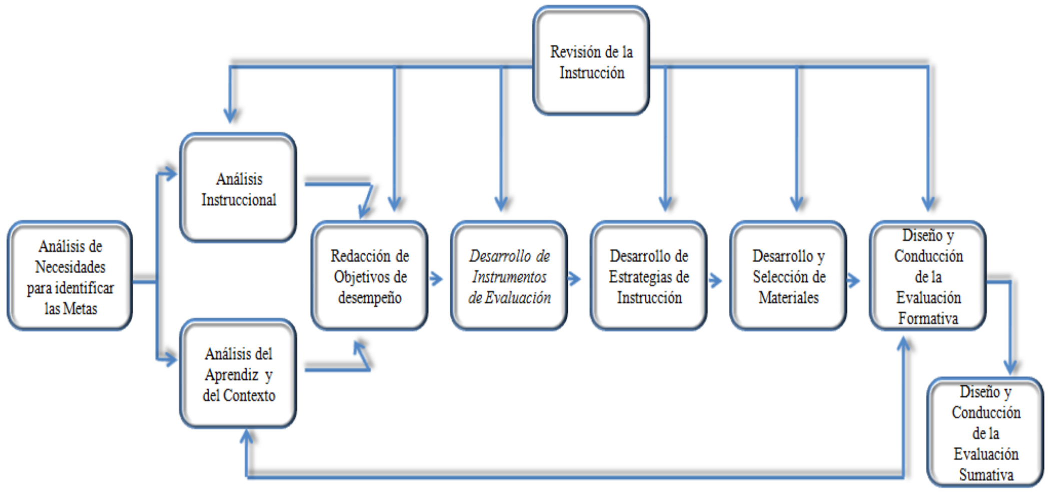


Gráfico 5:
Modelo de diseño instruccional de Dick, Carey y Carey, 2001

Fase 1: Identificar la meta instruccional

A través de la identificación de lo que se pretende que el estudiante sea capaz de hacer al culminar el curso, se obtiene de una lista de meta o de un estudio de necesidades. En este caso, la definición general de lo que queremos que logren los participantes con la implementación de la propuesta de *Teoría y práctica del Álgebra Escolar*, proviene de la naturaleza de práctica pedagógica que tiene el curso, específicamente, está dirigido a la realización de micro-clases planificadas de acuerdo con alguno de los enfoques para introducir el Álgebra en la escuela, y exhibiendo una serie de actividades que incluyan la inventiva de recursos y materiales didácticos que faciliten la enseñanza de los contenidos algebraicos presentes en el currículo de educación básica, y media general. Por ende, las siguientes metas del proceso instruccional son las que se pretenden lograr con el curso propuesto:

- Tiene como firme propósito visibilizar el álgebra educativa como ámbito de interés particular dentro de la Educación Matemática, desde los puntos de vista didáctico e investigativo.
- Facilitar al estudiante la consolidación de las competencias necesarias para su desempeño como docente de la especialidad de Matemática en Educación Básica y Media General.

- Constituye la práctica de situaciones simuladas de aprendizaje, es decir, demostraciones didácticas, en este caso, especificas del área de álgebra.
- Demostrar y consolidar las competencias adquiridas en los componentes de formación general, especializada y pedagógica.
- Con este curso se pretende resaltar/establecer la presencia de los tópicos algebraicos en el currículo de Educación Básica y Media General en el área de Matemática.
- Con este curso se pretende presentar y desarrollar un cuerpo teórico actualizado en torno los enfoques para introducir el álgebra, como disciplina propia de la Matemática en la Educación Básica y Media General.
- Con este curso se pretende que el futuro profesor de Matemática sea capaz de diseñar estrategias didácticas para coadyuvar el aprendizaje del Álgebra Escolar (AE) en la Educación Básica y Media General.
- Proporcionar a los participantes aspectos relevantes de la historia de la Matemática que han incidido en la consolidación del álgebra, resaltando el aspecto humano.

Fase 2: Análisis Instruccional

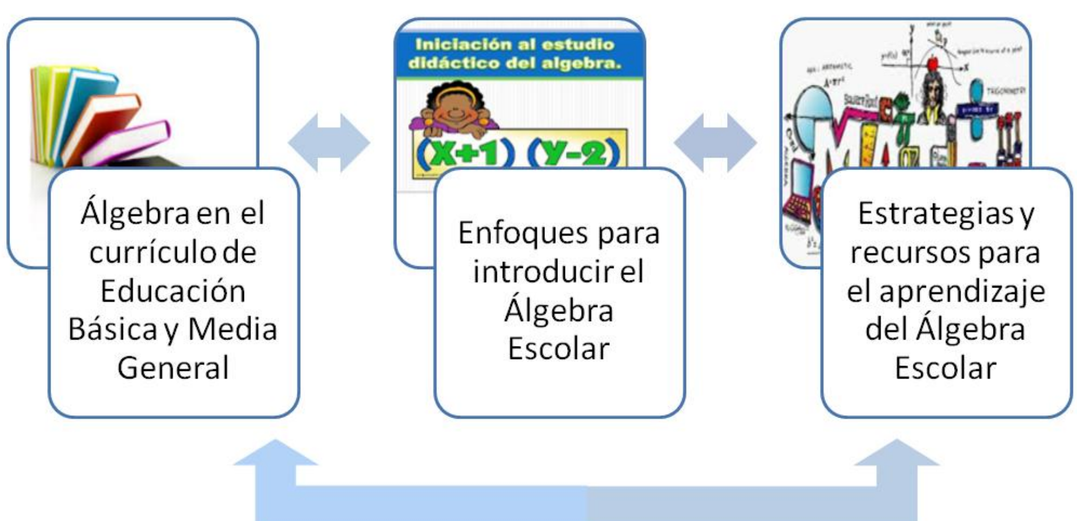


Gráfico 6
Análisis del Diseño Instruccional

Se precisan las destrezas que deberán enseñarse para lograr la meta Instruccional:

- Los participantes autodirigirán su aprendizaje, organizando y planificando su horario de estudio con el uso de las guías didácticas diseñadas para cada sesión de clase.
- Los participantes del curso realizarán un análisis del currículo venezolano e identificaran los contenidos algebraicos en los niveles de Educación Básica y Media General
- Los participantes del curso analizarán con sentido crítico las perspectivas sugeridas por Berdnarz, Kieran y Lee (1996) como posibilidades para introducir el álgebra en la escolaridad: (a) perspectiva histórica, (b) perspectiva de generalización, (c) perspectiva de resolución de problemas, (d) perspectiva de modelización, y (e) perspectiva funcional. Así como cualquier otra que emerja del seno de las discusiones.
- Los futuros profesores analizarán con sentido crítico los enfoques pre álgebra (Socas, 1999) y álgebra temprana (Socas, 1999; Schlieman, Carraer y Brizuela, 2011).
- Tomando en cuenta las perspectivas y los enfoques anteriores, los participantes diseñarán unidades didácticas basadas en el análisis didáctico de tópicos del AE.
- Los participantes diseñarán recursos específicos para la enseñanza del AE como los que presenta Samper (1996) para el tema de productos notables y factorización.
- Los participantes realizarán mapas de enseñanza y aprendizaje (Orellana, 2002), de los distintos tópicos algebraicos escolares.
- Los participantes analizaran distintas estrategias generales empleadas por los docentes: (1) estrategias docentes para un aprendizaje significativo (Díaz Barriga y Hernández, 1999), los mapas mentales y conceptuales, educación corporal (Lara, 2006), inteligencias múltiples (Quintana y Malatesta, 2006).

Fase 3: Análisis del Aprendiz y del Contexto

Esta fase está referida a identificar las características de los estudiantes, el contexto en el cual aprenderán las destrezas, el contexto en el cual las aplicarán, la situación de partida y las metas al finalizar el curso.

Características de los participantes:

- Estudiantes de la especialidad de Matemática de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador ubicados académicamente en el 7º semestre de la carrera.

Situación inicial:

- Los participantes tienen conocimientos sobre la planificación de los aprendizajes en el contexto de la Educación Matemática.
- Los participantes tienen conocimientos sobre diversas estrategias y recursos empleados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática Escolar.
- Los participantes tienen conocimientos sobre la evaluación de los aprendizajes de la Matemática Escolar.
- Los participantes tienen conocimientos generales sobre el ambiente escolar en los niveles de Educación Básica y Media General.
- Los participantes tienen un conocimiento del álgebra universitaria correspondiente a su plan de formación.

Situación final o meta que esperamos lograr al final del proceso:

- Los participantes identificarán los tópicos algebraicos presentes en currículo de Educación Básica, Media y General.
- Los participantes comprenderán los diversos enfoques para abordar el AE
- Los participantes comprenderán la importancia de la elaboración de recursos propios para el aprendizaje de los tópicos algebraicos.
- Los participantes comprenderán la importancia de enfoques emergentes para abordar el aprendizaje del AE surgidos en el ámbito de la Educación Matemática.

- Los estudiantes comprenderán la importancia del análisis de textos como un medio para seleccionar la bibliografía a emplear como un recurso del aprendizaje del AE.
- Los participantes comprenderán la importancia del surgimiento de teorías cognitivas específicas del AE.
- Los participantes comprenderán aspectos relevantes en el desarrollo histórico del álgebra y de los matemáticos protagonistas.
- Los participantes comprenderán el uso del Mapa de Enseñanza y Aprendizaje como un recurso surgido en el ámbito de la propia Educación Matemática.
- Los participantes comprenderán la importancia de análisis didáctico como un recurso que emerge de la Educación Matemática.

Contexto en el que se desarrollará la formación:

- Unidad curricular de libre elección (UNCLE) correspondiente al componente específico de formación profesional de la especialidad de Matemática de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, por lo que el ámbito es escolarizado, de formación.

Recursos que estarán disponibles en la situación de aprendizaje:

- Libros de divulgación de la Matemática: tales como: *La Sonrisa de Pitágoras* (García del Cid; DeBOLS!LLO, 2007); *Álgebra en Todas Partes* (De la Peña José; Fondo de Cultura Económica, 1999); *El Hombre Anumérico* (Paulos, John; Metatemas 20, 1998), entre otros. Haciendo los comentarios respectivos e indicando el cómo la lectura de este tipo de libros puede contribuir a la creación de una *Cultura matemática* de ellos como futuros educadores matemáticos.
- Libros de difusión de investigaciones en didáctica del álgebra tales como: Schlieman, Carraer y Brizuela (2011); Filloy, (1999); Barrio, Lalanne, y Petich, (2010), entre otros.
- Artículos de Investigación sobre didáctica del álgebra tales como: Valdivé, y Escobar (2011); Butto y Rojano (2004), González y González (2012), González (2015), entre otros

- Presentaciones en PowerPoint y Videos
- Pizarrón, marcadores y borrador
- Acceso a internet
- Computadora y video beam

Fase 4: Redacción de Objetivos de Desempeño

Se pretende la descripción detallada de lo que los estudiantes podrán hacer al terminar la instrucción, sirven de orientación del proceso de desarrollo instruccional, y constituye una versión detallada y conductual de la meta instruccional expresada en el punto anterior. Debe explicitar lo que se aspira que los participantes puedan hacer al finalizar el proceso, y se deben incluir las destrezas a desarrollar, las condiciones en las que deberán utilizar estas destrezas y los criterios para un desempeño satisfactorio.

Objetivos Generales:

- Diseñar unidades didácticas empleando distintas perspectivas y enfoques para introducir el AE que incluyan la elaboración de recursos instruccionales específicos que faciliten la aprehensión de contenidos algebraicos presentes en el currículo de la educación básica, media general en Venezuela

Objetivos Específicos:

- Establecer los contenidos algebraicos en el currículo de Matemática de educación básica y media general.
- Conceptualizar la aritmética generalizada como un enfoque para introducir el AE
- Conceptualizar la pre-algebra como un enfoque para introducir el AE.
- Conceptualizar el álgebra temprana como un enfoque para introducir el AE.
- Conceptualizar la perspectiva histórica como un enfoque para introducir el AE.
- Conceptualizar la perspectiva de generalización como un enfoque para introducir el AE.

