REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO “RAFAEL ALBERTO ESCOBAR LARA”

ANÁLISIS DE LA GENERALIZACIÓN EN UN CONTEXTO DE RECONOCIMIENTO DE PATRONES

Tesis presentada como requisito parcial para optar al grado de Doctor en Educación Matemática

Autor: Gustavo Pedriquez
Tutor: Andrés González R

Maracay, 07 de mayo de 2023

ACEPTACIÓN DEL TUTOR

En mi carácter de Tutor de la Tesis presentada por el ciudadano **Gustavo David Pedriquez Lugo,** para optar al Grado de Doctor en Educación Matemática, considero que dicha Tesis reúne los requisitos y méritos suficientes para ser sometida a la presentación pública y evaluación por parte del jurado examinador que se designe.

En la Ciudad de Maracay, a los 07 días del mes de mayo de 2023

Dr. Andrés González R.

C.I. V- 7.264.121

DEDICATORIA

Quiero dedicar este logro a mi esposa, quien ha sido mi apoyo inquebrantable en cada dificultad desde el inicio del Doctorado en Educación Matemática, y, me ha brindado su amor incondicional.

A mis padres quienes me enseñaron el valor del trabajo arduo y la importancia de la perseverancia.

AGRADECIMIENTO

Deseo expresar mi agradecimiento a Dios por darme salud, fuerza y habilidades.

Expreso un especial agradecimiento a mi tutor, el Dr. Andrés González R, porque la ejecución de esta tesis no hubiera sido posible sin su apoyo ilimitado, quien con paciencia, perseverancia e intelecto guió mi trabajo. Además, ha sido para mí un modelo a seguir profesionalmente.

También quiero extender mi gratitud a todos mis profesores del doctorado, quienes me brindaron las herramientas para mi formación, en particular el Dr. Rolando García cuyo compromiso con los estudiantes del DEM ha sido formidable.

Gracias a todas las personas que contribuyeron a hacer posible esta investigación y que de alguna manera estuvieron conmigo en los momentos difíciles, alegres y tristes.

ÍNDICE GENERAL

LISTA DE CUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO “RAFAEL ALBERTO ESCOBAR LARA”
SUBDIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Línea de Investigación: Didáctica del Álgebra y Pensamiento Algebraico

ANÁLISIS DE LA GENERALIZACIÓN EN UN CONTEXTO DE RECONOCIMIENTO DE PATRONES

Autor: Gustavo Pedriquez.
Tutor: Andrés A. González R.
Fecha: mayo, 2023

RESUMEN

La investigación surge a partir de la experiencia acumulada por el autor como educador matemático en un liceo ubicado una zona popular de San Mateo, estado Aragua. Se constató las dificultades que tienen los estudiantes para asumir conscientemente los procesos de generalización cuando abordan actividades donde tienen que construir el término general de una sucesión. Desde entonces, se trató de ubicar esta observación en un contexto más específico en el seno de la Educación Matemática como disciplina científica encargada de estudiar los fenómenos relacionados con el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática. Esto permitió establecerla en un marco teórico acorde como lo es el pensamiento algebraico, con unos autores referenciales propios y un discurso delimitado. Considerando estos aspectos, se desplegó un cuerpo teórico explicativo en torno a los procesos de generalización a partir del reconocimiento de patrones. Entre las teorías consideradas está la teoría de objetivación de Radford (2015) y el concepto de Zona de Desarrollo próximo de Vygotsky (1979). Desde el punto de vista metodológico, se desarrolló bajo el paradigma cualitativo enmarcado en una perspectiva fenomenológica e interpretativa; debido a la naturaleza de su propósito, su diseño correspondió con un estudio de caso; se utilizó la técnica de la entrevista semi estructurada. El análisis se realizó mediante el proceso de categorización, para luego procesar esa información mediante la triangulación de fuentes que incluyen los puntos de vista de los entrevistados, el investigador y la teoría. Se concluye erigiendo al Pensamiento Algebraico Móvil, se sustenta que, es una forma de pensar que se caracteriza por el desplazamiento transversal entre los tipos de pensamiento algebraico Factual, Contextual y Simbólico.

Descriptores: Álgebra escolar, pensamiento algebraico, reconocimiento de patrones generalización.

INTRODUCCIÓN

La motivación general que inspiró la presente investigación se encuentra en la experiencia docente del autor, como profesor de matemática, quien a lo largo de sus más de diez años de experiencia ha vivido las dificultades que tienen los estudiantes cuando tienen que aprender conceptos matemáticos y desarrollarlos, en los cuales está presente la generalización manifestada como algo abstracto y en sí mismo de mucha complejidad para su comprensión. Este hecho unido a una revisión crítica de los programas oficiales ha permitido detectar sus insuficiencias para ayudar a los docentes a plantear escenarios académicos en los cuales los escolares se beneficien en el tránsito de la aritmética al álgebra, o de lo concreto a lo abstracto, o en términos generales de la manipulación consciente de la generalidad.

Lo multifacético y complejo de los asuntos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la matemática permiten los múltiples puntos de vista dentro de la Educación Matemática considerada como disciplina científica en pleno desarrollo. En esta investigación el énfasis está en el álgebra educativa en la cual se subsume el pensamiento algebraico, en este contexto se decidió enfocar las carencias o insuficiencias detectadas, tanto en los estudiantes como lo que tiene que ver específicamente con el currículum mismo. El pensamiento algebraico puede ser conceptualizado de diversas maneras, una de ellas refiere a procesos mentales a través de los cuales un individuo crea un significado referencial para algún tipo de representación, y al hacerlo, construye y expresa generalizaciones. En este caso, la generalización es vista como un fin en sí mismo. Siendo así, un eficiente logro en su dominio teórico y práctico por los estudiantes puede incidir en un incremento de su comprensión sobre la forma estructural y la generalidad de las matemáticas, así como su probabilidad de éxito en el estudio de las matemáticas más avanzadas, especialmente el álgebra, en la educación media o incluso universitario.

Por lo tanto, el Problema objeto de estudio y, consecuentemente, toda la investigación se desarrolló considerando el discurso propio del álgebra educativa, con sus autores relevantes, y sus concernientes especificidades. El foco, entonces, es el pensamiento algebraico acentuado en el proceso de generalización que realizan los estudiantes cuando resuelven tareas de reconocimiento de patrones.

La estructura de este documento es la siguiente: El Momento I, contiene la contextualización del problema, destacando su construcción; se muestran algunos indicadores que evidencian una ruptura entre *el ser* y el *deber ser* en cuanto a los procesos de generalización necesarios en el aula. También están las preguntas que emergieron, los propósitos, general y específicos, además de la justificación.

En el Momento II se encuentra el repertorio de coordenadas teóricas y conceptuales de referencia el cual permite ubicar el asunto de interés indagatorio de acuerdo a sus interrelaciones discursivas y teorías específicas que guían el estudio. Comienza con algunas investigaciones previas que están relacionadas con nuestro objeto de interés indagatorio, y que fueron claves en el devenir del presente estudio. En lo conceptual, se discute lo relacionado con los conceptos de generalización, patrón y reconocimiento de patrones, así como también la perspectiva teórica que sirvió de fundamento a la metodología para alcanzar las respuestas.

El Momento III se refiere al marco metodológico considerado como el conjunto de herramientas metodológicas que, guardando estricta correspondencia con el problema planteado, sus preguntas y sus objetivos junto a las coordenadas demarcadas en el capítulo II, indican la forma en que se abordó la búsqueda de respuestas. Es como una especie de malla que se fue tejiendo progresivamente y en la cual cada hebra daba paso a una fibra robusta que sustenta toda la investigación.

En el Momento IV se encuentra la organización de la información, así como también su discusión y los hallazgos a la luz de los objetivos planteados. Con respecto a lo primero, en sí mismo se constituye en un resultado parcial mediante la *línea del tiempo*, herramienta analítica mediante el cual el docente-investigador de forma retrospectiva y subjetiva reconstruye los episodios de los talleres. En lo atinente a la discusión se muestra un amplio análisis, en ocasiones denso, dada la riqueza de la información tomando en cuenta las consideraciones teóricas que sirven de base.

En el Momento V, se cumple con los tres propósitos específicos planteados, se expone la *Caracterización de los Tipos de Pensamiento Algebraico que Desarrollan los Estudiantes*

Cuando Realizan Tareas de Reconocimiento de Patrones, las perspectivas teóricas e ideas surgidas a partir de los hallazgos y vinculadas con las preguntas y propósitos trazados.

Asimismo, se presentan las *Limitaciones y Potencialidades que Tienen los Alumnos* Durante *el Proceso de Generalización*, segundo propósito de la investigación. Entre otros aspectos, se discuten las ideas de *denotación* y *sentido* vinculadas con las expresiones algebraicas las cuales mayoritariamente surgen luego del reconocimiento de un patrón y la correspondiente generalización.

Finalmente, se concreta el tercer propósito trazado, titulado *Medios Semióticos que Despliegan los Estudiantes en el Proceso de Generalización*.

El Momento VI se titula *Aspectos Instruccionales que Favorecen el Proceso de Generalización* delineamos algunas ideas concretas emanadas de esta investigación para ser llevadas al aula de matemática con relación a la generalización tomando en cuenta otras actividades, además del reconocimiento de patrones en secuencias.

En el Momento VII se encuentran las conclusiones y recomendaciones para futuras investigaciones.

Creemos que los programas que sustentan la enseñanza de la matemática en Venezuela requieren una revisión profunda que dé cuenta de los avances impulsados por la investigación en Educación Matemática y sus investigadores, en particular los que tienen que ver con el álgebra educativa de tal manera que no solo se incorporen nuevos contenidos y se retiren otros por su obsolescencia, sino que se incorporen nuevos focos, nuevas formas de encarar la enseñanza y aprendizaje de dichos contenidos matemáticos escolares. En esta revisión, ha de quedar explícita el álgebra escolar mediante, por ejemplo, lo relacionado con los procesos de generalización. Por lo tanto, en ese momento estelar de cambios, los hallazgos y conclusiones de esta investigación podrían ser un aporte interesante que debieran ser tomados en cuenta.

MOMENTO I

Contextualización del problema

Construcción del Problema de Investigación

La generalización constituye uno de los procesos fundamentales del pensamiento algebraico (González, 2015); además es una habilidad natural e innata en los seres humanos debido a que desde la infancia los niños realizan clasificaciones y ordenaciones a fin de categorizar las cosas a las que tienen acceso en el entorno que les rodea. Desde el punto de vista evolutivo se hace necesaria la generalización pues es una manera de optimizar los procesos del pensamiento y producir aprendizajes orientados a la adaptación social.

Un ejemplo de lo expresado anteriormente ocurre con el aprendizaje de los números naturales, en este caso los padres y docentes propician la conexión entre estos números y los objetos mediante la expresión corporal con manos y gestos, junto al lenguaje natural, hasta conseguir la enunciación oral. Por lo tanto, estos números emergen en la escolaridad vinculados con algo concreto del ambiente. Con respecto a estas acciones, Vergel (2015) afirma que "el gesto, como un medio semiótico de objetivación, juega un papel importante en la expresión de las intencionalidades de los sujetos y en su proceso de conceptualización". (p. 10).

Es interesante observar que en el aprendizaje del número natural no se discrimina entre este objeto matemático y el símbolo que lo representa, es decir el niño aprende a identificar el número por su representación indo-arábiga. Con más precisión, en la enseñanza del número natural lo que se hace es mostrar una multiplicidad de unidades de figuras y dibujos que el niño debe identificar con el cardinal del conjunto correspondiente representado este último por el numeral simbólico. De esta forma se crea un enlace entre *cantidad de cosas* y el numeral correspondiente, es decir, una relación entre objeto y símbolo. Más adelante, luego de un proceso de discriminación y clasificación, los niños logran su independencia de las representaciones gráficas, y, son capaces de enunciar los números sin necesidad de este apoyo, de esta forma ya están preparados para la otra fase de mayor complejidad como es la adición de naturales. En ese tránsito ocurre un proceso que Radford (2013) llama *abducción*, del cual se darán detalles más adelante.

Desde la disciplina matemática el proceso de generalización resulta tan importante que puede afirmarse que junto a la abstracción constituye la verdadera esencia del pensamiento matemático, lo cual costó muchos siglos de trabajo de muchas civilizaciones e individualidades hasta que se impusieron como objetivos en sí mismos a mediados del siglo XIX.

También, se ha señalado que la matemática gira en función de las generalizaciones y el reconocimiento de patrones. De la observación de regularidades ambientales, del entorno y todo lo que ocurre en él, el espacio, y el tiempo el hombre en su quehacer matemático reconoció patrones generalizando. Diversas ramas de la matemática surgieron a partir del estudio de patrones. En el caso de la geometría se dedica al análisis de patrones de forma; la probabilidad se encarga de los patrones del al azar; el cálculo trata sobre patrones de movimiento; y la lógica los patrones de razonamiento. Por lo tanto, la generalización puede concebirse como la razón de ser, la esencia fundamental de la matemática, y en consecuencia no es difícil aceptar que este proceso es una manera importante de avanzar disciplinariamente. Todo lo cual tiene profundas implicaciones desde el punto de vista epistemológico y por ende también con todo lo que atañe a la enseñanza de la matemática.

Para Devlin (2000) “la matemática es la ciencia de los patrones” (p. 7), mientras que Mason, Graham, Pim y Gowar (2014), afirman que la generalización “es la vida de las matemáticas, y el álgebra es el lenguaje con el cual se expresa esa generalidad” (p. 15).

Por lo tanto, en el ámbito de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática la generalización y el reconocimiento de patrones adquieren un papel estelar. En este sentido, González y González (2013) plantean que “el reconocimiento de patrones y regularidades es una de las vías posibles para introducir el estudio del Álgebra Escolar y coadyuvar al desarrollo del pensamiento/razonamiento/raciocinio matemático de los estudiantes” (p. 15).

Además, para Mason *et al* (2014), reconocer patrones “es una actividad más fundamental y de un rango más amplio. Se puede argumentar que todo aprendizaje humano envuelve la destilación de experiencias individuales para convertirlas en principios generales más amplios”. (p. 8), por ende, este estudio considerará que generalizar no es sólo importante en matemática, también beneficia el razonamiento lógico exportado a otras áreas del saber y cotidianidad.

Sobre el pensamiento algebraico, Socas (1999) afirma que “se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de los conceptos algebraicos en el sistema educativo y en el medio social”, (p. 261). Mientras que, Borralho y Barboza (2009), señalan que “el pensamiento algebraico consiste en utilizar instrumentos simbólicos para representar el problema en general, aplicar procedimientos formales para obtener un resultado y poder interpretar ese resultado” (p. 61). De otro modo, González (2017) formula una definición más amplia:

> El Pensamiento Algebraico es un tipo de pensamiento matemático el cual se caracteriza por la capacidad para revertir operaciones, deducir lo general en lo particular (e inversamente), reconocer patrones, hacer una buena interpretación del signo de igualdad, saber modelizar matemáticamente y comprender el uso de las letras (p 22).

Según este autor, “La generalización es el proceso de abstracción mediante el cual, a partir de la detección de regularidades en una serie de eventos, se construye una categoría que los contenga a todos.” (p. 26). Por su parte, Radford (2006) la define como la capacidad de captar una característica común en una secuencia de elementos, característica a la que él llama género.

En el contexto del pensamiento algebraico, González y González (2013) consideran que la generalización es uno de sus indicadores básicos, y por ende “constituye una competencia matemática fundamental” (p. 16). En los planteamientos anteriores se posiciona a la *generalización* como un *proceso*, como una *habilidad* y como una *capacidad*, sobre la base de la experiencia del autor aquí se entenderá como una *capacidad*, ya que, se cree que el *proceso* tiene más que ver con la *habilidad* del reconocimiento de patrones y regularidades.

Sobre el pensamiento algebraico, Borralho y Barboza (2009), definen que "el pensamiento algebraico consiste en utilizar instrumentos simbólicos para representar el problema en general, aplicar procedimientos formales para obtener un resultado y poder interpretar ese resultado" (p. 61).

Además, Radford (2006), con base en sus diversos estudios de su autoría sobre reconocimiento de patrones y generalización, ha propuesto diferentes tipos de pensamiento algebraico según los medios de semióticos de objetivación: pensamiento algebraico factual, pensamiento algebraico contextual y pensamiento algebraico simbólico, en los que, de acuerdo con Vergel (2015) en cada uno de ellos deben manifestarse tres rasgos, "la indeterminancia, la analiticidad y la expresión semiótica" (p. 24).

Entonces, se ha destacado que la capacidad de generalizar constituye una actividad esencial en el desarrollo del pensamiento algebraico en el contexto escolar, se comprende entonces por qué a lo largo de la última década organizaciones y comunidades académicas han abordado temas referidos a la enseñanza del álgebra considerándola significativa para el desarrollo del hombre. En este sentido, el National Council of Teachers of Mathematics (2000), Consejo Nacional de Profesores de los Estados Unidos[1], manifestó que "el trabajo en muchas áreas se apoya en los métodos e ideas del álgebra. Por ejemplo, las redes de distribución y comunicación, las leyes de la física, los modelos de población y los resultados estadísticos pueden expresarse en lenguaje simbólico". (p. 39), por lo cual exhorta su enseñanza del área a través de los currículos.

También el Congreso Internacional de Educación Matemática 14 (ICME 14, por sus siglas en inglés), que se realizó en Shanghai, China en el año 2020, dispuso entre los Grupos de Estudio de Temas (TSG) la *Enseñanza y aprendizaje de álgebra a nivel secundario*, atendiendo en particular "Probar y justificar: su papel en el aprendizaje del álgebra; formas de caracterizar y comprender sus características y procesos (por ejemplo, al expresar generalidad); y socio matemáticas normas y contratos didácticos asociados a generalizar, probar y justificar" (p. 1). Asimismo, Mason, Graham, Pim y Gowar (2014), reconocen que:

> Expresar generalidad es una Raíz del álgebra ya que no es algo que usted hace unas pocas veces y luego lo olvida. Este es un aspecto central de la

[1] Más conocido por sus siglas en inglés como NCTM

actividad matemática a todo nivel, y a la cual se puede retornar una y otra vez, cualquiera que sea el tema particular de discusión (p. 29).

Suscribiendo lo anterior, este trabajo considera que las experiencias cognitivas en un contexto de tareas de reconocimiento de patrones, en el transito que va desde lo particular a lo general y viceversa, beneficia la enseñanza del álgebra escolar, simultáneamente, reconoce a la generalización como capacidad que permite el aprendizaje de los tópicos matemáticos del currículo en todos los niveles educativos, y más tarde, para el desarrollo de la vida cotidiana.

A pesar del énfasis que ha tenido el tema descrito en las páginas anteriores en Venezuela no se la ha dado la relevancia que merece. De esta afirmación da cuenta, por ejemplo, una revisión de los reportes de investigación del Congreso Venezolano de Educación Matemática (COVEM), en sus últimas cuatro ediciones, específicamente la VI, VII, VIII y IX, las cuales abarcan un tiempo de nueve años cuyo intervalo es desde 2007 al 2016. Con lo cual, se hace evidente la escasa atención que recibe el asunto investigativo que hemos planteado tal como también puede verse en el siguiente cuadro:

Cuadro 1
Últimas investigaciones reportadas en el COVEM

Año	**Título**	**Título. Institución**	**Nivel Educativo**
2007	Mauro Rivas y Douglas Rivas	Revisión crítica de un modelo para analizar los procesos de pensamiento algebraico. ULA	Superior
2010	José Puerto	El uso del CABRI en la generalización de situaciones numéricas “del pensamiento numérico al pensamiento algebraico”. Institución Educativa Antonio Lenis, Sincelejo – Sucre. Colombia.	Media general

Se observa que, en lo que respecta al COVEM, existe sólo una investigación, al menos reportada, a nivel nacional en los últimos 13 años relacionada con el pensamiento algebraico y/o generalización de patrones, considerando además que en 2019 no se realizó tan importante evento para la comunidad de educadores matemáticos del país.

Por otra parte, desde el año 2016 el estado venezolano a través del Ministerio del Poder Popular para la Educación (MPPE), ha implementado mecanismos dirigidos a la transformación del currículo matemático en todos los niveles y modalidades de la educación, fundamentándose en el Informe Integrado de la Consulta por la Calidad Educativa realizado en el año 2015, pues según ese documento "Varios sectores, entre ellos docentes y familias, apuntan que el proceso educativo sigue todavía muy centrado en asignaturas y contenidos teóricos y el aprendizaje se hace desde la fragmentación del saber" (MPPE, p. 31). Particularmente, en el proceso de transformación curricular en Educación Media el MPPE (2016) sostiene que:

> Debe presentarse a los y las estudiantes relacionando cada contenido con los contextos más inmediatos y pertinentes a la realidad, proporcionando múltiples ejemplos en los que puedan reconocer las aplicaciones de las matemáticas, su utilidad en la cotidianidad, y a su vez comprender como esta área de conocimiento puede ser una poderosísima herramienta para intervenir y cambiar la realidad que les adversa (p.140).

En consecuencia, el currículo ha recibido modificaciones de fondo y forma, con ausencia significativa sobre el aprendizaje del álgebra escolar. El currículo actual está lejos de focalizar la atención en tareas que conduzcan al proceso de generalización cuya importancia ya ha sido señalada por diversos investigadores e instituciones mencionadas. Por ende, se puede afirmar que, en el currículo actual de la educación media, la generalización de patrones está ausente tanto implícita como explícitamente.

En particular, en el contexto de la U.E.N. "Daniel Mendoza", institución de dependencia pública en la cual el autor labora como docente de matemática, se ha evidenciado que durante el transcurso de unos cinco años escolares hay preponderancia de actividades culturales (fuera del aula) con mucho peso en relación con las correspondientes académicas. Este proceder ha impactado negativamente el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el aula. Se ha constatado la dificultad que tienen los estudiantes de reconocer y generalizar patrones cuando se les da una sucesión de elementos, se piensa que este aspecto está relacionado con un deficiente desarrollo del pensamiento algebraico y poco dominio de habilidades desde lo aritmético hacia lo algebraico.

Motivado por el desarrollo de este estudio, el autor en su práctica de enseñanza, incorporó actividades de reconocimiento de patrones en la planificación del área (1er año) durante los años escolares 2019-2020 y 2020-2021. En éstas, solamente un estudiante fue capaz de detectar patrones de manera eficiente con un razonamiento y sustento válido. Otros dos estudiantes, respondieron acerca de los siguientes términos de una secuencia con sustentos extraordinarios, fuera de los que normalmente se observó en el resto de los participantes.

La debilidad que más se resaltó es la imposibilidad de interpretar los enunciados de los problemas, los estudiantes no captan en su mente el mensaje que expresa el lenguaje natural escrito. Esto representó un obstáculo potencial en el desarrollo de actividades. Sin embargo, haciendo esfuerzos adicionales y con el uso de metáforas, algunos estudiantes lograron entender el propósito y se dispusieron a realizar la actividad, aunque sin lograr captar y describir (de forma gestual o escrita) alguna regularidad en los problemas.

Como consecuencia del contexto anteriormente descrito emergieron las siguientes interrogantes:

1. ¿Cuáles son las características del pensamiento algebraico que despliegan los estudiantes cuando realizan tareas de reconocimiento de patrones?
2. ¿Qué dificultades tienen los alumnos durante el proceso de generalización?
3. ¿Cómo se proyectan los medios semióticos cuando los estudiantes generalizan?

Para dar respuesta a cada una de las interrogantes, se establecen los siguientes objetivos.

Propósito General

Construir un cuerpo teórico explicativo en torno a los procesos de generalización a partir del reconocimiento de patrones.

Propósitos específicos

1. Establecer una caracterización de los tipos de pensamiento algebraico que despliegan los estudiantes cuando realizan tareas de reconocimiento de patrones.
2. Develar las dificultades que tienen los alumnos durante el proceso de generalización.
3. Analizar los medios semióticos evidenciados cuando los estudiantes generalizan.

Justificación de la investigación

Entre la comunidad de investigadores en Educación Matemática son ampliamente conocidos reportes sobre dificultades de los estudiantes en relación con el álgebra escolar, así como también propuestas de trabajo en el aula que toman en cuenta los resultados de dichas investigaciones. Sin embargo, en Venezuela, esos resultados son desconocidos por la gran mayoría de docentes de los niveles de educación básica y, por tanto, no son referentes para su trabajo cotidiano. Si bien el docente encuentra manifestaciones de dichas dificultades, en muy pocos casos cuenta con referentes teóricos que le posibiliten comprensión de lo que acontece en el aula. No obstante, cuando profesores y estudiantes se encuentran en el aula, cada uno de ellos lleva incorporadas concepciones acerca de: (1) Qué es y cómo es aquello que se va a enseñar o aprender, (2) Cómo se es profesor o estudiante y cómo se debe ser, y, (3) Dónde es que se enseña o se aprende y cuándo es que se debe enseñar o aprender. Es lo que ocurre, por ejemplo, con el proceso de generalizar en matemática, el cual se supone implícito en ella.

Por lo anteriormente expuesto, las respuestas dadas a cada interrogante planteada en esta investigación constituyen una contribución al acervo científico de la Educación Matemática venezolana particularmente en lo que concierne al álgebra educativa y el pensamiento algebraico. En especial para los docentes que se debaten día a día entre las problemáticas sociales de sí mismos y de los estudiantes, las cuales actualmente han incidido sobre el desarrollo pleno de los fines educativos de la escolaridad. Frente a ese escenario, este trabajo brinda un referente teórico acerca de los aspectos que resultan más relevantes en el proceso de generalización algebraica para facilitar la actuación del docente en el despliegue de tópicos del área en el aula.

Supone un modelo para la identificación de los elementos semióticos, propuestos por Radford (2015), puestos en evidencia durante el reconocimiento de patrones, así como también las dificultades concernientes a la capacidad de generalización. En sí mismo resulta un estudio innovador en San Mateo, Municipio Bolívar, en particular en la U.E.N. Daniel Mendoza.

La investigación se desarrolló en el marco de la Línea de Investigación en Didáctica del Álgebra y Pensamiento Algebraico (LIDALGEBRA) del Núcleo de Investigación en Educación Matemática Dr. Emilio Medina (NIEM), la cual tiene entre sus objetivos (González, 2016): (a) caracterizar el pensamiento algebraico de los estudiantes en los diferentes niveles del sistema escolar venezolano, y (b) Estudiar la naturaleza de los fenómenos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de los objetos y procesos algebraicos.

En consecuencia, los hallazgos de esta investigación no solo contribuyen a fortalecer esta línea mediante el incremento de su acervo teórico, conceptual y metodológico, sino lo que es más importante y vinculado con el currículum: pone el acento en torno a algunos aspectos enriquecedores que deben tomarse en cuenta en el contexto de los cambios que de forma urgente deben insertarse en la matemática escolar venezolana que coadyuven en el logro de un nivel deseable de un pensamiento algebraico de nuestros adolescentes en el cual los procesos de generalización se hagan explícitos.

Como puede comprenderse, este estudio enfatiza la importancia del pensamiento algebraico como un asunto importante de la matemática escolar. En este punto se tiene claro que el simbolismo alfanumérico utilizado en el álgebra es actual y por ende la habilidad en el manejo correcto de este simbolismo por parte de los estudiantes es un asunto que debe atenderse en el aula. Sin embargo, no es posible afirmar que pensar algebraicamente esté relacionado exclusivamente con esa habilidad en la manipulación del simbolismo moderno, pues no se puede identificar únicamente al uso eficaz de letras en el álgebra como condición suficiente para pensar algebraicamente. El problema radica, entonces en una temática vinculada con la estructura curricular y de enseñanza que debe orientarse al desarrollo de este tipo de pensamiento.

En este interés por potenciar el desarrollo de pensamientoalgebraico en edad escolar se reconoce que una de las maneras para lograrlo es mediante la generalización de patrones, en la que el docente debe estar atento a las formasde pensamiento que muestran los estudiantes en las prácticas educativas, las cuales deben ser muy bien planeadas para lograr que ellos alcancen a generalizar un patrón. Esta investigación contribuye no solo para identificar las acciones del educador matemático, sino, también para delinear el pensamiento que impacta en este proceso.

Por otra parte, en lo que respecta a la entrada del álgebra en la escolaridad la generalización es propuesta por Bednarz, Kieran y Lee (1996) como uno de los enfoques[2] mediante el cual es posible realizar dicha introducción.

Entre los beneficios que trae consigo el trabajo con patrones en la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra, pueden ser señalados los siguientes: La generalización de patrones constituye una heurística (modo de abordar) para la solución de algunos tipos de problemas matemáticos; el esfuerzo por identificar regularidades o patrones matemáticamente útiles, estimula la activación de procesos cognitivos de diversos niveles: básicos, medios y globales (Hidalgo y González, 2009), así como también de la metacognición (González,1998).

Steen (1998) en su interesante libro concibe las matemáticas como el lenguaje y ciencia de los patrones. En él afirma que "ver y revelar patrones ocultos es lo que mejor hacen los matemáticos" (p.7). Este interés por los patrones ha permitido que durante las dos últimas décadas del siglo XX se haya propuesto una nueva definición de la Matemática con la cual prácticamente la totalidad de los matemáticos está de acuerdo: **“***mathematics is the science of patterns*” (“la Matemática es la ciencia de los patrones”) (Devlin, 2003, p.3). A su vez, Warren y

[2] Los otros enfoques son: histórico, resolución de problemas, modelización y funcional; no deben verse como excluyentes, sino como formas complementarias, es decir en la práctica pueden emplearse de forma combinada.

Cooper (2008) sostienen que el poder de las matemáticas radica en las relaciones y transformaciones que dan lugar a patrones y generalizaciones.

Es tal la importancia que ha venido adquiriendo lo relacionado con el reconocimiento de patrones que autores como Da Ponte (2009) han propuesto una agenda para investigar sobre este aspecto en la formación inicial de profesores de matemáticas. De acuerdo con este autor, países como Inglaterra, Portugal (ME-DEB, 2001) y Brasil se han incorporado al desarrollo de trabajos de investigación y didácticos que involucran el tema de patrones y regularidades. También en Colombia se desarrollan cada vez más trabajos de este tipo empleando los aportes de Radford (2015).

Se reconoce que en Venezuela son pocos los trabajos que se dirigen a esta práctica, sin embargo, Andonegui (2009) la incluye como actividad que propicia el trabajo orientado hacia la generalización.

Finalmente, el tránsito de la educación primaria a la educación media es una etapa de muchos cambios significativos pues coincide con un ciclo de profundas transformaciones fisiológicas y psicológicas que ocurren en los estudiantes; curricularmente se corresponde también con el tránsito de la aritmética al álgebra en el que se enfatiza el uso de letras en matemática. Por ende, este pasaje ha sido un asunto de interés en la comunidad de investigadores en Educación Matemática pues se reconoce que dicho tránsito es uno de los grandes obstáculos con que se enfrentan los escolares.

MOMENTO II

Repertorio de coordenadas teóricas y conceptuales de referencia

Investigaciones relacionadas

Luego de un proceso de revisión documental, en esta sección se presentan algunos trabajos relacionados en cuanto a los aspectos conceptuales, teóricos, metodológicos y afines con el estudio realizado, del mismo modo, se desarrolla el repertorio de coordenadas conceptuales y teóricas.

Entre los trabajos revisados resalta la tesis doctoral de Castro (2013), cuyo objetivo principal fue exponer, analizar e interpretar la comprensión de los alumnos entre 13 y 14 años sobre las ideas de estructuras de números, patrones, relaciones numéricas, sucesiones y término general de las mismas cuando son enfrentadas haciendo uso de configuraciones puntuales. Teóricamente de sustentó en la psicología cognitiva, en particular la Teoría del Procesamiento de la Información.

A nivel metodológico tiene los siguientes elementos; fue de orientación mixta cuali-cuantitativa pues interceptó el paradigma hermenéutico interpretativo con el empírico analítico, equilibró "por una parte, el carácter subjetivo que se atribuye al paradigma interpretativo y, por otra, la simplificación de la compleja realidad escolar que se achaca al paradigma empírico" (p. 62). Además, en correspondencia con los paradigmas, se inclinó hacia la Investigación Acción con observación participante activa y se apoyó "en un diseño cuasiexperimental con el fin de completar la información obtenida en el proceso de Investigación-Acción, permitiéndonos conocer hasta qué grado un cambio de variable dependiente ha sido debida a los efectos del tratamiento" (p. 64). En consecuencia, los instrumentos fueron sometidos a juicio de expertos, prueba de validez y fiabilidad.

Durante el desarrollo del estudio, el grupo investigador comparó el comportamiento, actuaciones, dominio del tópico de estudio entre un grupo de sujetos a los cuales se les había instruido acerca del tema y otro a los cuales no, con el fin de desvelar el nivel de acción sobre el tema y acceso al objeto matemático entre ambos. En este sentido, después del análisis experimental y cualitativo de la data, los investigadores afirmaron que "admitimos que el trabajo de exploración de patrones mediante configuraciones puntuales no determina un mayor dominio de las sucesiones numéricas en alumnos que han seguido este modelo de enseñanza, frente a los que no lo han seguido" (p. 273).

Finalmente, el grupo investigador concluyó que los estudiantes de 7mo y 8vo nivel "integran el sistema de representación puntual para los números y lo utilizan adecuadamente" (p. 274), específicamente en 7mo "…conectan el patrón geométrico y su correspondiente patrón aritmético a través de las representaciones puntuales" mientras que en 8vo "trabajan sobre números que comparten patrón, iniciando de forma intuitiva el concepto de sucesión y trabajando sobre la noción de término general", sin embargo manifiestan errores persistentes sobre ese objeto "expresar el término general se identifica con expresar la posición del término general, por ello hay muchos alumnos que responden se les pide el término general de una sucesión" (p. 275), y "en definitiva , atestiguan que el procesamiento de información con una alta carga conceptual de naturaleza muy abstracta no se verifica en este nivel escolar" (p. 275).

La investigación anterior, refuerza esta investigación con definiciones contempladas en el marco teórico, exhibe con agudeza y minuciosidad los procesos de evaluación a los cuales fueron sometidos los instrumentos de recolección de datos y aún más importante, conforma una pauta a seguir en la elaboración de los instrumentos a aplicar relacionados a las configuraciones puntuales partiendo de "… podemos interpretar como que las configuraciones puntuales constituyen un recurso informal o innato. El alumno es capaz de ponerla en curso sin necesidad de una enseñanza previa, cuando se le proponen actividades adecuadas" (p. 276). Además, las conclusiones expuestas, fortalecen la problemática aquí planteada.

Otra investigación considerada en este estudio es la que realizó Vergel (2014) cuyo propósito fue "identificar y estudiar formas de pensamiento algebraico temprano que emergen en alumnos de cuarto y quinto grado de Educación Básica Primaria como resultado de su participación en la actividad matemática, específicamente en torno a tareas de generalización de patrones" (p. 2). Se fundamenta en la Teoría de objetivación, principalmente de acuerdo a la perspectiva;

> La teoría de la objetivación parte de un reposicionamiento del individuo visto como un sujeto que vive, piensa, y actúa en el marco de su cultura y de la premisa que la base de la cognición se encuentra en la praxis social, entendida esta praxis no como una práctica contemplativa, sino como una actividad humana sensitiva y concreta (Radford, 2010, p. 56).

Metodológicamente, el trabajo se desarrolló con el enfoque de investigación cualitativa, según el autor "este enfoque construye una rica descripción del fenómeno o problema didáctico bajo estudio, en este caso, la emergencia de formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos jóvenes (9-10 años)" (p. 84) *Ob. Cit.* además se asumió "la tesis según la cual el pensamiento se puede desarrollar en la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) a través de la interacción verbal de maestros y alumnos y de los alumnos entre sí" (p. 85); esto, representa imperativamente una ruta para este trabajo en virtud de la similitud en parte del sustento teórico, ya que, igualmente se apoya de la *Teoría de la Objetivación* propuesta por Radford (2010).

Antes de ejecutar la fase de análisis de campo, el investigador realizó un diagnostico preliminar con la intención de afinar las interrogantes del estudio, conjuntamente captar información sobre el estado del tema e identificar posibles obstáculos tanto en el proceso como en los instrumentos a utilizar. Luego, aplicaron diferentes instrumentos a "un grupo de 15 estudiantes de 4° y 5° de primaria (9-10 años) de un colegio público de la ciudad de Bogotá (Colombia), durante 13 sesiones de 2 horas cada una aproximadamente, entre los meses de abril y septiembre de 2012." (p. 99). Posteriormente, en las tareas realizadas por los informantes se realizó un análisis fundamentándose en "una concepción multimodal del pensamiento humano (Radford, Demers, Guzmán & Cerulli, 2003; Radford, Edwards & Arzarello, 2009; Arzarello, 2006)" (p. 109), la cual sostiene "que es importante la inclusión del cuerpo en el acto de conocer, por lo que es clave en este análisis la consideración de los recursos cognitivos, físicos y perceptuales que los estudiantes utilizan cuando trabajan con ideas matemáticas" (p. 109). Desde esa perspectiva consideraron, lo que el autor llamó, el texto escrito, hablado y el gestual, “estas formas de expresión y producción de significados fueron estudiados como el producto final de procesos de interacción social. Estos procesos se encuentran permeados por el objeto de la actividad y por la cultura a la que pertenecen los estudiantes” (p. 110).

En consecuencia, el investigador afirmó que hubo un progreso en el pensamiento algebraico de los estudiantes, tanto el factual como el contextual, sobre eso sostiene que “podemos afirmar que las formas de pensamiento algebraico temprano Factual y Contextual emergen o aparecen como posibilidades que los estudiantes instancian en la actividad.” (p. 179), además la data analizada evidenció que fue en el desarrollo de la actividad que los informantes pudieron reconocer conscientemente dichas formas de pensamiento algebraico y evolucionar desde uno hacia el otro, en la dirección factual-contextual, sobre esa idea;

> Los alumnos tuvieron que movilizar otros medios semióticos de objetivación, en este caso recursos lingüísticos que permitieron instanciar otra forma o estrato de pensamiento algebraico como lo es el Contextual, es decir, una forma de pensamiento algebraico que está en continuidad con el Factual pero que va más allá, va más lejos. En este sentido, podemos afirmar que hay una evolución del pensamiento algebraico Factual hacia el Contextual (p. 180).

Finalmente, sobre las tareas de generalización de secuencias numéricas, los estudiantes en primer lugar recurren a expresiones aritméticas, en su intento de generalizar el patrón detectado, pero posteriormente lograban alcanzar una generalización factual.

Conceptos de referencia

Reconocimiento de Patrones

No es común en la enseñanza de la Matemática el empleo de los patrones para motivar, explorar y propiciar la comprensión del álgebra escolar, no obstante, la afirmación de Zazkis y Liljedahl (2002) de que “los patrones son el corazón y el alma de las matemáticas” (p. 379); frase análoga a la de Halmos (1980), quien asigna este papel a los problemas. Plantean que “a diferencia de la resolución de ecuaciones o la manipulación de los números enteros, la exploración de los patrones no siempre se destaca por sí misma como un tema o una actividad curricular” (Zazkis y Liljedahl, 2002, p. 1).

En este contexto cabe destacar el concepto de razonamiento matemático, Giménez (1997) lo considera como el “conjunto de enunciaciones y procesos asociados que se llevan a cabo para fundamentar una idea en función de unos datos o premisas y unas reglas de inferencia” (p. 70). En él convergen cuatro procesos: reconocimiento, inducción, iteración y recursión.

El reconocimiento es utilizado como sinónimo de descubrimiento y explicitación de patrones a partir de una situación dada. Esto supone otros subprocesos tales como: (a) Observar regularidades; (b) identificar descriptivamente situaciones; y, (c) interpretar situaciones similares, entre otros. A través de la inducción se busca la formulación de leyes generales a partir de la observación de casos particulares. Con la iteración se repite un cierto razonamiento o procedimiento. Finalmente, la recursión se ejecuta cuando se hace un procedimiento aparentemente circular para poner en práctica un proceso iterativo.

Con respecto al término patrón cabe destacar que no es propio del lenguaje matemático, ni apunta hacia un área específica dentro de su amplio universo ya que el mismo corresponde a una noción “meta-matemática” (Da Ponte, 2009); por ello es posible, según este autor, hablar de patrones en cualquier rama de la Matemática con configuraciones y propiedades propias en cada caso, por lo que no resulta sencillo identificar aspectos que sean comunes.

Desde el punto de vista matemático Andonegui (2009) define patrón como:

> Secuencias de números o de gráficos cuyos elementos se obtienen a partir de cierta regla estable que se va aplicando a cada elemento de la secuencia para obtener el siguiente, de tal modo que cada elemento guarda cierta relación con la posición que ocupa (p. 30).

El término regularidad alude a la repetición de un fenómeno en diversas instancias que bien pueden ocurrir en un contexto informal como científico; es decir, dicha repetición puede estar asociada al tiempo, las experiencias de la vida cotidiana, entre otros; también puede emparentarse con los términos compás o ritmo. En el caso de las ciencias, y particularmente las matemáticas, estudiar las regularidades constituye un eje transversal.