- Conceptualizar la perspectiva de resolución de problemas como un enfoque para introducir el AE.
- Conceptualizar la perspectiva de modelización como un enfoque para introducir el AE.
- Conceptualizar la perspectiva funcional como un enfoque para introducir el AE.
- Identificar los elementos resaltantes del Análisis didáctico de tópicos Matemáticos.
- Identificar los elementos resaltantes del Mapa de enseñanza y aprendizaje de tópicos matemáticos de Orellana.
- Establecer la importancia del análisis de textos como una estrategia para la planificación de las actividades de aula de Matemática.

Destrezas que se espera desarrollar

- Señalar los contenidos algebraicos en el currículo de Matemática de educación básica.
- Señalar los contenidos algebraicos en el currículo de Matemática de educación media general.
- Señalar los contenidos algebraicos en el currículo de Matemática de cualquier nivel y modalidad
- Definir Análisis didáctico
- Caracterizar el AE
- Caracterizar la aritmética generalizada como un enfoque para introducir el AE
- Emplear la aritmética generalizada como un enfoque para introducir el AE en el diseño de una unidad didáctica
- Caracterizar la pre-álgebra como un enfoque para introducir el AE
- Emplear la pre-álgebra como un enfoque para introducir el AE en el diseño de una unidad didáctica
- Caracterizar el álgebra temprana como un enfoque para introducir el AE

- Emplear el álgebra temprana como un enfoque para introducir el AE en el diseño de una unidad didáctica
- Caracterizar la perspectiva histórica como un enfoque para introducir el AE
- Emplear la perspectiva histórica como un enfoque para introducir el AE en el diseño de una unidad didáctica
- Caracterizar la perspectiva de generalización como un enfoque para introducir el AE
- Emplear la perspectiva de generalización como un enfoque para introducir el AE en el diseño de una unidad didáctica.
- Caracterizar la perspectiva de resolución de problemas como un enfoque para introducir el AE.
- Emplear la perspectiva de resolución de problemas como un enfoque para introducir el AE en el diseño de una unidad didáctica.
- Caracterizar la perspectiva de modelización como un enfoque para introducir el AE
- Emplear la perspectiva de modelización como un enfoque para introducir el AE en el diseño de una unidad didáctica.
- Caracterizar la perspectiva funcional como un enfoque para introducir el AE.
- Emplear la perspectiva funcional como un enfoque para introducir el AE en el diseño de una unidad didáctica.
- Identificar las implicaciones didácticas de los enfoques para introducir el AE.
- Señalar los elementos característicos del Análisis didáctico.
- Señalar los elementos característicos del Mapa de enseñanza y aprendizaje (MEA) de tópicos matemáticos de Orellana.
- Caracterizar el análisis de textos como una estrategia para la planificación de las clases de Matemática.

Conductual de la meta instruccional:

- El participante subraya los contenidos algebraicos en el currículo de Matemática de educación básica.

- El participante subraya los contenidos algebraicos en el currículo de Matemática de educación media general.
- El participante subraya los contenidos algebraicos en el currículo de Matemática de cualquier nivel y modalidad.
- El participante describe qué es el AE.
- El participante describe los aspectos más resaltantes de la aritmética generalizada como un enfoque para introducir el AE.
- El participante valora ejemplo de actividades didácticas que empleen la aritmética generalizada.
- El participante diseña unidades didácticas empleando la aritmética generalizada como un enfoque para introducir el AE.
- El participante describe los aspectos más resaltantes de la pre-álgebra como un enfoque para introducir el AE.
- El participante valora ejemplo de actividades didácticas que empleen la pre-álgebra.
- El participante diseña unidades didácticas empleando la pre-álgebra como un enfoque para introducir el AE.
- El participante describe los aspectos más resaltantes del álgebra temprana como un enfoque para introducir el AE
- El participante valora ejemplo de actividades didácticas que empleen el álgebra temprana.
- El participante diseña unidades didácticas empleando el álgebra temprana como un enfoque para introducir el AE.
- El participante describe los aspectos más resaltantes de la perspectiva histórica como un enfoque para introducir el AE.
- El participante valora ejemplo de actividades didácticas que empleen la perspectiva histórica.
- El participante diseña unidades didácticas empleando la perspectiva histórica como un enfoque para introducir el AE.

- El participante describe los aspectos más resaltantes de la perspectiva de generalización como un enfoque para introducir el AE.
- El participante valora ejemplo de actividades didácticas que empleen la perspectiva de generalización.
- El participante diseña unidades didácticas empleando la perspectiva de generalización como un enfoque para introducir el AE
- El participante describe los aspectos más resaltantes de la perspectiva de resolución de problemas como un enfoque para introducir el AE.
- El participante valora ejemplo de actividades didácticas que empleen la perspectiva de resolución de problemas.
- El participante diseña unidades didácticas empleando la perspectiva de resolución de problemas como un enfoque para introducir el AE.
- El participante describe los aspectos más resaltantes de la perspectiva de modelización como un enfoque para introducir el AE.
- El participante valora ejemplo de actividades didácticas que empleen la perspectiva de modelización
- El participante diseña unidades didácticas empleando la perspectiva de modelización como un enfoque para introducir el AE.
- El participante describe los aspectos más resaltantes de la perspectiva funcional como un enfoque para introducir el AE.
- El participante valora ejemplo de actividades didácticas que empleen la perspectiva funcional.
- El participante diseña unidades didácticas empleando la perspectiva funcional como un enfoque para introducir el AE
- El participante reconoce las implicaciones didácticas de los distintos enfoques para introducir el AE.
- El participante especifica los elementos característicos del Análisis didáctico
- El participante especifica los elementos característicos del Mapa de enseñanza y aprendizaje (MEA) de tópicos matemáticos de Orellana

- El participante describe el análisis de textos como una estrategia para la planificación de las clases de Matemática.
- El participante puntualiza qué es el análisis didáctico.

Fase 5: Desarrollo de Instrumento de Evaluación

Aunque no es necesario que se formulen los instrumentos definitivos de evaluación es importante definir en este momento los aspectos que, al finalizar el proceso de formación, nos permitirán valorar si los estudiantes han logrado el objetivo propuesto. Estas especificaciones deben ejemplificar y verificar de manera concreta y observable el objetivo de desempeño definido anteriormente.

Se trabajará en grupos de exposición, de discusión y de trabajo de la siguiente manera:

Evaluaciones Formativas: revisión del currículo de Matemática venezolano, análisis y resúmenes de artículos de investigación, exposiciones cortas de los distintos enfoques del AE, análisis reflexivo de los distintos ejemplos suministrados por el docente de los distintos enfoques del AE.

Evaluaciones Sumativas: Realización de un portafolio contentivo de todas las actividades formativas. Ensayo sobre los enfoques para introducir el AE. Elaboración de Unidades didácticas por parte de los participantes para evidenciar los enfoques para introducir el AE.

Fase 6: Desarrollo de Estrategias de Instrucción

Se debe formular sobre la base de los aspectos anteriores. Está constituido por las acciones que se emprenderán para intentar lograr los objetivos propuestos, partiendo de la situación inicial analizada. La dinámica y el uso de estrategias instruccionales se realizarán de la siguiente manera:

- Se diseñará una guía de actividades que direccionará la clases, contendrá las actividades a realizar cada día, los artículos a discutir y la asignación de las tareas, puede verse como un diario de clases donde se especificaran las tareas que se pretenden realizar ese día de clase y las asignaciones y responsabilidades establecidas para cada estudiante o cada grupo de trabajo.

- La conceptualización de los tópicos a tratar se realizará a través de clases magistrales dirigidas por el docente o por el grupo de participantes responsables empleando como recursos el pizarrón del salón, la computadora, el video beam, el uso de recursos y materiales diseñados por el estudiante o el profesor.

Fase 7: Desarrollo y Selección de Materiales

Se seleccionan los materiales, ya sean impresos o en otro medio, con el fin de apoyar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Es recomendable desarrollar materiales nuevos cuando sea necesario. Esto incluye: materiales instruccionales, exámenes, videos, páginas web, entre otros. La decisión de desarrollar materiales originales dependerá de los tipos de resultados de aprendizaje, la disponibilidad de materiales relevantes existentes, y el desarrollo de los recursos disponibles para el diseñador.

En cuanto a los recursos que sirven de apoyo, tenemos: una guía didáctica para cada tema de las unidades del curso elaboradas por el docente, presentaciones en power point y lecturas de los artículos seleccionados, enlaces a páginas web revisadas y seleccionadas, lecturas sobre investigaciones referidas al AE.

Fase 8: Diseño y Conducción de la Evaluación Formativa

Con el proceso de evaluación se pretende revisar y mejorar tanto los materiales utilizados como el proceso de instrucción. Se recomienda realizar entrevistas a los participantes de forma individual o en pequeños grupos y un evaluador.

Para la evaluación formativa se diseñarán rubricas de evaluación que permitan la autoevaluación del participante en las clases.

Fase 9: Diseño y Conducción de la Evaluación Sumativa

Se determina el valor o los meritos de la instrucción producida, se busca estudiar la efectividad del sistema como un todo. Se realiza posterior a la evaluación formativa. Se puede hacer al finalizar períodos cortos o largos. Para la evaluación sumativa se diseñarán rubricas de evaluación que permitan la autoevaluación del participante efectiva de las clases presenciales.

Fase 10: Revisión de la instrucción

Es el paso de revisión en el diseño, se puede hacer en cualquier momento, consiste en resumir y analizar los datos de recogidos de la evaluación formativa, se re-examina la validez del análisis de la instrucción, las conductas de entrada, los objetivos, y las demás fases, y se incorporan las revisiones para hacer la instrucción más efectiva

Álgebra Escolar

Descripción del Curso

- Tema
- Audiencia
- Propósito
- Duración
- Número de Participantes

Tema

- Empleo del Álgebra Escolar para generar unidades didácticas

Propósito

- Con este Curso se pretende presentar y desarrollar un cuerpo teórico actualizado en torno al surgimiento de una teoría emergente intrínseca del Álgebra para su enseñanza y aprendizaje como lo constituyen los diferentes enfoques para introducir el Álgebra Escolar y ofertar una experiencia vivencial a los participantes desde una perspectiva didáctica.

Duración

- Dieciocho semanas (18), en concordancia con la duración de un semestre

Número de Participantes

- 30 participantes

Programa

- Objetivos
- Contenidos
- Metodología

- Estrategias Pedagógicas
- Recursos
- Estrategias de Evaluación
- Bibliografía

OBJETIVOS

Objetivo General:

- Diseñar unidades didácticas empleando los enfoques para introducir el Álgebra Escolar que incluyan la elaboración de recursos instruccionales que faciliten la aprehensión de contenidos algebraicos presentes en el currículo de la educación básica, media general en Venezuela

Objetivos Específicos:

- Establecer los contenidos algebraicos en el currículo de Matemática de educación básica y media general
- Conceptualizar la aritmética generalizada como un enfoque para introducir el Álgebra Escolar
- Conceptualizar la pre-algebra como un enfoque para introducir el Álgebra Escolar
- Conceptualizar el álgebra temprana como un enfoque para introducir el Álgebra Escolar
- Conceptualizar la perspectiva histórica como un enfoque para introducir el Álgebra Escolar
- Conceptualizar la perspectiva de generalización como un enfoque para introducir el Álgebra Escolar
- Conceptualizar la perspectiva de resolución de problemas como un enfoque para introducir el AE.
- Conceptualizar la perspectiva de modelización como un enfoque para introducir el AE

- Conceptualizar la perspectiva funcional como un enfoque para introducir el AE
- Identificar los elementos resaltantes del Análisis didáctico de tópicos Matemáticos.
- Identificar los elementos resaltantes del Mapa de enseñanza y aprendizaje de tópicos matemáticos de Orellana (2002)
- Establecer la importancia del análisis de textos como una estrategia para la planificación de las actividades de aula de Matemática.