Por su parte, Da Ponte (2009) observa la complementariedad entre los términos regularidad y patrón, en ese sentido afirma:

> El término patrón apunta a la unidad de base que se repite, de forma exactamente igual o de acuerdo con alguna ley de transformación, mientras que regularidad remite a la relación que existe entre los diversos objetos, aquello que es común a todos ellos o que de algún modo los une. Patrones y regularidades son, por tanto, dos puntos de vista complementarios (p. 170).

A su vez, Warren y Cooper (2008) sostienen que el poder de las matemáticas radica en las relaciones y transformaciones que dan lugar a patrones y generalizaciones.

Sin embargo, el estudio de patrones y regularidades no debe plantearse como un objetivo en sí mismo, pues como lo advierte Da Ponte (2009) esto puede dar origen a diversos malos entendidos e incomprensiones. El ejemplo anterior sirve para ilustrar como el patrón funciona como instrumento para estudiar el número racional.

Además, no todas las generalizaciones de patrones son algebraicas. Por esta razón, en el uso de patrones como recurso didáctico, se debe tener mucho cuidado en no confundir generalizaciones algebraicas con otras formas de generalización (Radford, 2010).

En el trabajo con patrones y regularidades se debe tener claro lo relacionado con lo representacional, en ese sentido, se puede hablar de representaciones pictóricas, geométricas, numéricas, tabulares, algebraicas y verbales. Además, también son importantes siguiendo a Britt e Irwin (2008), reconocer la articulación de diferentes sistemas semióticos, palabras, gestos, imágenes, gráficos y símbolos.

Según Radford (1997), citado por Vergel (2014), *generalizar* significa observar algo que va más allá de lo que realmente se ve. Ontogenéticamente hablando, este acto de percibir se desarrolla a través de un proceso durante el cual el objeto por ser visto emerge progresivamente.

Generalización de patrones

Generalizar un patrón reconocido en una serie de elementos del contexto real es una habilidad con la cual, desde niño, el hombre construye su repertorio de conceptos, conocimientos e identificaciones. En matemática, es una actividad que constituye las bases para el desarrollo del pensamiento algebraico, y en especial, el principio de la noción de demostración. Mason (1999) expresa que la “detección de patrones y la expresión de generalidad están en el centro de las matemáticas; sin duda, el estudio de las matemáticas puede ayudar a desarrollar y a refinar las capacidades naturales para ello en la mayoría de los estudiantes” (p. 232).

En álgebra, la generalización es la representación simbólica de algún comportamiento común en una colección de datos, elementos u objetos matemáticos. Para Mason (1999), “La capacidad de generalizar está en relación de dependencia y de conexión con la capacidad de agrupar y de ordenar, es decir, de enfatizar o de pasar por alto, de enfocar la atención de diferentes maneras” (p. 235). En ese sentido sostiene que “Expresar generalidad es una capacidad con la que todo niño llega a la escuela, pero que por alguna razón no siempre se conoce o se usa. Es una capacidad que necesita refinarse y agudizarse, extenderse y desarrollarse” (p. 237). En esta investigación cuando se haga mención a “generalización” deberá entenderse por generalización algebraica, de la cual en la sección anterior se destacó la importancia durante el desarrollo del “hombre” a lo largo de la vida, igualmente lo expresa el autor citado:

> Detectar patrones y expresar generalidad no es solamente buena matemática, sino que contiene las semillas de la demostración, pues la naturaleza inductiva de los patrones es la base para una demostración inductiva de las relaciones. En otras palabras, se expone a los estudiantes a la parte central de cualquier demostración formalizada que ellos pudieran encontrar posteriormente. De modo que a medida que ellos expresan generalidad están comprometidos con la semántica, con el significado matemático (p. 243).

Por lo tanto, podemos considerar como patrón al comportamiento común detectado en alguna reunión de objetos matemáticos, mientras que el proceso a través del cual se descubre la generalización es llamado por Castro (2013), inducción. Él sostiene que “la inducción es un modo de razonar que conduce al descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de casos particulares y sus combinaciones” (p. 27).

Por su parte, Radford (2006) propone el concepto de generalización como “la capacidad de captar una característica común notada en algunos elementos de una secuencia S, teniendo en cuenta que esta coincidencia se aplica a todos los términos de S y poder usar para proporcionar una expresión directa de cualquier término de S” (p. 5). Bajo esta noción, la habilidad de generalizar es entendida sólo como “capacidad de captar” como en los inicios del álgebra, no se alude al simbolismo algebraico escrito, al mismo tiempo el autor citado extiende el concepto hacia la idea de intuición dado que apunta hacía elementos más allá de lo que a simple vista puede percibirse:

> La generalización algebraica se basa en el aviso de una comunidad local que luego se generaliza a todos los términos de la secuencia y que sirve como garantía para construir expresiones de elementos de la secuencia que permanecen más allá del campo perceptual. La generalización de la comunidad a todos los términos es la formación de lo que, en terminología aristotélica, se llama género (*Ob. Cit*., p. 5).

En particular, en este estudio sostenemos que, para lograr la generalización, los estudiantes en primer lugar deben discriminar *cosas* para luego agruparlas; percibir el patrón; y, después de procesos de comprobación e inducción, configurar la generalización posible. Además, Vergel (2014) expresa que la “generalización de patrones es considerada como una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela” (p. 194), por tal motivo este estudio toma como principio que el pensamiento algebraico es “una forma particular de reflexionar matemáticamente. Desde nuestras consideraciones filosóficas podemos aseverar que el pensamiento algebraico, en tanto saber, es un conjunto de procesos corporizados de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente” (*Ob. Cit*.p. 77).

Asimismo, el autor citado expone lo que según Radford (2010), denomina Generalización Aritmética, Generalización Factual y Generalización Contextual. La primera se presenta cuando un estudiante, operando aritméticamente, encuentra una comunidad local que funciona para ciertos términos de una secuencia más sin embargo esa información no permite calcular cualquier término de la secuencia. La segunda, “es aquella en la cual hay evidencia de una generalización de acciones en la forma de un esquema operacional, esquema que permanece ligado al nivel concreto de uso de los símbolos numéricos, a términos deícticos, gestos y actividad perceptual” (p. 82), es decir, es el mismo sistema y/o orden de operaciones. Y por último, la generalización contextual, la cual representa un nivel más avanzado en el que “se generalizan no sólo las acciones numéricas sino también los objetos de las acciones” (p. 82), pero, sin alcanzar la generalización algebraica simbólica.

Generalización algebraica

Para Mason (1996), generalizar es un proceso fundamental en el desarrollo del pensamiento matemático y el análisis de situaciones, ya que promueve la abstracción matemática; esta idea es desarrollada desde la construcción y reconocimiento de patrones o regularidades, articulando las generalizaciones de situaciones cotidianas. En este sentido, Mason *et al*. (2014) han establecido un conjunto de secuencias por las que transita el estudiante al momento de generalizar, está conformada por cuatro etapas con sus correspondientes criterios descriptivos. A continuación, se enuncian y se describen:

1. Percibir un patrón: En esta etapa es indispensable que el uso de técnicas matemáticas para generar valores vistos en la secuencia; el estudiante en este caso identifica y comunica relaciones entre los valores conocidos, percibiendo lo que es común a partir de ejemplos particulares.

2. Expresar el patrón: Es de vital importancia decir el patrón encontrado para que posteriormente se pueda hacer una reflexión; el proceso de comunicación en esta etapa influye de manera directa, ya que las percepciones sobre las relaciones entre cantidades son modificables gracias al trabajo conjunto.

3. Registrar un patrón: Esta actividad va más allá de la percepción visual y el reconocimiento de relaciones debido a que el estudiante describe de manera escrita las variables claves de la situación; la capacidad de usar esas propiedades comunes para deducir una expresión directa o indirecta es lo fundamental en este proceso, es posible que se utilicen símbolos, gráficos o expresiones no convencionales para representar la generalidad del patrón

4. Probar la validez de la fórmula: En el proceso anterior, la fórmula incide sobre los

objetos de la secuencia, pero en la etapa final dicha expresión debe ser correcta en donde la noción de *general* como idea cómo desde un ejemplo particular se puede evidenciar lo universal; para que se pueda observar la generalidad es necesario que se reestructuren las características comunes y se lleven a cada uno de los términos (presentes y ausentes) de la secuencia, haciendo notar que, sin importar el cambio, lo hacen de manera regular y conjunta.

A continuación, en la tabla 1, se hace un resumen de las etapas anteriores.

Cuadro 2
Etapas en la generalización de patrones según Mason et al

Categorías	Criterio
VER	Se puede observar que el estudiante vivió la experiencia, identifica y reconoce las propiedades y atributos de un patrón.
DECIR	Se esfuerza por explicar un patrón dado de manera verbal, mental o escrita; con sus propias palabras articula y expresa lo que ha reconocido, de la manera más clara posible para hacerse entender.
REGISTRAR	El estudiante presenta suficiente información con el registro escrito sobre el patrón escogido para expresar la generalidad en palabras de aquello que ha logrado evidenciar.
PROBAR	El estudiante realiza cálculos para probar el patrón, chequeando la consistencia

Pensamiento algebraico factual, contextual y simbólico

Es pertinente precisar cuál es la idea de pensamiento que se adopta en el estudio. De manera más precisa, Radford (2006) señala que “el pensamiento es sobre todo una forma de reflexión activa sobre el mundo, mediatizada por artefactos, el cuerpo, a través de la percepción, gestos, movimientos, el lenguaje, los signos, etc.” (p. 213). Por su parte, para Vergel y Rojas (2018), “el pensamiento es, pues, un proceso de actividad humana, una praxis reflexionada en tanto actividad no contemplativa sino sensual y concreta, lo cual sugiere un proceso en constante movimiento y cambio”. (p. 45). Además, los autores citados subscriben “la idea de Luis Radford, en su Teoría de la objetivación, según la cual el movimiento es una categoría ontológica fundamental.” (p. 46).

Ahora, sobre el pensamiento algebraico, es un tipo de pensamiento matemático que ha sido abordado por la comunidad de educación matemática, en especial los educadores afines al álgebra escolar. A finales de la década de la 80 surgieron dos preocupaciones, Vergel y Rojas (2018) expresan que:

> Por un lado, la preocupación se evidencia en la necesidad de analizar el proceso mediante el cual los estudiantes de educación primaria elaboran generalizaciones. Interesa aquí, para decirlo metafóricamente, la anatomía de la generalización. Por otro lado, está el llamado a posibilitar desde los primeros grados de la primaria el desarrollo del pensamiento algebraico (p. 47).

Para Radford (2010), el pensamiento algebraico se caracteriza por tres componentes, el *sentido de indeterminancia* (incógnitas, variables y parámetro) "como aquello opuesto a la determinancia numérica" (p. 39); la *analiticidad* como forma de trabajar los objetos indeterminados, es decir, el reconocimiento del carácter operatorio que admiten los objetos en el proceso de deducción; y por último la *expresión semiótica*, esto es, la manera específica de nombrar o referir los objetos. Además, a partir de un trabajo de reconocimiento de patrones en secuencias efectuado por Radford (2010) con estudiantes de 9no grado sugirió tres tipos de pensamiento algebraico estrechamente interconectados a las componentes descritas que "no debe entenderse de manera rígida de manera jerárquica tampoco. Por lo tanto, dependiendo del contexto y el problema en cuestión, un estudiante puede avanzar y retroceder a lo largo de esas formas de pensamiento" (p. 14).

Pensamiento algebraico factual: Vergel (2015) sostiene que "Los medios semióticos de objetivación movilizados son los gestos, los movimientos, el ritmo, la actividad perceptual y las palabras. En este estrato de pensamiento, la indeterminancia no alcanza el nivel de la enunciación, pues se expresa en acciones concretas" (p. 11). En esta clase, "la indeterminancia queda implícita, en tanto que el alumno señala con la mirada, con su índice, realiza movimientos con un lápiz, dice «aquí», señala dos figuras en una secuencia y dice «más dos»"(p. 11).

*Pensamiento algebraico contextual***:** aquí, Vergel y Rojas (2018) expresan que "los gestos y las palabras son sustituidos por otros medios semióticos de objetivación tales como frases «clave». En este estrato de pensamiento la indeterminancia es explícita, se vuelve objeto del discurso. La formulación algebraica es una descripción del término general" (p. 52). Por ejemplo:

> El estudiante dice «arriba quito uno» o «dos por la figura más uno», o «# de la figura más para la fila de arriba y # de la figura más dos para la de abajo. Sumar los dos para el total». Esto significa que los estudiantes en este estrato de pensamiento tienen que trabajar con formas reducidas de expresión, lo cual sugiere pensar en la idea de contracción semiótica, en tanto hay evolución de nodos semióticos (p. 52).

Pensamiento algebraico simbólico: Las frases claves son interpuestas por el lenguaje algebraico, por ejemplo, por expresiones del tipo n +(n +2). Aquí "hay un cambio drástico en la manera de designar los objetos del discurso (Radford, 2010; p. 8).

Interpretación de las letras

Un hecho que parece quedar claro es que la simbolización es un signo distintivo del Álgebra y que ésta es implementada, preponderantemente, a través de las letras, de hecho "el uso de las letras se encuentra fuertemente ligado al Álgebra elemental y a los razonamientos de tipo algebraico (González, 2015, p. 123), razón por la que es importante considerar las distintas interpretaciones que de ellas se hacen. Sin embargo, el hecho de utilizar signos como letras, no equivale a hacer álgebra, pues de ser así el álgebra sería una simple generalización de la aritmética, por el contrario, se debe dotar de significado a las expresiones que involucran dichos símbolos.

Una categorización ampliamente conocida sobre el uso de letras es la que ofrece Küchemann (1980), este autor realizó en 1976 una investigación que involucró 3000 alumnos británicos entre 13 y 15 años, en el marco del proyecto CSMS (*Concepts in Secondary Mathematics and Science)*. Analizó las interpretaciones que los estudiantes hacen de las expresiones literales (letras) que aparecen en las expresiones algebraicas y estableció seis categorías las cuales han servido de base para varias investigaciones con relación a la enseñanza del Álgebra elemental como lo demuestra el trabajo de Palarea (1998) entre muchos otros que la han validado.

Estas seis categorías son: (1) letra evaluada, (2) letra no considerada, (3) letra como objeto concreto, (4) letra como incógnita específica, (5) letra como un número generalizado y

(6) letra como variable. Se podría afirmar que de esta clasificación las tres primeras se constituyen en dificultades para el desarrollo del pensamiento algebraico del estudiante, mientras que las restantes son usos correctos de las letras en Álgebra. A continuación, se describirán cada una de tales categorías:

1. Letra evaluada: el estudiante asigna un valor numérico a la letra desde el principio como una manera de evitar el trabajo con algo que se desconoce y así eliminar la incertidumbre, para ello se vale de relaciones y conceptos como la simetría, lugar que ocupa en el alfabeto, reparto equivalente, etc. (Palarea, 1998). Un ejemplo se tiene cuando el estudiante tiene que operar con expresiones del tipo $a + b = 10$ y atribuye el valor 5 para las dos letras.

Este tipo de caso también es una muestra de los peligros que conlleva la transferencia de lo aritmético a lo algebraico, por ejemplo cuando en los primeros grados de escolaridad se colocan problemas como el siguiente "$[\quad] + 7 = 11$" donde el número que falta debe ser colocado dentro del cuadrado siendo éste un accesorio para colocar dentro de él el número 4. Otra variante de esta situación son los problemas del tipo "Si $a + 7 = 11$, cuánto vale a", el valor de la letra a es desconocido pero seguidamente es evaluable, se conmina entonces a el alumno para que asigne el valor 4 a la letra a, corriendo el riesgo de que los niños asimilen este tipo de problemas reflexionando sobre el significado de una letra como un valor numérico específico (Palarea, 1998). Se debe agregar que esto es didácticamente correcto porque se está trabajando en el nivel de pensamiento numérico pero en el nivel algebraico, como lo señala la precitada autora, esta misma situación es conceptualmente diferente si se plantea así "Si $a + 7 = 11$, entonces $a =$?".

Otro tipo de situaciones que puede reforzar esta noción de letra evaluada son los ejercicios del tipo "Calcula el valor de la expresión $5b - 2$ cuando $b = 0, b = 1, b = 2$" con los cuales la idea de letra fija, inicialmente desconocida, es cambiada por la idea de que ella puede tomar el valor de varios números.

2. Letra no considerada: la letra es ignorada o, en el mejor de los casos, se reconoce su existencia sin darle significado. Un ejemplo se consigue en ejercicios del tipo "añade 5 a $7m$" y el estudiante señala $12m$ con lo cual asume que la letra está ahí pero se puede prescindir de

ella. De este caso hay una variante que puede pasar desapercibida por el docente en ejercicios del tipo “multiplica por 5 a $7m$” en el cual se obtiene $35m$.

3. Letra considerada como objeto concreto: la letra se contempla como un signo taquigráfico para un objeto concreto o el objeto concreto en sí mismo, un ejemplo se consigue en expresiones como $8p + 5m$ en la que el estudiante puede estar “leyendo” las letras como iniciales de frutas y creer que se trata de 8 peras más 5 manzanas o incluso ver las letras como los objetos mismos en cuyo caso se tienen 8 “pes” más 5 “emes”. Como señala Palarea (1998) esta reducción del significado abstracto de las letras a objetos generalmente ocurre inadecuadamente en problemas en los que es necesario distinguir entre los objetos concretos y las cantidades específicas de esos objetos.

Desde el punto de vista de la Geometría ocurre con frecuencia tomar las letras como simples nombres para los lados de un polígono descuidando el sentido de la magnitud del lado, por ejemplo, al escribir, para el área de un cuadrado, $A = a.b$ debería quedar claro que, en este caso, a y b no son los segmentos, sino las magnitudes de dichos segmentos. Igualmente ocurre con conceptos como la altura, el radio de una circunferencia, entre otros.

4. Letra considerada como una incógnita específica: se observa la letra como un número específico que, a pesar de ser desconocido, se puede operar con él directamente. Un ejemplo de tal categoría surge al responder correctamente problemas del tipo “Supongamos que los lápices cuestan Bs. 3 y los sacapuntas Bs. 4. Si gasté Bs. 25 entre *L* lápices y *S* sacapuntas, ¿qué relación se puede establecer entre *L* y *S*?

5. Letra considerada como un número generalizado: la letra es vista como representante o, al menos llega a tomarse como tal, de distintos valores. Por ejemplo, en esta categoría se reconocen como infinitas las soluciones de $x < 5$ siempre que x sea un número real, mientras que la misma inecuación tiene solución finita si x es un número natural.

6. Letra considerada como una variable: la letra se contempla como un conjunto de valores no específicos con unas relaciones sistemáticas, se la considera como elemento de una relación entre dos conjuntos semejantes de valores. Esta categoría supone un alto nivel de abstracción pues en ésta están envueltas las últimas 2 categorías, esto es, se reconocen las letras como incógnitas específicas con uno o más valores pero además se distinguen las

posibles relaciones entre ellas. Alcanzar esta categoría es un asunto complejo en el tránsito de lo numérico a lo algebraico, en referencia a las dificultades que significa este aspecto para el alumno señala Palarea (1998) que los símbolos que hasta el momento ha usado el niño en Aritmética tales como los signos de operaciones, paréntesis y números "son de significación unívoca y está acostumbrado a poder interpretar, de manera única, cada símbolo que encuentra" (p. 66).

En el ejemplo anterior, para escribir la ecuación bastaba con reconocer las letras como incógnitas y con la siguiente interpretación se podían reconocer sus soluciones, pero el reconocimiento de L y S como variables exige el establecimiento de otras consideraciones como por ejemplo la idea de cambio o variación de tal manera que se puede dar respuesta a interrogantes como: ¿qué pasa si L crece?, y si L decrece.

Otro contexto muy importante que involucra esta categoría es en el establecimiento de una relación funcional a partir de una tabla de valores lo cual supone observar los cambios que se operan en una letra (variable) en virtud de los cambios que se operan en la otra.

Enfoque teórico

Teoría Estructural Funcional de las Representaciones Semióticas

Las representaciones son parte esencial del proceso de aprendizaje de las matemáticas pues conectan los objetos mentales con los objetos matemáticos (Rico, Castro y Romero, 2000). Se definen como "aquellas herramientas, signos o gráficos, mediante las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático. Mediante el trabajo con las representaciones las personas asignan significados a las estructuras matemáticas" (Rico, Castro y Romero, 2000, p. 1).

Las representaciones asociadas a los objetos matemáticos pueden organizarse en diferentes tipos de representación, de acuerdo con el énfasis en sus características y propiedades (Lupiáñez, 2016). En los patrones matemáticos se distinguen cuatro tipos de representación base: (1) *figural*, que usa únicamente recursos visuales, en general dibujos sin ningún tipo de notación simbólica (Merino, Cañadas y Molina, 2013); (2) *numérica*, que se sirve de números y operaciones expresadas mediante lenguaje matemático que suelen organizarse para realizar un cómputo; (3) *verbal*, que se distingue por el uso del lenguaje natural oral o escrito para exponer la información de forma cohesionada; y (4) *algebraica*, que se caracteriza por el uso del lenguaje algebraico para manifestar un enunciado o generalizar las operaciones aritméticas (Cañadas y Figueiras, 2011).

Ahora bien, también el lenguaje juega un papel importante en lo representacional tal como lo reporta González (2015) en el contexto del pensamiento algebraico. También, el hecho de que los procesos de conocimiento son mediados por el lenguaje fue señalado por Vygotsky (1979). En el campo matemático el lenguaje puede manifestarse de formas diversas, por medio de sistemas de escritura, como números, notaciones simbólicas, representaciones tridimensionales, gráficas, redes diagramas, esquemas, etc., también se incluyen los enunciados verbales, un segmento, un símbolo, una figura, una o una fórmula matemática; estos objetos Duval (2002) los denomina representaciones[3] semióticas y son medios de exteriorización de las representaciones metales para fines de comunicación[4], es decir, para hacerlos visibles o accesibles a otros.

Una pregunta importante en la *teoría estructural funcional* de Duval (2017) es ¿cuáles son las condiciones bajo las cuales un numeral o un dibujo, por ejemplo, funciona como una fidedigna representación del objeto matemático que pretende aludir?, a tal efecto establece que una representación funciona verdaderamente como representación cuando da acceso al objeto representado. En este sentido, señala:

> Es necesario que el objeto no sea confundido con sus representaciones y que se le reconozca en cada una de ellas. Es bajo esas dos condiciones que una

[3]Desde el punto de vista de las ciencias cognitivas, Tamayo (2006) define una representación "como cualquier noción, signo o conjunto de símbolos que significan algo del mundo exterior o del mundo interior. Podemos representar en nuestra mente algo que percibimos con nuestros sentidos, algo que vemos, olemos o sentimos, como también algo que nos imaginamos" (p. 39).

[4] No obstante, estos sistemas de signos no sólo tienen una función comunicativa, sino un papel instrumental que modifica al propio sujeto que los utiliza como mediadores (Godino, 2003). Esta apreciación resulta clave a la luz de la *Teoría de Objetivación* de Radford (2014) expuesta anteriormente.

> representación funciona verdaderamente como representación, es decir que ella proporciona el acceso al objeto representado (Duval, 2017, p.45).

También, se plantea dos preguntas las cuales considera que constituyen el núcleo del aprendizaje de las matemáticas: (a) ¿Cómo se aprende a cambiar de registro?; y (b) ¿cómo se aprende a no confundir un objeto con la representación que se propone? Según este autor, muchas de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se originan en el desconocimiento que tienen los profesores sobre los fenómenos relativos a estas cuestiones.

Su perspectiva constituye un referente teórico adecuado ya que permite analizar, por ejemplo, las representaciones que los alumnos y los docentes emplean para resolver un problema. Su postura señala que es esencial para la actividad matemática que se puedan movilizar varios signos en el curso de una misma acción, o bien que se tenga la habilidad para elegir un signo en lugar de otro. Los siguientes son dos principios de su teoría:

1. La actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de Representación.

2. Los estudiantes deberían ser capaces de reconocer el mismo objeto matemático de conocimiento en otros contextos de representación y usarlos.

Para Duval (2017) estos dos elementos son posibles, metodológicamente, mediante dos clases de transformaciones de las representaciones semióticas: *la conversión* y *el tratamiento*; y, metacognitivamente, empleando como estrategia el concepto de *coordinación interna*, la cual debe ser construida entre los diversos sistemas de representación que pueden ser elegidos y usados; ya que sin esta coordinación "dos representaciones diferentes significarían dos objetos diferentes, sin ninguna relación entre ambos, incluso si son dos "contextos de representación" diferentes del mismo objeto" (p. 145).

La *conversión* es la transformación de una representación en una representación de otro registro conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial. Se trata de una transformación externa a un registro. Un ejemplo es la transformación de la representación algebraica $y = x^2 + 9x + 14$ en su correspondiente representación gráfica (ver gráfico 1).

Por su parte, el *tratamiento* de una representación se entiende como su transformación en el mismo registro en el cual ha sido formulada. Se trata entonces de una transformación interna a un registro. Un ejemplo es la transformación de la expresión algebraica (continuando con el mismo ejemplo anterior) $y = x^2 + 9x + 14$ en su forma factorizada $y = (x + 2)(x + 7)$. El proceso de simplificación o amplificación de una fracción es otro ejemplo de tratamiento.

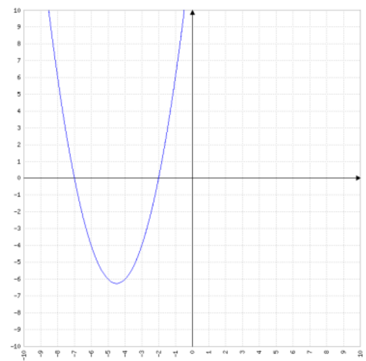


Gráfico 1. Gráfica de la función $y = x^2 + 9x + 14$

Una pregunta que luce interesante a la luz de este ejemplo es, ¿es cómo sería el tratamiento en esta representación? El cálculo de la fracción generatriz de un número racional es otro ejemplo de conversión.

Para Duval deben reconocerse ambas actividades cognitivas como diferentes e independientes, pero fundamentales en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Además, son procesos complejos ya que pasar de un registro de representación a otro, o representar un objeto de diferentes maneras en un mismo sistema de representación no es evidente y mucho menos sencillo para las personas.

En este contexto también se identifican dos actividades claves, una ligada a la producción de representaciones, y otra encadenada con la aprehensión conceptual de los objetos representados. En el primer caso la denomina *semiosis*, mientras que a la aprehensión conceptual del objeto la llama *noesis*. Además, postula que la actividad de producción de representaciones es la que permite la comprensión; es decir, la *semiosis* es la que determina las condiciones de posibilidad de la *noesis*.

En consecuencia, establece que la diversificación de representaciones semióticas de un mismo objeto aumenta la comprensión de los sujetos y recíprocamente, las representaciones externas (por naturaleza semióticas, ya que se producen mediante un sistema de signos y son accesibles a todos los sujetos capaces de interpretar este sistema de signos: enunciados, fórmulas, gráficas, etc.) son el medio por el cual las personas exteriorizan sus imágenes y representaciones mentales haciéndolas accesibles a otras personas. Así, asigna a las representaciones externas un doble papel: (a) actúan como un estímulo para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales y (b) expresan la red de significados personales de los sujetos que las usan.

Por otro lado, la *formación* de una representación identificable como una representación de un registro dado, la *conversión* y el *tratamiento* son tres actividades cognoscitivas fundamentales que son subsumidas por la semiosis. Además, para que un sistema semiótico sea un sistema de representación, según Duval (1995), debe permitir la realización de estas tres actividades cognitivas.

Los problemas a los que se enfrenta cualquier persona para realizar el *tratamiento* y la *conversión* de representaciones es una dificultad a la que Duval llama *fenómeno de no-congruencia,* el cual se da entre las representaciones de un mismo objeto que provienen de sistemas semióticos diferentes y el pasaje entre ellas no es inmediato. El problema general en toda actividad humana, y por consiguiente de todo aprendizaje, es el del uso adecuado de los registros semióticos articulados.

Esta teoría reconoce la existencia de, por lo menos, dos características típicas de la actividad cognitiva propia de los procedimientos matemáticos que marcan una diferencia con la actividad cognitiva para el aprendizaje de otras disciplinas, y que la constituyen en un campo de estudio privilegiado para el análisis de las actividades intelectuales humanas.

En primer lugar, los objetos matemáticos nunca son accesibles por la percepción, como podrían serlo la mayoría de objetos de otras disciplinas, esto es así dado que la designación de los objetos matemáticos pasa necesariamente por un registro semiótico de representación, sin autosuficiencia para el desarrollo de conocimiento, entre éstos se encuentra la lengua materna, sin ninguna preferencia por encima de los demás.

En segundo lugar, es posible (y en ocasiones necesario) recurrir a varios registros semióticos de representación, algunos de los cuales han sido desarrollados específicamente para efectuar tratamientos matemáticos.

Teoría de la Objetivación

Investigadores interesados en entender el problema del papel de la cultura, de la historia y de la sociedad en el aprendizaje, iniciaron un movimiento dentro de la Educación Matemática en la década de los 90 que pretendía hacer frente a la visión individualista que predominaba en la educación matemática de ese tiempo. Según Radford (2014) "Desde entonces ha habido un interés creciente en la educación matemática por entender la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en tanto que fenómenos sociales, culturales e históricos" (p. 133).

Surge entonces la Teoría de la Objetivación (T.O.) propuesta por Radford (2014), de la cual Vergel (2015) expresa que "parte de un reposicionamiento del individuo visto como un sujeto que vive, piensa y actúa en el marco de su cultura y de la premisa que la base de la cognición se encuentra en la praxis social," (p. 55), igualmente sostiene que "Dentro de esta perspectiva semiótica-cultural, el pensamiento es una actividad reflexiva y sensible mediada por signos, materializada en la corporeidad de las acciones, gestos y artefactos" (*ob. cit.*p. 56).

Los fundamentos de la teoría de la objetivación son dos, uno, de naturaleza ontológica y otro de naturaleza epistemológica. La ontológica señala que los objetos matemáticos no son independientes de la actividad realizada por los seres humanos, ni son el resultado del descubrimiento de sujetos interesados en conocer una realidad externa a ellos. Por el contrario, los objetos, son generados por los individuos en el transcurso de su desarrollo en el mundo real. Por su parte, en el fundamento epistemológico se caracteriza la manera en que los estudiantes conocen los objetos matemáticos.

La T.O. entiende al saber cómo un ente que objeta la conciencia, de allí, recibe su nombre. También, sustenta el saber cómo una cadena de acciones codificadas histórica y culturalmente que se cristalizan continuamente en la práctica social. Según Radford (s/f) "el saber no puede ser algo que se '*posee*' o se 'alcanza'. El saber es más bien algo diferente de nosotros, algo que encontramos, que nos objeta (es decir, se nos opone)" (p. 118).

La teoría de la objetivación se opone a la noción tradicional de *saber e ideas*, en la que ellas nacen en los individuos y forman parte de su esencia mental; por el contrario, en la T.O. las ideas, el saber y formas de pensamiento existen indiferentemente de los individuos, y son éstos quienes a medida que se desenvuelven en determinando contexto social se encuentran con estos elementos externos, y después del encuentro, arriba el reconocimiento, pero entre estos reside la objeción. Para Radford (s/f) "el aprendizaje es el encuentro con el saber y su transformación subjetiva en algo que aparece a la conciencia. Esta transformación es lo que llamo objetivación" (p. 120).

En este sentido, la conciencia bajo el enfoque de T.O., se concibe como una consecuencia de las interrelaciones sociales en el mundo externo y no como "como un constructo metafísico oculto en alguna parte en una presunta interioridad con la que todos habríamos nacido" (*Ob. Cit*. p. 122). Es decir, cada individuo edifica su conciencia conforme a su deliberación del mundo concreto, estableciendo caracteres de comprensión, decisión, sentimientos, disección, entre otros.

También en la T.O. el aprendizaje, "se teoriza como procesos de objetivación, es decir, aquellos procesos sociales de volverse, progresivamente y críticamente, consciente de una forma codificada de pensamiento y de acción" (*Ob. Cit,* p. 121). En consecuencia:

> Son procesos de objetivación aquellos actos de notar significativamente algo que se revela a la conciencia por medio de nuestra actividad corpórea, sensorial y artefactual. Es el notar o percibir algo (lo "en sí") que se revela en la intención emergente proyectada en los signos o en el movimiento kinestésico, en el curso de la actividad práctica concreta —la revelación del "en sí" que se convierte en "para sí" en el curso de su aparición y por lo tanto se transforma en conocimiento para nosotros (*Ob. Cit*., p. 121).

Con relación al planteamiento anterior se afirma que, el aprendizaje no se concibe como una imitación de actividades sociales. Tampoco es la incorporación del individuo, el estudiante, en una esfera que le resulta extraña y es exterior a él, tercero, tampoco es lo contrario. Aquí, el aprendizaje se entiende como "la fusión entre modos culturales de reflexionar y actuar y una conciencia que trata de percibirlos" (*Ob. Cit*., p. 122). Este punto resultó clave en el trabajo realizado, pues, se admite la fusión entre las formas culturales sociales y el objeto matemático escolar, como aprendizaje. Tomando como punto de partida que dentro de las *formas culturales* de los estudiantes se hallan cualidades, prácticas, creencias y formas de pensamiento sobre los fines de la escolaridad según su realidad contextual.

Por su parte, el objeto matemático, más allá del fin escolar inmediato (reconocer patrones, interpretar algebraicamente, escribir algebraicamente), es percibido como un ente capaz de fortificar el intelecto, la conciencia y sus formas de procesamiento, deliberación, develación y toma de decisiones de los jóvenes, a lo largo de su vida, lo que a fin de cuenta, es uno de los objetivos macro de la educación; el formar a los individuos para el fruto de una nación.

Pero, según Radford (2003), citado por Vergel (2015), "¿cuáles son los medios para mostrar el objeto? Se llaman *medios semióticos de objetivación*, esto es, objetos, artefactos, términos lingüísticos y en general signos que se utilizan para comunicar o hacer visible una intención y para llevar a cabo una acción" (p. 57). Entonces los *medios de objetivación* son:

> Todos los medios utilizados por los individuos que se encuentran en un proceso de producción de significados, para lograr una forma estable de conciencia, para hacer presente sus intenciones y organizar sus acciones y así adquirir las metas de sus acciones (*ob. cit* p. 57,*)*.

Dicho esto, se realizaron las actividades rigurosamente en cuanto al detalle de los medios utilizados por los informantes y algunos otros elementos externos que intervinieron. Además, "dado el rol mediador que tiene la actividad entre el saber y el conocimiento, la actividad es un componente clave de la investigación del proceso de objetivación" (*Ob. Cit.*p. 123).

En ese sentido, la actividad no debe minimizarse sólo a la aplicación de materiales e instrumentos porque esta práctica no revelaría la humanidad de las actuaciones mentales, conceptuales, emocionales de los estudiantes; por el contrario, esto representa una ejecución estéril. En la T.O. la actividad "es una forma de vida, algo orgánico y sistémico, un evento creado por una búsqueda común es decir una búsqueda con otros de la solución a un problema planteado, búsqueda que es al mismo tiempo cognitiva, emocional y ética" (*Ob. Cit.,* p. 125). En consecuencia, es un serio compromiso diseñar instrumentos y actividades que revelen el saber algebraico.

En conclusión, esta propuesta resultó pertinente para esta indagación ya que su perspectiva de investigación se orienta hacia la "manera en que las formas cultural e históricamente codificadas de pensamiento y acción se convierten en objetos de reconocimiento u objetos de conciencia" (*Ob. Cit* p. 123), entendiendo que estas *formas* de los estudiantes es aquel constructo intelectual que sintetiza su desenvolvimiento social tanto fuera como centro de medio escolar.

Zona de Desarrollo Próximo (ZDP)

Es un constructo psicológico propuesto por el psicólogo ruso, Lev Vygostky (1896-1934), frente a la crítica y como alternativa hacia la pruebas de cociente intelectual (CI), y que se fundamenta sobre la reflexión teórico-práctica de los estudiantes en los procesos de aprendizaje y desarrollo, su concepto formal se introduce en el contraste entre dos niveles de desarrollo. Según Venet y Correa (2014):

> El primero corresponde al desarrollo actual, alcanzado por el niño solo, y el segundo al desarrollo potencial, alcanzado por el niño bajo la dirección y la ayuda del adulto. La diferencia entre estos dos niveles de desarrollo es lo que Vygotsky llamó la *zona de desarrollo próximo* (p.8).

La ZDP, es la parte más conocida de la obra de Vygostky (1979), sobre todo en escenarios educativos, en la zona, el estudiante se encuentra en el nivel más *elevado* cuando manifiesta estar *en* el desarrollo potencial, pues cuando alcanza el desarrollo actual ya es capaz de realizar actividades por sí solo y habrá salido de la diferencia entre los dos niveles. Esta teoría refleja dos implicaciones educativas, la primera es que la instrucción efectiva debe ser prospectiva ya que sostiene que los maestros deben orientar su labor "no al desarrollo de ayer del niño, sino al de mañana" (Vygostky, 1979, p. 211); la segunda, es que lo que un estudiante consigue en cooperación, lo podrá realizar más tarde individualmente.

Según Ehuletche y Santángelo (2000) la ZDP es importante para "explicar los progresos en la construcción del conocimiento que las personas van realizando a partir de las interacciones con otras personas que poseen mayor experticia y de la ayuda adecuada de los profesores con relación a dichos progresos" (p. 36). Por lo cual constituyó una propuesta teórica pertinente para esta investigación.

Por su parte Del Río (1999), citada por Meza (s/f), expresa que "no podemos atribuir la dirección del desarrollo sólo a las fuerzas biológicas internas del organismo en evolución, ya que el papel de lo social y de los instrumentos culturales como la educación vendrían a ser determinantes" (p. 162). En este sentido la propuesta vygostkeana cobra especial preponderancia en el diseño de las experiencias de aprendizaje pues desde el concepto de ZDP las experiencias de aprendizaje no se diseñan exclusivamente sobre el nivel de desarrollo alcanzado por el estudiante, sino todo lo contrario, se diseñan en función de facilitar la adquisición de capacidades, destrezas, cualidades, y construcción de nuevos conceptos.

En este sentido, en forma aparente observamos que la práctica tradicional educativa es un ejemplo de la aplicación de esta teoría en las aulas, porque en los procesos de enseñanza y aprendizaje el énfasis está en transferir conocimientos, estrategias y destrezas al estudiante, desde el profesor (adulto) con el uso de herramientas y asistencia instruccional en los diferentes temas de estudio. Sin embargo, esas prácticas no simbolizan la esencia de la zona puesto que el atributo notable yace en la comparación entre el desarrollo real y el potencial que da cabida a la introducción de mensajes primordialmente teóricos en la mente de los estudiantes.

Para esclarecer la ruta que conduce hacia la aplicación de la zona en la práctica educativa, se plantean los siguientes rasgos:

1. Establecer un nivel de dificultad: debe asumirse el nivel de desarrollo potencial, debe ser un poco desafiante para el alumno, pero no demasiado difícil.

2. Ofrecer apoyo en el proceso: el docente coopera a través de instrucciones guiadas con el estudiante, de manera que éste experimente de forma clara la solución del problema. (Aquí las instrucciones estribarán en conceptos teóricos)

3. Valorar la ejecución independiente: el mejor resultado de la zona de desarrollo próximo será cuando el estudiante realice la actividad independientemente.

Además, el autor perfiló tres elementos importantes de la Teoría susceptibles a considerar para la aplicación de la ZDP: (a) *Análisis por Unidades*; es un error entender el concepto de la zona como la enseñanza de destrezas y subdestrezas discretas y divisibles, lo idóneo es considerar los temas de estudio como unidades, relacionando y contrastando cada *suceso* del proceso con conceptos y propiedades del tema en si u otros; (b) *Mediación*, Vygostky (1979) insiste que en la instrucción formal es necesario valorar el ambiente de las interacciones entre el adulto y el niño, en este caso particular, el profesor y el estudiante, el sistema de colaboración entre estos representa el componente central del trascurso escolar y durante ese escenario interactivo el conocimiento es transferido al alumno en un medio social organizado, la zona, no es únicamente un rasgo del estudiante o de la enseñanza, se trata más bien del desarrollo cooperativo inscrito en un entorno social atractivo. Y, por último, (c) el *Cambio*; se refiere a la evaluación del proceso psicológico y la dinámica del desarrollo cuando el alumno ya es capaz de realizar una actividad independientemente hoy, que solo podía realizar con ayuda ayer.

Hoy en día, no existe algún manual que nos pilotee en la aplicación de la ZDP, pues no se cuenta con el "conocimiento completo y detallado de los procesos que intervienen en la creación de la ZDP y en el avance conjunto a través de ellas en situaciones de interacción docente/grupo de estudiantes en el aula" (*Ob. Cit.* p. 164), Sin embargo es posible identificar ciertos rasgos notables para la planificación del ejercicio docente bajo esta perspectiva, aunque según Onrubia (1999), citado con Meza (s/f):

> No se trata de que cada uno de los mismos sirva automática y aisladamente para crear ZDP o avanzar en ellas, sino que tomados en conjunto estos elementos y criterios configuran una determinada representación de los procesos de enseñanza que parecen más capaces de generar y hacer progresar a los alumnos a través de dichas ZDP (p. 164).

Los elementos que a continuación se exponen fueron propuestos a partir "del estudio de formas de actuación conocidas y empleadas por muchos profesores en práctica habitual" (p. 164), por lo que se creen idóneas, pertinentes, fiables y viables para el fin particular, en este caso, auspiciar la implementación de la zona. En ese sentido:

1. Favorecer un clima atractivo en cuanto a la relación alumno-estudiante, que se sostenga sobre la confianza y seguridad, en la cual la curiosidad y el interés por aprender surjan espontáneamente por sí solas.
2. Incentivar la intervención de todos los estudiantes en la realización de las diferentes actividades, aun cuando algunos de ellos exhiban escaso domino de las mismas y poco interés.
3. Impulsar la independencia con respecto al uso y profundización de los conocimientos que los alumnos adquieren.
4. Crear, constantemente y con la mayor profundidad posible, ramificaciones entre los nuevos conocimientos "recién" adquiridos y los conocimientos previos de los alumnos.
5. Evitar incomprensiones haciendo uso de un lenguaje claro conforme al contexto de los estudiantes.

Hasta ahora, se ha ilustrado el concepto y cualidades de la ZDP propuesta por Vygostky (1979) a la luz o con la relación niño-adulto, en particular, estudiante-profesor. No hemos atendido un segmento de la definición que contempla otros actores o constituye otro capítulo en el aprendizaje en el marco de dicha perspectiva. Se trata de la realización de actividades con la ayuda de iguales más capaces, en consecuencia, nos enfocaremos a comentar algunos aspectos de ese escenario.

Aun cuando el epicentro de la teoría es la relación estudiante-profesor, la cooperación del tipo estudiante-estudiante puede generar condiciones adecuadas en pro de la ZDP. Según Onrubia (*Ob Cit*. 1999) algunas características de ese contexto son las siguientes:

1. El estudiante explica su propio punto de vista.
2. A fin de la resolución de un problema, la divergencia en los diferentes puntos de vista (el de cada estudiante).
3. La interrelación beneficia el control propio de la tarea, el aporte y recibimiento de asistencia mutua.

El autor citado sostiene que "para potenciar la creación de ZDP mediante la interacción entre las y los estudiantes es preciso planificar de manera muy cuidadosa y precisa estas interacciones" (p. 165). Además, que los docentes deben transcender del trabajo grupal como tradicionalmente se enfoca y en ese sentido tener en cuenta ciertos criterios para que la actividad en grupo contenga procesos de interacción con cualidades de labor cooperativa. Algunos criterios notables a considerar son:

1. Trazar el resultado al que los estudiantes deben llegar y especificar lo que se espera que sean capaces de realizar al terminar la actividad en grupo.
2. Exhortar el acuerdo entre estudiantes sobre el qué, cómo, qué orden y qué materiales utiliza en la actividad.
3. Conformar grupos mixtos y rotarlos con frecuencia a fin de que todos se conozcan y admitan diversas formas de trabajo y pensamiento.
4. Impulsar que cada estudiante asuma el compromiso con la actividad planteada, así como también con sus compañeros de trabajo, entendiendo que cada participante necesita alcanzar la meta propuesta.
5. Evaluar grupal e individualmente la intervención que cada estudiante aporte en el seno de su grupo.

De acuerdo con lo anterior, aun cuando cada participante conlleva una carga de compromiso para crear el escenario óptimo para la ZDP, es sobre el profesor que recae el mayor grado de responsabilidad, por lo que debe autoevaluarse periódicamente sobre su praxis. Debe hacer seguimiento del trabajo y vigilar que no se "cotidianicen" actuaciones que comprometan el progreso en el aprendizaje de los jóvenes bajo la perspectiva planteada.

En conclusión, "la introducción de la noción de Zona de Desarrollo Próximo por Vygotsky reubica el lugar de la enseñanza como un elemento que contribuye a expandir las posibilidades de aprendizaje de las y los estudiantes" (*Ob. Cit*. p. 166). Sin embargo, la aplicación de este concepto debe superar la interpretación de prácticas tradicionales que destacan la transferencia de destrezas del profesor al estudiante. En ese sentido, todo estudiante "puede ser un(a) constructor(a) de su propio aprendizaje, siempre que cuente con la ayuda de un mediador competente, quien tiene como una de sus tareas asegurar que la adquisición y la transformación de la información se haga de manera correcta" (*Ob. Cit*. p. 166).

MOMENTO III

Ámbito metodológico

Naturaleza y Diseño de la Investigación

En este capítulo se rinde cuenta del conjunto de herramientas metodológicas y las estrategias seleccionadas para llevar a feliz término la búsqueda de respuestas a las preguntas formuladas y cumplir así con los objetivos planteados. En consecuencia, se declara que conceptualmente la investigación está enmarcada en el campo de la Educación Matemática como ámbito científico, su área es la didáctica del álgebra y su foco de estudio es el pensamiento algebraico de un grupo de estudiantes de primer año de bachillerato de la Educación Media General venezolana.

En virtud de la naturaleza del problema expuesto con sus correspondientes preguntas y propósitos se corresponde con una investigación de tipo cualitativa basada en el paradigma fenomenológico interpretativo, pues según Rojas (2010):

> Desde esta perspectiva, el papel de las ciencias sociales es comprender la vida social a partir del análisis de los significados que el hombre imprime a sus acciones. La descripción y la explicación de la conducta observable, foco de interés del científico social ortodoxo, es sustituido por el entendimiento de la acción humana. (p. 24)

En tal sentido, resulta natural desarrollar la indagación bajo el enfoque cualitativo dado que su énfasis fue la comprensión profunda de los actores que participaron en ella más que en el establecimiento de relaciones de causa y efecto entre los fenómenos.

En el abordaje cualitativo se asumieron los rasgos distintivos que, según Corbeta (2003), caracterizan una investigación de este tipo:

1. Diseño de investigación abierto e interactivo. Esto da cuenta, por un lado, de la flexibilidad para asumir cambios en la ejecución sin que se generasen distorsiones, y por otro, que no se está comprometido ni prejuiciado por teoría alguna con respecto al pensamiento algebraico de los estudiantes de educación media general. La teoría se fue construyendo en la práctica, surgió de la propia realidad observada; además, la relación con los sujetos estudiados fue profundamente empática y de identificación, esto es el investigador no fue un observador extraño ni neutral frente a los estudiantes, por el contrario, en las distintas sesiones el autor de esta investigación buscó ganarse la confianza de los estudiantes, se tomaron en cuenta las expectativas, necesidades, intereses así como el estado anímico de los participantes. Una manera de lograrlo fue, por ejemplo, escuchando y respetando sus opiniones, tomando en cuenta sus variadas dificultades y mostrando una actitud permanente de colaborador para ayudar a superarlas.

2. No se tomaron en cuenta la estandarización ni la representatividad para la *obtención de las informaciones,* en su lugar los casos se trataron heterogéneamente, en función de la relevancia de las situaciones individuales, es decir los estudiantes no fueron organizados con anterioridad a este trabajo, sino que la selección fue natural, cada estudiante se consideró como un caso específico y con particular interés para los propósitos de esta investigación.

3. El *análisis de los datos* se realizó sobre los sujetos, estudiados con profundidad, con el objetivo de comprenderlos, esto es importante ya que el estudiante no fue sustituido por la definición de un tipo de variable, cada uno de ellos posee un aspecto particular de Pensamiento Algebraico y sobre la base de esta especificidad se realizó el estudio.

4. En la *producción de los resultados* la generalización no ocupó un lugar preferencial sino que se estuvo más atento a la defensa de la especificidad de las distintas situaciones sociales, esto significa que en este trabajo no se pretende crear una teoría sobre el Pensamiento Algebraico de todos los estudiantes venezolanos, sino que se estuvo interesado en estudiar este tipo de pensamiento con unas personas particulares y en un espacio temporal

y físico concreto; en consecuencia los aspectos teóricos generados tienen relevancia directamente proporcional con la profundidad del análisis y no tanto por la expansión de éste.

Además, es de considerar que en este enfoque se estudia al sujeto asistiendo a la subjetividad basada en fundamentos teóricos previamente establecidos, la idea de este enfoque naturista es que todo aquello que se vaya a observar se haga no como actores cuya conducta deba medirse y generalizarse sino como aquellos productos que den informe, expliquen, describan y reflejen su propia cultura (Pérez, 1994).

Otro de los pilares del enfoque cualitativo es que, en primera instancia, la teoría debe construirse en la práctica y así mismo en la praxis dado a que toda construcción que hace el sujeto por medio de la interacción con los demás es un elemento principal para la construcción de teorías; este pilar se acentúa fundamentalmente en la comprensión de las creencias, valores y reflexiones que se dan en el medio mas no en el sujeto propio. Otro fundamento refiere a que la comprensión de la realidad es un acto natural del investigador, teniendo en cuenta que el conocimiento es un producto de la actividad humana prevalece la idea del interaccionismo mutuo. En palabras de Lincoln y Guba (1994) el investigador tiene un rol de participante y facilitador de aquellas relaciones establecidas por el sujeto, teniendo en cuenta que las construcciones están sujetas a constantes revisiones y análisis, haciendo cambios y más aún cuando se contraponen a los contextos. En otras palabras, el propio investigador es un *instrumento* de la investigación.

La idea es que, por medio del proceso investigativo, se generen acciones conscientes que vayan en pro de mejorar y transformar las prácticas educativas, en particular, la enseñanza del álgebra escolar; esto se logra a partir del modelo investigación acción, el cual busca intervenciones en las formas de actuar y pensar de cada sujeto a estudiar, en este sentido Elliott (2000) afirma que este modelo de investigación conlleva un proceso de cambio ocasionado por la identificación de situaciones problemáticas, imaginar todas aquellas posibles soluciones, planificar estrategias, y ponerlas en marcha para la mejora.

Por otra parte, dado el interés en indagar en el pensamiento, la investigación se ubica en la perspectiva fenomenológica interpretativa, razón por la cual se consideraron las experiencias y las distintas interpretaciones de las vivencias por parte de los participantes en cada una de las sesiones.

Desde el punto de vista de la unidad de análisis, entendida ésta como el objeto social al que se refiere la propiedad estudiada (Corbeta, 2003), en este caso el Pensamiento algebraico, este trabajo se corresponde con un estudio de caso puesto que estas unidades son consideradas todas simultáneamente en un mismo lugar y en un mismo momento: un aula de clase de Matemática.

Escenario de Investigación

El estudio se realizó durante el año escolar 2021-2022 en la Unidad Educativa Nacional 'Daniel Mendoza' ubicada en la comunidad 'Las Flores' en San Mateo, Municipio Bolívar, Estado Aragua. En este plantel hacen vida escolar alrededor de 240 jóvenes de ambos sexos, cuyas edades se encuentran entre 12 y 17 años, divididos en 10 secciones con un promedio de 24 estudiantes cada una. El total de profesores de la institución suma 12, de los cuales sólo el investigador es el encargado del área de Matemática.

***Grafico 2**. Imagen satelital comunidad "Las Flores"/ U.E.N. "Daniel Mendoza".* (Tomado de Google Maps)

En la imagen se observa el territorio que abarca la comunidad Las Flores, que a su vez se divide en los sectores; Negra Matea, La Capilla, La Colina y Callejón Las Cumbres. Las Flores es una comunidad pequeña que cuenta con ambulatorio rural, cancha deportivas, abastos de inversión privada, ferretería de inversión privada, puesto de la Guardia Nacional Bolivariana Km

42 de la Autopista Regional del Centro (ARC), una escuela primaria U.E.E. Carmelina Bejarano, la cual provee al liceo de estudiantes de 1er año, según la zonificación. En el gráfico 1 el plantel está señalado a través del cuadro de color blanco.

Gráfico 3. *Instalaciones L.B.N. 'Daniel Mendoza'*

El Liceo cuenta con 2 edificaciones las cuales tienen 12 aulas, 3 laboratorios (Física, Química y Biología), actualmente fuera de servicios motivado al deterioro, dos baños para los estudiantes, 3 baños para el personal docente, obrero y administrativo, una biblioteca, un aula interactiva y un Centro Bolivariano de Informática y Telemática (CBIT), ambas fuera de servicio, un taller para electricidad, además de oficinas administrativas, sub-direcciones y dirección. Fuera de las edificaciones se sitúan la cancha deportiva, la cantina y dos aulas, estas últimas sin uso actualmente por falta de mesas y sillas.

Sujetos de la investigación

*Características generales de los sujetos***:** Los sujetos elegidos para realizar la investigación fueron en total 20 alumnos cursantes del de primer año de educación Media General, con edades comprendidas entre los 12 y 13 años. La selección de estos sujetos fue intencional, atendiendo al nivel educativo que cursaban los estudiantes y su disponibilidad para participar en esta investigación. No identificamos en los mismos ninguna característica particular reseñable que pudiera sesgar los resultados de la investigación.

Conocimientos previos de los sujetos: En general, los sujetos no habían trabajado tareas específicas escolares sobre patrones. En cuanto al uso de sistemas de representación, con excepción del algebraico, los alumnos sí acostumbran a trabajar con los sistemas de representación: verbal, numérico, pictórico y tabular. En el caso del sistema de representación tabular, hasta el momento no se había dado demasiada importancia a las tablas en la asignatura de matemáticas. Las tablas trabajadas habían sido muy simples, si bien la perspectiva de elaborarlas por sí mismos, sin ningún tipo de indicación, era una experiencia novedosa para el alumnado.

Técnicas de Recolección de los Datos

Para obtener la información requerida a los fines de la investigación, se utilizaron las siguientes técnicas:

1. *La observación*, la cual se llevó a cabo durante las sesiones de los Talleres, *de manera participante*, cuando se orientaba a los estudiantes en la realización de las actividades planificadas para cada encuentro, tales como la resolución de las Tareas y las intervenciones argumentativas. Y de manera *no participante*, mediante las grabaciones en audio y video de las sesiones y el registro de incidentes por parte del docente-investigador en su cuaderno de notas rastreando los acontecimientos de los Talleres considerados significativos a la luz de los objetivos del estudio.

2. *La entrevista,* semi estructurada individual y colectiva con los estudiantes, realizada tomando en cuenta sus elaboraciones a fin de promover la metacognición reflexiva sobre su proceso de aprendizaje.

Con respecto a la observación, es el representante natural en la investigación cualitativa, es a través de ella que el investigador trata de ver, supervisar, percibir, resguardar las actuaciones, expresiones y movilizaciones de los sujetos durante las actividades. Este término conlleva variadas nociones, para Rojas (2010) "En el campo investigativo, la observación se entiende como un proceso deliberado, sistemático, dirigido a obtener informaciones en forma directa del contexto donde tienen lugar las acciones" (p.73).

Mientras que la entrevista es una técnica que permite recabar información detallada que el informante comparte oralmente con el entrevistador, de las perspectivas y experiencias propias (Colás, 1998; Fontana y Frey, 2005), la cual es definida como una técnica cualitativa de investigación.

La entrevista se considera en la perspectiva de Piaget (1926) como un método clínico crítico. Este es empleado para intentar comprender el pensamiento del niño y, así mismo, para indagar sobre las justificaciones que da cuando se le pregunta algo, es decir, sobre la evolución de su razonamiento y sobre su forma de pensar, mediante preguntas como: ¿Cómo construye el sujeto sus representaciones de la realidad?, ¿cómo organiza mentalmente la realidad?

El análisis de lo anterior se puede hacer por medio de situaciones experimentales y, también,por medio del diálogo entre el niño y el experimentador (Piaget, 1926). El propósito de dicho diálogo no es conseguir una respuesta sino, al contrario, propiciar diálogos libres con el estudiante, de modo que se puedan descubrir las tendencias espontáneas.

Para realizar las entrevistas, se consideró importante tomar en cuenta la siguiente característica (Taylor y Bodgan, 1996): los intereses de la entrevista deben ser claros y estar bien definidos. Dicha entrevista, consistió en una conversación natural con los estudiantes entrevistados y el investigador; siendo necesario mantener una plática animada pero de manera responsable, con el propósito que la misma no se desvíe del objetivo a alcanzar.

También, se consideraron las funciones que debe desempeñar el entrevistador propuestas por Ruiz (1999):

1. Explicar el motivo de la entrevista, objetivo a perseguir.
2. Formular preguntas, sin esperar un esquema fijo de las respuestas.
3. Controlar la entrevista en función del ritmo de las respuestas.
4. No llevar un orden especifico de las preguntas, alternar entre una y otra, se puede usar un guion para no dejar por fuera alguna de gran interés para la investigación.
5. Permitir de ser conveniente interrupciones e intervenciones de terceros.
6. Explicar cuando amerite o sea pedido por el informante el fin de la pregunta.
7. Puede ser improvisado el contenido y la forma de hacer la pregunta.
8. No evaluar las respuestas, se debe adoptar el estilo de “oyente interesado”.

En síntesis, la información recabada se obtuvo mediante diversas fuentes de información:

1. *Estudiantes.* Considerados de forma individual y colectiva generaron información a partir de: (a) Cada una de las tareas propuestas, (b) las entrevistas realizadas en las cuales

evidenciaron la exteriorización de sus representaciones mentales, mediante la expresión escrita, pictórica y gráfica.

2. *Docente.* Quien *g*eneró información en torno a la dinámica de la clase, haciendo anotaciones acerca de los incidentes que tuvieron más relevancia para la toma de decisiones en cuanto a cambios en la planificación, ejecución y su incidencia en la investigación.

El proceso de recolección de la información en el aula

El proceso para recolectar los datos en el aula se realizó en tres fases principales: en la primera fase el profesor investigador, en una sesión de clase, le solicitó a los estudiantes que realizaran de manera individual la(s) tarea(s) diseñada(s) por el investigador. En la segunda fase, el docente conformó grupos de 5 personas máximo para que compartiesen sus desarrollos y estrategias utilizadas para llegar a acuerdos de solución en el grupo llegando a un solo consenso que quedó registrado en una copia de la respectiva tarea (para este caso, se registraron algunas observaciones, comentarios y aspectos importantes en las notas del investigador). Y, en la última fase, las tareas son socializadas a todo el grupo. En esta última fase, se realizaron las entrevistas no estructuradas en donde el profesor investigador pidió a cada uno de los representantes de los grupos que mencionaran las estrategias de solución y opiniones acerca de los procesos realizados dentro de sus grupos. Cabe mencionar que el profesor investigador en algunos momentos de la entrevista incorporó algunas insinuaciones o interpretaciones propias para poder complementar el proceso de indagación.

Para el desarrollo de la entrevista se tuvo en cuenta que los representantes de cada uno de los grupos cumplieran al máximo los objetivos de cada ítem de la(s) tarea(s) propuestas. Ahora bien, los criterios de selección de los representantes fueron: que utilizaran al menos dos representaciones en diferentes registros semióticos con los que se aproximan a la respuesta esperada desde la tarea individual y, por otro lado, se encuentran relaciones directas entre el producto de la tarea grupal y la producción propia.

Instrumentos de Recolección de Datos

Los instrumentos de recolección de datos que se implementaron fueron; grabadora de audio, teléfono inteligente (a fin de capturar videos e imágenes), hojas de respuestas a las Tareas, y las notas de campo, por parte del investigador.

Análisis de los Datos

Con la finalidad de dar respuesta a las interrogantes del estudio, se buscó captar procesos de objetivación. Como se mencionó anteriormente, objetivación es el proceso a través del cual los estudiantes se familiarizan gradualmente con significados culturales y formas de razonamiento y acción.

En ese sentido, se inició el análisis de los datos con una transcripción para seleccionar fragmentos de interés, estos dieron cuenta a partes en las cuales hay evidencia de aprendizaje. Luego, le siguió un análisis interpretativo de la transcripción en tres pasos:

1. Todas las partes se trataron por igual sin prestar atención al contexto, la intención, etc.
2. Se examinó bajo los principios teóricos y las preguntas de investigación.
3. Los fragmentos de interés se colocaron en categorías analíticas conceptuales emergentes (tipos de gestos, producción de símbolos, comprensión de símbolos) y luego se contextualizan.

En resumen, la información medular del trabajo fue obtenida a partir del análisis de las actividades que se desarrollaron en las que se diseñaron hojas de trabajo (fichas de actividades) que contienen problemas de reconocimiento de patrones, del tipo configuraciones puntuales y secuencias.

Para el análisis de los datos, se tuvieron en cuenta dos aspectos importantes mencionados anteriormente:

1. Uno en donde se detallan las producciones individuales con respecto al objetivo planteado para cada ítem; cabe aclarar que es una caracterización cualitativa, donde se ponen

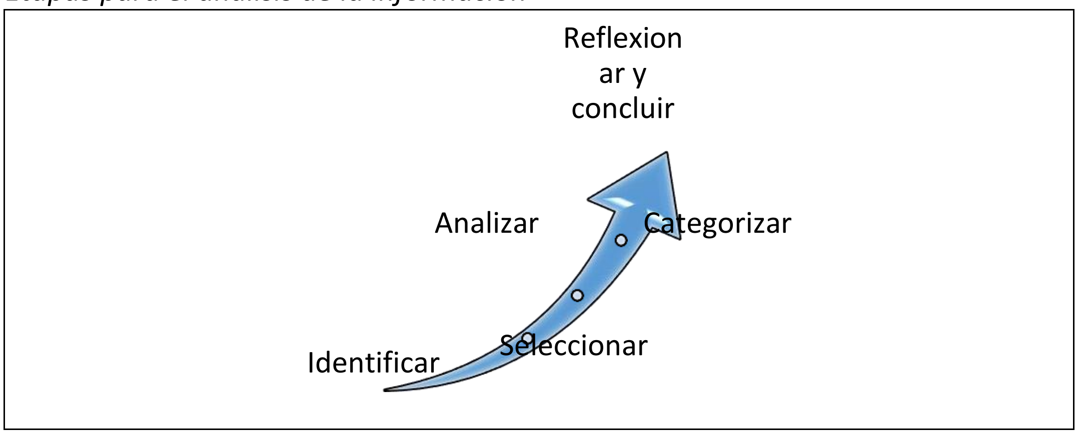
en juego algunas observaciones que se tienen en cuenta para enfatizar al momento del trabajo en grupo o que quizás tienen una relación estrecha con la teoría.

2. En el segundo momento se analizaron las producciones construidas en grupo (anteriormente se indicó la dinámica del trabajo en grupo), que fueron apoyadas por una entrevista a los representantes de cada uno de estos.

En el siguiente cuadro se muestran las etapas para el análisis de la información que sostiene la investigación:

Cuadro 3

Etapas para el análisis de la información



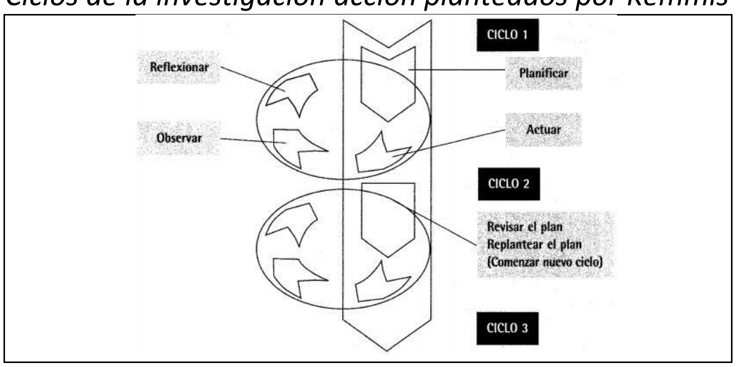
De acuerdo con el anterior cuadro, puede decirse que el proceso de análisis de la información se desarrolló en seis etapas: (1) En primer lugar y teniendo en cuenta las producciones de los estudiantes junto con las entrevistas y las interacciones en el aula se evidenciaron y particularizaron las formas como los estudiantes abordaron las tareas propuestas, es decir se identificaron en las producciones la información importante que aportara a la investigación; (2) En segundo lugar, se seleccionaron las producciones tanto individuales como grupales para, de acuerdo con los aspectos teóricos mencionados anteriormente (3) analizar y (4) categorizar y de esta manera describir más detalladamente los aspectos relevantes como la identificación de patrones, las representaciones utilizadas y las transformaciones a las que llegan los estudiantes.

Finalmente, teniendo en cuenta la práctica docente y el análisis de la información, se realizó una (5) reflexión respecto a la importancia que tiene abordar el pensamiento algebraico en el aula y las estrategias utilizadas en la investigación, para llegar a (6) conclusiones que enriquezcan las futuras prácticas docentes y acciones de los estudiantes que potencien el pensamiento algebraico.

Momentos generales de la Investigación

A continuación, se pueden observar los ciclos que propone Kemmis (1989) para desarrollar una investigación acción cíclica, cada uno de los ciclos está conformado por momentos, propiciando en el momento de la reflexión pensar qué tan conveniente es continuar con el proceso investigativo. En el caso de este estudio, cada ciclo es una de las tareas aplicadas. La toma de decisiones para pasar a la siguiente tarea o hacer una modificación a la actual depende necesariamente del cumplimiento de cada uno de los momentos por ciclos; cabe aclarar que estos ciclos son mostrados en espiral debido a que hay dos posibilidades al terminar cada ciclo (tarea): se revisa cada uno de los planes aplicados o se replantea el plan para comenzar un nuevo ciclo.

Cuadro 4
Ciclos de la investigación acción planteados por Kemmis (1989)



En consonancia con lo anterior, los siguientes son los momentos en los cuales se desarrolló la presente investigación:

Cuadro 5

Ciclos de la investigación desarrollada

Planificación	Adaptar y diseñar el conjunto de tareas que vayan de la mano con los contextos reales del estudiante. Para diseñar cada tarea se tiene en cuenta la aplicación de la tarea anterior, las producciones e interacciones de los estudiantes con sus pares y con el docente y el alcance del objetivo de cada tarea. Las tareas propuestas, en su mayoría, están encaminadas a identificar la generalidad de patrones, cada tarea busca centrar el objeto matemático en una situación o contexto en donde el estudiante pueda tomar herramientas matemáticas suficientes para relacionar lo aprendido en otras situaciones, con la situación propuesta en cada tarea; además cada tarea busca que el estudiante indague, domine o produzca todo tipo de elementos matemáticos (operaciones, gráficos, entre otros) y haga una representación de ellos; son tareas que motivan y generan al estudiante interés e inquietudes que son fáciles de acceder.
Acción	Implementación y aplicación de cada una de las tareas, haciendo un acompañamiento a los estudiantes de manera tal que se recoja la mayor cantidad de información posible. Durante la implementación de las tareas se evidencia la importancia de un acercamiento a cada tarea de manera individual, de esta manera los estudiantes buscan diferentes estrategias y utilizan diferentes estrategias para enfrentarse a cada tarea y poder encontrar la generalización del patrón en la tarea planteada. Luego de ello, los estudiantes se reúnen en grupos en donde ponen en común las estrategias utilizadas de forma individual, en este momento se pide a los estudiantes que discutan cuál es la generalidad del patrón, cuál de las representaciones propuestas individualmente es la más adecuada y que lleguen a un acuerdo de grupo

Cuadro 5 (cont.).

	El docente guía la interacción en el aula y está en acción dentro del aula siendo participativo del proceso de enseñanza y aprendizaje, hace una negociación explícita,discusiones y evalúa el proceso constructivo de aprendizaje por medio de preguntas orientadoras
Observación	El proceso para la recolección de la información está enfocado en la producción de los estudiantes, registrada en las tareas asignadas en donde hay un momento de producción libre que permiten a cada uno de los estudiantes explore y se enfrente a los posibles caminos de solución; otro momento debe ser una validación de estas producciones en pequeños grupos para que puedan aceptar y discutir sobre lo realizado por cada uno de ellos para llegar a un consenso de grupo en donde se identifica la forma adecuada de representar la generalidad del patrón en la tarea propuesta, en este momento es importante realizar entrevista para capitalizar las producciones que los estudiantes construyeron de forma individual y grupal, ya que la entrevista, como lo señala Goldin (2000, p.520); Hace posible poner el foco de interés de la investigación más directamente en los procesos del sujeto al enfrentar la tarea matemática, más que sólo en los patrones de las respuestas correctas o incorrectas que ellos producen, por lo tanto, hay la posibilidad de ahondar en una variedad de tópicos importantes con más profundidad de la que es posible por otros medios experimentales.
	Se analiza cada una de las producciones de los estudiantes y de los grupos, las transcripciones de los diarios de campo, las grabaciones de audio y vídeo, de esta manera se logran evidenciar el cumplimiento de los objetivos de cada tarea para replantear o modificar la tarea siguiente y determinar la continuidad del

Cuadro 5 (cont.).

Reflexión	proceso de indagación o la modificación en los procesos de planeación y así poder seleccionar los datos que puedan ayudar o contribuir con el desarrollo de la investigación. Para este momento, se reflexiona (todos los estudiantes) sobre las estrategias de solución que presenta cada grupo de trabajo. Freudenthal (1983) menciona que aprender matemáticas es una actividad social y dinámica, por esta razón conlleva consigo misma a hacer una introspección tanto de la labor docente, de la labor del estudiante(elaboraciones hechas) y por supuesto del objeto investigativo

Procedimiento general

Revisión documental

Para obtener información relacionada con el asunto de interés se recurrió a la búsqueda a través de distintas fuentes, impresas (artículos, libros y trabajos de investigación de maestría y tesis doctorales) y electrónicas (artículos, revistas y libros en línea), de autores de referencia venezolanos y extranjeros. También se consideró la producción científica de algunos eventos de divulgación propios de la Educación Matemática tales como, RELME, CIBEM, ICME, CIAEM y COVEM.

Conformación de Grupo Estable

En esta institución, siguiendo los lineamientos del MPPE, se tenían que formar grupos estables (grupos para el trabajo extra cátedra) fuera de los horarios de clase de los estudiantes, por eso a la mayoría de los docentes le dieron horas por programar, es decir horas libres, pero que estaban dentro de su carga horaria. En estas horas podía realizar cualquier labor de tipo extra cátedra, las cuales podían desarrollarlas en cualquier hora y de mutuo acuerdo con los estudiantes para formar su Grupo Estable. Ningún estudiante estaba obligado a pertenecer a un grupo en específico, ellos decidían a qué grupo pertenecer. Esta circunstancia institucional, fue el contexto que favoreció la conformación del Grupo Estable que denominamos *Matemáticas para el Reconocimiento de Patrones*. Nos dieron una semana para hacer las inscripciones; en ese lapso, muy cordialmente sugería a mis estudiantes inscribirse en mi Grupo, motivándolos, diciéndole los beneficios que iban adquirir al participar en él. El único requisito era: responsabilidad y disposición a trabajar en la investigación. En mi lista final obtuve veinte estudiantes.

En reunión con los padres se les informó detalladamente del Proyecto investigativo, indicándoles su naturaleza estrictamente académica y sin fines de lucro. También, se les informó la necesidad de efectuar vídeos y grabaciones de audio de cada una de las sesiones y de las entrevistas, y se les pidió su autorización por escrito para el uso de tales imágenes.

Diseño y justificación de tareas

El estudio se llevó a cabo mediante el desarrollo de un Taller en el cual se aplicaron cinco tareas cada una con un objetivo particular, se ha pensado en una aplicación lineal ya que por medio de estas se puede determinar:

1. Las representaciones hechas y sus respectivas transformaciones en la generalizaciónde patrones.
2. Relacionar el sentido de la indeterminancia, el sentido operatorio y la designación simbólica con los procesos de generalización.

Cuadro 6
Objetivos de las tareas propuestas

Tarea	Objetivo
0	Identificar cómo los estudiantes encuentran la generalización de un patróny cómo las representan.
1	Describir el uso que los estudiantes le dan a la letra al momento de encontrarla generalidad de un patrón y su forma de operarla
2	Evidenciar los procesos de generalización, sin inducir el uso de la letra.
3	Describir las maneras como los estudiantes encuentran y representan la generalidad de un patrón por medio de la relación entre cantidades

Cuadro 6 (cont.).

4	Describir las maneras como los estudiantes encuentran y representan la generalidad de un patrón desde lo concreto a lo abstracto.
5	Describir las maneras como los estudiantes representan y relacionan la generalidad del patrón planteada en esta tarea con la obtenida en la tarea anterior.

El esquema anterior presenta los objetivos por cada una de las tareas aplicadas, así como el orden en que fueron desarrolladas; más adelante se ponen en evidencia los criterios por los cuales se decide pasar a la siguiente tarea y las dificultades que tuvieron cada una de ellas.

MOMENTO IV

Discusión de la información y hallazgos

Línea del tiempo

La línea del tiempo se constituye en una herramienta analítica cuya eficacia ha sido probada en las investigaciones de González (1998) y González (2015). Es una reconstrucción retrospectiva que hace el docente-investigador de lo acontecido en los Talleres a partir del inventario de sus observaciones y anotaciones registradas en su cuaderno de notas. Como resultado de esta reconstrucción subjetiva se presentan en el cuadro 6 los aspectos más resaltantes, para el investigador, ocurridos durante cada una de las doce sesiones de los Talleres.

Cuadro 7

Esquema reconstructivo de lo acontecido en el Taller

Sesión N°	Acciones desplegadas en el aula
1	El Docente: -Organiza los estudiantes en el aula. -Saluda y busca crear un ambiente de trabajo confortable -Da la explicación general del proyecto que se va a llevar a cabo -Explicita el propósito de las tareas que se van a desarrollar, haciendo énfasis en la importancia que tiene el trabajo de cada estudiante y de la sensatez que tengan al momento de responder cada una de las tareas ya sea en grupo o individualmente -Muestra el Programa oficial del Taller. -Comenta el contenido, y desarrolla ejemplos. -Plantea algunas estrategias de resolución de problemas basadas en Polya en consonancia con los problemas de reconocimiento de patrones y generalización -Plantea unos ejercicios de reconocimiento de patrones junto con algunas estrategias viables según el anterior párrafo -Resuelve algunos problemas Los estudiantes: -Prestan atención a la exposición docente -Algunos interrumpen el discurso para preguntar y comentar

Cuadro 7 (cont.).

2 (Indagación)	El docente: -Saluda y comenta lo realizado en la sesión anterior. -Organiza los estudiantes para realizar el trabajo individual -Entrega a los estudiantes el Instrumento: Tarea 0 -Le pide que resuelvan la tarea planteada de manera tal que utilicen lo que recuerdan o lo que han aprendido en las clases de matemáticas -Insiste que esta y las siguientes tareas a desarrollar no tienen respuestas malas, todas las producciones son válidas y se discutirán en la próxima sesión para entender lo que el otro compañero del Taller quiso hacer, así como interpretar los procesos y las estrategias usadas. Los estudiantes: -Responden la tarea 0
3	El docente: -Saluda y da la bienvenida a los estudiantes -Pide a los estudiantes que se organicen para iniciar con la actividad. -Entrega a los estudiantes el Instrumento: Tarea 1. -El docente investigador observa cómo los estudiantes proceden para solucionar esta tarea y los incita a que echen mano de sus conocimientos previos y de las habilidades que han venido desarrollando a lo largo de su vida escolar. Los estudiantes: -Se ubican por filas para solucionar de forma individual, durante una sesión de una hora de clase la tarea propuesta.
4 (Exposición y Entrevista)	Los estudiantes: -Se reúnen en grupos de cuatro y cinco personas sin alguna condición previa -Exponen libremente la solución (en cada grupo) a la que llegaron en la Tarea 1 y los procesos que realizaron. En este primer momento de trabajo en equipo, cada estudiante tiene una función en la dinámica del grupo, para propiciar que todos escuchen las soluciones de sus compañeros -Después de discutir sobre sus soluciones deben llegar a una respuesta de grupo que a su vez deben registrar en una nueva hoja. -Llevan a cada grupo los razonamientos que les sirven de argumentos al momento de exponer sus producciones (En este momento toma importancia el trabajo individual). - Durante el proceso de discusión en los grupos sus integrantes se apropian de sus funciones, escuchan a sus compañeros y cuando no entienden la postura de alguno piden una explicación diferente para poder entender o aclarar las dudas que tienen. -Los integrantes del grupo que logran comprender el procedimiento de otro, ayudan a explicar para que todos tengan claro el proceso de cada miembro del grupo. -Deben llegar a un consenso, por grupo, acerca de la solución del problema. El docente:

Cuadro 7 (cont.).

	-Selecciona un representante por cada grupo -Después de analizar y comparar las soluciones que los estudiantes dieron, de forma individual y grupal de la primera tarea, realiza una entrevista no estructurada con un grupo de estudiantes conformado por el representante cada grupo. -Durante la entrevista los estudiantes reconocen que pueden proceder de forma diferente y escribir de forma diferente, esto no determina si está bien o mal porque en la mayoría de los casos conducen a la misma solución. -Para hacer el cierre de la actividad se hace una puesta en común y se escuchan las opiniones de todos los estudiantes dándole prioridad a los que se les dificultó la tarea, para que, con la ayuda de todo el grupo aclaren sus dudas o superen las dificultades.
5	El docente: -Inicia la sesión de clase, saluda a los estudiantes y les pide que se organicen individualmente. -Teniendo en cuenta la aplicación de la tarea uno, en donde se induce el uso de la letra de manera forzada, toma la decisión de plantear una tarea en la que los estudiantes puedan usar la letra de forma natural, pero que al igual que en la tarea anterior, tengan que encontrar la generalidad de una secuencia. -Entrega a los estudiantes el Instrumento: Tarea 2, y les pide que encuentren soluciones a la tarea planteada. Los estudiantes -En esta oportunidad se esfuerzan por hacer sus respuestas claras, por construir argumentos más sólidos.
6 (Exposición y Entrevista)	El docente: -Toma la decisión de mantener los mismos grupos de trabajo. Los estudiantes: -Se reúnen según los grupos ya conformados y se da un tiempo para que socialicen y traten de llegar a un acuerdo en la solución de cada ítem de la tarea propuesta. -Los integrantes de los diferentes grupos realizan sus discusiones con más argumentos que en la tarea uno. -Si alguno de los integrantes estaba errado en sus argumentos, sus compañeros lo hacían caer en el error por medio de diferentes ejemplos. -En esta tarea se realiza una entrevista a los integrantes de cada grupo, teniendo en cuenta las producciones individuales comparándolas con las respuestas del grupo. -Por último, se reagrupan los estudiantes de acuerdo con sus producciones individuales, se hace un análisis sobre las formas como los estudiantes solucionaron la tarea, las formas como encontraron la generalidad y como la representaron, además de las estrategias que utilizaron -En estos nuevos grupos los estudiantes reconocen las similitudes y diferencias en las respuestas de cada uno de los ítems de la tarea

Cuadro 7 (cont.).

	-Los estudiantes realizan una exposición explicando cómo procedieron para solucionar el último punto de la tarea y las similitudes que encontraron en ese proceso -Al final de la exposición se cuestiona a los estudiantes si les parece que alguna de las exposiciones no llegaba al resultado de la tarea propuesta -Los estudiantes en general reconocieron que incluso dentro de cada grupo a pesar que los procesos eran muy parecidos, las formas de representar los procesos u operaciones utilizados para llegar a lo solución no eran iguales, aun cuando sí eran válidos para llegar a la solución
7	El docente: -Teniendo en cuenta la aplicación de las dos tareas anteriores se toma la decisión de no hacer una guía para la aplicación de esta tarea, las instrucciones de la tarea estarían escritas y proyectadas para todos los estudiantes y de forma verbal explicando el proceso para encontrar cada marca de acuerdo con el número de dobleces que hacen. -Entrega a los estudiantes el Instrumento: Tarea 3 -Entrega a cada estudiante dos tiras de papel de diferente tamaño. Los estudiantes: -Para el trabajo individual de esta tarea los estudiantes se organizan en grupos de manera tal que puedan ver las instrucciones escritas y tener contacto visual con el docente-investigador para que puedan seguir las instrucciones de la tarea. -Siguen las instrucciones de la tarea -Las intervenciones de los estudiantes quedan registradas en un video que se tiene en cuenta para realizar la intervención en el trabajo de grupos. -No registraron los procesos o las respuestas de la tarea propuesta, lo que llevó a la decisión de realizar una guía para el trabajo en grupo.
8 (Exposición y Entrevista	Los estudiantes: -Se organizan para hacer una puesta en común de lo que hicieron de forma individual. -Algunos olvidaron cómo habían procedido. Como se habían organizado por grupos a todos los estudiantes, los demás estudiantes del grupo ayudaron a reconstruir los procesos realizados para dar solución a cada respuesta, así, van registrando la producción grupal.
9	El docente: - Para la aplicación de la tarea cuatro se toma en cuenta lo realizado en la sesión pasada, se retoma el trabajo individual utilizando un instrumento en el que registren los procesos para dar solución a la tarea, esta decisión se toma debido a que los estudiantes al momento de exponer cómo procedieron en la tarea anterior tuvieron que reprocesar porque no recordaban todos los procesos realizados. -Entrega a los estudiantes el Instrumento: Tarea 4 -Tiene la misma función que en las tareas anteriores, observando las producciones realizadas por los estudiantes, en el momento que observa

Cuadro 7 (cont.).

	algo que no es claro cuestiona al estudiante para dejar claro lo que este quiere responder, además toma nota de las observaciones realizadas. Los estudiantes: -Se organizan individualmente de forma que puedan responder la tarea 4 propuesta.
10 (Exposición y Entrevista	El docente: - Efectuó una modificación al instrumento individual, para que los estudiantes representasen la situación en el grupo, dando los saludos entre los integrantes (estrechándose las manos y verificando lo realizado de forma individual), y no solamente imaginando la situación Los estudiantes: -Se organizan y regulan la intervención y acción de cada uno -Algunos van registrando lo que en grupo van discutiendo y concluyendo con este insumo y las producciones finales -Realizan procesos para llegar a la solución. Fue importante la socialización pues así vivenciaron e hicieron real la situación de tal forma que pudieron encontrar un proceso más elaborado para llegar a la solución de la tarea.
11	El docente: -De la misma forma que las tareas anteriores, realiza la aplicación de la tarea de forma individual. -Plantea la tarea teniendo en cuenta la tarea anterior (los procesos realizados y las producciones entregadas, individuales y grupales). -Entrega a los estudiantes el Instrumento: Tarea 5. Los estudiantes: -Deben encontrar la generalidad de la secuencia de figuras, de la misma manera que lo hicieron en las tareas anteriores, lo diferente e importante de esta tarea es que deben relacionar la generalidad obtenida con la generalidad obtenida en la tarea anterior, comparando tanto las situaciones como los procesos y las representaciones realizadas. 1. En este momento el uso del vídeo es de suma importancia ya que los estudiantes verbalizan procesos que no quedan registrados en el instrumento. 2. Las dinámicas en el aula se van regulando
12 (Exposición y Entrevista	El docente: -Organizar en sus respectivos grupos. La organización es la misma que en las tareas anteriores, ya que como se mencionó antes, cada estudiante tiene un rol específico y que cada uno se apropió de su papel dentro del grupo y las interacciones fluyen de forma constructiva en cada grupo. Los estudiantes: -Hace una puesta en común de la tarea 5 y reflexionan sobre las dos últimas tareas, principalmente; luego sobre las demás tareas, escuchando las diferentes posturas de los estudiantes y entendiendo la diferencia, no como error, sino como formas diferentes de llegar a una misma solución.