CONTENIDOS

- El álgebra en el Currículo de Matemática en la Educación básica, media general en Venezuela
- Enfoques para introducir el álgebra en la escuela: (1) Aritmética generalizada, (2) Pre-álgebra, (3) Álgebra temprana, y las perspectivas planteadas por Berdnarz, Kieran y Lee (1996): (4) Perspectiva histórica, (5) Perspectiva de generalización, (6) Perspectiva de Resolución de Problemas, (7) Perspectivas de Modelización, y (8) Perspectiva funcional
- Estrategias y recursos didácticos para el aprendizaje del Álgebra Escolar

METODOLOGÍA

Este Curso se desarrollará de forma presencial durante un semestre, y se discutirán en las sesiones de clase el Álgebra Escolar como tema fundamental. Se discutirán la presencia de los temas de álgebra dentro de los temas matemáticos tratados en el currículo venezolano, con especial énfasis en la educación media general, a pesar de que también se indagaran los temas algebraicos insertos a lo largo de todos los niveles de la educación venezolana.

Se necesita la presencia y el compromiso de los todos los participantes, por lo que se requiere mantener una comunicación permanente, se realizará una sola sesión de clase, de tres horas semanales, motivo por el cual se requiere que los estudiantes estén atentos a las asignaciones y cumplan con su realización.

El docente comenzará el primer día de clases exponiendo la planificación del curso, presentando los artículos y libros seleccionados e invitando a los asistentes a realizar una búsqueda documental para ampliar la bibliografía, se establecerán las responsabilidades de cada alumno se conformarán los grupos de trabajos, y se asignaran temas para las micro−clases y las propuestas didácticas.

Los alumnos realizaran la lectura y las actividades asignadas y conformaran un portafolio que será inspeccionado en cualquier clase, pero evaluado al final del semestre, el portafolio contendrá también el aporte bibliográfico realizado por el alumno para ampliar la bibliografía del curso.

En la primera clase, se presentarán y discutirá todo lo relacionado con el Planificación del curso (objetivos, contenidos, actividades, evaluación, recursos que se requieren, etc.), se asignaran responsabilidades, es decir, se establecerán los grupos de trabajos, y se establecerán los temas del cual cada grupo desplegará. Asimismo, el docente expondrá una propuesta didáctica denominada “Análisis vectorial de una jugada de voleibol”, se trata de un taller donde participarán los estudiantes asistentes a la clase realizando las actividades de dicho taller, y se resaltara el tema y el enfoque algebraico, y para finalizar se realizará una reflexión sobre la experiencia realizada.

El taller de “Análisis vectorial de una jugada de voleibol” es una propuesta realizada por la profesora Mariela Herrera (autora de esta investigación) que se ganó el primer lugar de Cartel de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa realizada en Guatemala en el año 2010, de allí la importancia de presentar este taller que emplea la perspectiva de modelización de hacer que los estudiantes conozcan y participen en este tipo de experiencias innovadoras y que sean capaces de valorarlas desde una perspectiva docente. Se asignaran la lectura para el hogar del currículo de matemática en Venezuela, adicionalmente, se puede asignar lecturas adicionales como: “Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza” escrito por Yolanda Serres.

Es importante destacar, que a pesar de que se tiene un número de lecturas seleccionadas para el desarrollo de este curso, también se pretende fomentar la investigación en los participantes, motivo por el cual, siempre se estará atento a los aportes investigativos de los estudiantes, en función del tópico a tratar para cada una de las sesiones de clases. Es importante mencionar que se requiere de la participación consecuente de los estudiantes, motivo por el cual se pretende mantener algún tipo de comunicación asincrónica, bien sea por la mensajería telefónica, a través del correo electrónico o por la creación de algún foro virtual, para recordar e informar las actividades pendientes para la próxima sesión, con la finalidad de que aquellos estudiantes que por algún motivo no asistan a clases logren mantenerse comunicados y al tanto de las actividades pautas para la próxima clase.

En cuanto a la evaluación, se resaltará la importancia del portafolio, y de realizar las actividades semanalmente, ya que serán supervisadas, además, el dejar todo para última hora, puede hacer que se dejen actividades sin realizar. En la primera sesión de clase queda pendiente para el portafolio la reflexión escrita sobre el taller realizado en la clase, y como asignación para el hogar, el resumen y el análisis de la lectura del artículo escrito por Yolanda Serres.

En la segunda sesión de clase, se trabajaran con la computadora y la conexión a Internet, se buscarán en las Actas Latinoamérica de Matemática Educativa artículos referidos al análisis de textos educativos, en particular se marcaran para la discusión en la próxima clase los escritos por Ana Duarte sobre los libros de la colección bicentenaria, se buscarán revistas reconocidas de Educación Matemática. Seguidamente, se comenzará a revisar el currículo para identificar los contenidos algebraicos. Paralelamente, se llevaran distintos libros de Matemática de Educación Media General y Diversificada para identificar los temas algebraicos en los libros de textos, y se les asignará la escogencia de un tema para realizar un análisis de texto, esta actividad queda indicada para la casa. En la clase se discutirá la estrategia Cover−up, y se realizará el taller titulado: “Del trinomio al producto notable”, es una actividad dirigida al uso de la aritmética generalizada, y que pretende descubrir las fórmulas de los productos notables a partir de diversos ejemplos particulares.

Para finalizar esta segunda sesión de clases se asignaran lecturas de análisis didáctico, el Mapa de Enseñanza y aprendizaje, y estrategias didácticas generales, se les solicitará al estudiante que indaguen los pasos para realizar un mapa mental y un mapa conceptual.

En la tercera sesión de clases, presentaremos ejemplos de mapas mentales y conceptuales, el análisis didáctico y el mapa de enseñanza y aprendizaje del taller de Patrones, también se discutirán las estrategias docentes para un aprendizaje significativo, y lo concerniente a la asignación del análisis de texto. También se desarrollara un taller de patrones, con la finalidad de que los estudiantes analicen la perspectiva de generalización como uno de los enfoques de introducir el Álgebra Escolar, dicha reflexión debe estar en el portafolio. Se asignara una lectura base para discutir la próxima clase la aritmética generalizada, asimismo, se invitará a los estudiantes a buscar en Internet distintos artículos, investigaciones y propuestas didácticas sobre el tema.

Para la cuarta sesión, se establecerán las características de la aritmética generalizada, a través de una discusión grupal, exaltada por los aportes de los estudiantes, también se discutirán los diversos ejemplos de su aplicación materializadas en las propuestas didácticas investigadas, la reflexión de la actividad del día debe estar en el portafolio. Análogamente, para la quinta sesión de clases el tema seleccionado será el de Pre–álgebra y para la sexta clase será el de álgebra temprana, el desarrollo será en grupos de discusión.

Para cada uno de los cinco enfoques restantes para introducir el álgebra escolar se le asignaran dos sesiones de clases a cada uno de los enfoques: Sesión siete y ocho para la perspectiva histórica, Sesión nueve y diez para la perspectiva de generalización, Sesión once y doce para la perspectiva de resolución de problemas, Sesión trece y catorce para la perspectiva de modelización, Sesión quince y dieciséis para la perspectiva funcional. Durante la primera sesión de clase el grupo responsable expondrá las características generales del enfoque y propondrá un taller para ejemplificar el enfoque, el resto de los estudiantes participaran en el taller y deberán hacer una reflexión de las actividades realizadas para el portafolio. En la segunda sesión los estudiantes que participaron expondrán una propuesta de taller sobre un tema algebraico que escogerán libremente, pero que deben reflejar las características del enfoque en estudio, se debe realizar una reflexión sobre las distintas propuestas puestas en juego, y sobre la discusión que se genera en clase posterior a la exposición de las propuestas didácticas de cada grupo.

La sesión diecisiete y dieciocho se reservan para indagar el uso de la computadora como una herramienta para la enseñanza y aprendizaje del álgebra, para realizar una retrospectiva del conjunto de las propuestas desarrolladas durante el curso, para generar un repositorio para el próximo curso, para realizar la retroinformación del curso, donde cada participante exprese de forma oral sus impresiones del curso y de forma escrita la reflexión para el portafolio, que se recogerán en la sesión diecisiete, para asignar calificaciones finales en la sesión dieciocho.

ESTRATEGIAS PEDAGÓGICAS

El docente será garante del desarrollo de las actividades planificadas, y su función es el de apoyar, guiar y dar orientaciones generales en todo momento a todos los participantes, por lo que el docente debe dirigir la forma de abordar los primeros enfoques y dar instrucciones para los siguientes, e ir fomentando progresivamente el abordaje y estudio independiente de los participantes. El docente a través del desarrollo de talleres ejemplificará alguno de los enfoques para introducir el Álgebra Escolar para crear expectativas positivas en los estudiantes respecto al buen uso de los enfoques y su motivación. El docente puede fomentar el trabajo colaborativa, se recomienda organizar diferentes grupos para realizar cada una de las propuestas didácticas, es decir, rotar los grupos de trabajos que no permanezcan estáticos durante todo el semestre para que cada estudiantes pueda intercambiar ideas con todos y cada uno de sus iguales. El docente fomentará el aspecto investigativo de los estudiantes, exhortándolos a acrecentar los referentes teóricos ofertados por el docente, bien sea a través de artículos, investigaciones y propuestas didácticas, asimismo, fomentará la crítica reflexiva al invitar a los estudiantes a valorar cada una de las actividades realizadas en clases y escribirlo en su portafolio.

Recursos

- Libros de Álgebra Educativa
- Artículos de Investigación
- Presentaciones en PowerPoint
- Mapas mentales y conceptuales
- Videos
- Pizarrón, marcadores y borrador
- Computadora y Video Beam
- Acceso a Internet

Estrategias de Evaluación

- El portafolio será una de las estrategias, donde los estudiantes deben recabar de manera individual, las impresiones de las actividades en clases, los resúmenes, análisis de artículos, de textos, el MEA, y todos las actividades indicadas por el docente que deben reposar en el portafolio. Así como los aportes bibliográficos, y el desarrollo de los talleres dirigido por el docente
- La exposición grupal es otra de las estrategias, donde de manera grupal, los estudiantes deben caracterizar alguno de los enfoques para introducir el AE
- La elaboración de propuestas didácticas de forma grupal para ejemplificar los distintos enfoques para introducir el AE

Gráfico 7: Guión de Contenido de las Actividades del Curso “Álgebra Escolar”

Contenido del Curso de Álgebra Escolar

- **Álgebra en el currículo de Educación básica y media general**
  - * Currículo de Matemática de Educación Básica en Venezuela
  - * Currículo de Matemática de Educación media general en Venezuela
- **Enfoque para introducir el Álgebra Escolar**
  - *Aritmética generalizada
  - *Pre-álgebra
  - *Álgebra temprana (early algebra)
  - *Perspectiva histórica
  - *Perspectiva de generalización
  - *Perspectiva de Resolución de Problemas
  - *Perspectivas de Modelización
  - *Perspectiva funcional
- **Estrategias y recursos para el aprendizaje del Álgebra Escolar**
  - *Mapa de Enseñanza y Aprendizaje (MEA) de Orellana
  - *Análisis didáctico
  - * Estrategias docentes para un aprendizaje significativo
  - * Mapas mentales y conceptuales

Guión Didáctico del curso Álgebra Escolar

En el guión didáctico se presenta el contenido totalmente desarrollado utilizando como soporte las estrategias instruccionales elaboradas, se refiere a la selección del medio que se va a emplear y la categorización de lo que se quiere comunicar, se redacta con un lenguaje sencillo y claro, se utiliza un vocabulario familiar a la audiencia, es similar Puede ser asociado a un guión literario

Cuadro 58
Objetivos y Estrategias Instruccionales del Curso Álgebra Escolar

OBJETIVOS	ESTRATEGIAS INSTRUCCIONALES
• Establecer los contenidos algebraicos en el currículo de Matemática de educación básica y media general	• Discusión grupal • Clases Magistrales • Exposiciones • Elaboración de análisis de texto • Elaboración de Análisis didáctico • Elaboración de MEA • Elaboración de portafolio • Lectura de las Artículos • Reflexiones escritas • Elaboración de propuestas didácticas
• Identificar los elementos resaltantes del Análisis didáctico de tópicos Matemáticos	
• Identificar los elementos resaltantes del Mapa de enseñanza y aprendizaje de tópicos matemáticos de Orellana	
• Establecer la importancia del análisis de textos como una estrategia para la planificación de las actividades de aula de Matemática	
• Conceptualizar los enfoques para introducir el Álgebra Escolar: la aritmética generalizada, la pre-algebra, el álgebra temprana, la perspectiva histórica, la perspectiva de generalización, la perspectiva de resolución de problemas, la perspectiva de modelización, la perspectiva funcional	

El Cronograma es la organización de las actividades que refleja la estructura de las sesiones de trabajo en el tiempo disponible. El cronograma permite calibrar la relación de las actividades con el tiempo, para establecer la carga de trabajo implicada en el diseño. A continuación se presenta el cronograma, durante un semestre y de acuerdo con los temas del curso que se plantea denominado Álgebra Escolar:

Cuadro 59:
Cronograma de las Actividades del Curso Álgebra Escolar

Semana	Actividades Presenciales	Actividades en Casa
1	Participación en el taller "Análisis Vectorial de una jugada de voleibol"	Reflexión de la experiencia del día para el portafolio. Lectura y análisis del artículo Iniciación al aprendizaje del álgebra y del currículo de Matemática en Educación media general
2	Participación en el taller "Del trinomio al producto notable". Búsqueda en Internet de artículos. Reconocimiento de los temas algebraicos en el currículo de matemática. Revisión de libros de educación media. Discusión de la estrategia coper–up.	Reflexión de la experiencia del día para el portafolio. Lectura y análisis del artículo seleccionados sobre el análisis de textos. Elaboración de análisis de texto de un tópico algebraico. Lectura del artículo de Análisis didáctico, del Mapa de Enseñanza y aprendizaje (MEA),
3	Participación en el taller de Patrones. Discusión grupal de las lecturas asignadas	Reflexión de la experiencia del día para el portafolio. Elaboración del análisis didáctico y de un MEA de un tema algebraico. Investigación sobre la aritmética generalizada
4	Discusión grupal de la aritmética generalizada y de propuestas didácticas encontradas	Reflexión de la experiencia del día para el portafolio. Investigación sobre pre–álgebra
5	Discusión grupal de la pre–álgebra y de propuestas didácticas encontradas	Reflexión de la experiencia del día para el portafolio. Investigación sobre álgebra temprana
6	Discusión grupal del álgebra temprana y de propuestas didácticas encontradas	Reflexión de la experiencia del día para el portafolio. Investigación sobre la perspectiva histórica
7	Exposición sobre la perspectiva histórica. Características generales del enfoque. Participación en taller que ejemplifique el enfoque	Reflexión de la experiencia del día para el portafolio.
8	Elaboración de propuesta didáctica grupal sobre la perspectiva histórica	Reflexión de la experiencia del día para el portafolio. Investigación sobre la perspectiva de generalización
9	Exposición sobre la perspectiva de generalización. Características generales del enfoque. Participación en taller que ejemplifique el enfoque	Reflexión de la experiencia del día para el portafolio.
10	Elaboración de propuesta didáctica grupal sobre la perspectiva de generalización	Reflexión de la experiencia del día para el portafolio. Investigación sobre la perspectiva de resolución de problemas
11	Exposición sobre la perspectiva de resolución de problemas. Características generales del enfoque. Participación en taller que ejemplifique el enfoque	Reflexión de la experiencia del día para el portafolio.
12	Elaboración de propuesta didáctica grupal sobre la perspectiva de resolución de problemas	Reflexión de la experiencia del día para el portafolio. Investigación sobre la perspectiva de modelización
13	Exposición sobre la perspectiva de	Reflexión de la experiencia del día para el

	modelización. Características generales del enfoque. Participación en taller que ejemplifique el enfoque	portafolio.
14	Elaboración de propuesta didáctica grupal sobre la perspectiva de modelización	Reflexión de la experiencia del día para el portafolio. Investigación sobre la perspectiva funcional
15	Exposición sobre la perspectiva funcional. Características generales del enfoque. Participación en taller que ejemplifique el enfoque	Reflexión de la experiencia del día para el portafolio.
16	Elaboración de propuesta didáctica grupal sobre la perspectiva funcional	Reflexión de la experiencia del día para el portafolio. Organización y elaboración del índice del portafolio. Investigación sobre el uso de la tecnología para la enseñanza y aprendizaje del álgebra
17	Entrega del portafolio. Discusión grupal del uso de las diferentes tecnologías de la información como recurso para la enseñanza y aprendizaje del álgebra	
18	Discusión y retroinformación de la experiencia. Elaboración de la lista de los recursos y estrategias creados como repositorio para el próximo curso. Evaluación de los artículos empleados versus los encontrados por los estudiantes para redireccionar el próximo curso de AE Entrega de calificación definitiva	

Plan Didáctico de las Actividades de Clase

El plan didáctico es la secuencia organizada de las diversas actividades del proceso de enseñanza y aprendizaje, y es la guía del trabajo docente. El planeamiento, se hace necesario para atender las necesidades de los alumnos, dirigiendo sus tareas de acuerdo a sus posibilidades, y sistematizar la manera en que conducirá el docente ante sus alumnos para lograr el aprendizaje.

El plan didáctico de las actividades de clase es un proyecto de trabajo que prevé el desarrollo que se pretende dar a la materia, a las actividades docentes y de los alumnos, en un tiempo determinado, hace que el profesor reflexione sobre lo que va a hacer, sobre lo que van a hacer sus alumnos y acerca del material didáctico necesario y los procedimientos que mejor se ajusten con el tipo de tareas a ejecutar.

A continuación, se presenta el plan didáctico de las actividades programadas para el curso de álgebra escolar, realizando referencia detallada al contenido a desarrollar, los recursos que se requieren, la especificación de las actividades de desempeño del facilitador y la especificación de las actividades de desempeño del participante, en función de las dieciocho semanas del semestre:

Cuadro 60:
Plan Didáctico de Actividades del Curso Álgebra Escolar

Semana	Contenido	Desempeño del Facilitador	Desempeño del Participante	Recursos
1	Planificación	El docente explicará la planificación de la asignatura, y establecerá las responsabilidad de cada estudiante El docente solicitara la conformación de grupos de trabajos para realizar la exposición y las propuestas didácticas El docente asignará la lectura del currículo de matemática, la iniciación del aprendizaje del álgebra para discutir en la próxima clase El docente ejecutará el taller "Análisis vectorial de una jugada de voleibol" y establecerá su relación con la perspectiva de modelización	El participante atenderá a las explicaciones de la planificación expuesta por el docente y realizará las preguntas que consideren pertinente Los participantes conformaran los grupos para la planificación de las actividades El participante realizará las actividades del taller "Análisis vectorial de una jugada de voleibol"	Conexión a Internet Computadora Video Beam Presentaciones en Power Point Videos Mapas Mentales Mapas Conceptuales Artículos de Investigaciones Pizarrón Marcadores Borrador
2	Análisis de texto	El docente establecerá en una discusión guiada los contendidos algebraicos en el currículo de matemática. El docente buscará en Internet artículos sobre el análisis de textos y se fomentará una discusión al respecto. El docente ejecutará el taller "Del trinomio al producto notable" y establecerá su relación con la aritmética generalizada. El docente presentará la estrategia cover− up. El docente asignará lecturas básicas para la discusión de la próxima clase	El participante atenderá las explicaciones del docente e intervendrá activamente en la discusión sobre la presencia de los temas algebraicos en el currículo de matemática El participante realizará las actividades del taller "Del trinomio al producto notable" El participante atenderá la ilustración de la estrategia cover−up	
3	Análisis didáctico, mapa de enseñanza y aprendizaje	El docente establecerá una discusión sobre el análisis didáctico, el mapa de enseñanza y aprendizaje, las estrategias de aprendizaje significativo, y los mapas mentales y conceptuales. El docente ejecutará un taller sobre "Patrones" y establecerá relación con la perspectiva de generalización. El docente asignará lecturas básicas para la discusión de la próxima clase	Los estudiantes participaran activamente en las discusiones guiadas por el docente sobre el análisis didáctico, el mapa de enseñanza y aprendizaje, las estrategias de aprendizaje significativo, y los mapas mentales y conceptuales. Los estudiantes expondrán el análisis de texto realizado de forma individual. Los participantes realizaran las actividades del taller de Patrones	
4	Aritmética generalizada	El docente establecerá una discusión sobre la aritmética generalizada como uno de los enfoques para introducir el álgebra en la escuela, se analizaran de forma grupal los distintos artículos e investigaciones encontradas por los estudiantes, se seleccionará uno en particular para escudriñar su aporte al enfoque en discusión.	Los estudiantes participaran activamente en la discusión guiada por el docente para establecer las características del enfoque, y para evaluar el material llevado por los estudiantes, y escrutar la propuesta seleccionada para profundizar en su análisis y evidenciar que ejemplifica el enfoque en estudio.	
5	Pre−álgebra	El docente establecerá una discusión sobre la pre−álgebra como uno de los enfoques para introducir el álgebra en la escuela, se analizaran de forma grupal los distintos artículos e investigaciones encontradas por los estudiantes, se seleccionará uno en particular para escudriñar su aporte al enfoque en discusión.	Los estudiantes participaran activamente en la discusión guiada por el docente para establecer las características del enfoque, y evaluar los ejemplos didácticos encontrados	
6	Álgebra temprana	El docente establecerá una discusión sobre el álgebra temprana como uno de los enfoques para introducir el álgebra en la escuela, se analizaran de forma grupal los distintos artículos e investigaciones	Los estudiantes participaran activamente en la discusión guiada por el docente para establecer las características del enfoque, y evaluar los ejemplos didácticos encontrados	