Fase instruccional

Dados los resultados de la Tarea 0 de indagación se decidió desarrollar un Taller que sirviera de sustento a los estudiantes para la realización con más eficacia de las tareas de reconocimiento de patrones, y en consecuencia se continuara con los objetivos planteados en la indagación. Para ello, se hizo una adaptación del Programa que proponen González y González (2013) ajustándolo en varias de sus partes, el resultado definitivo puede verse en el anexo 1. Para diferenciarla contextualmente de la fase empírica la denominamos fase instruccional. A continuación exponemos los detalles de su desarrollo.

Taller: la letra como número general

En esta investigación se consideró que en un primer acercamiento al álgebra es importante que los estudiantes lleguen a aceptar el uso de las letras simbólicas como elementos esenciales del lenguaje matemático. Para lograrlo, se consideró conveniente empezar con actividades que requerían el reconocimiento de patrones y la deducción de las reglas que los rigen. Para ello, es indispensable, por un lado ayudar a los alumnos a que observen lo que se repite o lo que tienen en común todos los elementos de una secuencia, sea ésta numérica o figurativa; por el otro, que los alumnos logren hacer explícita la regla, primero de manera verbal y posteriormente por escrito.

La primera actividad que se planteó al grupo fue la siguiente:

1. Dada la secuencia de números: 1, 3, 5, 7, 9,…
2. ¿Qué pueden decir acerca de esta secuencia? (G1)
3. ¿Cómo se obtiene el segundo número de la secuencia a partir del primero? (G1)
4. ¿Cómo se obtiene el tercer número de la secuencia a partir del segundo? (G1)
5. La operación que se debe realizar para pasar de un número al que le sigue, ¿es siempre la misma o cambia? (G1)
6. ¿Podrían escribir con palabras qué es lo que se hace para pasar de un número al siguiente?

Este tipo de preguntas tiene el propósito de enfocar la atención de los alumnos en la regularidad (G1) y ayudarlos a deducir la regla (G3) que rige el patrón. Al trabajar con los alumnos, se pudo observar que, en general, no tuvieron dificultades para trabajar con este tipo de patrones numéricos. Reconocieron la regularidad y pudieron deducir la regla general; sin embargo, tuvieron más dificultades para expresarse en forma oral que en forma escrita, y recurrieron a ejemplos particulares para dar sus explicaciones.

Ante la pregunta: "¿Qué pueden decir acerca de esta secuencia?", la respuesta que dieron algunos niños fue: *va de dos en dos*, lo que indica la percepción de la regularidad. Cuando se les preguntó: "¿Cómo se obtiene el segundo número de la secuencia a partir del primero?", varios alumnos inmediatamente respondieron: "*se suma*", sin poder precisar más. Al pedirles que trataran de escribir la regla para pasar de un número de la secuencia al siguiente, hubo quienes usaron una combinación de símbolos matemáticos y palabras, y escribieron, por ejemplo: "*sumamos 2 al número que ya teníamos*". No obstante que los alumnos lograron percibir y reconocer los elementos principales del patrón (que suma 2 a un número de la secuencia para obtener el siguiente), aún no podían simbolizar la regla.

Hay que señalar también que, si bien no estaban acostumbrados a esta forma de trabajo, en la que se solicitaba su participación activa y de colaboración, los alumnos rápidamente se adaptaron a ella mostrando mucho entusiasmo.

Después de algunas actividades similares a la anterior, en la que se empleaban la suma o la multiplicación para generar los términos de una secuencia, se pidió a los estudiantes que inventaran algunas secuencias de números. Entre las que generaron estaban las siguientes:

1. 4, 8, 12, 16, …
2. 100, 90, 80, …
3. 3, 9, 27, 81, …
4. 1044, 1048, 1052, …

En este punto, con el fin de involucrar a los alumnos en un intercambio de ideas que los llevara a reconocer las particularidades de las reglas escritas y lo que tenían en común algunas de ellas, el profesor tuvo la siguiente intervención:

Cuadro 8

Entrevista colectiva 1

Renglón		
43	Profesor	*Entonces, ¿Qué pasa cuando tienen cualquier cantidad de dobleces?*
44	Profesor	*¿Se fijaron que hay dos secuencias iguales, esto es, con la misma regla? [Se refiere a las secuencias primera y cuarta]Pero, ¿en qué se diferencian?*
45	Viky	*Los números*
46	Profesor	*Empiezan con diferentes números. La que escribió Vanesa empieza en 4; la de Yethel, en 1044; pero la regla es la misma. ¿Cuál es?*
47	Todos	*Sumar 4*
48	Profesor	*¿A qué número?*
49	Laura y Yethel	*El que sea*
50	Profesor	*El que sea. Pero a ese número le tengo que sumar 4 ¿Para qué?*
51	Yethel	*Para obtener el resultado*
52	Profesor	*¿Y cuál es ese resultado?*
53	Vanesa	*Los números de la secuencia*

En este intercambio podemos ver que los alumnos reconocen que el patrón que rige las dos secuencias es el mismo, aceptan que esa regla vale para generar cualquier número de las secuencias y que, además, éstas pueden empezar en cualquier número. Este puede ser el primer el paso hacia la idea de número general.

Este tipo de actividades permite introducir a los alumnos al uso de expresiones simbólicas. Se recomienda que el proceso sea gradual, que se haga énfasis primero en la interpretación y después en la simbolización; debe permitírsele a los alumnos que utilicen cualquier tipo de símbolo para representar un número general.

Se retomaron tres de las secuencias con las que ya se había trabajado y se pidió a los alumnos que simbolizaran la regla que regía cada secuencia. El siguiente fue el primer intento de los alumnos para representar un número con un símbolo:

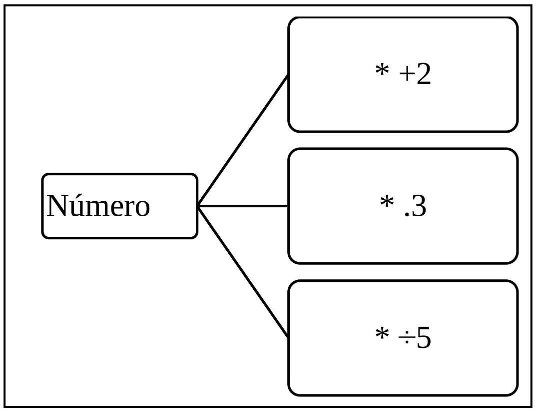


Gráfico 4. *Primera representación simbólica de los estudiantes (Fase Instruccional)*

A raíz de esta simbolización, se dio el siguiente intercambio verbal:

Cuadro 9

Entrevista colectiva 2

Renglón		
43	Profesor	*¿Qué representa el símbolo*?*
44	Varios	*Un número*
45	Profesor	*¿La palabra "número"?*
46	Varios	*No*
47	Profesor	*Entonces, ¿qué representa?*
48	Antonio	*Una palabra*
49	Profesor	*¿Qué palabra?*
50	Antonio	*Número*
51	Profesor	*¿Representa la palabra" número"?*
52	Marena	*No. Representa un número, el que sea*

Se observa que Antonio aún no tenía mucha claridad acerca del significado del símbolo empleado. En este caso fue muy oportuna la intervención del profesor, quien creó las condiciones para que los estudiantes expresaran sus puntos de vista. La participación de Marena, posterior a la de Antonio, aclaró de manera muy precisa y sin titubeos que el símbolo representaba cualquier número. Esto constituyó una oportunidad para los otros estudiantes de corregir su interpretación, en caso de haber sido errónea, sin necesidad de que el profesor interviniera directamente.

Es necesario que la introducción de las letras como símbolos matemáticos se establezca como un acuerdo, que sea una convención a la que se llega. En el caso que estamos analizando, después de que los alumnos habían usado distintos símbolos para representar el número general de una secuencia, el profesor aclaró que, si bien los símbolos usados eran aceptables, en matemáticas suelen usarse letras, cualquier letra, cuando se quiere representar un número cualquiera, indefinido. Después de esta aclaración, los alumnos, sin ningún tipo de dificultad escribieron las siguientes reglas generales:

Cuadro 10

Simbolización de los estudiantes en la fase instruccional

Viky	$O + 2$	$O.3$	$O \div 5$
Juliana	$N + 2$	$a.3$	$b \div 5$
Antonio	$d + 2$	$Z.3$	$x \div 5$

Es oportuno destacar que los alumnos usaron distintas letras para simbolizar un número general, en la representación de las mismas reglas; no tuvieron dificultad para reconocer que $d + 2$ y $O + 2$ representaban la misma regla, en la que d y O simbolizaban cualquier valor.

Fase de exploración

Categorías de análisis

En este estudio se denota la representación semiótica clasificada a un registro como $\boldsymbol{RS}(\boldsymbol{X_n^{p:r}})$, donde $\boldsymbol{RS}$ corresponde a la *representación semiótica constituida,* $\boldsymbol{X}$ se identifica con el *registro* al cual pertenece la representación*,* el subíndice $\boldsymbol{n}$ simboliza la *enumeración* de la representación, los superíndices $\boldsymbol{p}$: $\boldsymbol{r}$ se corresponden respectivamente con el *grupo y el alumno* que realiza la representación.

Del mismo modo, denotaremos con $\boldsymbol{T}$ y **C**, respectivamente, las trasformaciones de tratamiento y conversión. Es necesario aclarar que hay unas subcategorías emergentes debido a que para algunos autores Rojas (2014, 2015), D'Amore (2006) existen algunos signos y símbolos utilizados o que emergen por una construcción cultural que no pueden ser identificados en un sólo registro semiótico, en otras palabras, unos "registros intermedios" que constituyen diversos elementos que el sujeto acude para nombrar el objeto (entendemos que estos registros intermedios poseen todas las propiedades de un registro semiótico institucional), para lo cual lo simbolizaremos con $\boldsymbol{RS}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{p}:\boldsymbol{r}})$ donde la representación transita entre los registros $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$.

Cuadro 11

Categorías de análisis entendidas desde el enfoque estructural funcional

Referente	Característica para analizar	Subcategorías
Duval (2017)	Uso de representación y clasificación (RS)	Registro Figural $\boldsymbol{RS}(\boldsymbol{F_n})$
		Registro Aritmético: Todo tipo de representaciones que aluden a objetos propios de la aritmética $\boldsymbol{RS}(\boldsymbol{N_n})$
		Registro algebraico: Son representaciones de tipo alfanuméricas asociadas al uso de simbolismo algebraico $\boldsymbol{RS}(\boldsymbol{A_n})$
		Registro lenguaje natural: Representaciones verbales o escritas que aluden a un lenguaje propio del contexto del sujeto $\boldsymbol{RS}(\boldsymbol{L_n})$
		Tratamiento: Equivalencia de representaciones por medio de transformaciones en un mismo registro semiótico $\boldsymbol{T}$: $\boldsymbol{RS}(\boldsymbol{X_n}) \rightarrow \boldsymbol{RS}(\boldsymbol{X_m})$
Duval (2017)	Las transformaciones asociadas a las representaciones usadas $T(S)$	Conversión: Son transformaciones que el estudiante hace cuando realiza una equivalencia entre representaciones del mismo objeto, pero en diferente registro semiótico $\boldsymbol{C}$: $\boldsymbol{RS}(\boldsymbol{X_n}) \rightarrow \boldsymbol{RS}(\boldsymbol{Y_m})$

Ahora bien, manteniendo la estructura de la generalización algebraica (Radford, 2013) y los procesos de generalización (Mason, 1996), se relacionan en el siguiente cuadro algunos de estos elementos expuestos para el desarrollo del pensamiento algebraico.

Cuadro 12

Categorías de análisis entendidas desde los procesos y la estructura de la generalización algebraica.

Etapa	Estructura de la generalizaciónalgebraica (Radford, 2013)	Procesos de generalización algebraica (Mason, 1996)
1	Términos dados	Percibir el patrón
	Determinaciones sensibles	
2	Característica común	Expresar el patrón
	Abducción analítica	
3	Aplicación a términos no dados	Registrar el patrón
4	Deducción de la fórmula	Validez de la expresión

Por último, es de resaltar que previo a que el estudiante construya una expresión o representación algebraica, debe explorar propiedades o relaciones entre cantidades y determinar la comunalidad de la secuencia de patrones, se tiene en cuenta la taxonomía que adecuó Trujillo et al. (2009) ya que hicieron las siguientes modificaciones (radicadas en la segunda parte que corresponde a las generalizaciones reflejadas) a la planteada originalmente por Ellis (2007):

1. No se incluyó la subcategoría influencia ya que se considera que hace referencia a las acciones que los estudiantes realizan para poder enunciar la generalización.

2. Distinguir dos tipos de enunciados dentro de la subcategoría de similitud de objetos o representaciones

Esa distinción se hace necesaria porque se consideran expresiones aritméticas y representantes numéricos que pueden tratarse como equivalentes, a continuación, se presenta la taxonomía utilizada al momento de analizar la información, de manera que el estudiante realice una generalización aritmética:

Cuadro 13

Categoría de análisis entendidas desde la taxonomía modificada por Trujillo et al.(2009) desde las generalizaciones aritméticas reflejadas.

<table>
<tr><th colspan="4">Taxonomía modificada de generalizaciones reflejadas</th></tr>
<tr><td rowspan="9">Identificación o enunciado</td><td colspan="3">1. Fenómeno continuo: La identificación de una propiedad dinámica que se extiende más allá de un ejemplo específico.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2. Similitud: Enunciado de una similitud o igualdad.</td><td colspan="2">Propiedad común: La identificación de la propiedad común a objetos o situaciones.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Objetos o representaciones: La identificación de objetos como similares o idénticos.</td><td>Estructura</td></tr>
<tr><td>Resultado</td></tr>
<tr><td colspan="2">Situaciones: La identificación de situaciones como similares o idénticas.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">3. Principio general: Un enunciado de un fenómeno general.</td><td colspan="2">Regla: La descripción de una fórmula general o hecho.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Patrón: La identificación de un patrón general.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Estrategia o procedimiento: La descripción de un método que se extiende más allá de un caso específico.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Regla global: El enunciado del significado de un objeto o idea.</td></tr>
<tr><td>Definición</td><td colspan="3">1. Clases de objetos: La definición de una clase de objetos que satisfacen todos una relación dada, patrón u otro fenómeno.</td></tr>
</table>

Cuando el estudiante determina una definición para un conjunto de elementos que se satisfacen del mismo patrón, es posible que realice una transición entre aquellas expresiones aritméticas, las relaciones entre cantidades y la asignación de números representativos o fijos para poder expresar de manera más sofisticada dicho fenómeno, es decir, una expresión desde la generalización algebraica.

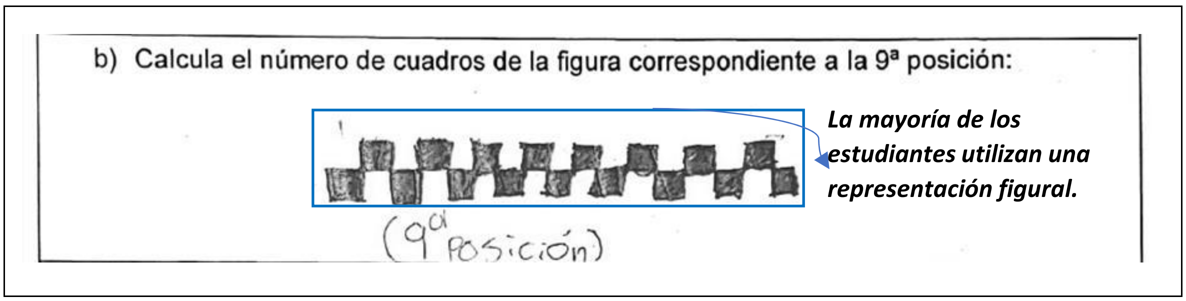
Subfase de exploración 0. Tarea 0. Tarea de indagación

Inicialmente se pensaba que el problema de este grupo de estudiantes radicaba en que no podían hacer generalizaciones, para verificar si este era el problema se propuso un instrumento de indagación, tarea de indagación, tomada y modificada de Rojas *et al* 1999 (pp. 92-93), una tarea que pretende evidenciar los procesos de generalización y el uso de sistemas de representación que realizaban los estudiantes.

En la aplicación de este instrumento, los estudiantes mostraron que sí hacían procesos de generalización, pero las representaciones obtenidas no eran adecuadas para la situación, es decir, hay un proceso de enunciación de la comunalidad, se percibe el patrón y se expresa, pero los estudiantes en su afán de registrarlo algebraicamente (aplicarlo a términos no dados),utilizan expresiones que no representan dicho patrón.

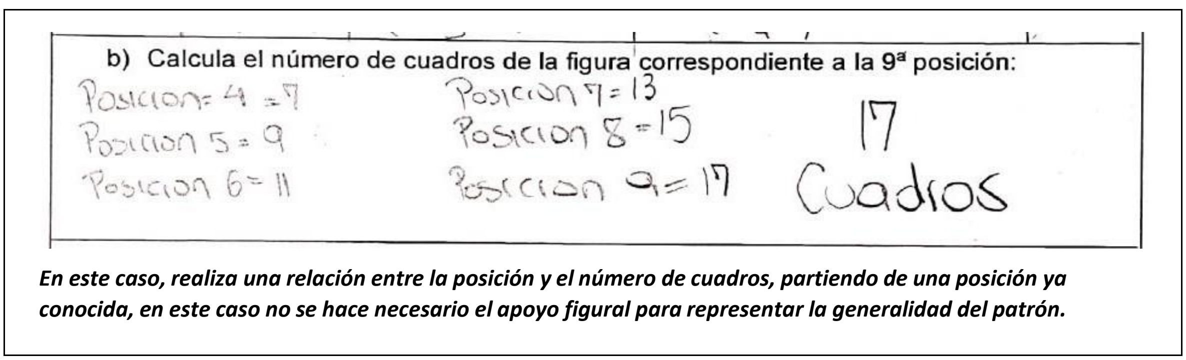
Cuadro 14

Producción de Vanesa, ítem b tarea de indagación



Cuadro 15

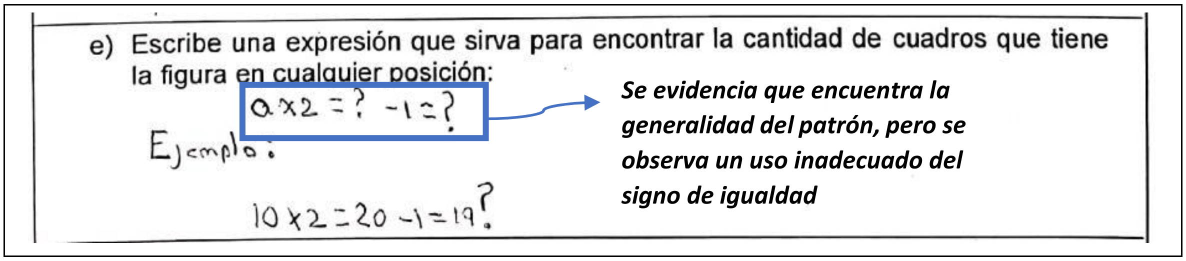
Producción de Marena, ítem b tarea de indagación.



En el ítem b (cuadro 15), los estudiantes utilizaron un apoyo figural siguiendo el proceso al que les inducía el ítem a, pocos estudiantes lo abandonaron, como la estudiante Marena, que relacionó las posiciones con la cantidad de cuadros de la secuencia, otros estudiantes sumaron la cantidad de cuadros que tenía la posición 4 con la cantidad de cuadros que tenía la posición 5. Dado lo anterior, existe una representación aritmética que reconoce y define objetos que se satisfacen por un mismo patrón, un número generalizado que corresponde a las características comunes aplicadas a términos no dados (*generalizaciónaritmética*).

Cuadro 16

Producción de Luis, ítem e tarea de indagación.


e) Escribe una expresión que sirva para encontrar la cantidad de cuadros que tiene la figura en cualquier posición:

a x 2 = ? -1 = ?

Ejemplo:

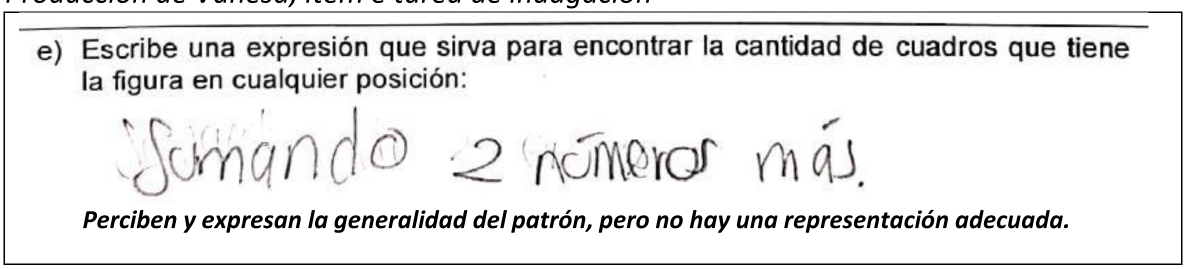
10 x 2 = 20 -1 = 19?

Se evidencia que encuentra la generalidad del patrón, pero se observa un uso inadecuado del signo de igualdad

Ahora bien, en la producción del Luis (cuadro 16), se muestra cómo elabora una representación alfanumérica de la generalidad del patrón, que al momento de dialogar con él reconoce el sentido operatorio sobre su expresión, aunque hace uso inadecuado del signo de igualdad también se observa la necesidad de ejemplificar, no basta con la expresión general.

Cuadro 17

Producción de Vanesa, ítem e tarea de indagación


e) Escribe una expresión que sirva para encontrar la cantidad de cuadros que tiene la figura en cualquier posición:

Sumando 2 números más.

Perciben y expresan la generalidad del patrón, pero no hay una representación adecuada.

Por último, en la producción de la estudiante Vanesa (cuadro 17), encuentra que sumando dos más al número de cuadros de la posición anterior obtiene el número total de cuadros de la posición requerida. En este caso, la generalización evidenciada corresponde a la identificación de objetos similares en la secuencia de patrones, determinando un resultado basado en operaciones aritméticas que al momento de concebir el *principio general* no se relaciona con el registro del patrón.

De acuerdo con los elementos observados en la aplicación de la tarea de indagación, se pueden evidenciar los problemas a la hora de interpretar la letra y darle un uso adecuado, los procesos para operar letras (asignación de valores no establecidos, deducciones erróneas por su representación gráfica), por esta razón, Collis (1982) propone una serie de momentos en los cuales el estudiante debe pasar, antes de llegar a un razonamiento formal, involucrando las letras y el signo de igualdad.

1. Reemplazando por un número y si no funciona, abandonan la tarea.
2. Reemplazando por un número y a partir de ello sacan sus propias conclusiones.
3. Representar incógnitas específicas o números generalizados con las mismas propiedades de los números con los que ya habían trabajado en tareas anteriores.

Ya se había mencionado que uno de los focos polémicos radica en el uso de la letra en este contexto y cómo se ponen en juego sus interpretaciones (Küchemann 1980), dado que los estudiantes para poder llegar a la letra como número generalizado, por necesidad se interpreta la letra de modos distintos. Por ejemplo, al hallar valores de una letra en un problema la letra se veía como un número particular-único pero desconocido. Lo complejo es que el estudiante debe reconocer en qué problema es viable utilizar una u otra interpretación de la letra, pues incurriría en dificultades al momento de resolverlo.

Subafase de exploración 1: tarea no. 1

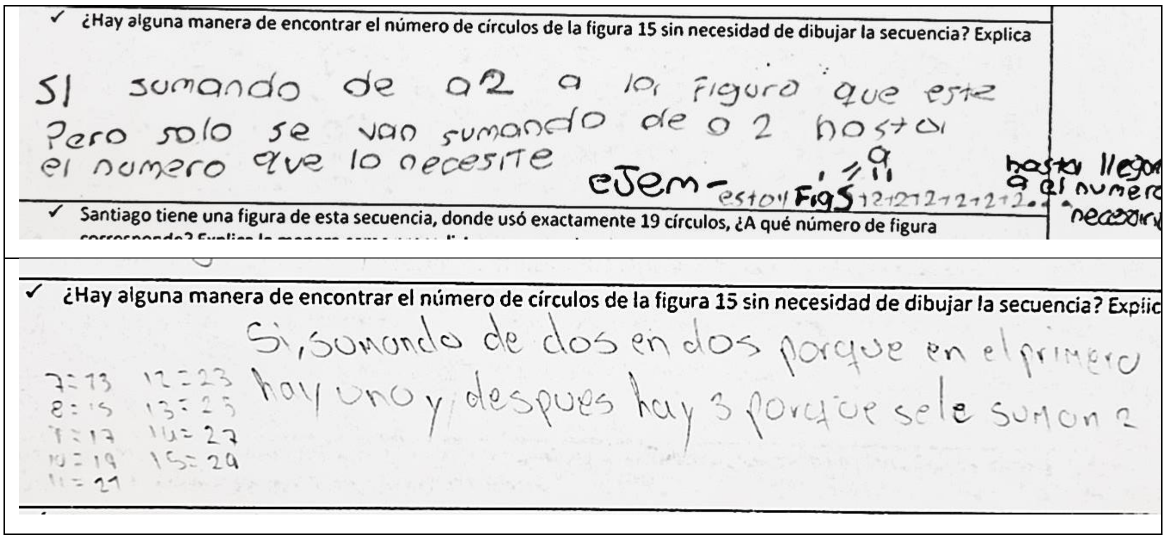
Análisis general.

En la aplicación de las tareas se evidenciaron algunos aspectos generales que corresponden al reconocimiento del patrón, en donde la mayoría de los estudiantes (74%) hacen uso de los registros figural y lenguaje aritmético (principalmente) para referirse al modelo que representa la secuencia o la generalización, cabe aclarar que también hay un uso recurrente en representaciones que alude a elementos propios de la aritmética y más aún, del modo operativo de los números, es decir, operan la generalidad con casos particulares (Kücheman, 1980 llamaría a este uso ‘letra evaluada’).

Además, las construcciones, procesos y la designación de la generalidad se construyeron pormedio de representaciones no propiamente pertenecientes a un solo registro semiótico, por lo contrario, gran parte de los estudiantes usaron múltiples contenidos que les permitió nombrar el objeto; con respecto a lo anterior, D’Amore (2006) plantea que la elección de un registro de representación depende necesariamente de la intención y el nivel de refinación de la comunidad. Es importante mencionar que cinco estudiantes apoyaron sus respuestas con expresiones aritméticas que son entendidas como números representantes, o números generalizados relacionando este término con lo que menciona Kücheman (1980) al categorizar la letra como número generalizado, en este caso se ve un número específico como el representante de la generalidad del patrón. Por ejemplo, en la figura 15 el estudiante toma el número 5 como un representante, es decir, lo pueden comprobar para cualquier posición, pero siempre con un número específico (Ver Cuadros 18 y 19).

Cuadro 18

Producción de Andrés yJesús, ítem 2 tarea 1



✓ ¿Hay alguna manera de encontrar el número de círculos de la figura 15 sin necesidad de dibujar la secuencia? Explica

SI sumando de a 2 a la figura que este Pero solo se van sumando de a 2 hasta el numero que lo necesite

ejem- esto Fig 5 1+2+2+2+2+2+2... = 9

hasta llegar a el numero necesario

✓ Santiago tiene una figura de esta secuencia, donde usó exactamente 19 círculos, ¿A qué número de figura

✓ ¿Hay alguna manera de encontrar el número de círculos de la figura 15 sin necesidad de dibujar la secuencia? Explic

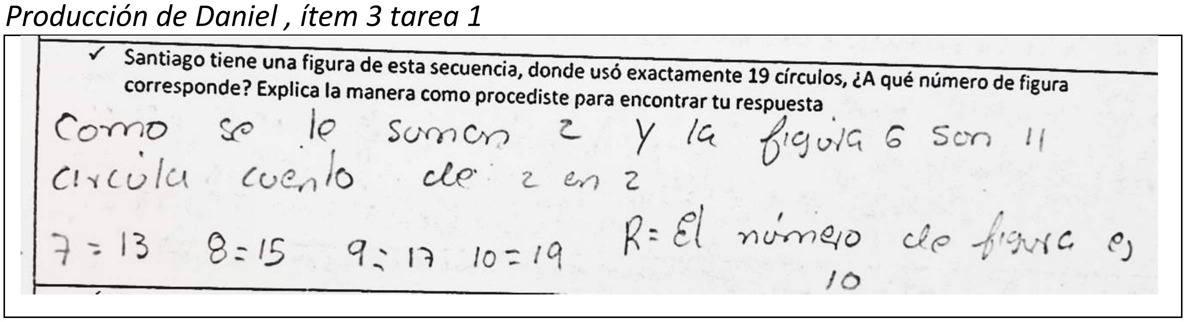
Si, sumando de dos en dos porque en el primero hay uno y despues hay 3 porque se le suman 2

7=13 8=15 9=17 10=19 11=21 12=23 13=25 14=27 15=29

Por otro lado, un estudiante si bien representa mediante un registro semiótico aritmético, el uso que hace del signo de igualdad corresponde más a una simbolización de correspondencia o implicación entre la figura y la cantidad de círculos (Cuadro 18).

Cuadro 19

Producción de Daniel , ítem 3 tarea 1



✓ Santiago tiene una figura de esta secuencia, donde usó exactamente 19 círculos, ¿A qué número de figura corresponde? Explica la manera como procediste para encontrar tu respuesta

Como se le suman 2 y la figura 6 son 11 circula cuento de 2 en 2

7 = 13 8=15 9=17 10=19 R= El número de figura es 10

Además, se encuentra una producción que 'transita' en dos registros semióticos, ya que utiliza expresiones aritméticas específicas que las combinan con lenguaje natural para mostrar aspectos 'generales' (Cuadros 20 y 21).

Cuadro 20

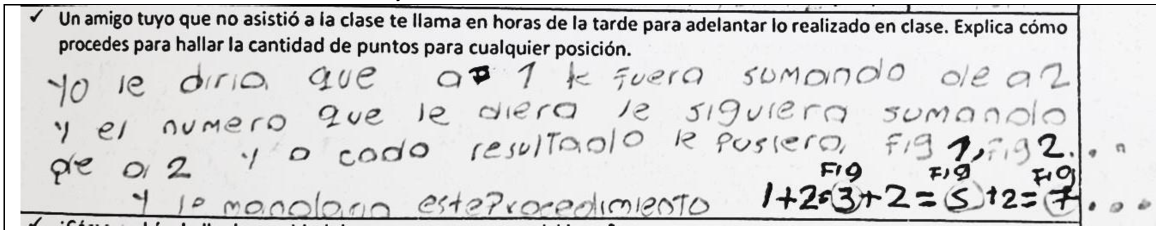
Producción de Andrés, Fernando y Marena, Ítem 4 tarea 1

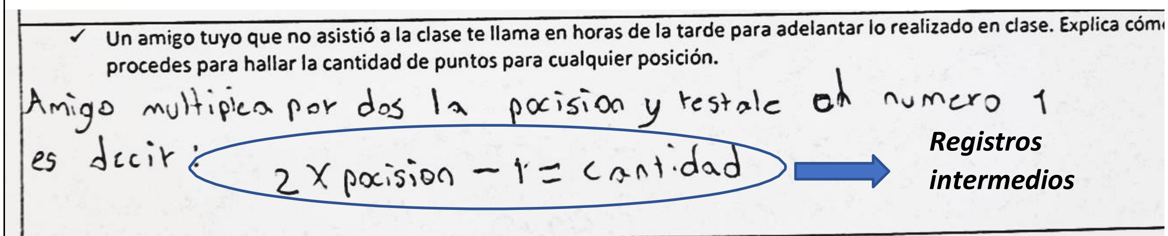
✓ ¿Existe alguna figura que tenga una cantidad par de círculos? Explica No, porque al sumar dos números seguidos nunca va a dar un número par
✓ ¿Existe alguna figura que tenga una cantidad par de círculos? Explica NO por que lo secuencia empeso desde un numero impar y fueron aumentando de 0,2 y es un numero par o si nunca va a dar como resultado numero par ejemplo 97 impar + por 2 = 99 impar
✓ ¿Existe alguna figura que tenga una cantidad par de círculos? Explica No, porque en la multiplicacion da un numero par pero al restar el 1 nos da impar en cada figura

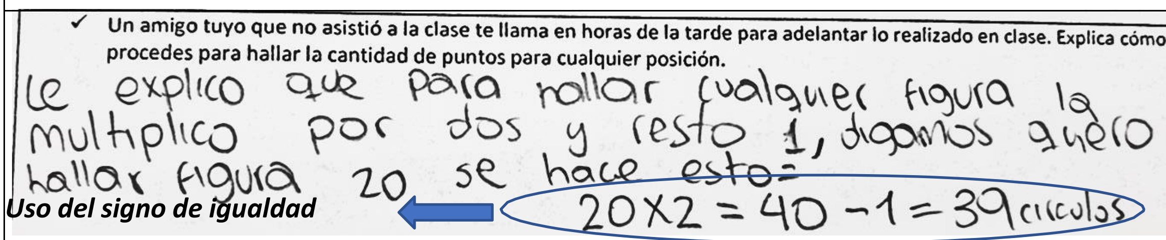
También es posible observar que en las producciones de los estudiantes hay representaciones que corresponden a registros semióticos 'intermedios', en tanto, hacen uso de lenguaje natural y lenguaje aritmético, los estudiantes integran estos dos lenguajes, en el cual se evidencia además un uso inadecuado que le dan al signo de igualdad, dificultad que reportan Rojasy Vergel (2013).

Cuadro 21

Producción de Andrés, Marena y Luis, Ítem 5 tarea 1



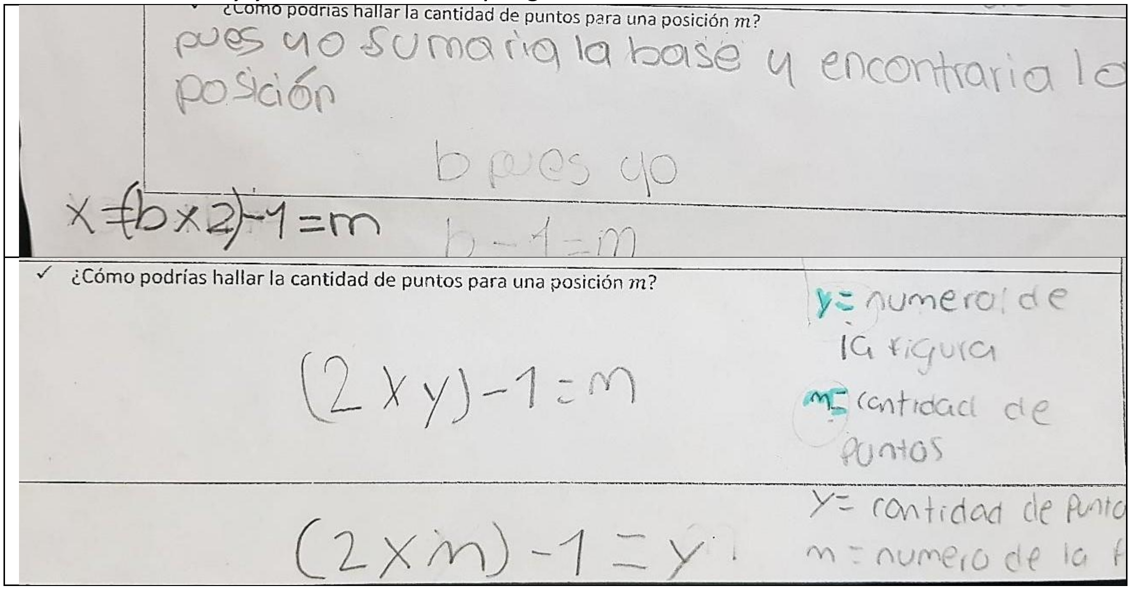




Por último, algunas producciones son notorias ya que los estudiantes trabajan con la letra asignándole una interpretación particular, en este caso como número generalizado, como lo menciona Kücheman (1980). En las siguientes producciones se evidencia que no hay una correspondencia clara entre la explicación que hacen en lenguaje natural y la expresión en un lenguaje alfanumérico, es decir, no establecen una adecuada correspondencia entre lo que se le pide con la denominación de la posición m, la manera como lo escribe en lenguaje natural y la expresión algebraica, aunque finalmente encuentran una manera de representar la generalidad del patrón (Ver Cuadro 22).

Cuadro 22

Producción de Viky y Antonio, Ítem 6 pregunta 1



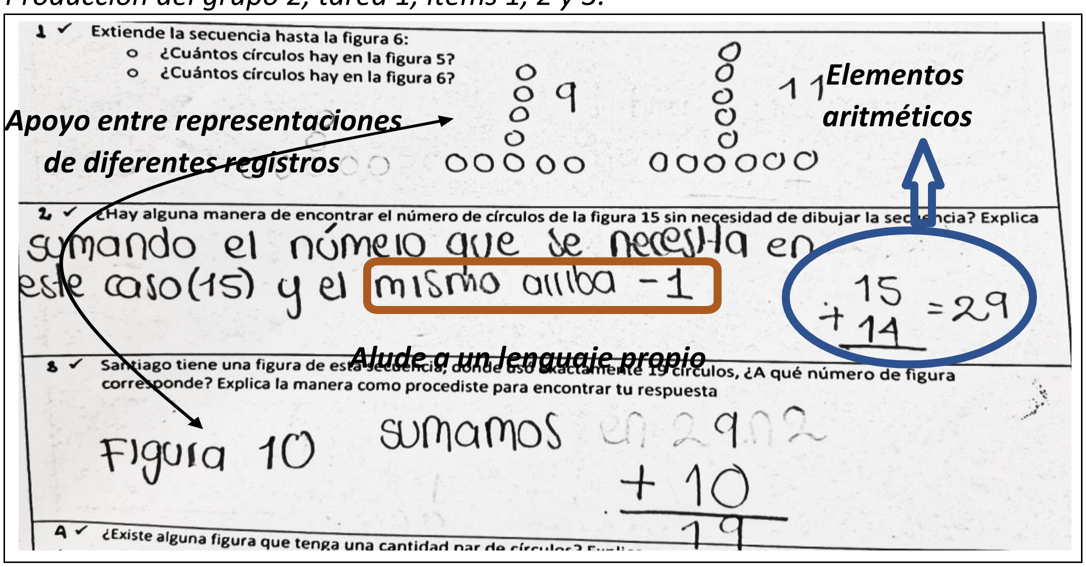
Análisis grupal[5].

Grupo 2: Está conformado por <u>Juliana</u>, Kevin, Daniel y Vanesa.

El análisis va a estar dirigido a encontrar elementos prácticos que estén apoyados en la teoría y, por consiguiente, en las categorías de análisis. Se analizarán los ítems 1, 2 y 3.

Cuadro 23

Producción del grupo 2, tarea 1, ítems 1, 2 y 3.



---

[5] Los estudiantes que se encuentran subrayados son aquellos que fueron seleccionados para la entrevista (representantes de cada grupo) en esta primera tarea.

La estudiante Juliana tanto en su producción individual como en la entrevista evidencia un sentido de indeterminancia que inicialmente lo muestra desde su lenguaje natural, cuando dice "*el mismo arriba menos uno"* (Cuadro 23) en su producción individual, en la entrevista (E3) relató cómo trata de manera operativa la situación, haciendo deducciones que la llevaron a encontrar una forma para encontrar su respuesta.