		encontradas por los estudiantes, se seleccionará uno en particular para escudriñar su aporte al enfoque en discusión		
7	Perspectiva histórica	El docente realizará un resumen de la exposición de los estudiantes, y complementará la información que considere pertinente, contribuirá de manera activa al establecimiento de las características del enfoque y al análisis de la propuesta didáctica que evidencia el uso de esta perspectiva en la enseñanza del AE	Los estudiantes responsables de la exposición de esta perspectiva, realizarán la exposición buscando resaltar los elementos más importantes del enfoque. Asimismo, expondrán una experiencia didáctica donde se emplee este enfoque	
8		El docente ayudará a cada uno de los grupos en la formulación de las ideas para la elaboración de la propuesta didáctica, además guiara la discusión de las exposiciones de las distintas propuestas realizadas	Los estudiantes realizaran una propuesta didáctica que englobe las características de las perspectivas, se realizará una discusión grupal para emitir las opiniones para mejorar dicha propuesta, las cuales deben ser tomadas por los estudiantes para afinar la propuesta de la perspectiva	
9	Perspectiva de generalización	El docente realizará un resumen de la exposición de los estudiantes, y complementará la información que considere pertinente, contribuirá de manera activa al establecimiento de las características del enfoque y al análisis de la propuesta didáctica que evidencia el uso de esta perspectiva en la enseñanza del AE	Los estudiantes responsables de la exposición de esta perspectiva, realizarán la exposición buscando resaltar los elementos más importantes del enfoque. Asimismo, expondrán una experiencia didáctica donde se emplee este enfoque	
10		El docente ayudará a cada uno de los grupos en la formulación de las ideas para la elaboración de la propuesta didáctica, además guiara la discusión de las exposiciones de las distintas propuestas realizadas	Los estudiantes realizaran una propuesta didáctica que englobe las características de las perspectivas, se realizará una discusión grupal para emitir las opiniones para mejorar dicha propuesta, las cuales deben ser tomadas por los estudiantes para afinar la propuesta de la perspectiva	
11	Perspectiva de resolución de problemas	El docente realizará un resumen de la exposición de los estudiantes, y complementará la información que considere pertinente, contribuirá de manera activa al establecimiento de las características del enfoque y al análisis de la propuesta didáctica que evidencia el uso de esta perspectiva en la enseñanza del AE	Los estudiantes responsables de la exposición de esta perspectiva, realizarán la exposición buscando resaltar los elementos más importantes del enfoque. Asimismo, expondrán una experiencia didáctica donde se emplee este enfoque	
12		El docente ayudará a cada uno de los grupos en la formulación de las ideas para la elaboración de la propuesta didáctica, además guiara la discusión de las exposiciones de las distintas propuestas realizadas	Los estudiantes realizaran una propuesta didáctica que englobe las características de las perspectivas, se realizará una discusión grupal para emitir las opiniones para mejorar dicha propuesta, las cuales deben ser tomadas por los estudiantes para afinar la propuesta de la perspectiva	
13	Perspectiva de modelización	El docente realizará un resumen de la exposición de los estudiantes, y complementará la información que considere pertinente, contribuirá de manera activa al establecimiento de las características del enfoque y al análisis de la propuesta didáctica que evidencia el uso de esta perspectiva en la enseñanza del AE	Los estudiantes responsables de la exposición de esta perspectiva, realizarán la exposición buscando resaltar los elementos más importantes del enfoque. Asimismo, expondrán una experiencia didáctica donde se emplee este enfoque	
14		El docente ayudará a cada uno de los grupos en la formulación de las ideas para la elaboración de la propuesta didáctica, además guiara la discusión de las exposiciones de las distintas propuestas realizadas	Los estudiantes realizaran una propuesta didáctica que englobe las características de las perspectivas, se realizará una discusión grupal para emitir las opiniones para mejorar dicha propuesta, las cuales deben ser tomadas por los estudiantes para afinar la propuesta de la perspectiva	
15	Perspectiva funcional	El docente realizará un resumen de la exposición de los estudiantes, y complementará la información que considere pertinente, contribuirá de manera activa al establecimiento de las características del enfoque y al análisis de la propuesta	Los estudiantes responsables de la exposición de esta perspectiva, realizarán la exposición buscando resaltar los elementos más importantes del enfoque. Asimismo, expondrán una experiencia didáctica donde se emplee este enfoque	

		didáctica que evidencia el uso de esta perspectiva en la enseñanza del AE		
16		El docente ayudará a cada uno de los grupos en la formulación de las ideas para la elaboración de la propuesta didáctica, además guiara la discusión de las exposiciones de las distintas propuestas realizadas	Los estudiantes realizaran una propuesta didáctica que englobe las características de las perspectivas, se realizará una discusión grupal para emitir las opiniones para mejorar dicha propuesta, las cuales deben ser tomadas por los estudiantes para afinar la propuesta de la perspectiva	
17	Uso de la tecnología en el aprendizaje del álgebra	El docente establecerá una discusión sobre l uso de la tecnología en el aprendizaje del álgebra, se analizaran de forma grupal los distintos artículos e investigaciones encontradas por los estudiantes.	Los estudiantes participaran activamente en la discusión guiada por el docente para establecer el uso que se le a dado a la tecnología mediante la evaluación de los ejemplos didácticos encontrados. Los estudiantes entregaran el portafolio al docente para su evaluación	
18	Retroalimentación	El docente entregará la nota definitiva de la asignatura a cada uno de los estudiantes, y realizará las recomendaciones que considere necesaria	Los estudiantes darán la retroalimentación al docente de la puesta en práctica del curso	

CAPITULO VII

CONCLUSIONES Y PROSPECTIVAS

Entre las retrospectivas que surgen de esta investigación, tenemos:

Los recorridos y la caracterización de los distintos registros realizados por los Profesores de Matemática en Formación Inicial cuando se enfrentan a situaciones de reconocimiento de patrones, identificados en esta investigación pueden ser el punto de partida de indagaciones más profunda y específicamente referidas a la formación, transformación (tratamientos y conversiones) y congruencia de los registros encontrados, ajustados a la teoría de Duval (2002)

La organización de la data en un documento independiente Corpus del Estudio, e incluso la ventaja de contar con la digitalización de todos los artefactos, las grabaciones originales y las transcripciones de las mismas de manera pública y estructurada, permite que sean considerados para otros disertaciones, que pueden bifurcarse en otras investigaciones de índoles académicas, libres o incluso propiciar un análisis diferente para la escritura de artículos científicos.

El taller planificado para recabar la información de esta investigación puede ser empleado, en su totalidad o considerando sólo algunas actividades para otros estudios, además, también se puede replicar, la investigación para contratar los hallazgos obtenidos en ésta. Otro aspecto a considerar, es que este taller se puede dictar como actividades de extensión en la universidad, o llevarlos a las escuelas como un taller de formación permanente tanto para Profesores de Matemática como Maestros, ya que el reconocimiento de patrones esta presente en el currículo de primaria. Incluso algunas (aunque se pueden considerar todas) actividades se pueden realizar con estudiantes, bien sea de educación primaria o de bachillerato, e incluso se puede generar otra investigación similar cambiando los sujetos de estudio a estudiantes de primaria o bachillerato.

Asimismo, respecto de los instrumentos, es importante acotar, que así, como en investigación, se empleó la Prueba EVAPAL diseñada inicialmente para establecer ciertos procesos y conceptos relativos al pensamiento algebraico de los Profesores de Matemática en Formación Inicial de la tesis: “Procesos del Pensamiento Algebraico en entornos de aprendizaje mediados tecnológicamente”, en esta investigación quedan plasmado cuatro cuestionarios (incluido la prueba EVAPAL), los cuales pueden ser empleados, modificados, incluso refutados como instrumentos para otras investigaciones referidas a la línea LIDALGEBRA, por ser ésta la primera investigación de índole doctoral realizada en el marco del Doctorado en Educación Matemática de la UPEL adscrita en dicha línea.

A pesar, de que inicialmente, se tenía prevista la implementación del curso Álgebra Lineal, la situación país en Venezuela lo impido, la aplicación y evaluación de este curso puede ser el punto de partida de otra investigación. Es importante, considerar que dicho curso, también puede ser considerado como un curso de extensión acreditable, o incorporar algunas de las actividades previstas al curso doctoral “Didáctica del Álgebra”. También, se puede llevar como un curso de formación permanente a las escuelas y liceos, previo convenio con autoridades educativas nacionales, el cual, incluso puede ser administrado empleando entornos tecnológicos de aprendizajes, bajo la modalidad semi-presencial, o incluso a distancia.

El Rastreo del Silencio, la disgregación de los registros numéricos, en numéricos y algebraicos, así, como la proposición del registro emocional-afectivo, pueden ser contrastados en otros estudios similares o afines a éste.

REFERENCIAS

Acevedo de M. y Falk de L. (2000). Formación del pensamiento algebraico de los docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol 3, N° 003, México

Agudelo, C. (2013).La Creciente brecha entre las disposiciones educativas colombianas, las proclamaciones oficiales y las realidades del aula de clase: Las concepciones de profesores y profesoras de Matemáticas sobre el Álgebra Escolar y el propósito de su enseñanza. *REICE*. [Revista en línea], 5(1). Disponible: http://www.rinace.net/arts/vol5num1/art3_htm.htm.[Consulta: 11 Enero 2015].

Andonegui, M. (2009). *La Matemática de primer año de bachillerato.* Mérida, Venezuela*:* XIII Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática.

Arrieche, M. (2002). *La teoría de conjuntos de la formación de maestros: facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática*. Tesis de doctorado no publicada. Granada: Universidad de Granada.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389 - 407.

Barrio, E.; Lalanne, L.; Petich, A. (2010). *Entre y aritmética y álgebra: Un camino que atraviesa los niveles primario y secundario: Investigaciones y aportes*. Buenos Aires: Novedades Educativas.

Bazzini, L. (2013). *On The Construction And Interpretation Of Symbolic Expressions*. [Documento en línea]. Disponible: http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/papers_vol2/g6_bazzini.pdf [Consulta: 2015, Enero, 11]

Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*. Países Bajos: Kluwer Academic Publishers

Barrio, E.; Lalanne, L.; Petich, A. (2010). *Entre y aritmética y álgebra: Un camino que atraviesa los niveles primario y secundario: Investigaciones y aportes*. Buenos Aires: Novedades Educativas

Blanton, M. L., y Kaput, J. J. (2002). Developing elementary teachers' "algebra eyes and ears." *Teaching Children Mathematics*, 10 (2), 70-83. [Documento en línea]. Disponible en http://www.math.ccsu.edu/mitchell/math409tcmalgebraeyesandears.pdf. [Consulta: 2015, Enero 11]

Britt, M. and Irwin, K. (2008). Algebraic thinking with and without algebraic representation: a three-year longitudinal study. *ZDM Mathematics Education* 40, 39–53.

Buendía, L., Colás, P. y Hernández, F. (1998). Métodos de Investigación en Psicopedagogía. Madrid: McGraw-Hill

Butto, C., Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática*, vol. 16, núm. 1, 113-148

Carpenter, T., Franke, M. y Levi, L. (2003).Thinking Mathematically. Integrating arithmetic and algebra in elementary school. Estados Unidos: Heinemann

Chevallard, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique á l algébre dans l'enseignement des mathématiques au college. Premiére partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petix x*, 5, 51-94.
Chevallard, Y. (1986). Le passage de l'arithmétique á l algébre dans l'enseignement des mathématiques au college. Deuximie partie. *Petix x*, 19, 43-72.
Cifarelli .(1998).The Development of Mental Representations as a Problem Solving Activity.Journal of Mathematical Behavior, 17 (1), pp. 239–263.
Cuoco, A. y Curcio, F. (2001).The Roles of Representation in School Mathematics.Reston, VA: NCTM.
Corbeta, P. (2003). Metodología y técnicas de investigación social. España: McGraw-Hill.
Da Ponte, J. (2009). Uma agenda para investigação sobre padrões e regularidades no ensino-aprendizagem da Matemática e na formação de professores. En I. Vale y A.Barbosa (Org.), *Padrões*: *Múltiplas Perspectivas e contextos em EducaçãoMatemática*, (pp. 169-175). Brasil: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.
Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine.* Bern: Peter Lang. Translation into Spanish (1999). Semiosis y pensamiento humano. Universidad del Valle, Cali, Colombia.
Duval, R. (2004). *SEMIOSIS Y PENSAMIENTO HUMANO.* Cali, Colombia: Universidad del Valle , Instituto de educación y pedagogía, Grupo de Educación matemética.
Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación.*La Gaceta de La RSME*, Vol. 9.1 (2006), 143–168.
Duval, R. (2002). Semiosis y Pensamiento Humano. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de educación y pedagogía, Grupo de Educación matemática.
Duval, R. (2009). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas. Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.
Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo editorial Iberoamérica
Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel. 20, Traducción de Luis Puig, publicada en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados.* México: CINVESTAV, 2001.
García, J. (1998). *El proceso de generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal.* Tesis Doctoral (no publicada). Universidad de la Laguna
Gellert, U. (2005). La formación docente entre lo teórico y lo práctico. En Gómez-Chacón, I. y Planchart E. (Editores), *Educación Matemática y Formación de Profesores. Propuestas para Europa y Latinoamérica*. Universidad de Deusto
Ghiso, A. (1999). Acercamientos: el taller en procesos de investigación interactivos. Estudios sobre las Culturas Contemporáneas. Vol. V. núm. 9, junio pp.141-153. Colima: Universidad de Colima

Giménez, J. (1997). *Evaluación en Matemáticas. Una integración de perspectivas*. Madrid: Síntesis, S.A.