Es evidente que en este grupo hacen uso de distintas representaciones que están directamente relacionadas: $RS(F_1^2)$, $RS(N_1^2)$, $RS(L_1^2)$, en tanto reconocen la equivalencia entre cada una de las representaciones, es decir, aluden indirectamente a cualquiera de las tres representaciones como un contenido utilizando signos; según Duval (2017) esto es una atribución de un "sentido particular". Para este grupo, la comunalidad en la secuencia del patrón se constituye a partir de la suma de dos cantidades (en este momento no le asignaremos ningún tipo de significado a este proceso o producto).

Ahora bien, dado que los estudiantes reconocen la equivalencia entre las representaciones, en el grupo se evidencia que existe un sentido de indeterminancia, lo cual en palabras de Radford (2010) los estudiantes identifican el patrón [objetos visibles] y pueden pensar en valores, en este caso figuras, que no se presentan en la situación [objetos imaginables] Cuadro 23, ítem 2)

Debido a la primera parte de la producción de este grupo, no se puede afirmar que hasta el momento hagan una transformación de conversión, pero es posible evidenciar que existe un apoyo entre representaciones que posibilita el tránsito entre un registro y otro, aún sin establecer lo que para Duval (2017) es fundamental al momento de configurar una conversión: *sentido de operatividad*. Además de ello, al momento de identificar el patrón (Cuadro 23, ítem 2-3), los estudiantes pasan por un proceso de *generalización aritmética* donde, segúnla taxonomía de Trujillo et al (2009), las acciones realizadas y que se evidencian en la imagen corresponden:

1. *Identificar el fenómeno* continúo llevado a los términos conocidos, en este caso particular los estudiantes utilizan unas representaciones $RS(N_1^2)$ y $RS(L_1^2)$ que posibilitan determinar la comunalidad en la secuencia de patrones.

2. *Similitud*, cuando los estudiantes utilizan una representación (F^2)

3. Para nombrar objetos que no están visibles en la secuencia de patrones, reconocen la equivalenciaentre los objetos que cumplen o están bajo el mismo patrón.

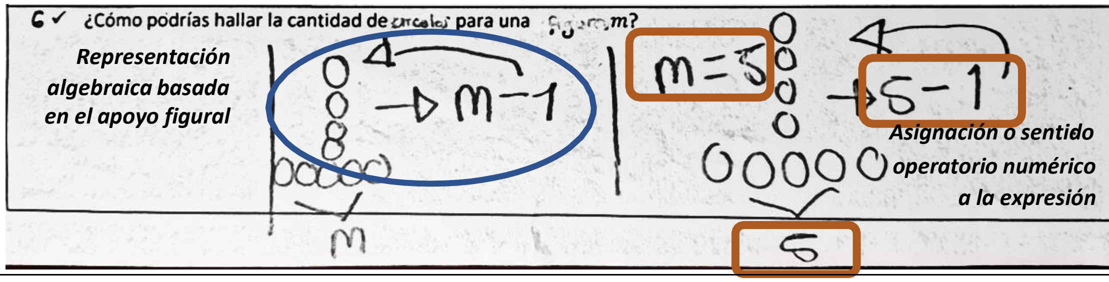
4. *Principio general*, el grupo proporciona una regla que podría cumplir para cada uno de los términos presentes y ausentes, cuando afirman “sumando el número que se necesita en este caso (15) y el mismo arriba -1” (Cuadro 23); para Trujillo et al (2009), este tipo de generalizaciones contienen un anclaje a casos propiamente numéricos que emerge pormedio de la descripción de un método que se extiende más allá de un caso particular.

5. *Definición de clase de objetos,* este proceso limita con una acción de la generalización algebraica porque hay una definición de aquel patrón que cumplen cada uno de los términos de la secuencia, lo que Mason (1996) llamaría *expresar el patrón*; por ende, la percepción y la expresión del patrón queda en expresiones no algebraicas, aunque hacen una aproximación al momento de registrar el patrón con letras que son tratadas como objetos (se refieren a *m* como un representante de números, es tratado como la base de la representación figural)

También es posible decir que la indeterminancia se asocia al hecho de representar o anclar sus justificaciones a expresiones propiamente numéricas, esto permite que, al momento de intentar hacer una generalización algebraica, los integrantes de este grupo le empiezan a dotar un sentido operatorio a dichas representaciones (operar sobre objetos específicos), trabajar con lo particular desde lo general (Rojas, 2015). En el caso de la expresión semiótica que asignan al objeto, se asocia con una representación conformada por signos alfanuméricos apoyadas de una representación pictórica (realizan una flecha para establecer dichas relaciones); desde lo evidenciado en la producción, no se puede afirmar que exista o no una transformación de conversión, incluso tampoco es posible determinar una clasificación hacia registro semiótico intermedio ya que es evidente la separación entre cada una de las representaciones hechas. En este hecho, se clasifican las representaciones de la siguiente manera $RS(A_1^2)$ y $RS(F_2^2)$, debe mencionarse, que de acuerdo con lo planteado por Rojas y Vergel (2013) el sentido operatorio para este segmento es asociado a dos componentes: un posible proceso de abducción y una generalización aritmética de la situación (Cuadro 24).

Cuadro 24

Producción del grupo 2, tarea 1, ítem 6



En la entrevista (E2), la estudiante Juliana muestra un sentido de indeterminancia cuando reconoce a m como cualquier número, además de darle un carácter operatorio como lo muestra en su producción individual.

Por otro lado, al momento de pedirle que contara por qué había dibujado los círculos, ella manifiesta que lo hizo para que *"supieran que m es igual a estos"* (Juliana, E3) señalando con sus dedos los círculos que están horizontalmente en la figura, incluso haciendo la explicación cae en cuenta que cometió un error cuando hizo la relación del número de círculos con la forma como los había encontrado. Incluso la misma estudiante en la discusión en grupo mostró a sus compañeros el uso de la regularidad que ella había encontrado.

Por último, puede decirse que la estudiante Juliana, desde un comienzo en su producción individual, y luego en su intervención en el grupo se desprende rápidamente del registro figural, como lo evidencia en la entrevista (E4), mostrando un acercamiento a una generalización algebraica cuando hace la aplicación de la comunalidad a los términos no dados, registrandoel patrón con una expresión alfanumérica (llegando a la etapa 3 de la generalización algebraica).

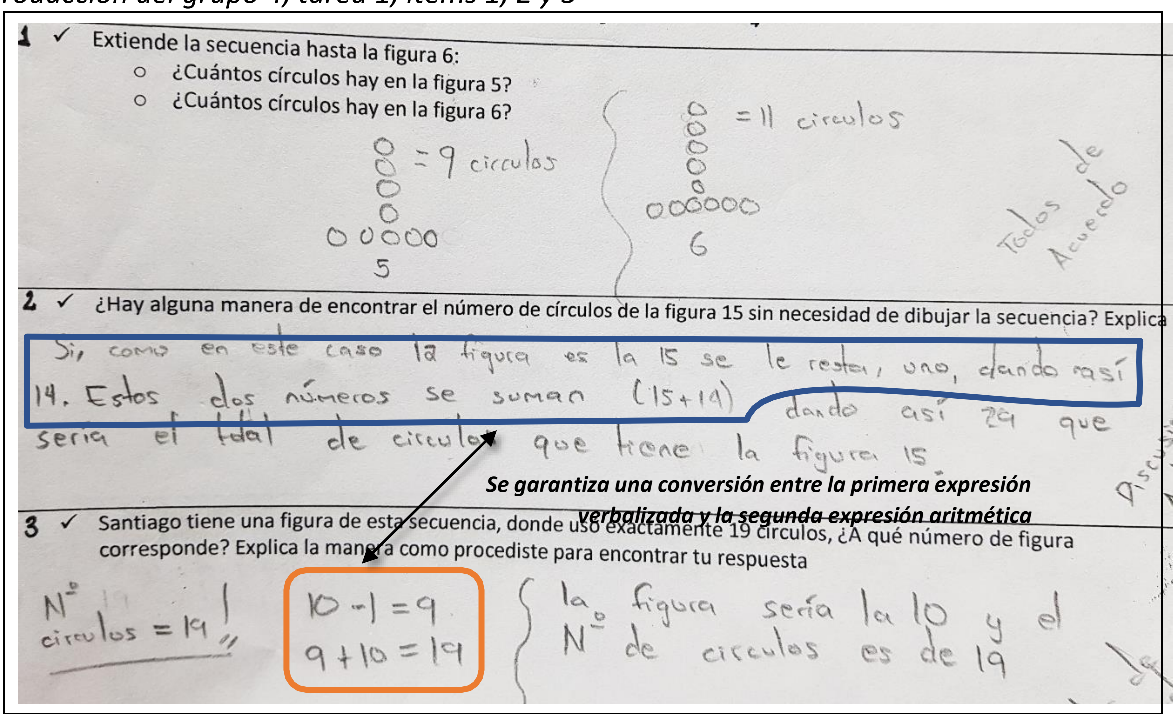
Grupo 4: Está conformado por Jesús, Fernando, Andrés, Carlos y Humberto.

Las producciones de este grupo en este primer momento, muestran una relación entre cada una de las representaciones evidenciadas, el objeto el cual están representando o nombrando presenta unas características de formación (patrón) y lo identifican en un primer momento con ayuda de lo pictórico una $RS(F_1^4)$ aludiendo al mismo tiempo a unas notaciones aritméticas que representan la comunalidad de la secuencia $RS(N_1^4)$; a diferencia del anterior grupo, éste no acude a un sistema de signos que se encuentren dentro del lenguaje cotidiano, pero sí se apoya de la verbalización de características generales, indicando que *si se suman (14+15)=29 y este valor corresponde al total de círculos que tiene la figura 15* (Cuadro 25).

Es posible afirmar que el sentido operatorio se enfoca en el número de la figura 15, de allí que los estudiantes realizan la operación (15-1)+15 para determinar la cantidad total de círculos, según Rojas (2015) para este tipo de transformaciones (evidentemente dentro del registro semiótico aritmético) se le atribuye la necesidad de 'manejar' las propiedades básicas del sistema decimal. En resumen, hay acercamientos a un tratamiento desde lo verbalizado a lo escrito aritméticamente determinado como $T: RS(N_1^2) \rightarrow RS(N_2^2)$ donde se garantiza una *equivalencia sintáctica* (Cuadro 25, ítem 2)

Cuadro 25

Producción del grupo 4, tarea 1, ítems 1, 2 y 3



Ahora bien, el sentido de indeterminancia aparece cuando el estudiante habla de la 'figura' como un elemento que se puede operar, pero a diferencia del anterior grupo, solamente se relacionan los registros que anteriormente se identificaron. Al momento de designarle un nombre a la figura y al comportamiento que tiene ésta dentro del patrón, el grupo dos acude a una $RS(A_1^4)$ donde existen algunas dificultades con el uso del signo de igualdad; sin embargo, se reconoce que los estudiantes operan con la letra (letra como objeto) y designan simbólicamente el patrón, esto permite clasificar en una etapa 4 de la generalización algebraica dicha expresión.

En resumen, este grupo hace una transición entre la generalización aritmética y la algebraica, usando como puente las representaciones aritméticas, figurales y el uso de lenguaje natural para poder registrar el patrón con una expresión mejor elaborada acercándose a un registro algebraico.

Al momento de preguntarle a Fernando sobre los procesos que sus compañeros utilizaron para dar respuesta al ítem 6, se detecta que hay una imposición *cultural* sobre el uso operativo y el sentido que tiene esa representación algebraica planteada.

El proceso de abducción en este grupo llama la atención debido que se intenta generar una expresión alfanumérica donde es posible operar sobre ella siempre y cuando haya una sustitución por valores numéricos, es decir, esta designación está sujeta a ser una generalización aritmética. Cuando el docente investigador pregunta al estudiante acerca desus producciones (E6) ahí mismo se remite no a justificar la naturaleza de la representación sino a la justificación de ésta por medio de argumentos basados en la operatividad aritmética incurriendo nuevamente en el mal uso del signo de igualdad, es decir, en la identificación del fenómeno dado por el *principio general,* se justifica la representación del patrón por medio de la realización de procedimientos aritméticos.

Cuando el estudiante se da cuenta que en su producción existe esta dificultad, prontamente acude a explicar (E7) que el signo de igualdad no lo utiliza como una relación de equivalencia sino como la separación de procedimientos utilizados para encontrar la cantidad total de círculos para una figura determinada[6].

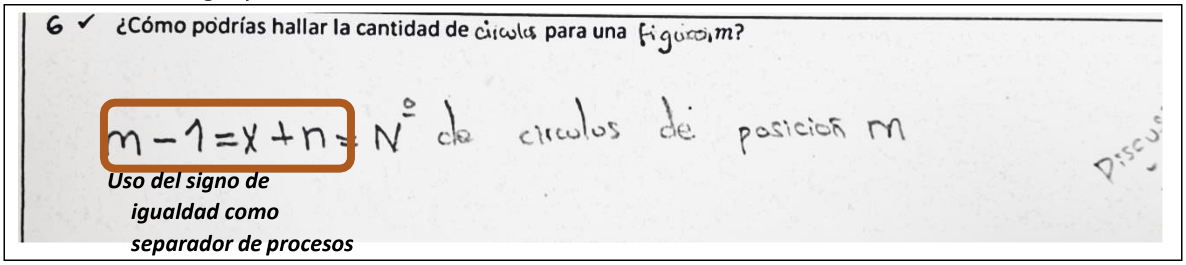
Por último, en la producción del ítem 6, no hay relación de $RS(A_1^4)$ alguna otra representación, lo cual indica que en este grupo (desde la producción escrita) carece en el usode apoyos en otros registros (Ver ítem 6, cuadro 26); se cree que con el hecho de darle unos valores numéricos a la 'fórmula', se da como válida y se prueba para todos los casos reconociendo el sentido de la indeterminancia, encontrando una expresión semiótica y

[6] Esta es una interpretación hecha por el investigador, explicando lo realizado por el estudiante

haciendo uso de operaciones dentro de un registro semiótico diferente al de la representación (aritmético): *"…Pues yo en vez de escribir yo creé como una fórmula que consiste en m-1=x que sería cualquier posición más m que es el igual al número de círculos de posición m…"*

Cuadro 26

Producción del grupo 2, tarea 1, ítem 6



Frente a este caso, al momento de discriminar el uso que le atribuyen al signo de igualdad, se puede categorizar esa representación a una *generalización algebraica* ya que al momento de deducirla fórmula (Radford, 2013), los estudiantes determinan la validez de dicha expresión por medio de ejemplos particulares presentes y ausentes en la secuencia de patrones.

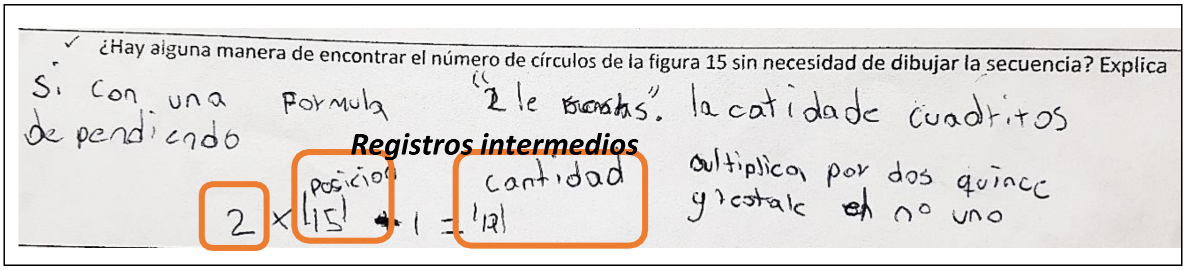
Por último, en el caso del 'Luis', quien encuentra rápidamente la comunalidad de la secuencia (Cuadros 27 y 28), realiza inicialmente un proceso de abducción[7] y, cuando debe solucionar el segundo punto, realiza una *generalización aritmética* para comprobar que la 'fórmula', como él la llama, es válida y encuentra la cantidad de círculos que tiene la secuencia en la figura 15, precisamente en este caso particular se evidencia que las representaciones que el estudiante utiliza para la designación de la generalidad no seconstituyen en un solo registro semiótico. Dado lo anterior, las representaciones semióticas se caracterizan en dos registros un $RS(A_1^0)$ relacionado con un $RS(N_1^0)$ y a este hallazgo se denomina como $RS(A - N_1^0)$ el cual es un *registro intermedio* (Duval & Sáenz, 2016; Rojas *et al.*, 1999; Rojas, 2015) que para el estudiante se vuelve como un objeto de discurso donde la indeterminancia es explícita, eso sugiere pensar en una contracción semiótica (Radford, 2010).

---

[7] Este proceso consiste en que el Luis por medio de diversas posibilidades (operaciones aritméticas) deduce una expresión que permite hallar cualquier término en la secuencia de patrones.

Cuadro 27

Producción del Luis, tarea 1, ítem 2



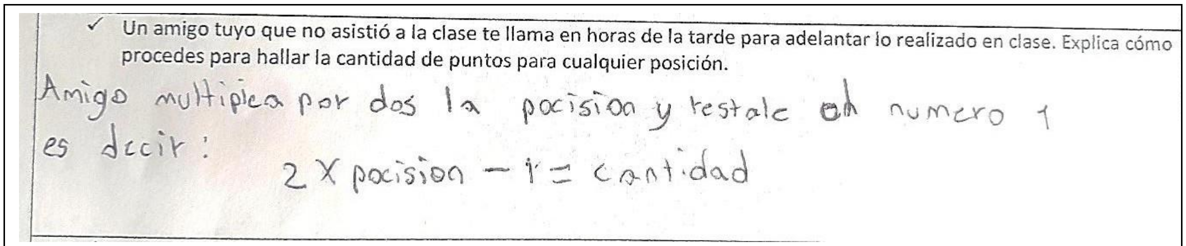
Por otro lado, cuando debe hacer el proceso inverso o revertir la formula, como él lo llama, presenta dificultades, poniendo en juego elementos operarios de la aritmética sin asignarle un sentido a sus propias expresiones o designaciones. Cuando el estudiante, empieza a reconocer un sentido operatorio de su propia expresión, sus apreciaciones apuntan a que existe lo que Radford (2008) llama una *inducción ingenua:* "…Comencé a hacer la secuencia y llegué a la respuesta de que era la posición 15 que era 19 círculos…" (Estudiante1, E10).

El sentido que el estudiante le asigna a su representación es 'atípica', debido a que no corresponde a lo convencional, es decir, la mayoría de los estudiantes logra identificar el patrón como la suma de la posición con el número anterior a esta o también como $m + m - 1$, pero en este caso el estudiante designa a la generalidad como el producto de un número restado con uno, en E9 se puede evidenciar en palabras del estudiante el sentido que corresponde a su representación.

En este caso, Luis se desprende de la necesidad de involucrar números que expliquen o validen su representación, insistiendo en usar representaciones que no están determinadas en sólo registro semiótico; como ocurre en el grupo 2 (Ver Cuadro 24). Luis hace una verbalización de la $RS(A_2^0)$ apoyada de la misma representación y claramente se evidencia un alejamiento a la inducción ingenua que en momentos anteriores recurre. De acuerdo con lo anterior, es evidente que se hace un proceso de generalización transitando por representaciones del registro semiótico aritmético y lenguaje natural hasta construir una expresión que permite hacer la aplicación del patrón a todos los términos de la secuencia como a los que no se encuentran incluidos, según Mason (1996) esto es una acción de validez en la fórmula correspondiente a la *generalización algebraica* (Ver Cuadro 28).

Cuadro 28

Producción del Luis, tarea 1, ítem 5



✓ Un amigo tuyo que no asistió a la clase te llama en horas de la tarde para adelantar lo realizado en clase. Explica cómo procedes para hallar la cantidad de puntos para cualquier posición.

Amigo multiplica por dos la pocision y restale el numero 1
es decir:
2 X pocision − 1 = cantidad

Subfase de exploración 2: tarea no. 2

Análisis general.

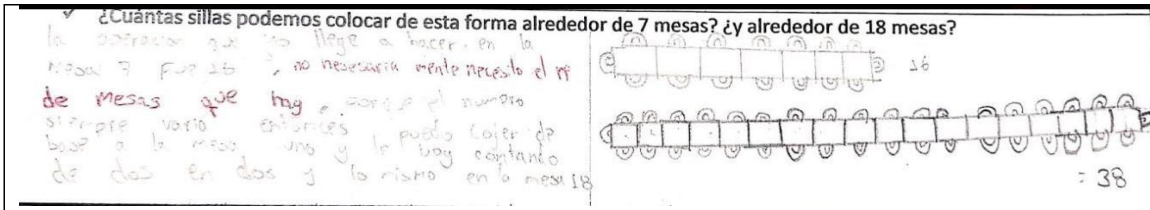
Para esta tarea, era indispensable que el estudiante lograra hacer una designación simbólica de la generalidad, esta vez sin que se le impusiera el uso de la letra como medio para representar. En este caso, no se direccionaba al estudiante para que operaracon letras, él mismo debía asignarles un sentido a sus representaciones.

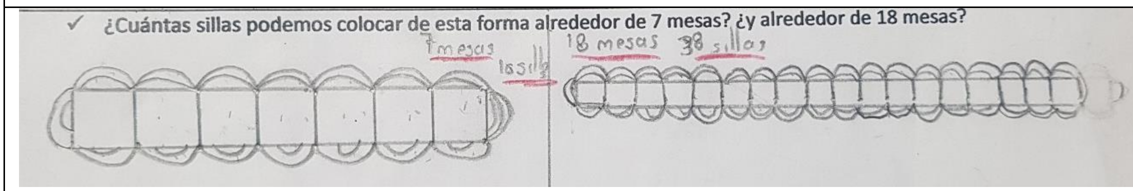
En el trabajo individual se evidencia que hay estudiantes que aún no logran desprenderse de las representaciones que pertenecen al registro figural en el desarrollo de la tarea, también seencuentran casos aislados (en poca cantidad) en donde el signo de igualdad es tomado como un separador de expresiones u operaciones; a diferencia de la tarea anterior, sólo el 32% utilizó de algún modo la letra (representación alfanumérica) para representar la comunalidad, que para la investigación es un dato muy valioso.

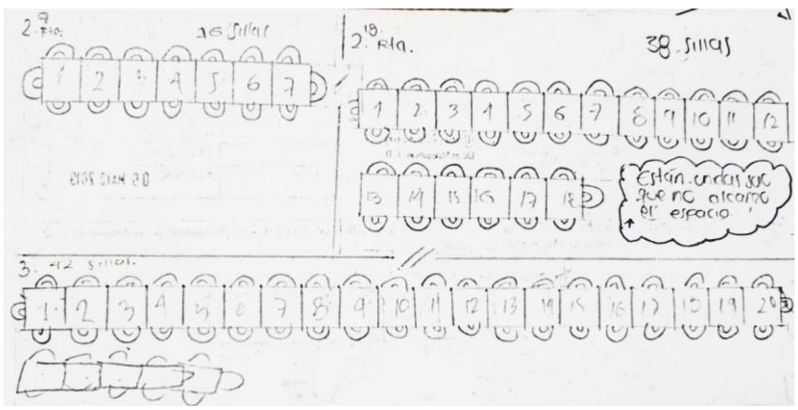
En algunas producciones de la tarea, hubo diversas representaciones que los estudiantes utilizaron para dar cuenta de la comunalidad de la secuencia que corresponden al registro figural, en este caso no es posible determinar si aquellos estudiantes tienen un sentido de la indeterminancia debido a que requieren de la figura para relacionar la cantidad de mesas conel número de sillas (Ver cuadro 29); posiblemente exista una gran relación entre el registro figural y el registro aritmético, encontrando mayor número de transformaciones de conversión entre estos dos registros.

Cuadro 29

Producción de Humberto, Carlos, y Vanesa, Ítem 2 tarea 2



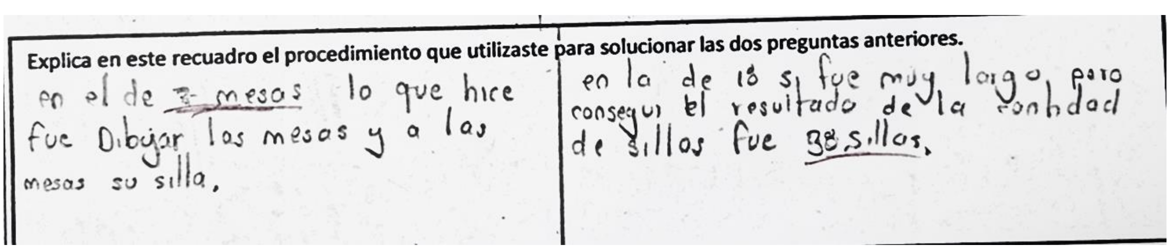




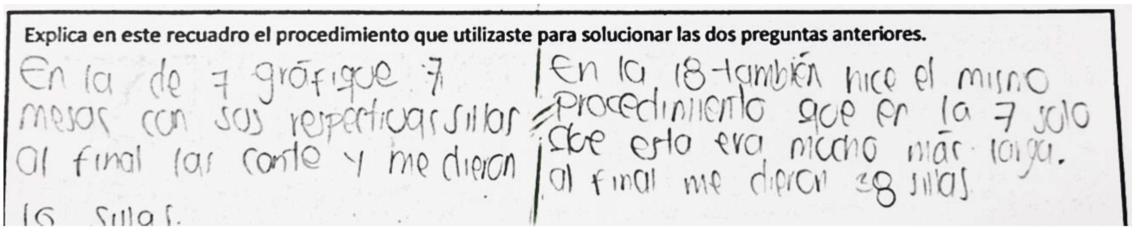
De acuerdo con lo anterior, se puede afirmar que estos estudiantes tienden a relacionar de manera directa la comunalidad con la construcción de la secuencia de manera figural; la operatividad y la designación simbólica en este caso se refiere a la verbalización y el uso de objetos aritméticos sin dar cuenta de un proceso de generalización.

Cuadro 30

Producción de Carlos y Vanesa, Ítem 2b tarea 2



Cuadro 30 (cont.).



Explica en este recuadro el procedimiento que utilizaste para solucionar las dos preguntas anteriores.

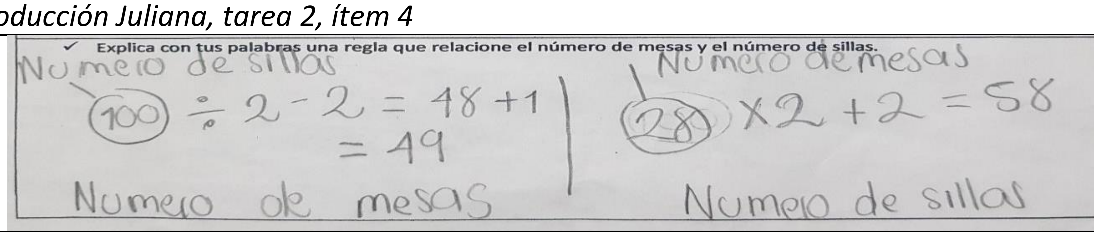
En la de 7 grafique 7 mesas con sus respectivas sillas al final las conte y me dieron 16 sillas.

En la 18 también hice el mismo procedimiento que en la 7 solo que esto era mucho más larga. al final me dieron 38 sillas

Por otro lado, se puede determinar en algunos casos que los estudiantes llegan a una generalidad aritmética ya que el número es visto como un representante de la comunalidad, es decir, identifican las propiedades y relaciones entre cantidades, enunciando un fenómeno general extendiendo las descripciones del método más allá de un caso específico, este procesoes llamado *principio general- regla global* (Trujillo et al., 2009). En los siguientes casos particularmente se evidencia la designación a lo indeterminado con un número generalizado o también haciendo uso de símbolos que para el estudiante puede llegar a ser *una caja* donde puede involucrar cualquier número de mesas o de sillas, dándole sentido a lo que Radford (2010) plantea cuando afirma que no es una condición el uso de letras para pensar y expresar algebraicamente; en este caso, se piensa algebraicamente llegando a la etapa 3 en el procesode generalización (faltando únicamente la deducción de la fórmula) pero, la acción de encerrar en un círculo los valores que deben 'variar' y asignar allí unos casos particulares para probar la propiedad común , corresponde encontrar una clase de objetos que se satisface del mismo fenómeno o patrón, que según Trujillo et al. (2009) es una *generalización aritmética*. Se entiende que estos estudiantes relacionan los registros semióticos aritméticos y leguaje natural, determinando al mismo tiempo un número que representa la comunalidadde todos los términos en la secuencia de patrones (Ver Cuadro 30).

Cuadro 31

Producción Juliana, tarea 2, ítem 4



✓ Explica con tus palabras una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas.

Numero de sillas

$100 \div 2 - 2 = 48 + 1$
$= 49$

Numero de mesas

Numero de mesas

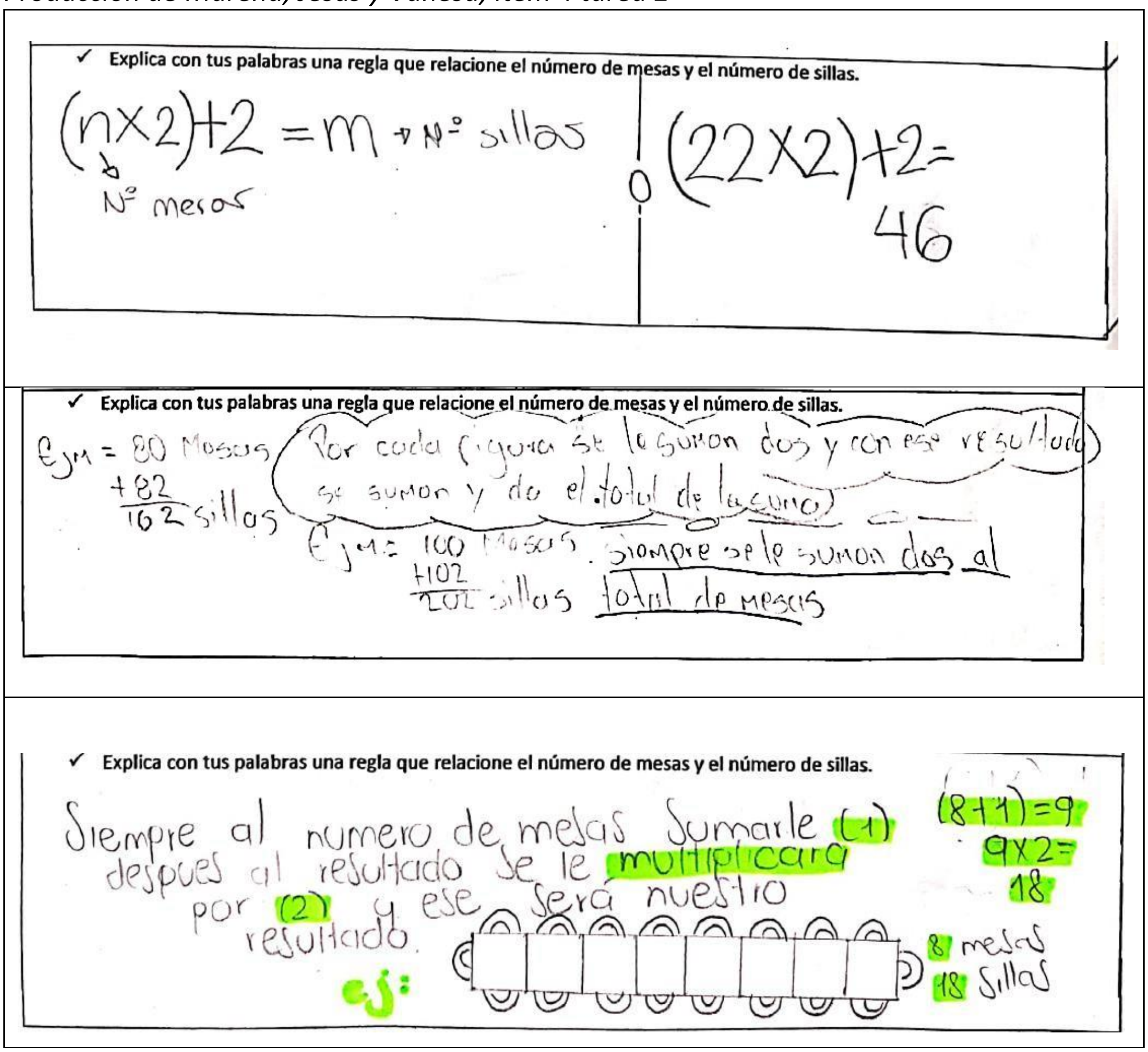
$28 \times 2 + 2 = 58$

Numero de sillas

Ahora bien, algo que aparece recurrente en el estudio es el sentido que los estudiantes le están asignando a sus representaciones reconociendo tres diferentes expresiones que correspondenla misma generalidad de la secuencia, los cuales son: $2m + 2$, $m + (m + 2)$, $(m + 1)2$, siendo m la cantidad de mesas; claramente los estudiantes reconocen la *equivalencia sintáctica* y aún más cuando deben operar con dichas expresiones, es decir, realizan transformaciones de tratamiento (Ver Cuadro 32).

Cuadro 32

Producción de Marena, Jesús y Vanesa, Ítem 4 tarea 2



Análisis grupal.

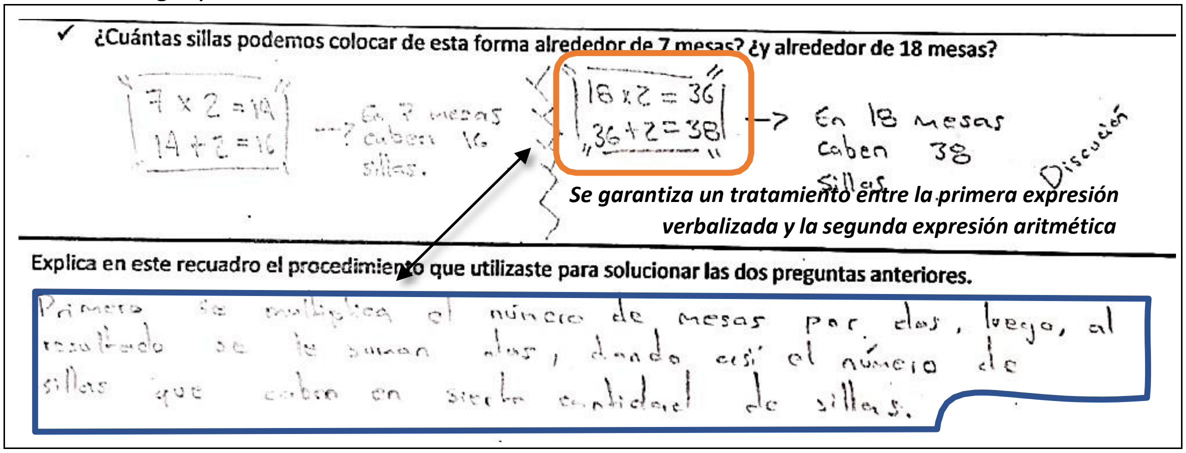
El análisis va a estar dirigido por encontrar elementos prácticos que estén apoyados en la teoría y, por consiguiente, a las categorías de análisis. Se analizarán los ítems 2 y 4.

En este caso, se toma como primer referente el grupo 4 que hace una relación muy estrecha entre las expresiones aritméticas y la verbalización de sus procedimientos debido a que 'identifican el patrón', se evidencia un sentido de la indeterminancia ya que encuentran una relación entre el número de mesas y el número de sillas para cualquier cantidad. Claramente, se determina un sentido operatorio, pero está limitado por tratamientos puramente aritméticos, las relaciones establecidas entre el número de sillas y de mesas está dada por el número de mesas multiplicado por dos y luego a este resultado se le suma el número dos (Ver Cuadro 33). Hay acercamientos a un tratamiento desde lo verbalizado a lo escrito aritméticamente determinado como $T: RS(N_1^4) \rightarrow RS(N_2^4)$ donde se garantiza una *equivalencia sintáctica.* A partir de este tratamiento entre representaciones, los estudiantes logran hacer un reconocimiento del patrón y lo justifican bajo la *identificación de objetos similares en la secuencia,* cuya estructura está generada por un resultado particular; aparte de ello, es evidente que el tener una verbalización de procedimientos los estudiantes están considerando el principio general (comunalidad) por medio de la descripción de estos métodos aritméticos, esto en la taxonomía propuesta en Trujillo et al. (2009) corresponde a un nivel tres en la *generalización aritmética*.

Algo que es importante resaltar, es que se encuentra una recurrencia en este grupo al hacer transformaciones de tratamientos en ambas tareas aplicadas, en primer momento se puede pensar que esos tratamientos son inducidos por los ítems de la tarea, pero para cada una de las producciones evidencian una explicación y verbalización desde aquellas representaciones que se movilizan en un $\boldsymbol{RS}(\boldsymbol{N})$.

Cuadro 33

Producción grupo 4. Ítem 2, tarea 2



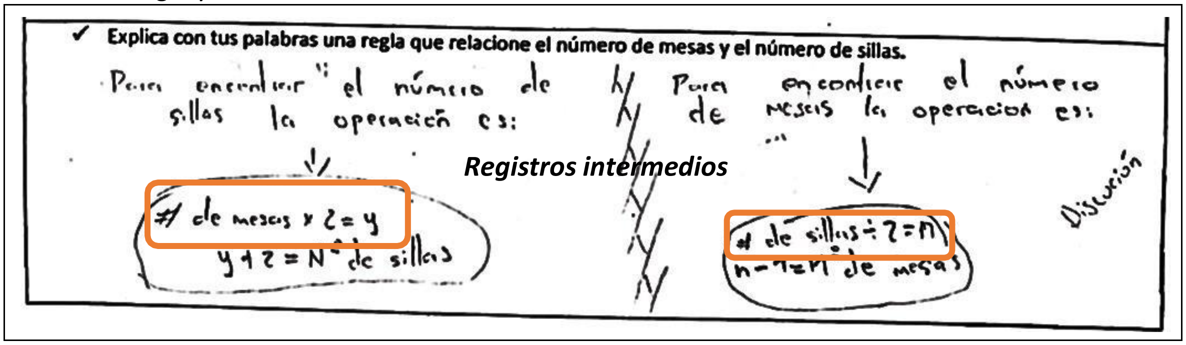
Existe una designación simbólica a las mesas y a las sillas, sin embargo, se puede evidenciar que hay representaciones en registros intermedios, es decir, los estudiantes utilizan la expresión: # $de\ mesas$ × 2 = y, donde existe una variable y la cual no tiene algún sentido propio, pero luego de hacer y + 2 = $N°\ de\ sillas$, los estudiantes designan simbólicamente el número de sillas permitiendo encontrar registros intermedios (Ver Cuadro 34), los dos registros evidenciados para esta producción son $RS(N_3^4)$ relacionado con un $RS(L_1^4)$. A esta relación de representaciones en diversos registros semióticos se denomina $RS(N-L_1^4)$.

En este grupo, los estudiantes encuentran la *generalidad algebraica* y realizan un proceso para simbolizarla de manera alfanumérica: en primer momento establecen la comunalidad, luego hacen una aplicación de la comunalidad a términos de la secuencia y, por último, establecen una relación entre la aplicación de la comunalidad a diferentes términos que no se encuentra dentro del campo perceptual, para deducir la expresión general.

Al momento en que los integrantes de este grupo construyen la expresión (que representa lageneralización) incluyen todos aquellos elementos o variables que están fuera del campo perceptual, es decir, son conscientes de una comunalidad local y luego la generalizan a todos los términos no sólo identificándola sino también simbolizándola (Radford, 2013).

Cuadro 34

Producción grupo 4. Ítem 4, tarea 2

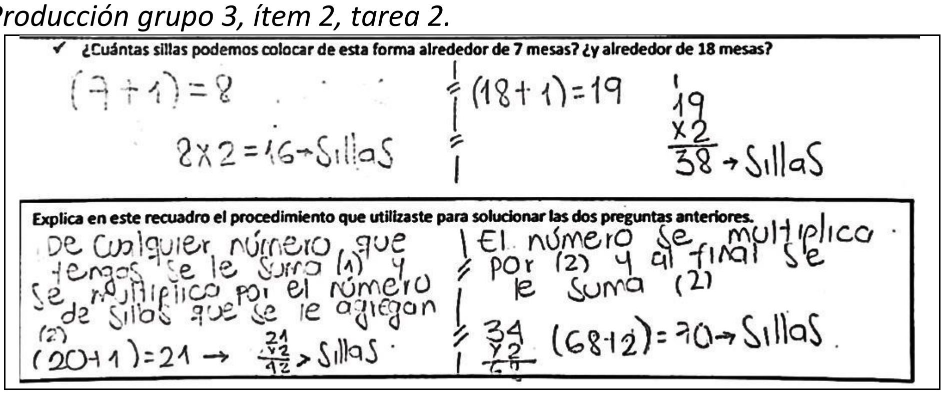


Bajo el anterior criterio, es posible afirmar que cuando los estudiantes registran el patrón y hacen la aplicación de la comunalidad a los términos no dados (etapa 3), tienden a desprenderse de ese número generalizado para empezar a simbolizar el cambio con una ‘variable’ la cual tiene su propio sentido, de esta manera se hace más fácil la deducción y validación de la fórmula expresada. Mason (1996) afirma que si este proceso de registrar y validar la expresión no se hace por medio de elementos que el estudiante maneja y conoce, lo más probable es que no se logre un proceso de generalización algebraica, en este caso, las representaciones usadas por los estudiantes emergen de unas transformaciones que la situación conduce a construir.