Godino, J. y Font, V. (2006). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. [Libro en línea]. Disponible: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf. [Consulta: 2015, Enero 11].

Godino, J., Castro, W., Aké, L., y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental. *Bolema, 26 (42B), 483-511*

Goldin, G. y Janvier, C. (1998). Representacion and the psychology of mathematics education. *Journal of Mathematics Behaviour*, *17 (1)*, 1-4.

Gómez, P. (2007). Análisis didáctico. Una conceptualización de la enseñanza de las matemáticas. En P. Gómez (Ed.), *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (pp. 31-116). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Gómez-Granell, C. (1997). Hacia una epistemología del conocimiento escolar: El caso de la Educación Matemática. En María J. Rodrigo y José Arnay, (Comps), *La construcción del conocimiento escolar.* España: Paidos.

González, F. (1993). Aprender a enseñar matemática: Elementos para configurar una estrategia. *Enseñanza de la Matemática*, 2(2), Agosto 1993, 4-22.

González, F. (1999). Los Nuevos Roles del Profesor de Matemática. Retos de la Formación del Docente para el Siglo XXI. Conferencia presentada en la Décima Tercera Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 13). Santo Domingo, República Dominicana del 12 al 16 de Julio de 1999.

González, F. (2001). Los protocolos escritos como medio para evaluar la comprensión matemática aplicando el análisis semiótico al proceso de resolución de problemas matemáticos. *Enseñanza de la Matemática*, 10(2), 44-51.

González, F. y Diez, M. (2002). *Dificultades en la adquisición del significado en el uso de las letras en Álgebra. Propuesta para la interacción didáctica*. [Artículo en línea].Disponible:http://www.ucm.es/BUCM/revistas/edu/11302496/articulos/RCED0202120281A.PDF. [Consulta: 2006, agosto,10]

González, A. (2015). Lidalgebra: propuesta de una línea de investigación en didáctica del álgebra y pensamiento algebraico En: VII Jornada de Investigación en Educación Matemática, 2015. Libro de Resúmenes. Venezuela: UPEL, 2015. p. 38

González, A. (2016). *Procesos del Pensamiento Algebraico en Entornos de Aprendizaje Mediados Tecnológicamente.* Tesis doctoral, Universidad Central de Venezuela.

González, A. y González, F. (2012a). Consideraciones históricas y didácticas relacionadas con el símbolo algebraico de igualdad. *Revista UNIÓN*, Número 37, Marzo 2014, 181-198.Disponible: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2014/37/archivo15.pdf

González, A. y González, F. (2012b). Exploración del pensamiento algebraico de profesores de matemática en formación. La Prueba EVAPAL. *Acta Scientiae*, 13, jan/jun 2011, 31-54. Disponible:

http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/22/19 [Consulta: 2015, Abril 24].

Goñi, J. (2001). La enseñanza de las matemáticas, aspectos sociológicos y pedagógicos. En Goñi, J. y otros (Eds), *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI*. Barcelona: Biblioteca de Uno.

Guzmán, N. (2013). Una propuesta para desarrollar pensamiento algebraico desde la básica primaria a través de la aritmética generalizada. Trabajo de grado de maestría. Universidad Nacional de Colombia

Guzmán, M. (1998). Tendencias innovadoras en educación matemática.[En línea]. [Consultado 17 Julio. 2016]. Disponible en: http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/migueldeguzman/legado/educacion/tendenciasInnovadoras.

Halmos, P. (1980). The heart of mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 87, 519-524.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. JournalforResearch in MathematicsEducation, 39 (4), 372-400.

Hitt, F. (1995).El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un Proyecto de Investigación en Educación Matemáticas. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática, pp. 165–178. Universidad de Granada

Iglesias, M. (2014). La demostración en ambientes de geometría dinámica. Un estudio con futuros docentes de matemáticas", Tesis doctoral, UPEL.

Kaput, J (1987a). *Representations Systems and Mathematics*. Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics,16-26.Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Kaput, J (1992). *Towards a Theory of Symbol Use in Mathematics*. Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics,159-196. Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Kaput, J. (1996). ¿Una línea de investigación que sustente la reforma del álgebra? *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 9, 85-97.

Kaput, J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematical Behaviour,* 17 (2), 266-281.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator, 18*(1), 139-151.

Küchemann, D. (1980). *The understanding of generalizad arithmetic (algebra) by secondary school children.* Tesis de doctorado. University of London, Institute of Education.

León, N. Beyer, W., Serres, Y., y Iglesias, M. (2013). *Informe sobre la formación inicial y continua del docente de Matemática: Venezuela*. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. Año 8. Especial Noviembre. pp 89-129. Costa Rica

Llinares, S. (2013). *La formación del profesorado*. Ponencia ante el Senado español. [Documento en línea]. Disponible:

http://www.rsme.es/comis/educ/senado/m4.pdf. [Consulta: 2015, Enero 09].
MacGregor, M. (1996). Aspectos curriculares en las materias aritmética y álgebra.Monográfico: El futuro del álgebra y la aritmética, *UNO*, (9), pp. 65-69.
Macías, J. (2015) Los registros semióticos en Matemáticas como elemento personalizado en el aprendizaje. Revista de Investigación Educativa Conect@2, 4(9): 27-57
Mason, J. (1996). El futuro de la aritmética y del álgebra: utilizar el sentido de generalidad. (Monográfico: El futuro del álgebra y la aritmética) *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 9, 7-21.
Mason, J.; Gram, A.; Pimm, D.; Gowar, N. (1985). *Rutas hacia el/Raíces del Álgebra*. Traducción de Cecilia Agudelo Valderrama. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.
Masso, O. (2013). Elaboración de objetos físicos como alternativa didáctica para la enseñanza del álgebra en grado 8º. Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ingeniería y Administración, Palmira.
Mora, D. (2006). Relación entre lenguaje, pensamiento, matemáticas y realidad. En Mora, D. y Serrano, W. (Eds). *Lenguaje, Comunicación y Significado en Educación Matemática. Algunos aspectos sobre la relación entre Matemática, lenguaje, pensamiento y realidad desde una perspectiva crítica (pp. 61-157).* Bolivia: Campo Iris, S.R L.
Niss, M. y Højgaard, T. (2011). *Competencies and Mathematical Learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. (English edition). Roskilde University, Department of Sciencie, Systems and Models, IMFUFA.
Orellana Chacín, M. (2002). ¿Qué enseñar de un Tópico o de un Tema? *Enseñanza de la Matemática* 11(2), 21- 42.
Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. París: Autor.
Ortiz, J. (2002). *Modelización y Calculadora Gráfica en la Enseñanza del álgebra. Estudio Evaluativo de un Programa de Formación*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad de Granada, Granada – España.
Ortiz, J. e Iglesias, M. (2006). Uso de la evaluación de programas en la formación inicial deprofesores de matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 19*
Ortiz, J., Iglesias, M. y Paredes, Z. (2013). El análisis didáctico y el diseño de actividades didácticas en matemáticas. En L. Rico, J.L. Lupiánez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Formación de Profesores e Innovación Curricular* (pp. 293 – 308). Granada: Comares.
Palarea, M. (1998). La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años. Tesis doctoral. Universidad de la Laguna, España.

Papini, M. (2003) Algunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, 6,41-71

Pimm, D. (2002). El lenguaje matemático en el aula. Madrid: Morata.

Paredes, Z. (2014). Estudio de la Repitencia en el Área de Álgebra desde la visión de los estudiantes, Tesis doctoral, UPEL.

Quintero, R.; Ruiz, M. y Terán, R. (2006). Las interpretaciones del símbolo "X" en los polinomios. *Educere*, 10(33), 315-326.

Radford, L. (1998). On Signs and Representations. A Cultural Account. *Scientia Paedagogica Experimentalis, 35(1),* 277-302.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.

Rangel, L. (2012). Patrones y Regularidades Numéricas: Razonamiento Inductivo. Trabajo de grado de maestría. Universidad Nacional de Colombia

Rico L. (1997). Dimensiones y componentes de la noción de currículo. Rico L. (ed.) (1997). Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria. España; Editorial Síntesis. 377-414.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis Didáctico y Metodología de Investigación. En L. Rico, J.L. Lupiánez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Formación de Profesores e Innovación Curricular* (pp. 1 - 22). Granada: Comares.

Rodríguez, G., Gil, J. y García, E. (1996). *Metodología de la Investigación Cualitativa*. Málaga: Ediciones Aljibe.

Samper. C. (1996). Geometría como instrumento del Álgebra**.** *Educación Matemática*, 8(3), Diciembre 1996, 85-94.

Schlieman, A.; Carraer, D.; Brizuela, B. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética. De las ideas de los niños a las actividades en el aula*. Buenos Aires: Paidos

Shulman, L. S. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, 9(2), 1-30. (Trabajo original publicado en ingles en 1987).

Serres, Y. (2011). Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza*Sapiens*. Revista Universitaria de Investigación, Año 12, Nº 1, junio 2011, pp.122-142

Sessa, C. (2005). Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 1-36.

Sfard y Linchevski, L.(1994). “The gains and pitfalls of reification The marries of algebra”, *Educational Studies in Mathematics* 26, 191-228.

Slavit, D. (1999). “The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebraic thinking”, *Educational Studies in mathematics* 37, 251-274, Kluwer Academic Publishers.

Socas, M., Camacho, M. y Hernández, J. (1998). Análisis didáctico del lenguaje algebraico en la enseñanza secundaria. *Revista Universitaria de formación del profesorado* 32, 73-86, Revista en línea Disponible en dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/117980.pdf.[Fecha de consulta: 28 enero 2014].

Socas, M. (1999). *Perspectivas de investigación en pensamiento algebraico.* En Ortega, Tomás (Ed.), Actas del III SEIEM (pp. 261-282). Valladolid: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria.Aportaciones de la investigación. Números, Revista de didáctica de las Matemáticas, Volumen 77, julio de 2011, páginas 5–34, ISSN: 1887-1984

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.

Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Vicerrectorado de Investigación y Postgrado. (2006). *Manual de Trabajos de Grado de Especialización y Maestría y Tesis Doctorales.* Caracas: Autor

Ursini, S; Escareño, F; Montes, D. y Trigueros, M. (2005). Enseñanza del Álgebra elemental. Una propuesta alternativa. México: Trillas, S.A.

Valdivé, C. y Escobar, H. (2011). Estudio de los polinomios en contexto.Revista Paradigma, Vol. XXXII, Nº 2; Diciembre de 2011 / 85 - 106

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico tempranoen alumnos de cuarto y quinto gradosde Educación Básica Primaria (9-10 años)*. Tesis doctoral, Doctorado Interinstitucional en EducaciónFacultad de Ciencias y Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Warren, E. y Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics* 67, 171–185

Zapatera, A. (2015). La competencia mirar con sentido de estudiantes para maestro (EPM) analizando el proceso de generalización en alumnos de Educación Primaria. Tesis doctoral. Universidad de Alicante

Zazkis, R. y Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics,* 49,379–402.