Ahora bien, de acuerdo con las producciones y la entrevista realizada, es posible afirmar que este grupo realiza un proceso de abducción algebraica no inducida, se usa el término ‘inducir’ ya que a diferencia de la tarea anterior aquí se le indica al estudiante que realice una regla general.

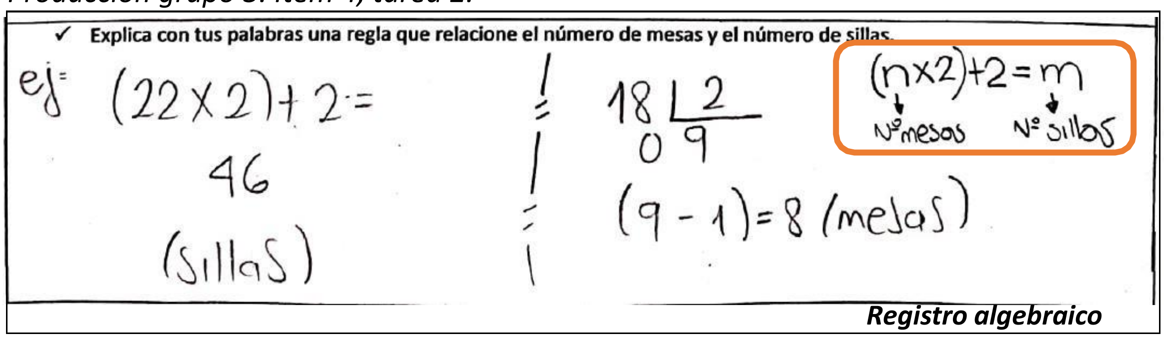
Cuadro 35

Producción grupo 3, ítem 2, tarea 2.



El grupo 3, para poder hacer relaciones entre el número de mesas y el número de sillas, acude a una $RS(A_1^3)$ que les permite encontrar solamente el total de sillas; pero es evidente que utilizan un argumento propiamente desde lo numérico y operatorio en este registro de representación (en los procesos de generalización se entiende a esta acción como la validez de la fórmula), es decir, la *fórmula* encontrada la dan por verdadera y eficiente para cualquier caso donde tengan *n cantidad* de mesas, esta representación utilizada por los estudiantes de este grupo junto con las acciones previas, conforma una *generalización algebraica* que se constituye hasta su última etapa (Ver Cuadro 36).

Cuadro 36
Producción grupo 3. Ítem 4, tarea 2.



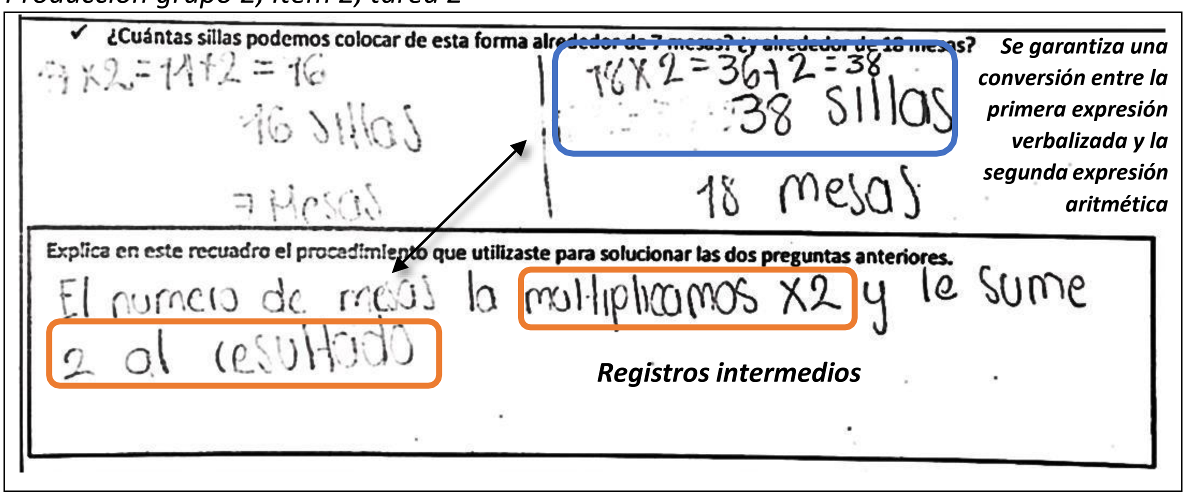
El uso de signos alfanuméricos se hace constante en cada uno de los grupos, ya que es un medio con el cual los estudiantes pueden simbolizar la generalidad algebraica. En esta actividad, como se evidencia en el cuadro anterior, los estudiantes le otorgan un sentido propio a cada una de las variables involucradas en la expresión $(n \times 2) + 2 = m$, la variable n corresponde al número de mesas y la variable m es el resultado para el número de sillas siendo evidente que en esta actividad la relación de sillas-mesas se limitó al procedimiento aritmético. Se presume los estudiantes no utilizaron ningún tipo de letras, pero si atienden a reconocer la generalidad desde el registro semiótico numérico, en palabras de Radford (2013) los estudiantes están pensando algebraicamente, pero bajo casos aritméticos considerados como *regla general*.

Finalmente, en el grupo 2 se evidencian unas relaciones entre expresiones aritméticas y su respectiva verbalización ya que hay un sentido de indeterminancia, al identificar el número de sillas teniendo la cantidad de mesas. Por otro lado, el sentido operatorio sobre esas designaciones se determina por tratamientos aritméticos; para este grupo, aparte de la verbalización de los procesos aritméticos, hay un uso de elementos en diferentes registros semióticos (Ver cuadro 37).

La *equivalencia sintáctica,* se presume que existe aun cuando los estudiantes persisten en el mal uso del signo de igualdad, reconociéndolo como el separador de procesos y no como una relación de equivalencia entre dos cantidades; los dos registros evidenciados para esta producción son $RS(N_4^2)$ relacionado con un $RS(L_2^2)$, a esta relación de representaciones en diversos registros semióticos se denomina $RS(N_4^2 - L_2^2)$.

Cuadro 37

Producción grupo 2, Ítem 2, tarea 2

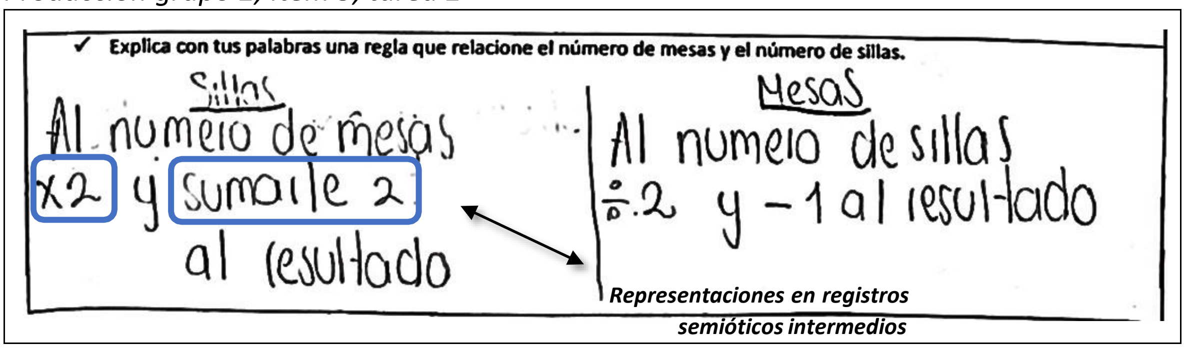


Al igual que en el anterior cuadro en este caso, los estudiantes recurren a usar una expresión dada en una $RS(L_3^2)$ mediada por elementos de $RS(N_5^2)$, donde se evidencia una conciencia algebraica al momento de registrar la generalidad y aplicarlo a los términos que no se encuentran visibles en la secuencia de patrones. En este ítem se evidencia una conversión desde la representación aritmética $RS(N_5^2)$ a una representación compuesta, es decir, cuando los estudiantes utilizan la expresión "*al número de sillas* × 2 *y sumarle 2*" están deduciendo una fórmula que fue registrada por medio de una $C: RS(N_5^2) \rightarrow RS(N_2^2 - L_2^2)$; se debe resaltar en esta expresión o *formula* que los procesos mencionados por Mason (1996) se han cumplido a cabalidad, tanto así, que la transformación de conversión implica una deducción de la formula y la aplicación a los términos no dados está mediada por la validez de la expresión en la $RS(N_5^2)$.

En resumen, a medida que los estudiantes van desarrollando la tarea,van sofisticando sus expresiones (aritméticas) de modo tal que existe un desprendimiento del número como objeto o del número generalizado y empiezan a construir representaciones que corresponden a una *generalidad algebraica* (Ver cuadro 38).

Cuadro 38

Producción grupo 2, Ítem 5, tarea 2



Subfase de exploración 3: tarea no. 3

Análisis general.

En esta tarea, los estudiantes debían encontrar las relaciones entre el número de los dobleces, las partes en que se divide el papel y las marcas que quedan reflejadas. Se entienden por dobleces aquella acción reiterativa que hace el estudiante para doblar en dos partes iguales una hoja (número 1 en el gráfico 6), las partes son el número de divisiones en la que finalmente queda en la hoja (número 2 en el gráfico 6) y las marcas son aquellas señales que evidencian un doblez (número 3 en el gráfico 6); en el siguiente gráfico se muestran cada uno de estos elementos que se trabajaron en esta tarea.

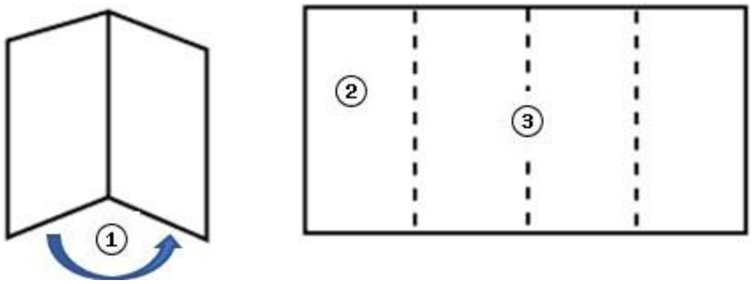


Gráfico 5. *Distinción entre el doblez, la división de la hoja y la marca reflejada.*

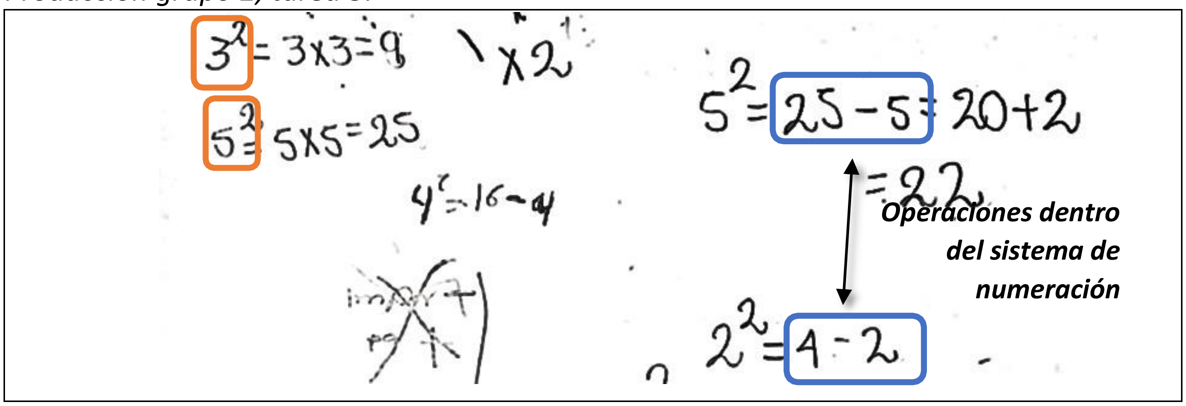
Las relaciones que se debían establecer entre aquellos tres elementos involucrados en la situación corresponde a que no es inmediata la respuesta a establecer la regla general que posibilite encontrar el número de marcas con respecto al número de dobleces; por esta razón, hubo diversidad en las producciones grupales en donde intentaban dar explicaciones no muy detalladas matemáticamente de cada una de las variaciones. El 75% de los estudiantes logró establecer cualquier tipo de relaciones entre lo aritmético y lo tabular, algunos de ellos utilizaron representaciones que corresponden a un registro algebraico, haciendo un tránsito debidamente justificado en representaciones propiamente aritméticas.

A lo primero que acudieron los estudiantes fue a utilizar representaciones que están sometidas a involucrar elementos que no están concreta o visiblemente en la situación, es decir, en palabras de Radford (2010) se reconoce la inexistencia de elementos asignando un sentido de indeterminancia que está relacionado únicamente con una abducción analítica y por ende a la expresión verbal del patrón; luego de ello, con estas representaciones realizan ciertas operaciones para identificar posibles relaciones entre los elementos visibles con los no visibles, lo anterior permite decir que los estudiantes registran el patrón (aplicación de la comunalidad a términos no dados) y hacen un esfuerzo grande para generalizar algebraicamente (Radford, 2013; Mason, 1996). Dentro de las categorías de análisis no hay algo que permita clasificar las tabulaciones como una representación propia de un registro semiótico en particular, sin embargo, se ha evidenciado que el carácter operatorio que se establece es desde las operaciones básicas con el conjunto numérico de los naturales; lo anterior lleva a pensar que según lo mencionado por Trujillo et al. (2009), los estudiantes en un primer momento pasan por identificar y usar el número y sus operaciones como representante, colocando valores específicos para referirse a lo general o nombrar la comunalidad, es decir, la percepción del patrón se asocia a una clase de objetos donde se definen todos los elementos de la secuencia que satisfacen el mismo patrón (Mason, 1996).

En este caso, se evidencia el transito que tienen los estudiantes para reconocer lo indeterminado y el sentido operatorio que le asignan a dichas representaciones aritméticas. Entonces, es común que los estudiantes empiecen a probar sus hipótesis con casos particularesy así mismo, este proceso de abducción desde lo numérico les permite encontrar la comunalidad o regularidad propia de la situación (Ver cuadro 39).

Cuadro 39

Producción grupo 2, tarea 3.



Como puede observarse en el cuadro anterior, los estudiantes de este grupo empezaron a probar una de las regularidades encontradas la cual tenía que ver o se aproximaba a elevar la cantidad de dobleces al cuadrado; luego de ello, empiezan a probar y a instaurar reglas y operaciones de los números naturales para así determinar una expresión que les posibilitara escribir dicha relación exacta. Dado lo anterior, no es posible determinar una regla que les permita encontrar todos los términos de la secuencia, en este afán según Radford (2010) se podrían identificar procesos de abducción que parecen puras adivinanzas o un juego de operaciones y números ya que ninguna de éstas es el resultado de la inferencia de comunalidad.

En el fragmento de la entrevista E12 se proponen argumentos concretos acerca de algunos procesos de abducción, sin que los estudiantes puedan encontrar directamente la expresión adecuada que represente la generalidad.

En el último fragmento de la entrevista, es evidente cuando uno de los integrantes de este grupo lleva la iniciativa de usar otro tipo de representación separada de la numérica, él indica "*estamos haciendo una tabla para que podamos encontrar más rápido los resultados*" (Juan, E12) se evidencia la necesidad de justificar cada uno de los procedimientos hechos y además el intento de encontrar alguna regularidad que permita hallar una expresión mejor elaborada que represente la generalidad.

Análisis grupal.

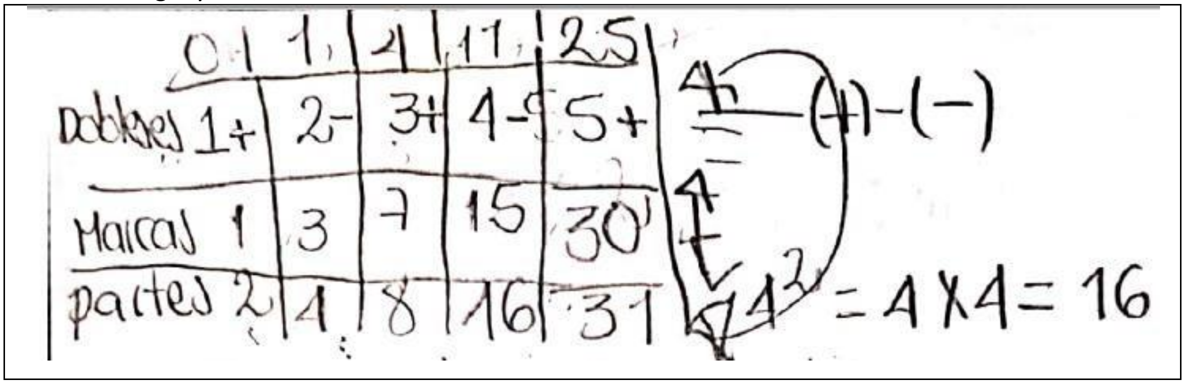
El análisis va a estar dirigido por encontrar elementos prácticos que estén apoyados en la teoría y, por consiguiente, a las categorías de análisis; los ítems 3 y 4 de esta tarea, serán expuestos a analizar.

Para esta tarea el grupo 2 ve la necesidad de construir una tabla de valores para poder determinar algunas relaciones entre las tres variables trabajadas en la situación (dobleces, marcas y partes), en este sentido los estudiantes construyen una representación que los posibilita, aún más, a realizar operaciones en el sistema de numeración y poder hacer un proceso de inducción ingenua (Radford, 2008); dicha nueva representación transita por supuesto por representaciones que se encuentran en dos registros de modo tal que se considera como $RS(N_1^2 - A_1^2)$. Esta representación es un puente para que los integrantes del grupo encuentren el patrón, ya que reconocen la comunalidad, asignan una expresión semiótica.

Dado lo anterior, los estudiantes de este grupo proponen una relación de variables por medio de una tabla (cuadro 40) en donde se puede evidenciar que hacen un intento para encontrar regularidades como por ejemplo cuando el número de dobleces es par o impar, la característica que tienen el número de marcas entre otras, cada una de estas relaciones establecidas corresponde al uso de operaciones, es decir, los integrantes de este grupo le empiezan a dotar un sentido operatorio a dichas representaciones (operar sobre objetos específicos), trabajar con lo particular desde lo general (Rojas, 2014).

Cuadro 40

Producción grupo 2, tarea 3



Luego de hacer varios cálculos (algunos sin resultado óptimo) los estudiantes de este grupo establecen un sentido de indeterminancia a partir de las relaciones dadas por las partes y los dobleces para poder hallar el número de marcas, es decir, la designación semiótica y el sentido operatorio hasta este momento estuvieron enmarcados por representaciones puramente aritméticas (ensayo y error) que transitaron por la tabla que diseñaron ellos mismos, a estas representaciones se denominan $RS(N_1^2)$, que se puede encontrar en el cuadro 11. De este modo, los estudiantes persisten inicialmente en enunciar numéricamente una *regla* que describa la 'fórmula', llegando a un proceso de *generalización aritmética* correspondiente a un procedimiento descriptivo de un método al momento de hallar un término desconocido.

Cabe aclarar que, en este caso, los estudiantes luego de hacer dichos procedimientos ingenuos para encontrar la 'expresión simbólica' que represente la generalidad, persisten en una dificultad que reporta Kieran (2007) con relación al uso del paréntesis cuando los estudiantes realizan la operación $5^2 - 5 = 25$, en este caso al resultado se debe restar la base respectiva $25 - 5 = 20$; también se evidencia en otro caso el mismo procedimiento de elevar al cuadrado el número de dobleces y restarle a dicho resultado el número de dobleces recalcando en la dificultad con el signo de igualdad $2^2 = 4 - 2$.

De acuerdo con lo anterior, la primera expresión que se dedujo en un lenguaje natural $RS(L_1^2)$, que luego de varias intervenciones empezó a convertirse en una expresión simbólica que podía clasificarse en $RS(A_1^2)$; en palabras propias de los estudiantes la representación que corresponde al registro semiótico lenguaje natural es "*…elevar al cuadrado los dobleces que hacemos y luego le restamos el mismo número que tenemos al principio…*" (Juliana, E13) mientras que la representación que está clasificada en un registro semiótico algebraico corresponde a uno mencionado textualmente como *"…es una fórmula como* $d^2 - d = m$*…".* (Daniel, E13). En E13 se observa cómo nacen ambas expresiones que a simple vista tienen una estructura informal pero la inducción para llegar a ambas no fue ingenua.

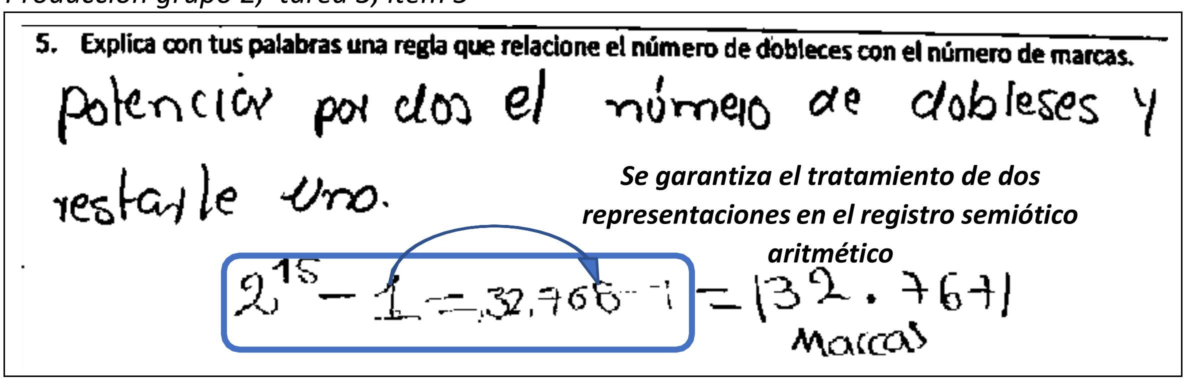
De acuerdo con lo anterior, en el grupo emerge una expresión simbólica con atributos asociados a la generalidad, pero se evidencia que no pertenece al patrón de la situación, es decir, la abducción corresponde a la propia fórmula ya que el proceso hecho y su sentido operatorio se enfocan en dicha representación sin aplicarse a todos los términos de la secuencia. Según Radford (2008) estos estudiantes hacen un esfuerzo para realizar el proceso de abducción que se compara con descifrar una expresión sin que sea el resultado de la inferencia de toda la comunalidad, sin embargo, dentro del proceso de *generalización aritmética* existen dos categorías que permiten justificar el hecho de no encontrar la expresión algebraica adecuada. Según Trujillo et al. (2009) los estudiantes en un primer momento determinan la comunalidad desde los ejemplos particulares, luego de ello reconocen la estructura de dichos elementos de la secuencia de patrones para luego aplicarla por medio de operaciones aritméticas a objetos que no están dentro de la secuencia.

De este modo, el grupo alcanza a determinar un *principio general* en el proceso de generalización aritmética (Ver cuadro 41), que se evidencia cuando toman un valor específico y lo reconocen como una regla irrefutable; en el siguiente fragmento se propone realizar dicha acción: "*cuando tenemos esos resultados empezamos a hacer operaciones para poder encontrar el número que necesitamos, ahí restamos al azar"* (Kevin, E13, 14).

La última intervención del profesor en la entrevista E13 permite que los estudiantes reflexionen sobre la expresión creada y al mismo tiempo que tengan un sentido crítico acerca de las intervenciones de sus compañeros. Rojas y Vergel (2013) indican que este tipo de acciones posibilitan que los estudiantes presten menos atención a manipular símbolos sin sentido y memorizar procedimientos.

Como la $RS(A_1^2)$, que encuentra el grupo no es viable para hallar todos los términos de la secuencia, el Luis propone una representación (escrita) que corresponde a una forma de expresar la indeterminancia, encontrando la comunalidad para todos los términos conocidos y no conocidos; en este sentido, los estudiantes reconocen una estructura espacial y numérica, posibilitando los procesos de generalización aritmética con un sentido algebraico, al igual que en casos anteriores, el reconocimiento de esa generalidad está dada por la ejemplificación y la descripción de un procedimiento, dado que existe una transformación $C: RS(L_1^2) \rightarrow RS(N_2^2)$, existe un registro de dicha propiedad común que se puede aplicar a términos no dados, definiendo una serie de objetos que están dentro de la secuencia de patrones por medio de la *identificación* y *definición* propia de la de generalización aritmética, sin embargo hay un acercamiento a dicho *principio general* (generalidad del patrón) a una expresión con un sentido algebraico, la cual se da cuando el estudiante verbaliza dicha representación aritmética y asigna a la variable número dedobleces", da por hecho que sirve en cualquiera de los casos.

Cuadro 41
Producción grupo 2, tarea 3, ítem 5



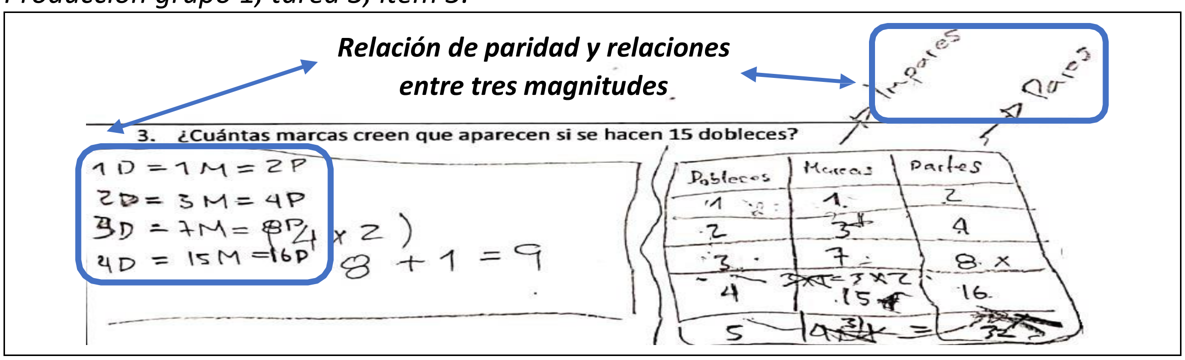
En el cuadro anterior puede verse que existe una nueva representación que corresponde a la generalidad, una representación de tipo $RS(L_1^2)$ donde se verbaliza la forma para hallar el número de marcas cuando se conoce el número de dobleces, y aparte de ello realizan una $RS(N_2^2)$, esta nueva representación es para ellos un argumento que justifica su 'fórmula' cuya destrezas adquiridas son las de traducir relacionar, tabular y graficar y la concepción de álgebra se trabaja desde la aritmética generalizada y el estudio de relaciones entre cantidades(Usiskin, 1988). Esta traducción de la representación en un registro semiótico algebraico (cuadro 41) a una representación del registro semiótico lenguaje natural se considera como la siguiente conversión de representaciones $C: RS(A_1^2) \rightarrow RS(L_1^2)$.

También se considera que dentro de la $RS(N_2^2)$ existe una conciencia, un buen uso del signo de igualdad y el reconocimiento del carácter operatorio del objeto, esto implica que se garantiza la letra como número generalizado (Rojas, 1999), lo cual se denomina como un $T: RS(N_1^2) \rightarrow RS(N_2^2)$.

Por otro lado, el grupo 1 (Viky, Luis, Antonio) también empieza a realizar relaciones entre las cantidades conocidas, en un principio se reconoce el sentido de la indeterminancia porque dejan espacios a aquellos valores que no son visibles en la situación; los estudiantes de este grupo realizan una tabla muy parecida a la del grupo anterior estableciendo relaciones de paridad y de orden para así determinar una comunalidad que no sólo se asocie a los primeros términos de la secuencia sino a aquellos desconocidos (Ver cuadro 41).

Cuadro 42

Producción grupo 1, tarea 3, ítem 3.

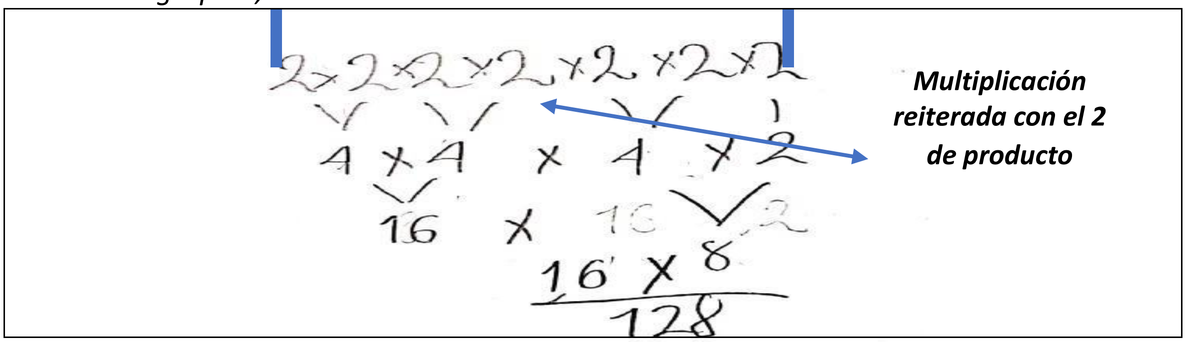


Como se desprende del cuadro, los estudiantes realizan una serie de operaciones dentro del sistema numérico correspondientes a suma y multiplicación, la representación que nace en este proceso de abducción se determina como $RS(N_3^1)$, en donde existen unas transformaciones en el mismo registro semiótico (tratamientos puramente aritméticos) y además puede inferirse que están cumpliendo con el uso adecuado del signo de igualdad; de igual modo, cuando hacen la relación entre el número de partes y el número de marcas identifican que es uno menos pero el problema radica en hacer la relación de dobleces con el número de partes.

En este momento (E14), los estudiantes encuentran por medio de la discusión y la participación de cada uno de ellos la relación existente entre las partes con el número de dobleces. Cuando uno de los integrantes del grupo afirma "*multiplicamos siete veces el número dos*" (Viky, E14, 41) está mostrando que esa generalización es de tipo aritmética cuyas destrezas asociadas a dichos procesos fueron la traducción y la relación entre cantidades; por este hecho, aparece una $RS(N_4^1)$ que evidencia la forma que procede el grupo cuando el profesor les pide encontrar el número de partes luego de realizar 7 dobleces, lo realizan por medio de una multiplicación reiterada (Ver cuadro 43).

Cuadro 43

Producción grupo 1, tarea 4



Luego de establecer esta relación entre ambas cantidades, el profesor realiza una serie de preguntas que llevan a los estudiantes a incluir otra cantidad a la relación: marcas; para ello, toma las mismas representaciones aritméticas que surgieron en la tarea para poder encontrar la expresión que permitiera calcular el número de marcas teniendo la cantidad de dobleces. En este proceso, el grupo realiza una transformación que va desde las representaciones en el registro aritmético, luego pasan a ser del registro semiótico lenguaje natural y por último llegan a una representación simbólica desde el registro semiótico algebraico; así pues, se tiene una doble conversión de representaciones $C: RS(N_4^1) \rightarrow RS(L_1^1) \rightarrow RS(A_1^1)$.

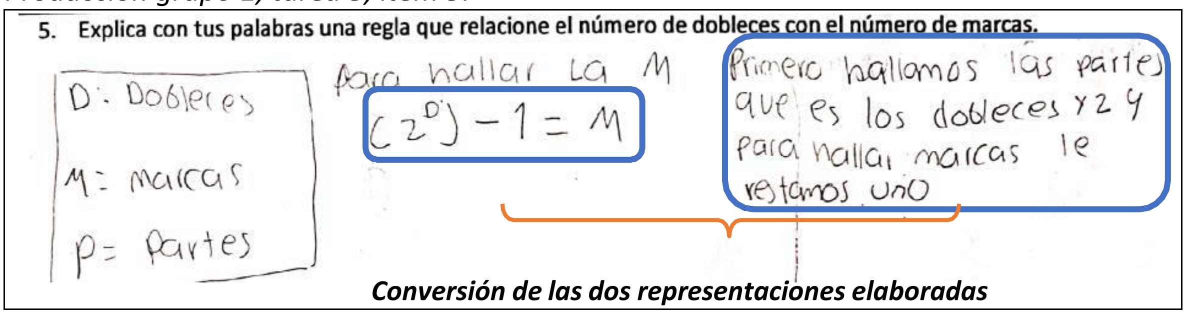
El momento crucial donde se puede encontrar dicho proceso de conversión es cuando en el fragmento 41 de la entrevista (E14) Viky propone una forma aritmética para determinar el número de partes cuando se detiene el número de dobleces, otra representación aparece en el fragmento 51 (E15) cuando la misma estudiante verbaliza la posible expresión que relaciona directamente el número de dobleces con las marcas dejadas, es decir, por medio de una transitividad se puede afirmar que existió una conversión que finalmente se puede expresar así

$RS(N_4^1) \rightarrow RS(A_1^1)$, donde existen unas transformaciones intermedias que permiten relacionar estas dos representaciones.

En E15 se justifica el surgimiento de dos representaciones en diferentes registros semióticos. En el fragmento 53 de esta entrevista el grupo determina una expresión equivalente a la dicha por Viky en el fragmento 51, lo que más llama la atención es que se esperaba que los estudiantes escribieran en lenguaje natural dicha generalización, por el contrario, vieron la necesidad de utilizar símbolos algebraicos que conduce a la representación $RS(A_1^1)$, donde explican cada una de las variables utilizadas (Ver cuadro 44).

Cuadro 44

Producción grupo 1, tarea 3, ítem 5.



Subfase de exploración 4: tarea no. 4

Análisis general.

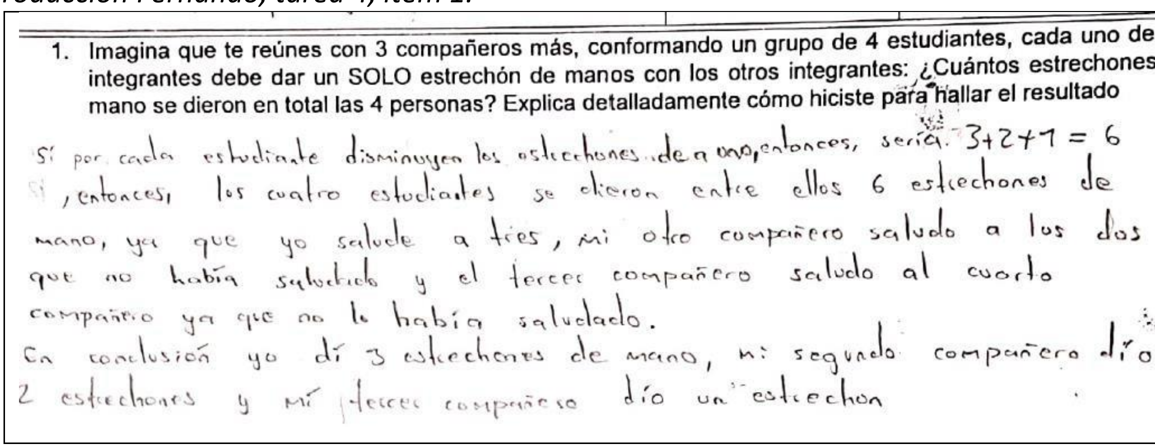
Para esta actividad, los ítems a analizar fueron 1, 2 y 3 debido a que hay más información en las producciones, además los estudiantes debían por medio de estas preguntas hacer un proceso de inducción y llegar a construir una representación que modelara la situación poniéndola en juego en el ítem 4.

Se han encontrado de manera general tres estilos de producciones, la primera que se va a mostrar corresponde al 20% del grupo que utilizan representaciones pertenecientes al registro semiótico lenguaje natural; para este tipo de representaciones, los estudiantes acompañan cada una de sus verbalizaciones con operaciones y expresiones numéricas que posiblemente validan sus argumentos, haciendo uso de las tablas como medio para encontrar regularidades; por otro lado, las verbalizaciones que hacen estos estudiantes tienen de por sí una explicación detallada y aparece en varias representaciones la palabra ‘sucesivamente’, lo cual para Villa (2016) es una forma de reconocer lo que no está determinado en una situación, lo que no se puede ver.

Al leer cada una de las verbalizaciones hechas es posible determinar que los estudiantes reconocen la comunalidad en la secuencia del patrón, son conscientes de que hay elementos no visibles y operan sobre aquellos que aparecen en la secuencia (Ver cuadro 45).

Cuadro 45

Producción Fernando, tarea 4, ítem 1.



1. Imagina que te reúnes con 3 compañeros más, conformando un grupo de 4 estudiantes, cada uno de integrantes debe dar un SOLO estrechón de manos con los otros integrantes: ¿Cuántos estrechones mano se dieron en total las 4 personas? Explica detalladamente cómo hiciste para hallar el resultado

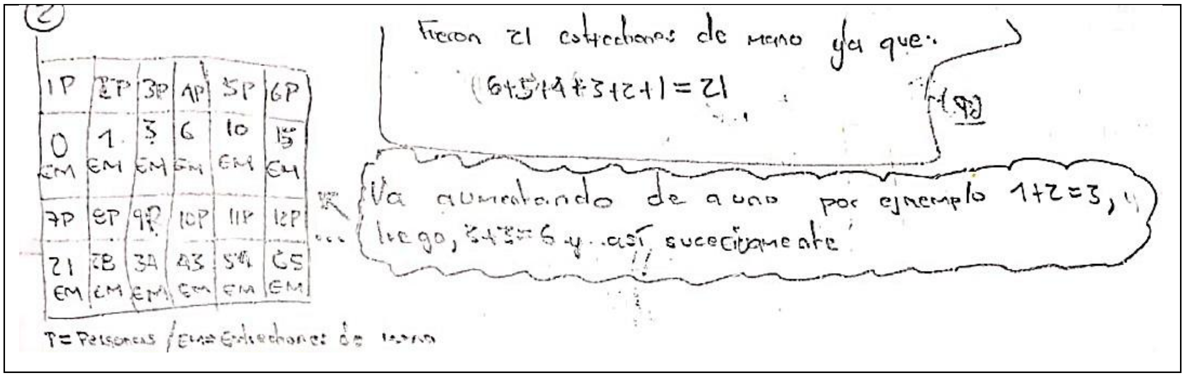
Sí por cada estudiante disminuyen los estrechones de a uno, entonces, sería. 3+2+1 = 6, entonces, los cuatro estudiantes se dieron entre ellos 6 estrechones de mano, ya que yo salude a tres, mi otro compañero saludo a los dos que no había saludado y el tercer compañero saludo al cuarto compañero ya que no lo había saludado.
En conclusión yo dí 3 estrechones de mano, mi segundo compañero dío 2 estrechones y mí tercer compañero dío un estrechon

En el cuadro anterior puede observarse que Fernando establece una relación entre una expresión aritmética y la verbalización, aunque cabe resaltar que el significado local asignado a la verbalización está asociado a una combinación mientras que el que tiene la expresión aritmética es asociada sumatoria descendente de términos; dado lo anterior, se presenta a partir de un trabajo individual, una $C\colon RS(N_1^{4:F}) \rightarrow RS(L_1^{4:F})$. Del mismo modo, es curioso que este estudiante utiliza una representación de tipo tabular para organizar los resultados obtenidos bajo su hipótesis inicial, este tipo de acciones se presentan recurrentemente luego de haber realizado la tarea número 3 en donde los estudiantes debían organizar sus datos en tablas.

Como se dijo anteriormente, esta tabla que hace Fernando contiene una serie de operaciones iniciales que le permite encontrar hipótesis sobre el comportamiento del patrón, apareciendo la palabra ‘sucesivamente’ como medio para reconocerlo (Ver cuadro 46).

Cuadro 46

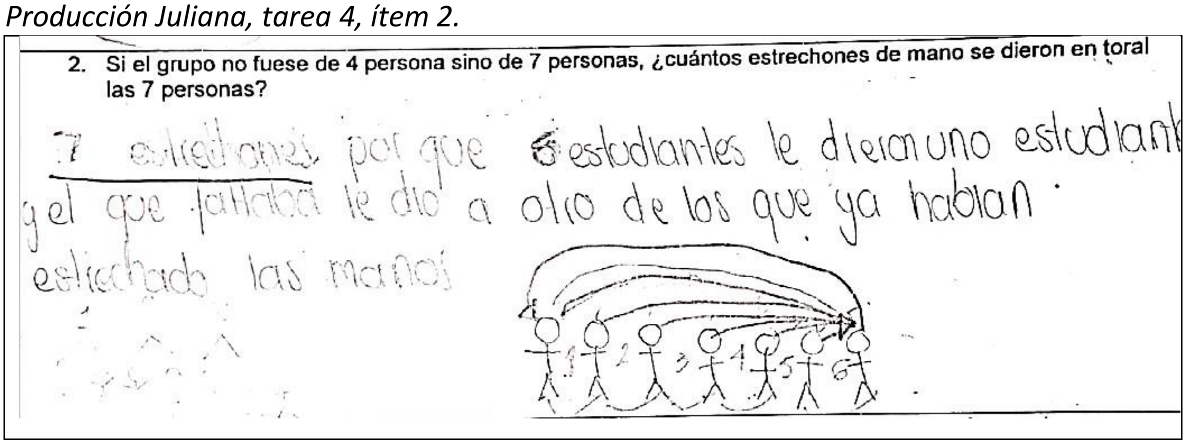
Producción Fernando, tarea 4, ítem 2.



Por otro lado, los otros tipos de producciones evidenciadas en esta tarea son las que pertenecen al registro semiótico figural, estas representaciones fueron usadas por el 25% de los estudiantes y consiste en una relación biyectiva entre un dibujo y un valor específico de la situación; estas representaciones conducen a que el estudiante realice dibujos para poder identificar el patrón, es decir, que la operatividad se construye por medio de dichas figuras; en un primer momento, la estudiante Juliana realiza una relación entre la primera ronda de saludos, propone dibujar 7 personas e indica que en el primer saludo hay 6 estrechones y luego va disminuyendo un estrechón hasta que llegue a un estrechón (corresponde a la últimapersona), dicha asociación figural está acompañada no de representaciones numéricas sino de una verbalización escrita de la estrategia (Ver cuadro 47)

Cuadro 47

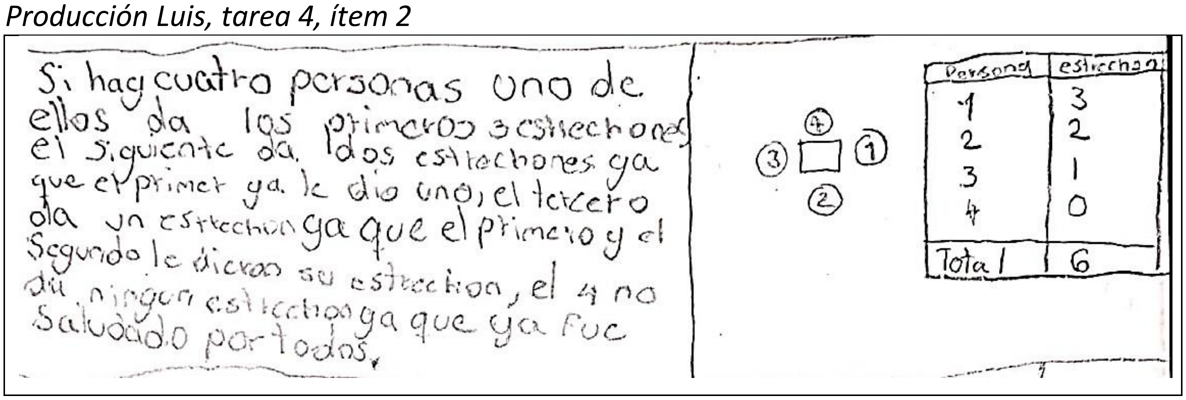
Producción Juliana, tarea 4, ítem 2.



Otra forma para representar en el registro semiótico figural es dibujar las personas ubicadas de forma circular y establecer el número de estrechones hechos por cada uno, de modo tal que se reconoce la indeterminancia y los elementos que no están presentes en la situación, la operatividad está relacionada con elementos aritméticos (suma de naturales). Para este caso, el Luis percibe el patrón, lo expresa, pero no lo registra con algún tipo de símbolo alfanumérico, esto no implica que no haya generalizado, pues al contrario esta acción corresponde a una generalización aritmética.

Finalmente acompaña esta representación con una tabla que posibilita ver de manera más expedita las relaciones existentes entre la cantidad de personas y el número de estrechones que se dan al momento de saludar, verbalizando o determinando una representación del registro semiótico lenguaje natural; por lo anterior, esta estudiante construye una relación entre estas tres representaciones pasando de una a otra sin problema (Ver cuadro 48), aludiendo a una triple transformación $C\colon RS(L_2^{2:E1}) \rightarrow RS(N_2^{2:E1}) \rightarrow RS(F_1^{2:E1})$.

Cuadro 48
Producción Luis, tarea 4, ítem 2

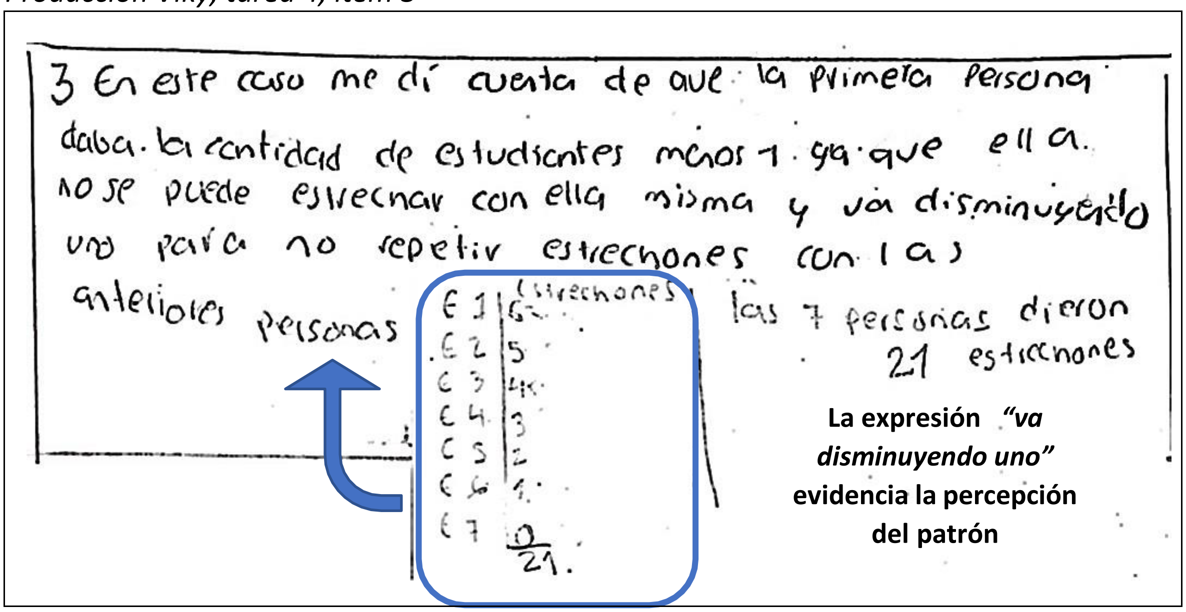


Las representaciones de un grupo pequeño de estudiantes aún no se desprenden de lo puramente aritmético, para este caso Viky que lleva un proceso de generalización en cada una de las tareas más avanzado, en la solución de esta tarea identifica un patrón y por supuesto lo registra de manera aritmética, es posible que esta estudiante reconozca lo indeterminado, el carácter operatorio y la designación simbólica está limitado solo por expresiones aritméticas (Ver cuadro 49). Cuando se le pregunta por la relación existente entre el número de personas y la cantidad de estrechones, ella representa desde una $RS(L_3^{1:E1})$ cada una de las operaciones aritméticas hechas para mostrar el patrón y la regularidad, por lo que existe una $RS(N_3^{1:E1})$. La estudiante trabaja (operativamente) con cantidades no conocidas de la situación al momento de encontrar algún valor: "*Pues en este caso me di cuenta que la primera persona daba, la cantidad de estudiantes menos uno, un estrechón menos porque no se puede dar él mismo, de ahí iba* disminuyendo uno *por cada persona que saludaba* (respuesta de Viky)".

En la respuesta dada por la estudiante la expresión *disminuyendo uno* hace referencia a una reiteración que presenta el patrón de la situación y precisamente la generalización es usada por medio de la representación en el registro semiótico lenguaje natural.

Cuadro 49

Producción Viky, tarea 4, ítem 3



Análisis grupal.

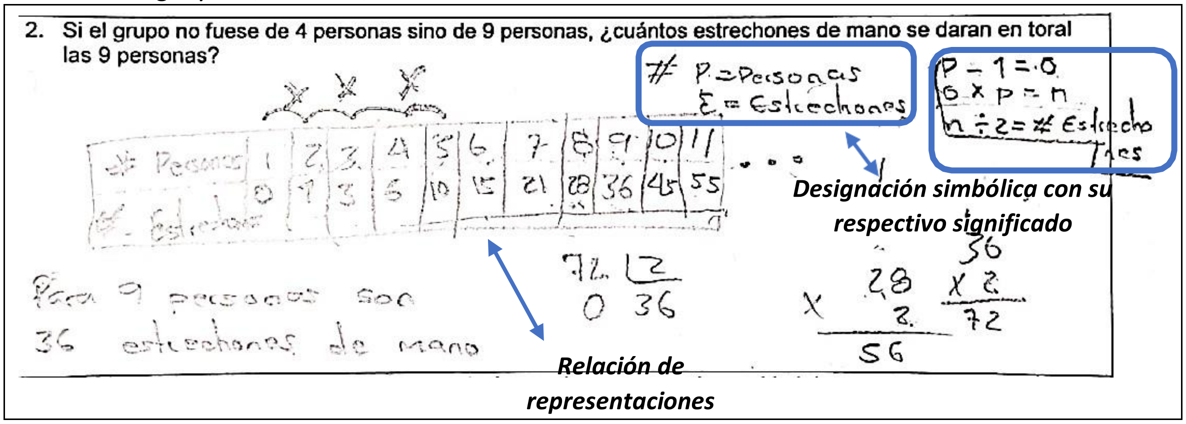
Luego de hacer el trabajo individual, cada uno de los estudiantes pasó a hacer la actividad, de modo tal que, pudieran hacer el experimento de manera real, dando los estrechones de manos respectivamente; en este momento, se evidenció que muchas de las producciones hechas individualmente cambiaron de rumbo, ya que podían encontrar aún más relaciones entre las cantidades involucradas. Un ejemplo de lo anterior se observa al analizar las producciones del grupo 4, el cual realiza una tabla para encontrar todas las regularidades posibles pero algo que llama la atención es que incluye una notación de los tres puntos seguidos, lo cual implica que desde el inicio del trabajo colaborativo, los integrantes entienden que existen valores desconocidos que poseen la mismas propiedades; la comunalidad en este grupo es entendida como la reiteración del patrón en cada término no presentado en la secuencia, donde se relacionan dos valores del número de personas para así determinar el número de estrechones.

Para este caso, es posible afirmar que los estudiantes en el primer momento (trabajo individual) transitan por cada uno de los procesos para que pueda denominarse como una *generalización aritmética*: identifican por medio de propiedad una dinámica que se extiende a los términos dados y a los no visibles en la secuencia (relación número de personas y estrechones). Luego determinan la propiedad común, las representaciones y las situaciones (identifican una estructura numérica o comportamiento dado por las relaciones entre cantidades); construyen un enunciado del patrón observado por medio de la descripción de un método que se extiende más allá de un caso particular. En este sentido, uno de los integrantes del grupo 4, indica cómo encontrar numéricamente la forma para hallar la cantidad de estrechones "*Al principio solo empezamos a darnos saludos y vimos que se sumaban de para atrás, como si se fueran disminuyendo de 1 cada vez que saludábamos*" (Joe, E16, 20); por último, los estudiantes en la parte individual definen una clase de objetos (términos) que hacen parte del patrón (Ver cuadro 50).

Además, aparecen unas expresiones con símbolos alfanuméricos que están relacionadas entre sí, los integrantes de este grupo hacen una jerarquía entre dichas designaciones simbólicas involucrando tres procesos de generalización (percibir, expresar y registrar el patrón); se evidencia que hay una relación entre las representaciones que se encuentran en los registros semióticos numérico y algebraico, dando a cada letra utilizada una función o significado propio dentro de la situación.

Cuadro 50

Producción grupo 4, tarea 4, ítem 2



Como se puede ver, este grupo por medio de la representación numérica tabular logran establecer unas relaciones entre ambas magnitudes y logran registrar esa comunalidad a términos que no se encuentran en la situación, por esta razón aparecen las expresiones $p - 1 = o$; $o \times p = n$; $n \div 2 = \#\ estrechones$. Estas expresiones tienen algo particular y es que contienen símbolos alfanuméricos y del lenguaje común, es decir, aparece un registro semiótico intermedio $RS(A_1^4 - L_3^4)$ que posibilita representar y generalizar algebraicamente el patrón de la situación; por medio de las propiedades de la igualdad (especialmente la transitividad) se puede inducir que la expresión final que el grupo ha construido es $(p - 1) \times p \div 2 = \#\ estrechones$, donde el término p en la situación corresponde al número de personas.

La forma cómo los estudiantes validan esta nueva representación o mejor, la generalización del patrón utilizando el $RS(A_1^4 - L_3^4)$, es por medio de la verbalización y la argumentación dada por todos los integrantes, afirmando que ésta surge por la multiplicación de la cantidad de personas con el valor anterior, para luego dividirlo entre dos; del mismo modo que si funciona para los términos visibles de la secuencia se puede aseverar que dicha expresión ya es la característica común que funciona para cualquier valor:

El proceso de inducción en este grupo se hace por medio de la comunicación y uso de operaciones en el sistema de numeración, en la entrevista (E16) se evidencia un consenso para nombrar la regularidad, los estudiantes encontraron una relación por medio de la tabla realizada multiplicando términos de esta (Ver cuadro 50); así, cuando los estudiantes hacen la equivalencia entre la representación $RS(A_1^4 - L_3^4)$, con la verbalización que se caracteriza como una $RS(L_4^4)$, encuentran la transformación $C: RS(A_1^4 - L_3^4) \rightarrow RS(L_4^4)$.

Cuadro 51

Producción grupo 4, tarea 4, ítem 3

3. Explica si encuentras una relación entre el número de personas y la cantidad de estrechones de mano que se dan.

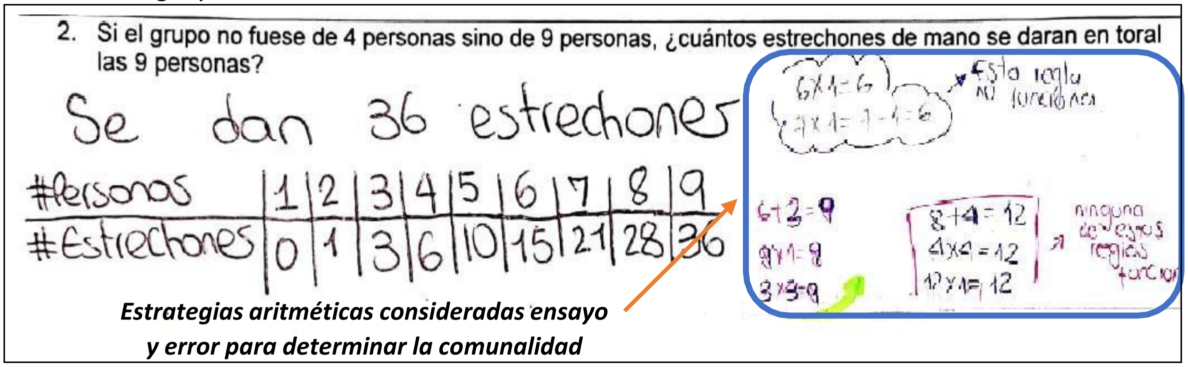
Nos dimos cuenta que el número de personas se multiplica por el número anterior de personas y el resultado se divide entre dos, dando así, el número de estrechones que se dan cualquier numero de personas

Bajo la misma dinámica de trabajo del grupo anterior, se toma como referente las producciones y lo realizado por el grupo 3 (conformado por Laura, Marena, Yetel y Vanesa), precisamente porque no tuvieron mayor participación en la tarea anterior; en el desarrollo de esta tarea, este grupo construye una tabla que les permite relacionar las cantidades involucradas en la situación (estrechones de manos y número de personas). Así como en el grupo anterior, aquí aparece algo curioso que posibilita pensar que hay un reconocimiento del patrón, donde es llevado a términos que no son visibles para ellos.

La situación plantea encontrar la cantidad de estrechones que se dan 9 personas, bajo este criterio los estudiantes no realizan el experimento, sino que establecen algunas características de la secuencia, de modo tal que hay una operatividad desde expresiones puramente aritméticas; la herramienta utilizada en ambos grupos posibilita percibir y expresar el patrón (Ver cuadro 52), determinando las reglas necesarias para luego construir una expresión que represente la regularidad: estas reglas emergen gracias al método de ensayo y error, luego de varios intentos fallidos encuentran diversas relaciones y desechan las que no van a usar indicando: "*ninguna de estas reglas funcionan*".

Cuadro 52

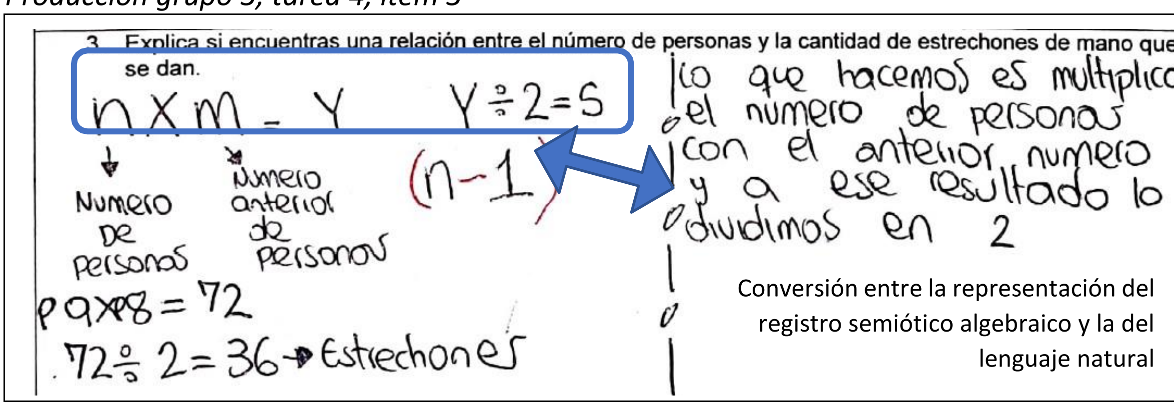
Producción grupo 3, tarea 4, ítem 2



A continuación, por medio de tratamientos de representaciones en el registro semiótico aritmético y la construcción de tablas el grupo encuentra una expresión algebraica que corresponde a la generalidad del patrón; en este sentido, ambos grupos mencionados en el desarrollo de esta tarea representan la comunalidad utilizando símbolos alfanuméricos, y a cada una de estas variables les asignan un rol propio de la situación (Ver cuadro 53). Es evidente que no existen problemas en el uso del signo de igualdad y además de ello, hay dos representaciones equivalentes $RS(L_5^3)$, y $RS(A_2^3)$**,** cuando lo estudiantes hacen un tránsito entre la representación algebraica y su respectiva verbalización (en este caso se convierte en la justificación de la elección de dicha expresión), existe una $C: RS(L_5^3) \rightarrow RS(A_2^3)$.

Cuadro 53

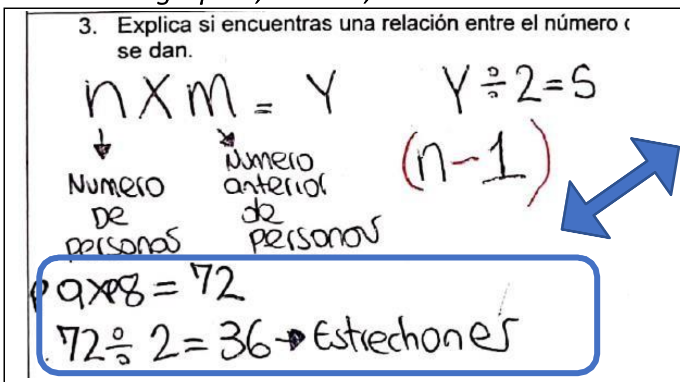
Producción grupo 3, tarea 4, ítem 3



La designación simbólica que el grupo 3 realiza tiene características comunes con la que construyeron en el grupo 4 ya que presentan una explicación de cada uno de los términos utilizados: $n \times m = y$, $y \div 2 = s$ donde n corresponde al número de personas y m es el número anterior de personas, la expresión la validan por medio de un ejemplo numérico, usando la letra como número generalizado, es decir, se ve la letra como representante de valores de tal modo que por medio de los procesos de comunicación y compartir todas sus respectivas producciones, logran validarla (Ver cuadro 54).

Cuadro 54

Producción grupo 3, tarea 4, ítem 3



Existe un tránsito entre la representación algebraica que corresponde a la forma general y la representación aritmética que implica la validación de dicha "fórmula"

Subfase de exploración 5: Tarea 5

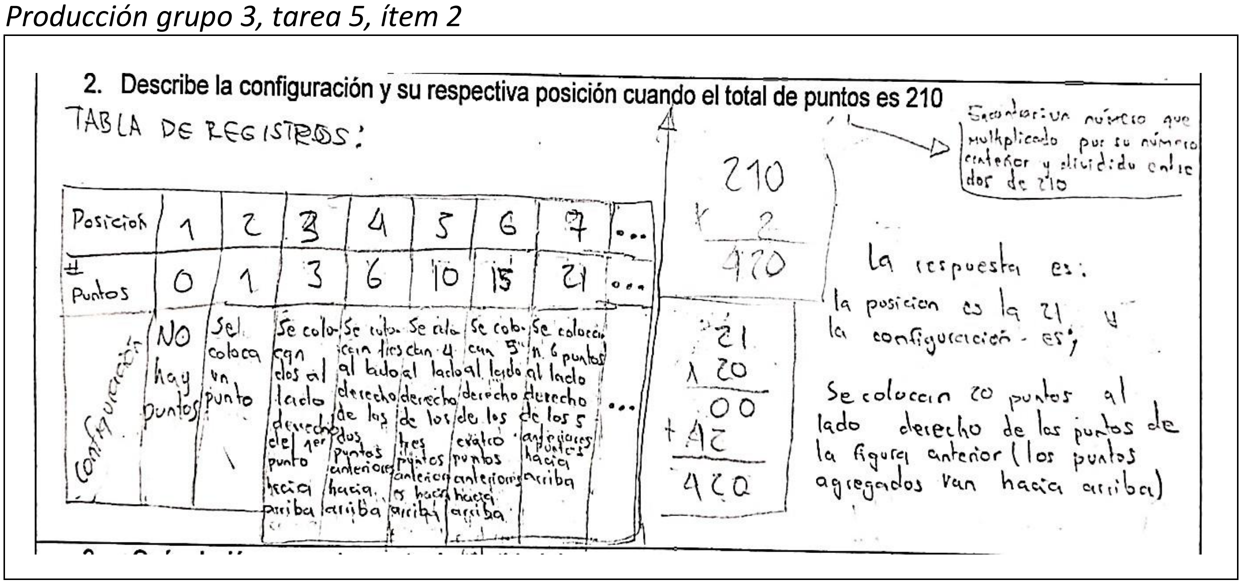
Para el análisis de esta tarea se tendrá en cuenta el tipo de representaciones que los estudiantes utilizaron para nombrar la generalidad de un patrón figural y las formas que los estudiantes relacionan esas representaciones con otras usadas en la tarea anterior, por esta razónsolamente se analizan las producciones grupales y fragmentos de la entrevista grupal para poder justificar cada una de las afirmaciones.

En su mayoría, los estudiantes pudieron representar la generalidad con elementos propios del álgebra como son los símbolos alfanuméricos. De manera general, los estudiantes tuvieron un tránsito entre representaciones pertenecientes al registro semiótico figural (dibujos), registro semiótico aritmético (elaboración de tablas) y el registro semióticoalgebraico (fórmulas encontradas), dicho tránsito fue muy minucioso desde lo figural, tanto así que pasó a un segundo plano cuando los estudiantes se dieron cuenta que era una suma reiterada de valores (característica similar a la tarea anterior). Por esta razón, los estudiantes hacen un proceso de abducción no ingenua que permite encontrar una relación entre la configuración de puntos y su respectiva posición, a partir de una suma reiterada ascendente; cuando los estudiantes encuentran que el resultado total de puntos está relacionado con la suma reiterada empezando desde cero, asocian esta situación con la tarea de los saludos.

Como se evidencia en E17, los estudiantes perciben, expresan y registran el patrón de manera aritmética, pero asocian la comunalidad actual a una que ya habían trabajado en la sesión anterior. Sin embargo, realizan el mismo proceso inductivo para hallar una expresión alfanumérica que represente la situación (Ver cuadro 55); además de ello, hacen una relación entre tres variables consideradas en la situación como la posición, la configuración y la cantidad de puntos: "*Era como en el taller anterior profe, es una suma pero en este caso va aumentando; yo me acuerdo en la de antes era como* 4 + 3 + 2 + 1 + 0 *o bueno ahí el cero no vale, pero acá es al revés pero con la misma suma* 1 + 2 + +3 + 4…"(Yethel, E17, 59). En este caso, se evidencia el sentido de la indeterminancia cuando reconocen la comunalidad llevada a términos que no se conocen en la tabla (lo asignan con tres puntos suspensivos) y el carácter operatorio desde representaciones aritméticas.

Cuadro 55

Producción grupo 3, tarea 5, ítem 2



2. Describe la configuración y su respectiva posición cuando el total de puntos es 210

TABLA DE REGISTROS:

Posición	1	2	3	4	5	6	7	…
# Puntos	0	1	3	6	10	15	21	…
Configuración	NO hay puntos	Se coloca un punto	Se coloca dos al lado derecho del 1er punto hacia arriba	Se coloca tres al lado derecho de los dos puntos anteriores hacia arriba	Se coloca 4 al lado derecho de los tres puntos anteriores hacia arriba	Se coloca 5 al lado derecho de los cuatro puntos anteriores hacia arriba	Se colocan 6 puntos al lado derecho de los 5 puntos anteriores hacia arriba	…

Encontrar un número que multiplicado por su número anterior y dividido entre dos de 210

210 × 2 = 420

21 × 20 = 420

La respuesta es:
la posición es la 21 y la configuración es;

Se colocan 20 puntos al lado derecho de los puntos de la figura anterior (los puntos agregados van hacia arriba)

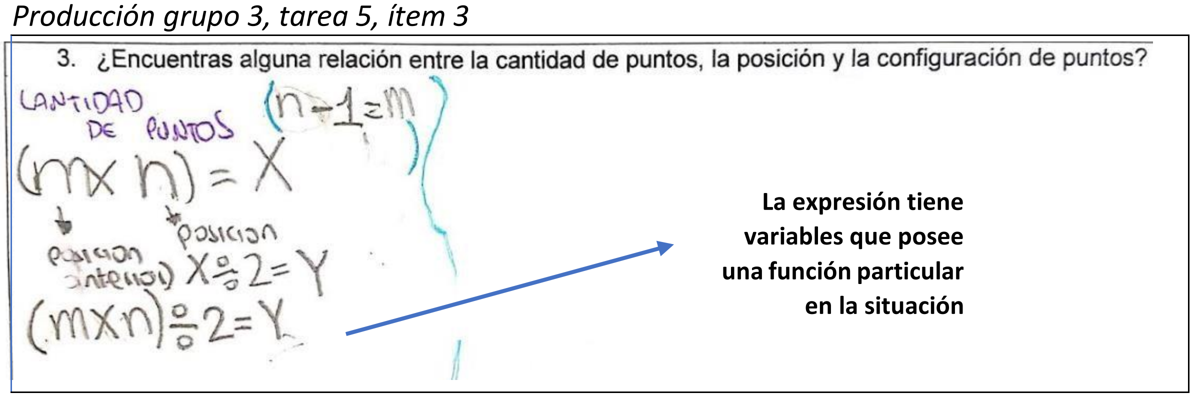
De esta manera el grupo 3 induce una expresión similar a la trabajada en la sesión anterior, con una pequeña variación en cuanto al orden de los factores, ellos indican que como en este caso para la suma cambia el orden de los términos, así mismo debe suceder con los factores: esto puede generar sospechas que los estudiantes a pesar de que validan el mismo patrón y la misma forma de asignar simbólicamente las representaciones no guardan una equivalencia sintáctica.

De esta manera, el grupo 3 logra designar simbólicamente esa indeterminancia, convierte el patrón en una forma particular de realizar sumas. Al centrar la mirada en la forma que Vanesa registra el patrón o lo designa, se reconocen una serie de representaciones que se encuentran en el registro semiótico lenguaje natural y en un aritmético combinadas, ella dice "*coger la cantidad anterior que es* $n - 1 = m$ *y se multiplica*" (Vanesa, E18, 71), entonces estaríamos hablando de un registro semiótico intermedio dado por $RS(N_1^3 - L_1^3)$.

Cuando validan la anterior expresión por medio de ejemplos concretos, el grupo hace la conversión de esta representación a una mejor elaborada que contiene símbolosalfanuméricos y en el uso de cada variable, le asignan un significado propio de la situación (Ver cuadro 56), dicha conversión se denomina $RS(N_1^3 - L_1^3) \rightarrow RS(A_1^3)$.

Cuadro 56

Producción grupo 3, tarea 5, ítem 3

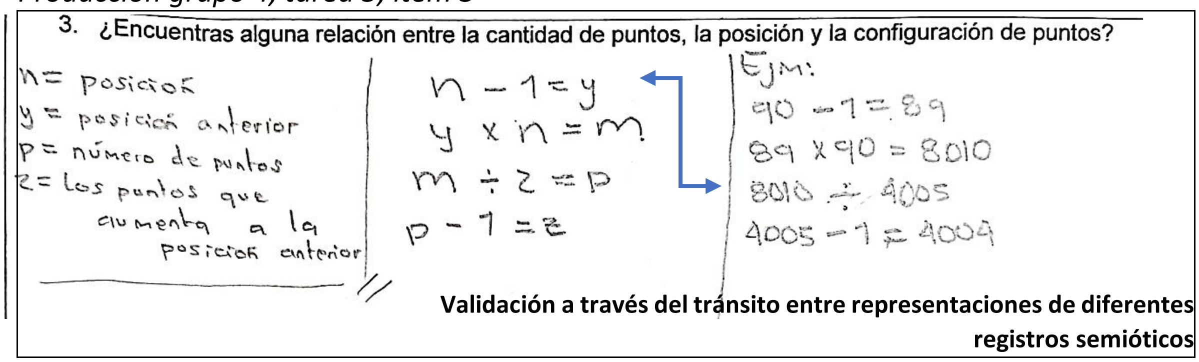


Prácticamente todos los demás grupos actuaron de la misma manera para poder nombrar la generalidad dado a que en el proceso de comunicación y validación, cada uno de los aportes de los integrantes sirve para construir esa representación algebraica. Las expresiones a las que llegaron los estudiantes se comprueban de manera aritmética y siempre hay una movilización entre estas dos representaciones, los integrantes del grupo 4 utilizan una serie de expresiones que por medio de transformaciones de tratamiento llegan a una representación abreviada del patrón.

En esta tarea, es posible visualizar cómo los estudiantes pasan por los cuatro procesos de generalización que menciona Mason (1996) y se evidencia un trabajo arduo por parte de los estudiantes para poder dar explicación a la representación algebraica por medio de la identificación de la comunalidad en la secuencia de patrones, el carácter operatorio de las expresiones aritméticas y algebraicas y por último la designación simbólica de esa generalidad. Cabe aclarar que los procesos de validación de cada una de las expresiones, se da por representaciones de tipo $RS(N_1^4)$, como se evidencia en el cuadro 57.

Cuadro 57

Producción grupo 4, tarea 5, ítem 3



3. ¿Encuentras alguna relación entre la cantidad de puntos, la posición y la configuración de puntos?

n = posicion
y = posición anterior
p = número de puntos
z = los puntos que aumenta a la posicion anterior

$n - 1 = y$
$y \times n = m$
$m \div 2 = p$
$p - 1 = z$

Ejm:
$90 - 1 = 89$
$89 \times 90 = 8010$
$8010 \div 4005$
$4005 - 1 = 4004$

Validación a través del tránsito entre representaciones de diferentes registros semióticos

MOMENTO V

Propósitos proyectados

Caracterización de los tipos de pensamiento algebraico que desarrollan los estudiantes cuando realizan tareas de reconocimiento de patrones

El reconocimiento de patrones y regularidades es una de las vías posibles para introducir el estudio del Álgebra Escolar y coadyuvar al desarrollo del pensamiento/razonamiento/raciocinio matemático de los estudiantes; este asunto ha sido abordado por investigadores interesados en la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra, tales como Orton & Orton (1999), Barboza & Borralho (2011), entre otros, quienes sostienen que la proposición de tareas matemáticas, intelectualmente exigentes (González, 1998), que conducen a la búsqueda, reconocimiento y explicitación de regularidades y patrones propicia el desarrollo de competencias matemáticas importantes, tales como: formulación y verificación de conjeturas; comunicación de ideas matemáticas usando diferentes modos de representación; formulación y prueba de generalizaciones que, de acuerdo con lo que sostiene Fouche (1997), son caracterizadoras de los estudiantes a quienes este autor denomina "algebraicamente competentes", que son aquellos que, durante la realización de actividades matemáticas, ponen en juego procesos cognitivos de orden superior tales como la abstracción, la simbolización y la modelación, los cuales, respectivamente, según el NCTM (2007), se refieren a: comprensión de patrones, relaciones y funciones; representación, mediante símbolos, de situaciones y estructuras matemáticas; y, uso de modelos para representar y comprender relaciones cuantitativas.

En relación con estos procesos, Kaput (2008) señala que *la abstracción*, involucra la generalización y formalización de patrones; *la simbolización*, se vincula con la manipulación de símbolos formal y convencionalmente aceptados o creados ad hoc; y, *la modelación*, implica el uso, adopción, adaptación o creación de representaciones para fenómenos de diferente índole que involucran relaciones cuantitativas; se estima entonces que la activación de estas competencias, propias del pensar algebraico, se estimula cuando el estudiante participa en tareas que exigen la identificación de algún patrón

En efecto, ante la necesidad de lidiar con situaciones de Matemática Escolar que plantean la exploración de patrones, bien sean numéricos, geométricos, pictóricos o figurativos, el estudiante se ve instado a: explorar investigativamente la situación en la que se contextualiza la tarea con la finalidad de detectar las relaciones estables entre los objetos matemáticos involucrados en la misma; usar el lenguaje oral o escrito para explicitar, comunicar y defender argumentadamente sus ideas en torno a la situación; y, más específicamente a: Examinar relaciones numéricas que involucran operaciones con números o procesos de conteo; Generalizar relaciones y representarlas simbólicamente; Utilizar el lenguaje natural o el simbólico para referirse a relaciones identificadas en contextos numéricos o geométricos; Elaborar e interpretar tablas de valores, gráficos u otros dispositivos que sirven para traducir relaciones entre variables; Transitar de unas formas de representación a otra; e, Interpretar el significado de fórmulas.

Todas las acciones antes mencionadas están consideradas como indicadoras del nivel de desarrollo del pensamiento algebraico (de hecho, algunas están incluidas como parte de las Competencias Matemáticas en algunos currículos nacionales de la enseñanza básica, como es el caso de Portugal (ME-DEB, 2001)) y que se manifiestan como capacidades para: Usar variadas formas de representación; Generalizar relaciones observadas entre objetos; Modelar matemáticamente situaciones intra y extra matemáticas que impliquen relaciones cuantitativas; Simbolizar; y, Analizar la variación en diferentes contextos. Estas capacidades, según Canavarro (2009), dan lugar a tres vertientes para estudiar el pensamiento algebraico, a saber: Generalización, Variación, y Modelización.

La Generalización es uno de los indicadores básicos del pensamiento algebraico y constituye una competencia matemática fundamental; en efecto, se ha encontrado que la habilidad/competencia/capacidad para realizar generalizaciones es muy útil en el desarrollo de la formación matemática de las personas; así parecen haberlo confirmado estudios realizados en el ámbito de la Psicología del Aprendizaje de la Matemática y en el del pensamiento matemático, como los efectuados por Bransford, Brown & Cocking (2000).

La habilidad para generalizar ha sido considerada como uno de los rasgos cognitivos que caracterizan a los estudiantes matemáticamente talentosos; otros son: la perseverancia y persistencia en la búsqueda de solución a los problemas y la flexibilidad de pensamiento (atreverse a pensar distinto).

Uno de los medios para propiciar el desarrollo de la capacidad de los estudiantes para generalizar es el trabajo con secuencias (numéricas, geométricas, pictóricas, figurativas, ideográficas) cuya formación siga una cierta regla que no es ostensible a simple vista. En este caso, se proporciona un segmento inicial de la secuencia, constituido por sus primeros tres, cuatro o cinco elementos, y se solicita que sean proporcionados ejemplos de otros términos y determinar si ciertos términos pertenecen o no a la secuencia si ésta es continuada indefinidamente; aquí son posibles dos tipos de generalización: *Cercana o Próxima:* implica la identificación de los términos próximos a los términos conocidos (o dados) de la secuencia, lo cual puede lograrse por conteo, elaborando un dibujo o formando una tabla; *Distante o Lejana:* implica la identificación de los términos suficientemente alejados de los términos conocidos de la secuencia; en este caso, la revelación del patrón exige su comprensión, lo cual significa captar la regla general de formación de la secuencia; *Local*: el patrón se obtiene mediante un enfoque recursivo-aditivo; *Global*: el patrón se obtiene mediante búsqueda de relaciones funcionales.

En todo caso, la generalización exige “el reconocimiento de las variaciones entre los términos de la secuencia”, esto puede intentarse de al menos tres maneras: Elaborar representaciones pictóricas que permitan visualizar, en conjunto, varios términos de la secuencia; Explorar las variaciones numéricas existente entre los términos mediante la realización de operaciones básicas entre ellos; y, Combinar las dos anteriores, lo cual hace posible la “traducción numérica de alguna relación visualizada mediante un representación pictórica”.

Se tiene entonces que, el “Reconocimiento de Patrones” es la tarea fundamental a implementar como medio para coadyuvar al desarrollo de la competencia para “Realizar generalizaciones en Matemática”; dicha tarea consiste en mostrarle al estudiante el segmento inicial (3 a 5 términos) de una secuencia cuyos términos se construyen regularmente de acuerdo con un determinado patrón (regla) que puede ser numérico, figurativo, geométrico o de cualquier otro tipo. Con base en la información aportada, el estudiante debe: Encontrar el término siguiente en la secuencia (generalización cercana); Hallar el décimo (o uno posterior) término en la secuencia (generalización distante); Formular conjeturas en relación a cuál es el patrón de formación de los términos (generalización intuitiva) para lo cual puede usar cualquier modo de representación con el que se sienta cómodo (oral, escrita, figurativa, gráfica, simbólica, etc.); Representar la generalización explícitamente de un modo formal (generalización formal).

Operativamente se procede de la siguiente manera; en primer lugar, se coloca una figura en la cual aparecen los primeros términos de una secuencia, que son mostrados mediante una representación pictórica, figurativa o ideográfica (dibujos, figuras geométricas, puntos, etc.); de seguidas, se formulan cuestiones que deben ser respondidas con base en lo exhibido en la figura mostrada; dichas cuestiones son de tres tipos: Se solicita el número de objetos que son necesarios para construir la figura inmediatamente siguiente en la secuencia; Se pide el número de objetos que hacen falta para construir una próxima figura en la secuencia que esté cerca de las figuras correspondientes a los términos iniciales (generalización próxima); Se solicita el número de objetos que son necesarios para construir una figura de la secuencia que esté bastante alejada de los que corresponden a los términos iniciales, de modo tal que dicho número sea difícil de obtener por conteo directo o implique cálculos muy complejos.

Ejecutar tareas como la anteriormente descrita: Estimula la curiosidad y coadyuva al desarrollo de la capacidad para resolver problemas; Propicia la capacidad de usar varias modalidades de representación de objetos y procesos del mundo real (esquemas, tablas, figuras, escritura numérica); Vincula las representaciones del mundo con objetos (ideas, conceptos, principios, procesos) matemáticos; Propicia la puesta en juego de procesos de comunicación matemática, tanto oral como escrita, así como también el trabajo con representaciones gráficas y el tratamiento y la organización de datos; Resalta el carácter exploratorio de la actividad matemática proponiendo el abordaje de problemas no triviales que no se resuelven con sólo aplicar técnicas y resultados ya conocidos, sino que ameritan la formulación de conjeturas y el diseño de estrategias ad hoc para procurar la solución, para lo cual no funciona la “aplicación mecánica de procesos operatorios”.

Las tareas que involucran el reconocimiento de patrones habitualmente son consideradas como *Tareas Intelectualmente Exigentes* (González, 1998) ya que su ejecución requiere del estudiante la aplicación de sus conocimientos previos de manera no rutinaria, lo cual les insta a usar estrategias y representaciones variadas de modo no habituales.

La ejecución exitosa de la tarea, implica en primer lugar su comprensión, para ello se puede apelar a las siguientes acciones: Usar material concreto manipulable, puesto que los movimientos realizados con este tipo de material proporcionan elementos para lenguajear acerca del proceso implicado en la formación del patrón; Elaborar representaciones gráficas con lo cual es posible formarse una imagen de las acciones cuya ejecución hace ostensible el patrón; Considerar casos específicos, lo cual permite asignar valores particulares a las variables involucradas en el patrón cuando éste es numérico; utilizar expresiones literales o figurativas para representar los elementos participantes en la formación del patrón; y, usar tablas para examinar relaciones numéricas.

Más específicamente, es posible que cuando el estudiante se enfrente a la tarea, realice una o más de las siguientes acciones: Expresión Oral de la regularidad percibida; Transformación inmediata de representaciones pictóricas en representaciones numéricas; Identificación de regularidades conducentes a expresiones del tipo $U_n = an + b$; Calcular la diferencia entre términos consecutivos, para percibir alguna regularidad; tratar de identificar alguna regularidad en la secuencia de valores obtenidos al calcular las diferencias entre términos consecutivos; Lectura figurativa: visualización del patrón examinando la figura; Percepción visual de las cantidades numéricas; Transformación numérica de patrones visuales; Lectura algebraica de patrones en contextos figurativos; y, Conteo visual de los elementos de un término vs identificación visual de la variación de los términos de un patrón en un contexto figurativo.