ANEXOS

ANEXO 1

Cuestionario No.1: Conocimientos previos relacionados con el Reconocimiento de Patrones

Instrucciones: Lee cuidadosamente cada pregunta y escribe de forma franca y espontánea todo lo que consideres necesario, importante y notable para justificar tu respuesta.

1. Queremos conocer el significado que le das a cada palabra, en cada caso, puedes definirla, explicarla, nombrar sinónimos o simplemente escribir una oración donde emplees las siguientes palabras:

Serie____

Secuencia ____

Razonamiento____

Progresión____

Seriación____

Generalización____

Inductivo____

Deductivo____

Recurrencia____

Repetición____

Regularidad____

Patrón____

Razón____

2. A partir del número 8, cada número que sigue se forma multiplicando el número anterior por 4 y dividiéndolo por 2. ¿Qué número debe ir en la casilla B?

8, 16, 32, **A** , **B**

3. En un banco se encuentran tres clientes realizando una cola para ser atendidos en la taquilla, el señor Morales está ubicado después del señor Castillo, y el señor Castillo está después del señor Palacios. Indica el orden que cada de los clientes ocupa en la cola:

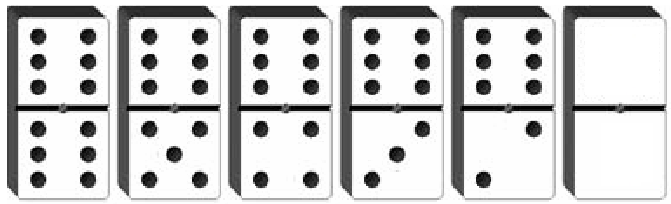
1º ____________________ 2º ___________________3º _____________________

4. La edad de José es el triple de la de Pedro; la de Juan el doble de la de José. Si las tres edades suman 130 años ¿Qué edad tiene cada uno de ellos?

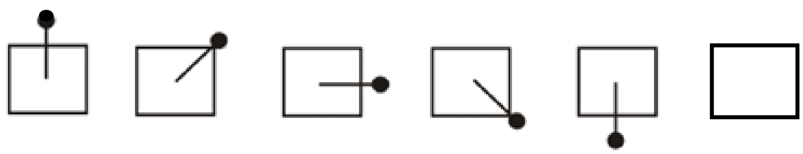
Edad de Pedro _______, Edad de José _______, Edad de Juan _______

5. En cada caso dibuja la pieza que sigue:

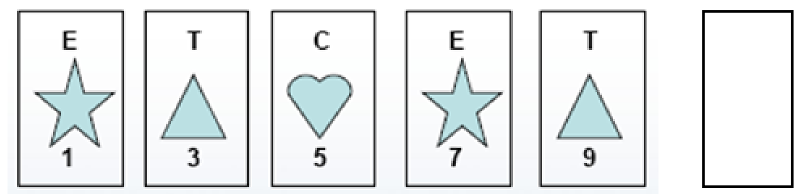
a)



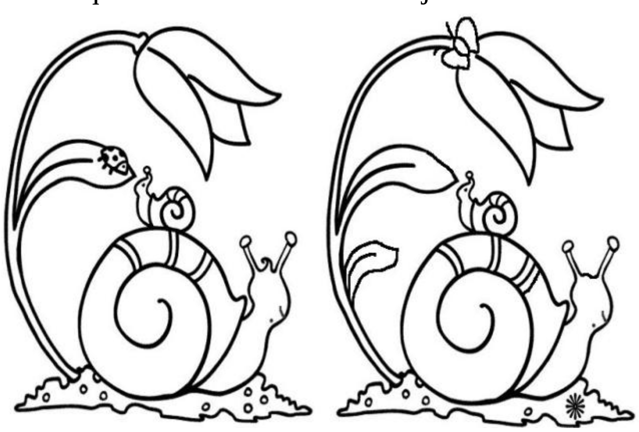
b)



c)



6. Marca las diferencias que encuentres en los dibujos



7. Completa los cuatro números que continúan en estas secuencias:

a) 8, 10, 12, _____, _____,_____,_____

b) 15, 18, 21, _____, _____,_____,_____

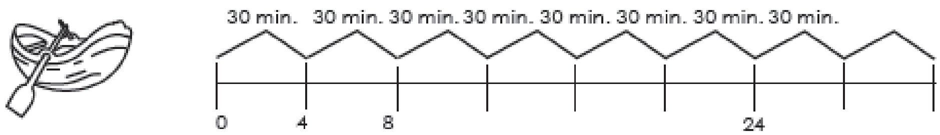
c) 40, 42, 44, _____, _____,_____,_____

d) 30, 33, 36, _____, _____,_____,_____

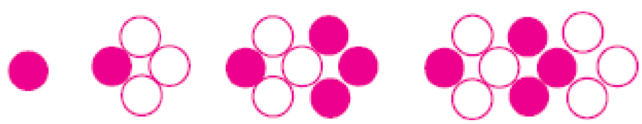
e) 32, 30, 28, _____, _____,_____,_____

8. Si la secuencia  se cambia a , entonces  debe cambiar a

9. Mi tío tiene una lancha y traslada pasajeros de Cuyagua a Choroní, ha calculado que cada 30 minutos avanza 4 kilómetros, ¿cuántos kilómetros ha recorrido después de dos horas y media?



10. Observa, siguiendo el diseño, ¿cuántos círculos tendrá el quinto diseño?

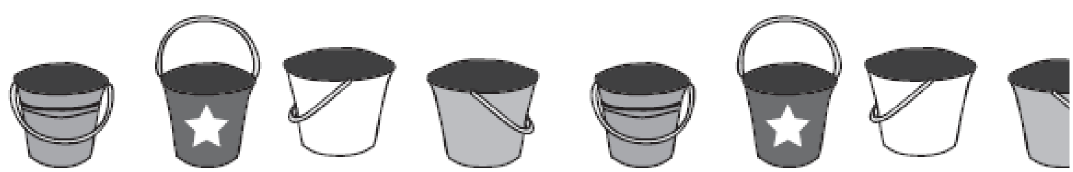


11. El siguiente patrón

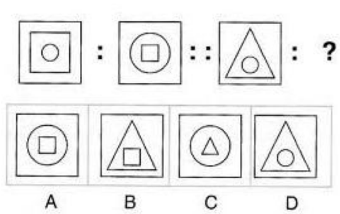
Se puede representar por las letras:

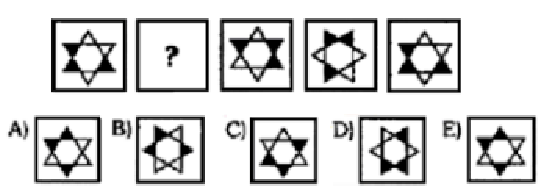
a) ABBCABBC
b) AACAACAA
d) BBBAABBB
e) AAABAAAB

12. Representa el siguiente patrón empleando letras



13. ¿Cuál de las alternativas reemplaza el signo de interrogación?





ANEXO 2

Cuestionario No. 2: Actitudes afectivas y emocionales hacia el Álgebra

1. El álgebra se puede caracterizar como la parte de la matemática que_____________
____
____
____

2. Los profesores de Matemática usualmente enseñan álgebra____________________
____
____
____

3. En las clases de álgebra me siento ________________________________
____
____
____

4. Yo entiendo álgebra cuando____
____
____

5. La asignatura del área de álgebra que me parece más fácil ____________________

6. La asignatura del área de álgebra que me parece más difícil___________________

7. La asignatura del área de álgebra que más me gustó es _______________________

8. La asignatura del área de álgebra que no me gustó es _________________________

9. El contenido de álgebra donde soy más exitoso es ____________________________

10. El contenido de álgebra que me costo aprender es ___________________________

11. Un buen profesor de álgebra debería_______________________________________
____
____
____

12. Lo mejor que un profesor de álgebra puede hacer por mí es ____________________
____
____
____

13. Al estudiar álgebra lo más difícil que encuentro es ____________________________
____
____
____

14. Estudiar álgebra **es** importante porque ____________________________________
____
____
____
____

15. Del Álgebra me gusta ____,
____ y no me gusta
____

Cuando estudio álgebra he sentido:

16. Ira, rabia, impotencia, temor, pánico, fracaso, mi autoestima reforzada negativamente cuando ____
____
____

17. Mi autoestima reforzada positivamente, orgullo, éxito cuando __________________
____
____

18. Gratitud, reconocimiento, agradecimiento cuando___________________________
____
____

19. Respecto a mi experiencia en el aprendizaje del álgebra en la UPEL me parece importante mencionar: ____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

20. Respecto a mi experiencia en el aprendizaje del álgebra en el liceo me parece importante mencionar: ____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

ANEXO 3

[Prueba EVAPAL]

República Bolivariana de Venezuela
Universidad Pedagógica Experimental Libertador

Instituto Pedagógico
"Rafael Alberto Escobar Lara"

Departamento de Matemática

Evaluación del Pensamiento Algebraico (EVAPAL)

Estimado estudiante, el presente instrumento tiene como finalidad recabar información, confidencial y con interés investigativo, en torno a algunos aspectos del Pensamiento Algebraico de los alumnos del Departamento de Matemática de la UPEL-Maracay; tu participación es altamente apreciada y muy importante para el logro de la meta de investigación propuesta, por lo que mucho te agradezco tu gentileza y buena disposición al ocupar parte de tu tiempo en responder el mismo. Consta de dos partes, en la primera se te proponen 10 preguntas las cuales debes leer cuidadosamente, y luego responderlas; y, en la segunda parte están 10 planteamientos que debes desarrollar.

Parte I. Lee cuidadosamente y responde

1) ¿Qué representan las letras en cada una de las siguientes expresiones?

1.1) $3+a+a+a+10$

1.2) $3+a+a+a=10$

1.3) $3+a+a+a=b$

2) ¿A qué es igual $a+b+c$?, si se sabe que $a+b=9$.

3) ¿Qué significa la expresión $1500L+2000S$?, sabiendo que se compraron L lápices a Bs. 1500 cada uno y S sacapuntas a Bs. 2000 cada uno.

4) ¿Para cuáles valores de a y b es cierta la igualdad $(a+b)^2 = a^2+b^2$?

5) ¿Cuál es el valor de $z+x$?, sabiendo que los números $61,59,56,52,z,y,x$, se generaron siguiendo un cierto patrón de regularidad.

6) ¿A qué es igual $8\nabla 2$?, si se sabe que $a\nabla b = a+(b.a)$.

7) ¿En cuánto tiempo se llenará el resto de una botella?, sabiendo que $3/4$ de ella se ha llenado en 2 minutos.

8) ¿Cuál es el valor de x?, si $7.7.7.7.8 = 7.7.x.7$.

9) ¿Cuál es el grado del siguiente polinomio $(x^2+1)^4(x^3+1)^3$?

10) ¿Cuál es el valor de x en $5mx+2=0$?, siendo $m \neq o$.

Parte II. Desarrolla los siguientes planteamientos

1) Escribe una definición de ecuación y proporciona un ejemplo.

2) Corrige la siguiente igualdad y explica brevemente tu decisión: 7+4=9

3) Define los siguientes conceptos:
   3.1) Vector

   3.2) Matriz

4) Escribe en lenguaje simbólico las siguientes expresiones:
   4.1) El cuadrado de un número, aumentado en uno, no supera el doble del mismo número, disminuido en tres.

   4.2) El setenta por ciento de un número.

4.3) Todos los números reales entre menos uno y uno.

5) Expresa con tus propias palabras la siguiente propiedad: $|-x| = |x|$.

6) Multiplica por 6 la expresión $n+7$.

7) Considera S como el conjunto de los enteros positivos menores o iguales a veinte, y el conjunto $A = \{x \in S \mid x \text{ es primo}\}$. Exhibe un elemento de A y un elemento que no esté en A. Justifica tu elección.

8) Escribe un trinomio cuadrado no perfecto y explica brevemente.

9) Escribe los tres primeros términos de la sucesión definida por $4n-3$, donde $n \in N$.

10) Utilizando la notación de llaves, y a través de una propiedad, describe:

10.1) El conjunto vacío.

10.2) Un conjunto con infinitos elementos.

ANEXO 4

UPEL Universidad Pedagógica Experimental Libertador

Instituto Pedagógico " Rafael Alberto Escobar Lara " Maracay

NÚCLEO DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA "Dr. EMILIO MEDINA"

CUESTIONARIO No.3

Respetado docente, el presente instrumento está dirigido a recolectar información confidencial, anónima y de interés investigativo relacionada a las perspectivas del Álgebra Escolar de los Profesores de Matemática, por lo tanto te agradecemos su valiosa colaboración al contestar las distintas preguntas de la forma sincera y siendo lo más explicito que puedan en el desarrollo de en cada una de las respuesta, cualquier información que nos aporte será de gran utilidad para conformar la data de la investigación.

1) Lista a priori los contenidos algebraicos que recuerdas que se imparten en cada año del Sistema Educativo venezolano en el nivel de media general

PRIMER AÑO	SEGUNDO AÑO	TERCER AÑO	CUARTO AÑO	QUINTO AÑO

2) En los siguientes cuadros se muestran los contenidos programáticos de la asignatura Matemática en los distintos años de Educación Media general, subraye (con resaltador) los temas que usted considera que corresponden al área de Álgebra

PRIMER AÑO (1°)	Instrumentos de recolección de datos. Tabla de doble entrada. Representaciones gráficas de proporciones. Porcentajes. Rectas, segmentos y polígonos. Líneas y puntos notables de un triangulo. Cálculo de áreas de superficies planas. Perímetro. Escala. Números enteros. Operaciones con números enteros. Ecuaciones con números enteros. Números racionales. Decimales. Aproximaciones. Estimaciones. Proporciones. Unidades de medida y conversión. Potencias de diez Tablas. Gráficas. Media aritmética. Razones, proporciones, índices, porcentajes. Sistemas de coordenadas. Esfera. Mínimo común múltiplo (mcm), máximo común divisor (MCD). Ecuaciones lineales. Sistema sexagesimal. Proyección ortogonal, sistema de coordenadas proyectadas	Ecuaciones en N. Números enteros (Z). Operaciones en Z: adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación en Z. Múltiplos y divisores en Z. Números racionales (Q). Operaciones en Q: adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación en Q. Círculo y circunferencia. Triángulos. Cuadriláteros. Polígonos. Cálculo de áreas. Volumen y capacidad. Probabilidad. Estadística Elemental. Elementos de computación

SEGUNDO AÑO (2°)	Tabla, frecuencia. Tablas de doble entrada. Representaciones graficas. Medidas de tendencia central. Estimaciones. Densidad, población, tasa. Unidades de medida. Porcentajes. Fracciones como proporciones. Funciones. Potenciación con exponentes enteros. Expresiones decimales infinitas y periodices. Sucesos independientes. Permutaciones. Método de D/Hondt. Proporciones, porcentajes. Área geográfica. Poligonal. Ecuaciones. Población y muestra. Muestreo. Rotación. Traslación; tipos de movimiento de traslación. Simetría, segmentos, ángulos, congruencia. Números enteros. Operaciones con números enteros. Ecuaciones con números enteros. El Sistema Internacional de Unidades. Las unidades de medidas. Conversión de unidades de masa y de volumen. Temperatura, unidades de temperatura. Presión, unidades de presión. Volumen de cuerpos geométricos. Capacidad. Función polinómica. Polinomios. Productos notables. Recolección, procesamiento, presentación y análisis de datos	Funciones. Números enteros (Z). Números racionales (Q). Proyección ortogonal. Sistema de coordenadas rectangulares. Función afín. Vectores en el plano. Vectores equipolentes Adición de vectores. Propiedades de la adición de vectores. Producto de un racional por un vector Traslación de figuras en el plano. Simetría axial. Congruencia. Congruencia de triángulos. Ángulos opuestos por el vértice. Ángulo entre dos rectas paralelas cortadas. Función polinómica. Operaciones con polinomios: adición, sustracción, y multiplicación de polinomios. Propiedades de las operaciones. Producto notable. División de polinomios. Valor numérico de un polinomio. Cero de una función polinómica. Probabilidad. Media aritmética y moda. Computación

TERCER AÑO (3°)	Variaciones, combinaciones y permutaciones. Probabilidad de un evento. Razones y proporciones. Media geométrica. El numero Phi. Semejanza, criterios y propiedades. Teoremas de: Pitágoras, Euclides, y Tales. Números reales (R). Operaciones con números reales. Ecuaciones. Función polinómica. Sistemas de ecuaciones lineales y métodos de resolución. Intervalos, desigualdades e inecuaciones. Progresiones aritméticas. Progresiones geométricas. Proporciones y porcentajes. Medidas. Sistema de unidades. Medidas de capacidad. Calculo de volumen. Figuras y cuerpos geométricos. Gráficas (relación de peso antes y después de la deshidratación). Tiempo. Días, horas, minutos, segundos. Tablas. Gráficos. Porcentajes. Intervalos. Conversiones de unidades de tiempo.	Números irracionales. Números reales (R). Adición y producto de números reales. Potencia de números reales con exponente entero. Raíz n-ésima de un número real. Operaciones con raíces. Racionalización. Relaciones de orden en R. Ecuaciones con valor absoluto en R. Coordenadas de un punto en la recta real. Distancia entre dos puntos. Intervalos en la real. Inecuaciones, El plano real. Funciones reales. Funciones afín. Sistema de ecuaciones. Función cuadrática. Ecuaciones de segundo grado. Teoremas de: Pitágoras, Euclides, y Thales. Semejanza de triángulos. Estadística, probabilidad computación

CUARTO AÑO (4°)	Análisis descriptivo univariante. Distribución de probabilidad, y binomial. Uso de series de tiempo. Números índices. Datos estadísticos y medidas de tendencia central. Descripción, organización y visualización de datos obtenidos de indagaciones. Análisis gráfico de funciones reales. Interés compuesto. Numero e. Catenarias. Gráficos. Proporción, fracción, porcentajes. Mapas. Índices. Lecturas de índices. Variaciones interanuales. Proyecciones, proporción.Funciones: exponencial y logarítmica. Razones trigonométricas. Ángulos. Astrolabio. Funciones trigonométricas. Teorema del seno y del coseno.GPS. Coordenadas cartesianas en dos y tres dimensiones. Coordenadas polares. Latitud, longitud, paralelos y meridianos. Grados, minutos y segundos. Los radianes. Los vectores. El computador. Estructura del computador. Gráficos. Tablas. Programación lineal. Teoría de Grafos	Funciones reales de variable real. Vectores en el plano: vector fijo y libre, combinación lineal, base y dimensión de un espacio vectorial. Trigonometría. Ángulos y arcos. Funciones trigonométricas. Identidades trigonométricas. Funciones trigonométricas inversas. Números imaginarios. Números Complejos (C). Operaciones con números complejos: adición, sustracción, multiplicación y división. Forma trigonométrica y polar de un número complejo complejos Función exponencial. El número e. Ecuaciones exponenciales. Función logarítmica. Ecuaciones logarítmicas. Sucesiones. Progresiones aritméticas, Progresiones geométricas

QUINTO AÑO (5°)	Variables independientes y dependientes. Correlación y regresión lineal. Ecuación de la recta, pendiente, ordenada. Matrices, tipos, operaciones. Determinantes. Sistemas de ecuaciones lineales. Gauss-Jordan. Inecuaciones de dos variables. Sistema de inecuaciones e inecuaciones de 2° grado. Geometría del espacio. Figuras y cuerpos geométricos. Poliedros. Sólidos de revolución. El origami. Cónicas. Circunferencia, ecuación de la circunferencia. Ecuación de segundo grado. Graficación de ecuaciones de segundo grado. Ecuación de la parábola, recta directriz, foco. Reflector parabólico. Telecomunicaciones. Volumen, presión y temperatura. Relaciones y unidades. Funciones. Ecuaciones. Gráficos. Mapas. Análisis descriptivo univariante y bivariante de datos. Relación entre variables. Análisis de Correlación y Regresión lineal simple. Modelación grafica, función línea recta, ajuste de modelos. Uso de tecnologías.	Polinomios: regla de Ruffini. Sumatorias. Inducción completa. Teoría Combinatoria: variación, combinación, permutación. Binomio de Newton. Geometría analítica: ecuación de la recta. Cónicas: circunferencia, elipse, hipérbola, parábola. Inecuaciones. Vectores, recta y plano en el espacio, Matrices y determinantes. Sistemas de ecuaciones lineales

3) ¿Qué criterio empleó para determinar cuáles de los contenidos son algebraicos?

____

____

____

4) Defina, explique con sus propias palabras qué es Álgebra

____

____

____

5) Construya con sus propias palabras una definición de Álgebra Escolar

____

____

____

6) ¿Por qué es importante la presencia del álgebra en el currículo de educación media general?

____

____

____

7) ¿El álgebra escolar contribuye en el desarrollo cognitivo del estudiante? Explique

____

____

____

8) En una situación hipotética, que se eliminar el contenido de polinomios del currículo escolar, ¿qué consecuencias traería? Argumente, la presencia o ausencia del contenido de polinomios del currículo de educación media

9) Los niveles de Van Hiele surgieron, y son aplicados a experiencias didácticas de índole geométrico, en caso de la UPEL-Maracay, la profesora Iglesias difunde está teoría en cursos de pre-grado, postgrado e incluso en actividades de extensión. Conoces alguna didáctica específica del álgebra. Puedes explicarla brevemente

10) Conoces alguno de los enfoques para introducir el álgebra en la escuela: (1) Preálgebra, (2) Álgebra temprana (Early álgebra), Perspectivas para la enseñanza y la investigación de Bednarz, Kieran y Lee (histórica, de generalización, de resolución de problemas, de modelización y funcional). Puedes explicarlas brevemente

11) Observa el video del enlace: https://youtu.be/xkbQDEXJy2k. A pesar de que está en otro idioma, realiza un análisis didáctico de las actividades matemáticas desarrolladas

12) En una evaluación, se solicito ejemplificar la propiedad asociativa de la adición en Z, y un estudiante escribió: (28+30)+48=58+(18+30). Realiza un análisis de este ejemplo

13) Para ejemplificar la propiedad conmutativa de la multiplicación en N, un estudiante escribió: 43+12=34+21. Realiza un análisis de este ejemplo

14) Los siguientes son dos ejemplos de la resolución de la ecuación 3x+6=12 realizada por los estudiantes. Realiza un análisis de las soluciones planteadas por los estudiantes

3x+6=12	3x+6=12
x+6/2=12/6	x+2=6
x+2=2	x=6-2
x=2+2	x=4
x=4	

CURRICULUM VITAE

Mariela Lilibeth Herrera Ruiz

Profesora Especialidad Matemática, egresada del Instituto Pedagógico “Rafael Alberto Escobar Lara”, en agosto 2001. Magister en Educación Matemática y Especialista en Tecnología de la Computación en Educación, egresada de la Universidad de Carabobo, en diciembre 2011. Tutora de diversas tesis de maestría en la Facultad de Educación de la Universidad de Carabobo. Ponente en la Reunión de Matemática Educativa realizadas en República Dominicana (2009), Guatemala (2010), ganadora del 1er lugar en la exposición de carteles, y Argentina (2013). Investigadora Acreditada por el Programa de Estímulo a la Investigación e Innovación (convocatoria 2015)