Con base en lo expuesto anteriormente, puede concluirse que el reconocimiento de patrones constituye una actividad clave en el proceso de desarrollo del pensamiento matemático, habida cuenta de que hay autores, como Devlin (2003), que consideran a los patrones como la característica definitoria esencial de la Matemática y, por tanto, observar, reconocer, identificar, describir y generalizar patrones constituye una competencia matemática fundamental siendo, particularmente, el basamento esencial del aprendizaje del Álgebra.

Los patrones pueden ser clasificados de acuerdo con diferentes criterios; tomando en cuenta el proceso con base en el cual se generan, se pueden agrupar en: *Patrones de repetición*, que son aquellos en los que hay algún elemento identificable que se repite de forma cíclica indefinidamente; es decir, en éstos aparece una "unidad de repetición" que es un grupo reconocible de elementos que se repite cíclicamente, y que puede variar en cuanto a tamaño, color, orientación, etc.; *Patrones de Crecimiento* que se hacen presentes en secuencias en las que cada término cambia de forma previsible en relación con el anterior; *Patrones Lineales*, que son aquellos en los que está involucrada una progresión aritmética, cuyo término general es de la forma $f(n) = an + b$, siendo, a y b números enteros no nulos, a positivo y $(a + b) > 0$ (b puede ser negativo), en síntesis, éstos son aquellos en los cuales el n-ésimo elemento de la secuencia puede ser expresado como $an + b$; Patrones de Conteo, en cuya formación se recurre a la recursividad usando un dato anterior para establecer un nuevo valor.

Otro criterio de clasificación de los patrones es el modo de representarlos; en este caso se puede acudir a diferentes formas de representación: pictórica, figurativa o ideográfica (dibujos, figuras geométricas, puntos, etc.), los cuales dan lugar a patrones numéricos, pictóricos, geométricos, figurativos, ideográficos, computacionales, entre otros.

A continuación serán señaladas algunas de las razones que pueden servir para justificar el trabajo con reconocimiento de patrones:

1. Las actividades de generalización de patrones hacen posible la inmersión en la "cultura del Álgebra", ya que generalizar un patrón numérico visual es uno de los medios para coadyuvar al desarrollo del pensamiento algebraico;
2. Examinar patrones de repetición es un medio para estimular el trabajo con símbolos;
3. En el trabajo de reconocimiento de patrones éstos se pueden observar, verbalizar, generalizar y representar simbólicamente;

4. Las tareas que implican el reconocimiento de patrones coadyuvan a incrementar la habilidad para efectuar generalizaciones en el campo de la Matemática; tales tareas se conciben como Intelectualmente Exigentes (González, 1998) ya que su ejecución exige al estudiante la aplicación de sus conocimientos previos de manera no rutinaria, lo cual les insta a usar estrategias y representaciones variadas de modo no habituales.

5. El reconocimiento de patrones estimula la activación de procesos cognitivos útiles al desarrollo del pensamiento matemático, en especial aquellos vinculados con el razonamiento algebraico, lo cual implica, entre otra habilidades: generalizar patrones aritméticos y geométricos, determinar reglas generales, reconocer estructuras isomorfas; en otras palabras, representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier área de la Matemática

6. El trabajo con reconocimiento de patrones hace viable el uso de los diferentes modos de representación que son formas de expresión de objetos algebraicos (Relaciones binarias de equivalencia o de orden; operaciones y sus propiedades, funciones, estructuras): representaciones gráficas (se asocian con la visualización y vinculan a la geometría con la topología); representación tabular (destaca aspectos numéricos y cuantitativos); representación mediante fórmulas (propicia pensamiento simbólico); representación verbal (oral o escrita) fortalece la capacidad lingüística.

7. La identificación de patrones coadyuva al fortalecimiento de la habilidad para resolver problemas por cuanto que: propicia el uso de algunas heurísticas útiles en la búsqueda de solución tales como análisis de casos particulares, organización sistemática de información, formulación de conjeturas, proposición de generalizaciones.

Limitaciones y potencialidades que tienen los alumnos durante el proceso de generalización

A continuación, exponemos una clasificación descriptiva de las dificultades que tienen los estudiantes cuando desarrollan tareas de generalización.

Dificultades en la transición aritmética-álgebra

Dentro de la historia curricular y los contenidos en el área de las matemáticas se han venido desarrollando los procesos de enseñanza-aprendizaje del álgebra escolar a partir de unos elementos propios, como por ejemplo la rapidez y la confiabilidad en la reducción de términos semejantes. Este tipo de elementos como eje central en el Álgebra generan dificultades en el aprendizaje de cualquier fenómeno a estudiar que pertenezca a esta área, por ello el proyecto SESM sobre estrategias y errores en matemáticas aplicado en el Reino Unido en 1984, presenta una serie de aportes teóricos y prácticos que contribuyen a disminuirlos errores al utilizar la letra en contextos aritméticos y además, asocia este tipo de errores auna falta en la red de conceptos y no en una red de interpretación. Los anteriores aportes, permiten que al momento de intervenir en el aula se tenga en cuenta la experiencia de los estudiantes, la polarización de interpretaciones de situaciones en el mismo contexto, el uso excesivo de diferentes representaciones de una misma situación.

Se dice que el álgebra es primordial y un elemento que fundamenta la aritmética, pero en algunos casos es entendida únicamente como un proceso de generalización. Radford (2010) afirma que trabajar con lo indeterminado es una caracterización del pensamiento algebraicoy, además, el álgebra (como objeto de estudio) se entiende como aquellos métodos que se emplean para operar sobre las estructuras o formas generales. Existen diferentes dificultades que se presentan al momento de trabajar con el álgebra escolar, una de ellas se asocia al uso recurrente de símbolos o letras que se encuentran en contextos propiamente matemáticos, por lo que las interpretaciones pueden llegar a ser las no deseables dado a que no hay conexión entre el sentido asignado y el posible significado (connotación cultural).

No se debe pensar en un ‘distanciamiento’ entre los campos aritméticos y algebraicos, porque allí se encuentran las dificultades más notorias, en aquel transito Rojas y Vergel (2013) explican más a fondo algunos ejemplos:

1. Concatenación de símbolos: Se asocian a la aritmética, el colocar símbolos uno detrás de otro específicamente desde lo aditivo, mientras que en lo algebraico usualmente se asocia a lo multiplicativo. Estos autores plantean que la mala comprensión del sistema de numeración y

el cómo funciona, corresponden a las dificultades más grandes.

2. Uso de paréntesis: Es muy recurrente que los estudiantes tiendan a incumplir el orden jerárquico de las operaciones, o si bien es cierto, al mal uso que le dan a los paréntesis

3. Uso del signo de igualdad: Es evidente que el uso del signo igualdad por parte de los estudiantes tiene una cercanía a entenderse como la separación de dos o más “procesos matemáticos” y no como aquella relación de equivalencia. Como consecuencia de esto se puede pensar, que luego de aquella transición, los estudiantes no logran reflexionar sobre el sentido de expresiones o simbolizaciones alfanuméricas de alguna situación. Además de ello, Rojas (2015) relaciona tres hechos fundamentales para que no se presenten dichas reflexiones ni articulación de sentidos:

4. Manipular los sistemas numéricos como elemento para realizar únicamente transformaciones de tratamiento garantizando así una equivalencia sintáctica más no una equivalencia semántica, esta última hace referencia a la articulación que pueden dar los estudiantes a los sentidos asignados a un objeto matemático.

5. El anclaje a una tarea propuesta implica que el estudiante no acepte ni reconozca otras expresiones equivalentes causado por designar una sola y única representación a tal situación.

6. La escasez en el dominio operativo de los objetos de un mismo registro semiótico obliga al estudiante a realizar un ‘análisis’ puramente icónico, es decir, se queda con el simbolismo de la expresión.

Por otro lado, indican que las dificultades se asocian también a la poca centralización que pone la escuela en relación con procesos de generalización y hacia lo desconocido o indeterminado (Rojas, 2015). La idea es que se pueda focalizar el desarrollo del pensamiento algebraico específicamente en las relaciones entre cantidades, generalización de patrones, la simbolización y su respectiva manipulación. De esta manera se cree que es más una problemática de tipo curricular que de tipo cognitivo, por ello Vergel (2014) indica que se debe crear y reconocer espacios para una zona conceptual, en donde se empieza a pensar algebraicamente, sin necesidad de acudir al uso de elementos alfanuméricos propios del álgebra.

Dificultad para detectar la comunalidad

Algunos estudiantes pueden presentar dificultad para hacer el tránsito que plantea Radford (2013) ya que pudieron estar trabajando con elementos propios de la aritmética al intentar generalizar algo. Para este autor la comunalidad local (presente para algunas figuras),no garantiza el uso de una expresión que permita hallar cualquier término de la secuencia (particularmente las que no se ven), cuando sucede eso, se estaría haciendo una generalización aritmética.

Este tipo de generalización se ha venido trabajando por autores como Rojas, Romero & otros(1999), cuando acuden a interpretaciones que pueden llevarse al ámbito algebraico al uso dela letra, una de esas interpretaciones corresponde a la letra como número generalizado la cual es vista como un representante de valores. De hecho, esta idea podría estar sustentada en las diversas interpretaciones del álgebra escolar y sus correspondientes interpretaciones de la letra (ver cuadro 57), al mostrar relaciones entre números y traducciones como destrezas asociadas a la concepción de algebra como aritmética generalizada.

Cuadro 57
Diversas concepciones del algebra en correspondencia con el uso de la letra y destrezas asociadas.

Concepción de álgebra	Uso de la letra	Destrezas asociadas
Aritmética generalizada	Patrones generalizadores (letra como objeto)	Traducir y generalizar (relaciones entre números)
Estudio de procedimientos para resolver problemas	Incógnitas	Simplificar y resolver
Estudio de relaciones entre cantidades	Argumentos, parámetros (letra como número generalizado, o como variable)	Relacionar, tabular, graficar
Estudio de estructuras	Objetos arbitrarios	Manipular, justificar

El papel estelar de la representación: Denotación y sentido

Aun cuando se ha dicho que el manejo eficaz del simbolismo no se puede tomar como equivalente a un óptimo nivel de pensamiento algebraico es preciso exponer algunas ideas para su aclaración. En el desarrollo del pensamiento algebraico puesto en práctica al reconocer patrones es clave tener en cuenta lo relacionado no solo con la sintaxis sino con la semántica. Es decir, el énfasis debe orientarse hacia el manejo claro de los distintos significados asociados al símbolo.

Al operar con expresiones algebraicas es clave tomar en cuenta la *denotación* y el *sentido* de las mismas. Según señala Frege (1892) toda expresión algebraica denota una función pues para cada valor de la variable (o variables) se obtiene un número que es la evaluación de la expresión para esos valores; mientras que una ecuación, o sistema de ecuaciones, denota una función booleana ya que para cada valor de las variables en juego, se tiene una proposición de la cual se puede decir si es verdadera o falsa, y el conjunto solución de la ecuación es el conjunto formado por aquellos valores que dan una proposición verdadera.

Por ejemplo, las expresiones $4,\ 2+2,\ 2.2$ y 2^2 tienen la misma denotación, así como también las expresiones (x^2-y^2) y $(x-y).(x+y)$, y las ecuaciones $2x+3=7$ y $2x=4$. Sin embargo, poseen distintos sentidos el cual tiene que ver con la información que se desprende de la grafía en sí misma.

El hecho de que distintas escrituras con la misma denotación tengan sentidos diferentes se apoya en una propiedad fundamental del lenguaje algebraico como es la posibilidad de leer información en la escritura de una expresión. Por ejemplo, las expresiones $(x-1).(x-5)$ y $(x-3)^2-4$, son equivalentes y denotan la misma función cuadrática, pero portan diferentes sentidos: la primera muestra los ceros de esta función (o las raíces de este polinomio), en tanto que la segunda permite identificar rápidamente el eje de simetría y el vértice de la parábola que corresponde al gráfico de la función.

Drohuard (2009) señala que lo que falla fundamentalmente en los alumnos con dificultades en álgebra es que no tienen en cuenta la denotación de los objetos algebraicos que manipulan, y que en particular desconocen que al trabajar con expresiones algebraicas o con ecuaciones es preciso conservar dicha denotación Este autor describe como autómata formal a un alumno que no tiene en cuenta, cuando manipula las expresiones del álgebra elemental, que al transformar una de ellas debe obtener una equivalente. En este caso, la pregunta de la validación del resultado no se plantea en términos de la equivalencia de las escrituras obtenidas, sino ante todo, en términos de conformidad con reglas y procedimientos (por ejemplo, lo que está restando pasa sumando).

Modificar el sentido conservando la denotación es una de las características fundamentales del lenguaje algebraico y la que le otorga su potencia.

El papel de los cuantificadores

Las consideraciones anteriores nos llevan a identificar la necesidad del uso de cuantificadores cuando se opera con expresiones algebraicas. En el trabajo de aula, la mayoría de las veces, esos cuantificadores permanecen implícitos, con la intención de simplificar el método. Y queda a cargo de los alumnos entender la diferencia entre la igualdad, por ejemplo, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, que expresa la equivalencia entre dos expresiones algebraicas, y la igualdad $(a+b)^2 = a^2$, que expresa una condición que se impone y que determina un conjunto de valores que hace verdadera la igualdad (una ecuación). La “tentadora” igualdad $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ suele ser calificada como errónea, falsa, o incorrecta, y raramente es trabajada como condición que define el conjunto solución $a = 0$ ó $b = 0$.

Niveles semánticos en el tratamiento de expresiones algebraicas

En total correspondencia con Duval (2006), creemos que en el aprendizaje del álgebra se debe prestar atención a las diversas transformaciones que puede tener una expresión algebraica de tal forma que el estudiante se oriente hacia su óptimo manejo. Los alumnos deben aprender, tanto a controlar las leyes de transformación de las escrituras como a anticipar sus efectos sobre una expresión dada, para poder elegir la transformación mejor adaptada al problema que está tratando. En este sentido, Nicaud (1993) establece tres diferentes niveles semánticos:

Primer nivel (nivel de evaluación): Dar sentido a una expresión algebraica mediante el reemplazo de valores en las variables y la realización del cálculo correspondiente.

Segundo Nivel (Nivel de tratamiento): Transformar las expresiones en otras equivalentes. Implica conocer las transformaciones y saber justificarlas. Tal justificación reposa en el hecho de que una expresión y su transformación coinciden en toda evaluación.

Tercer Nivel (Nivel de Resolución de Problemas): Tener conocimiento de estrategias que permitan la elección de las transformaciones adecuadas para resolver un determinado problema, haciendo significativo el cálculo. Implica, necesariamente, saber anticipar el efecto de las transformaciones a realizar, es decir no solo saber la denotación sino anticiparse al sentido. Por ejemplo, un estudiante debe aprender que: $(x+1).(x-5)=(x-2)^2-9=x^2-4x-5$. Deberá saber cómo transformar cualquiera de estas expresiones en otras y deberá optar por la más conveniente, de acuerdo con la tarea a realizar (hallar las raíces de una ecuación cuadrática, dibujar la gráfica de una parábola, hallar su vértice, sumarla o restarla a alguna otra expresión, etc.).

Muchos estudiantes no llegan a dominar este tercer nivel en el tratamiento de las expresiones algebraicas, es decir, frente a cada problema no llegan a *darse cuenta* de cómo organizar su actividad para poder arribar a una conclusión.

Las actividades de reconocimiento de patrones orientadas hacia la generalización apuntan directamente a la construcción propia de este tercer nivel semántico del que habla Nicaud (1993), que se presenta entonces en simultáneo con un trabajo en los otros dos niveles. Lejos del autómata formal de Drouhard (2009), pensamos en un alumno que vaya construyendo sus herramientas de control y sus estrategias para elegir.

Medios semióticos expuestos por los estudiantes en el proceso de generalización

Al analizar las demandas de los problemas planteados de generalización, encontramos útiles las categorías que establecen Mason et al (2014) en cuanto a los requerimientos de 'ver', 'decir', 'registrar' y 'probar' un patrón. La clave del éxito parecía estar en la primera etapa de percepción de patrones, donde era necesaria cierta flexibilidad para dar con un patrón matemáticamente registrable.

En esta investigación se comprobó que ‘decir’ efectivamente es una de las etapas en el proceso de reconocer un patrón. En este sentido, cobra importancia que este ‘decir’ se haga orientado hacia una expresión algebraicamente significativa, EXOAS (González, 2015)

Muchos estudiantes exhibieron la habilidad de expresar las generalizaciones oralmente, pero muchas de estas descripciones orales carecían de precisión. Entonces, si bien sus respuestas orales parecían "correctas", uno se pregunta cuánto "rellena" el oyente cuando escucha las respuestas a las preguntas formuladas.

Una revisión de las cintas de video indicó que este era el caso, lo que sugiere que la precisión necesaria para las respuestas escritas correctas puede faltar en las conversaciones en el aula. En este caso, los gestos y la manipulación de materiales suman a las conversaciones, elementos que faltan en las respuestas escritas. Estos estudiantes también parecían carecer del vocabulario matemático necesario para proporcionar respuestas precisas. Así, en muchas ocasiones podían modelar las relaciones con materiales concretos y podían intentar describir esta relación utilizando un lenguaje impreciso adornado con gestos.

Sin embargo, a menudo volvían a las respuestas de "nivel inferior" cuando se les pedía que escribieran su generalización en forma escrita (por ejemplo, "agregar 2" en lugar de hacer referencia al número de cuadritos). Este resultado podría comenzar a explicar las grandes variaciones en las respuestas sobre algunas preguntas de la pruebas en las que el mismo problema que casi todos pudieron completar y describir oralmente dentro del contexto del discurso en el aula. Por lo tanto, parece quedar claro que el papel del lenguaje matemático y la comprensión matemática en el aula necesita más investigación.

Ahora bien, con respecto al tipo de representaciones semióticas y las transformaciones que emergieron de las tareas, algo que llama la atención fueron aquellas transformaciones de conversión que se aplicaron a expresiones asociadas a registros intermedios. Es decir, la hipótesis sobre transformaciones de conversión se efectúa entre representaciones propias a un registro semiótico establecido, mas no de representaciones que no se encuentran clasificadas en un solo registro. Las transformaciones de conversión hechas por los estudiantes, en su gran mayoría, permitieron que la expresión representativa de la generalidad tomara una forma más estructurada y formal con elementos propios del registro semiótico algebraico y al mismo tiempo, que se asignara un sentido consciente a dicha representación.

Las representaciones más usadas por los estudiantes dependen del tipo de dificultad de la tarea, de hecho, en el ejercicio de análisis se evidencia que cuando hay tres cantidades que se relacionan, los estudiantes hacen un cambio de representación semiótica entre más de dos registros semióticos; de esta manera, es posible que surja mayor cantidad de transformaciones de conversión que de tratamiento como se evidenció en las tareas 4 y 5. En ambas tareas, los estudiantes constantemente establecen relaciones y movilizan sus representaciones entre diversos registros semióticos. Como se dijo anteriormente, aquellas transformaciones ocurren por dos razones:

1. *Tratamiento:* En su gran mayoría, los estudiantes utilizan estas transformaciones para validar sus hipótesis, sus “fórmulas“, generar igualdades entre dos representaciones (que son denominadas *equivalencias sintácticas*), para definir un carácter operatorio de los objetos involucrados.

2. *Conversión*: Este tipo de transformaciones son utilizadas para justificar procedimientos y acciones matemáticas, relacionar tratamientos con hipótesis acerca de generalidad, hacer predicciones acerca de la comunalidad y poder introducir expresiones mejor elaboradas.

Se evidenció que, de acuerdo con los procesos mencionados por Mason (1996), los estudiantes hacen un tránsito inicial con la situación, determinando las características y relaciones entre diversos lenguajes (figural y numérico) inicialmente, para luego reconocer una comunalidad local y general.

Esto ocurre cuando los estudiantes ven alguna recurrencia e identifican el patrón, asignando dicha regla general a términos que no son visibles, es decir, ver lo general en lo desconocido;en un primer momento, los estudiantes perciben y expresan de manera individual el patrón; al momento de reconocer la regularidad se realiza una representación de lo indeterminado (*Registrar el patrón*) que constantemente fue percibido por representaciones correspondientes a los registros semióticos lenguaje natural, aritméticoy figural.

De acuerdo con esto, las combinaciones de representaciones en diversos registros semióticosconstituyen una idea de registros semióticos intermedios (Duval & Sáenz, 2016) que en el desarrollo de pensamiento algebraico son mediadores para construir una designación simbólica formal y abreviada constituida por una regularidad que aplica para cualquier término de la secuencia o el patrón. Estos registros intermedios posibilitan también que los estudiantes no tengan afán por utilizar símbolos alfanuméricos (correspondientes por el registro semiótico algebraico), sino que por el contrario desarrollen procesos para validar dichas hipótesis y poderlas probar por medio de ejemplos puntuales.

Con respecto a algunas acciones desarrolladas por los estudiantes que involucraron los procesosde generalización, en este estudio se considera que en un estado inicial (individual), se encuentra la relación entre las cantidades de manera aritmética; luego hacen las verbalizaciones respectivas de las transformaciones (por medio de operaciones en el sistemade numeración), y por último hay un intento de representar o nombrar dicha regularidad apartándose de la ejemplificación y la constante aparición de la letra como número generalizado.

El proceso transitorio entre una generalización aritmética y una algebraica está mediado por tres elementos fundamentales:

1. *La verbalización* de procedimientos, donde el estudiante hace una conversión desde una representación constituida por el registro semiótico aritmético y una representación en el registro semiótico lenguaje natural.

2. *El proceso de interacción con el otro*, ya que por medio de la validación y comunicación de las producciones es posible que haya transformaciones de conversión y tratamiento donde los estudiantes pueden llegar a una expresión abreviada, que corresponden finalmente a una generalización algebraica.

3. *El uso de diversas representaciones* que corresponden a la misma situación, en este aspecto los estudiantes pasan (de manera individual) por diversas formas de expresarun patrón, permitiendo manejar un sistema de símbolos propios y aceptados localmente, es decir, representaciones en lenguajes intermedios como válidos en sus procesos.

MOMENTO VI

Aspectos instruccionales que favorecen el proceso de generalización

El papel del profesor

Para que la propuesta de enseñanza tenga éxito y los alumnos avancen en su aprendizaje del álgebra es fundamental el papel del profesor. Él tendrá que:

1. Organizar el entorno social en el cual se desarrolla la clase, de manera que se logre una participación activa de los estudiantes durante las actividades, con el propósito de propiciar el intercambio de ideas acerca del concepto de variable.

2. Guiar a los alumnos durante las actividades y las discusiones en grupo, con el propósito de que desarrollen habilidades para trabajar, primero, con cada uno de los diferentes usos de la variable de manera separada y, después, integrando los distintos usos de la variable y puedan pasar de uno a otro de manera flexible.

Con respecto al primer punto, consideramos que, para propiciar que los alumnos aprendan, es importante lograr que en el salón de clases exista un ambiente de confianza, donde los estudiantes se sientan libres de dar sus respuestas, y que estén motivados a la participación, sin temor a cometer errores. La ausencia de autoritarismo en el profesor (quien evitará dictar lo que se debe hacer o decir) permitirá que los estudiantes se expresen libremente, den sus puntos de vista y defiendan sus respuestas, sin miedo a ser regañados o reprimidos, o a sentir vergüenza por haberse equivocado.

Es conveniente que el profesor organice y dirija las discusiones grupales de tal manera que todas las voces de los alumnos sean escuchadas. En gran medida, el diálogo hará que en el salón de clases vayan surgiendo las nuevas ideas que llevarán a los estudiantes a apropiarse de nuevos conceptos. El profesor debe ser paciente cuando los alumnos estén dando sus respuestas; tiene que darles el tiempo suficiente para que desarrollen sus propios argumentos y, en un primer momento, aceptar también como posibilidades las respuestas equivocadas. Éstas, junto con las respuestas más acertadas, después serán analizadas colectivamente con el fin de ir modificándolas hasta lograr un consenso alrededor de una respuesta que ayude a los alumnos a acercarse al concepto deseado.

En cuanto al segundo punto, su justificación emana de algunas ideas fundamentales de la teoría sociocultural de Vygotsky (1979). Uno de los conceptos vigotskianos de mayor importancia para la educación es el de zona de desarrollo próximo. Ésta se define como la distancia entre el nivel de desarrollo real, determinado por la capacidad del niño para resolver un problema de manera independiente, y el nivel de desarrollo potencial, determinado por su capacidad para resolver un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con compañeros más capaces. Según Vygotsky (1979), un aspecto esencial del aprendizaje es que éste va creando la zona de desarrollo próximo, ya que despierta una variedad de procesos internos de desarrollo que operan solo cuando el niño interactúa con otras personas de su entorno y con sus compañeros. Una vez que tales procesos son interiorizados, se vuelven parte del propio desarrollo del niño.

Aplicada a la enseñanza, esta perspectiva hace evidente que el papel del profesor no es el de transmisor de un cuerpo de conocimientos; más bien, es un experto que guía a los alumnos hacia el desarrollo de nuevos conceptos al propiciar la formación de la zona de desarrollo próximo. Por tanto, el profesor puede ser visto como un instrumento mediador entre el alumno y el concepto que se desea que éste aprenda. En el caso que aquí nos ocupa, se espera que el profesor guíe a los alumnos hacia la adquisición de los conceptos algebraicos (en particular, el concepto de variable).

Entonces, ¿cuáles serán las acciones prácticas que conviene que el profesor emprenda bajo esta perspectiva?

1. Crear un contexto de aprendizaje, caracterizado por un conjunto de actividades que involucran, de manera integrad, a los alumnos, el objeto de estudio (en nuestro caso, el álgebra desde la perspectiva del concepto de variable) y los instrumentos que se utilizan (las tareas, los materiales, los signos, los símbolos).

2. Planificar las actividades de manera que propicien el crecimiento de la zona de desarrollo próximo de sus alumnos. En la planificación debe preverse que el estudiante establezca conexiones entre sus conocimientos previos (adquiridos durante la educación primaria o los primeros grados de secundaria) y los nuevos conceptos que conforman un área de las matemáticas nuevas para él. Es importante que el profesor cree las oportunidades que fomenten la participación de sus alumnos, tomando en cuenta sus conocimientos previos, y que los guíe, mediante las actividades, hacia la comprensión de nuevos conceptos (en nuestro caso, los distintos roles que juega la letra).

3. Prever que haya una participación activa y colaborativa de los estudiantes durante l ejecución de la tarea, bajo la guía de alguien más capaz. Para lograrlo, es de suma importancia que las preguntas que se formulen incluyan conceptos y elementos ya familiares para los alumnos, a partir de los cuales se desarrollen conceptos nuevos. Se pretende que, bajo la guía del experto, lols alumnos resuelvan los problemas que se les plantean y, poco a poco, vayan adquiriendo el control de la situación hasta alcanzarlo por completo, y lleguen finalmente a resolver los problemas sin la intervención del experto. Se espera que los alumnos construyan significados, los desarrollen y puedan comunicarlo a los demás. En nuestro caso, lo anterior significa lograr que los estudiantes, desde los primeros acercamientos al álgebra empiecen a:

3.1 Diferenciar entre los distintos usos de la variable.

3.2 Verbalizar las características de cada uso.

3.3 Desarrollar la idea de variable como un concepto multifacético, pasando entre sus distintos usos con flexibilidad.

3.4 Usar el lenguaje algebraico para expresarse.

4. Para lograr la participación de los alumnos es muy importante la utilización de estrategias comunicativas adecuadas, que lleven a los estudiantes a la observación de los aspectos que el experto considera relevantes. El parafraseo de las respuestas de los estudiantes es una estrategia comunicativa del profesor, que permite a los alumnos reflexionar para acercarse a la generalización de situaciones. Lo más común es que los niños respondan mediante la ejemplificación de casos particulares, y es aquí donde el profesor, parafraseando esa respuesta, puede acercarlos a la generalización. Con ese mismo recurso, el profesor

también introduce términos nuevos o correctos, que todavía no son utilizados por los estudiantes. De esta manera, el profesor asume el papel de experto, representante de la cultura, que lleva a los alumnos a conocer y apropiarse del lenguaje algebraico.

Estas recomendaciones pretenden también resaltar, por un lado, la importancia que tiene, para la adquisición de conocimientos nuevos, el tipo de interacciones que se establecen en el salón de clases con el profesor y entre los alumnos; y por el otro, la relación que existe entre la adquisición de conocimientos nuevos y las actividades en las que se involucra a los estudiantes en el aula.

Para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucran el número general es necesario (Ursini, Escareño, Montes, y Trigueros 2005):

G1. Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas

G2. Interpretar la letra simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.

G3. Deducir reglas y métodos generales, en secuencias y en familias de problemas.

G4. Manipular (simplificar, desarrollar) la letra simbólica

G5. Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales

Algunas aplicaciones de la letra como número general

A continuación mostraremos algunos ejemplos concretos que permiten poner en evidencia el papel de número general de las letras. Se hace evidente que en el planteamiento es necesario que los alumnos desarrollen algunas capacidades básicas tales como:

1. Realizar cálculos sencillos operando con letras.
2. Comprender por qué es posible operar con letras y por qué estas operaciones permiten llegar a un resultado sea éste numérico o no.
3. Dase cuenta de la importancia que tiene lograr la capacidad de usar las letras para modelar matemáticamente situaciones de distinto tipo.
4. Distinguir entre los distintos usos que se les da a las letras en álgebra.

5. Pasar con flexibilidad entre los distintos usos de las letras.

6. Integrar los distintos usos para verlos como caras distintas de un mismo objeto matemático, que se revelan dependiendo de la situación particular.

En lo que respecta al docente: Es necesario que tenga una comprensión profunda de los distintos roles que juegan las letras en matemática.

Ejemplo 1. Escriba la expresión que representa el área de la siguiente figura:

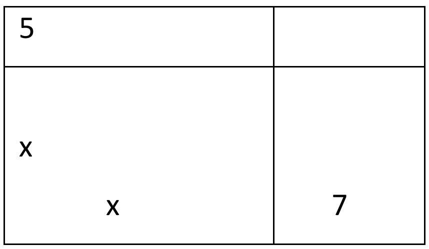


Gráfico *6*. *Letra general para el cálculo de áreas*

Para resolver el problema es necesario:

1. Interpretar la letra x como la representación de un número general. (En algunos casos de indeterminada, aun cuando la letra representa cualquier número en realidad no queremos inducir una sustitución sino la comprensión de un hecho. Es lo que ocurre por ejemplo, cuando escribimos $a + \mathrm{b} = \mathrm{b} +$ a para expresar la propiedad conmutativa.

2. Usar la letra para representar simbólicamente la base y la altura de la figura dada (x+7 y x+5, respectivamente).

3. Expresar simbólicamente el área de la figura: (x+7). (x+5).

4. Eventualmente, resolver la multiplicación para obtener otra representación dada por: $x^2 + 12\mathrm{x} + 35$.

Ejemplo 2. Dada la siguiente lista de números, si denotamos con la letra n un lugar cualquiera de la lista, ¿qué número estará en ese lugar?

Cuadro 58

Letra general en una secuencia de números

Lugar	Número
1 2 3 . . . n.	30 60 90 . . .

Para resolver el problema es necesario:

1. Reconocer el patrón que rige la relación entre el lugar que ocupa un número y el número mismo.

2. Interpretar la letra n como la representación de un número general.

3. Deducir la regla general distinguiendo entre lo que varía y lo que permanece invariante. En este caso, darse cuenta de que los números se obtienen multiplicando el número 30 (lo que no varía) por el lugar que ocupa en la lista (lo que varía).

4. Simbolizar la regla general usando el símbolo dado para representar el número general. En este caso, escribir, $30n$.

Ejemplo3. Desarrolle la expresión: $(\mathrm{x}+7).(\mathrm{x}-3)+2\mathrm{x}$

Para resolver el problema es necesario:

1. Interpretar la x como número general.

2. Manipular la letra para desarrollar la expresión.

Ejemplo 3. Observe las siguientes figuras:

Cuadro 59.

Patrón en una configuración de puntos

		Número de puntos
Fig. 1	∘	1
Fig. 2	∘ ∘ ∘ ∘	4

Cuadro 59 (cont.).

Fig. 3	∘ ∘ ∘ ∘ ∘ ∘ ∘ ∘ ∘	9
Fig. 4		

1. ¿Cuántos puntos hay en la figura 4?
2. Dibuja la figura 5 y dá el número total de puntos
3. Dibuja la figura 6 y dá el número total de puntos
4. Imagina que puedes seguir dibujando figuras hasta la figura m. ¿Cuántos puntos en total tendrá esa figura?

Para resolver el problema es necesario:

1. Reconocer el patrón que rige la relación entre el lugar ocupa una figura y el número de puntos que la componen.
2. Interpretar la letra m como la representación de un número general.
3. Deducir la regla general distinguiendo entre lo que varía y lo que permanece invariante. En este caso, darse cuenta de que, para cada figura, la cantidad de hileras es igual a la cantidad de columnas que tiene, y lo que varía es el número de puntos que componen cada hilera y cada columna.
4. Simbolizar la regla usando el símbolo dado para representar el número general. (en este caso, escribir: m^2)

Los ejemplos analizados sugieren que un requisito para comprender el uso de la letra como número general y poder trabajar con él consiste en desarrollar la capacidad para reconocer patrones, hallar reglas, deducir métodos generales y describirlos. Para ello, es necesario distinguir entre los aspectos invariantes y los que varían en una multiplicidad de situaciones, que pueden involucrar secuencias geométricas o numéricas, o estar relacionadas con la estructura de familias de problemas.

Para trabajar con la letra como número general se requiere también ser capaz de usar símbolos para representar una situación general, una regla o un método, o relacionar expresiones generales entre sí. Ante una expresión general, dada o construida por el propio estudiante, éste tiene que interpretar los símbolos involucrados como números generales, los cuales representan cantidades indeterminadas que no se pueden, ni es necesario, determinar. Tiene que manipular este tipo de expresiones (por ejemplo, factorizar o simplificar) cuando así lo requiere el problema, sin necesidad de asignarle valores específicos a las letras.

Los números generales aparecen en expresiones abiertas (por ejemplo, $4x + 7$), en tautologías $(3 + x = x + 3)$, en fórmulas generales $(A = b.h)$, como parámetros en las ecuaciones $(x^2 + 5mx + 7 = 0)$ y en las ecuaciones generales $(ax + b = cx + d)$. Es necesario que el alumno los interprete como cantidades generales y logre distinguirlos de las variables simbólicas, que representan cantidades desconocidas pero específicas.

MOMENTO VII

Conclusiones y recomendaciones

El desarrollo del pensamiento algebraico vía los procesos de generalización se hace eficaz cuando se logran interconectar diferentes contenidos matemáticos y se promueve la interacción social de la forma explicación multivocal[8] . Este tipo de interacción constituye para los alumnos un avance en sus perspectivas para explicar su pensamiento y tratar de cambiar el del otro.

La generalidad puede llevar tiempo con algunos alumnos, pero ofrece la posibilidad de trabajar diferentes contenidos matemáticos al mismo tiempo que se trabajan los algebraicos y ello representa una gran ventaja para el docente de matemáticas que desea enseñar los contenidos curriculares de manera significativa y no parcializada. Asimismo, el estudiante accede a todos los temas del currículo y es él quien encuentra las relaciones existentes.

La exploración de patrones permitió efectivamente el desenvolvimiento del pensamiento algebraico de los estudiantes en algunos aspectos o, más específicamente, el sentido del símbolo, al proporcionar que los alumnos utilizaran diferentes representaciones, identificaran y generalizaran relaciones, analizaran sus significados y tomaran conciencia de la importancia de la verificación de los datos.

Por lo anterior, como asunto a destacar en estas conclusiones queremos reiterar las orientaciones de Ursini, *et al* (2005) con respecto a las necesidades que deben satisfacerse si nos planteamos trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucran el número general:

G1. Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas

---

[8] En este tipo de interacción ocurre un conflicto entre los alumnos, cada uno defiende como correcto su razonamiento.

G2. Interpretar la letra simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.

G3. Deducir reglas y métodos generales, en secuencias y en familias de problemas.

G4. Manipular (simplificar, desarrollar) la letra simbólica

G5. Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales

La enseñanza del álgebra escolar ha sido continuamente criticada por “pasar rápidamente de las palabras a los símbolos de una sola letra” (Mason, 1996, p. 75). Lo cual afecta la expresión oral algebraicamente significativa (González, 2015).

Sin embargo, debe reconocerse que existe una brecha entre la capacidad de los estudiantes para expresar la generalidad verbalmente y su capacidad para emplear la notación algebraica cómodamente. Esta brecha, junto con la prisa “hacia los símbolos de una sola letra [que] ha marcado la enseñanza del álgebra escolar durante más de cien años” (Mason, 1996, p. 75), deja a los estudiantes con un sentimiento de insuficiencia por no cumplir con las expectativas. Varios participantes expresaron una preocupación explícita de que sus soluciones estaban incompletas porque carecían de una "fórmula". Esto es consistente con la observación de Schoenfeld (1988) de que, para los estudiantes, la forma de expresión es lo que más importa y no usar la forma adecuada, independientemente de la sustancia de lo que se haya producido, es ser “poco matemático”. En lugar de insistir en una notación simbólica en particular, esta brecha debe aceptarse y usarse como un lugar para que los estudiantes practiquen su pensamiento algebraico. Deben tener la oportunidad de participar en situaciones que promuevan tal pensamiento sin las limitaciones del simbolismo formal. Los problemas que son ricos en patrones, como el presentado a nuestros participantes, ofrecen a los estudiantes tales oportunidades.

La interacción entre la descripción oral de patrones y poner esta descripción en forma escrita también requiere más investigación. Si bien ambos se ven como símbolos desde una perspectiva semiótica, parece que algunos sistemas de símbolos son más fáciles de entender para los jóvenes estudiantes que otros.

Como alternativa, varios investigadores han anunciado la exploración de patrones como una introducción preferida al álgebra. Por lo general, esto ha implicado la búsqueda de “patrones algebraicamente útiles” (Lee, 1996, p. 95), seguida de un movimiento hacia la notación algebraica para generalizar el patrón percibido.

La pregunta con respecto a este enfoque de dos pasos es, ¿cuándo surge el pensamiento algebraico y qué podría indicar su presencia?

Cuando se usa el término álgebra, abarca dos conceptos distintos: pensamiento algebraico y simbolismo algebraico. Hay una falta de acuerdo entre los investigadores en cuanto a la relación entre los dos. Algunos ven los símbolos algebraicos como un componente necesario del pensamiento algebraico, mientras que otros los consideran como un resultado o como una herramienta de comunicación. Además, se argumentan diferentes perspectivas sobre la relación entre el razonamiento algebraico y la generalización.

Para Kieran (1989), “la generalización no es equivalente al pensamiento algebraico, ni siquiera requiere álgebra. Para que el pensamiento algebraico sea diferente de la generalización…un componente necesario es el uso del simbolismo algebraico para razonar y expresar esa generalización" (p. 165). Ella sugiere además que "para una caracterización significativa del pensamiento algebraico no es suficiente ver lo general en lo particular, uno también debe ser capaz de expresarlo algebraicamente" (*ob. cit*.). Por otro lado, Charbonneau (1996) considera el simbolismo como central para el álgebra, pero "no toda el álgebra" (p. 35). Él considera el simbolismo como un lenguaje que puede condensar la presentación de un argumento y como un medio para resolver problemas.

En las tareas realizadas el pensamiento algebraico surgió a través de formas alternas de comunicar sus hallazgos; similar a la conclusión de Radford (2006) de que los “estudiantes ya estaban pensando algebraicamente cuando estaban lidiando con la producción de un mensaje escrito, a pesar de que no estaban usando el simbolismo algebraico estándar” (p. 258). Además, cuando nuestros jóvenes estudiantes demostraron tanto el pensamiento algebraico como la capacidad de usar la notación algebraica, les faltaba sincronización entre los dos. Por lo tanto, ni la presencia de notación algebraica debe tomarse como un indicador del pensamiento algebraico, ni la falta de notación algebraica debe juzgarse como una incapacidad para pensar algebraicamente.

Sin embargo, una tendencia más reciente entre los investigadores es separar el simbolismo algebraico del pensamiento algebraico. Esta consideración separada es fomentada por dos factores: (1) un mayor reconocimiento de la posibilidad de manipulación de símbolos sin sentido y (2) un movimiento para el "álgebra temprana", es decir, centrarse en la estructura en lugar de la computación en la escuela primaria. Para Kaput y Blanton (2001), generalizar y formalizar patrones y restricciones es una de las formas del “compuesto complejo” del razonamiento algebraico (p. 346). Ven “la generalización (que incluye la argumentación deliberada) y la expresión progresivamente sistemática de esa generalidad …como base de todo el trabajo que hacemos (en álgebra)” (ob. cit.). Más específicamente, por razonamiento algebraico Kaput (2008) se refiere a la actividad de los estudiantes de generalizar sobre datos y relaciones matemáticas, estableciendo esas generalizaciones a través de conjeturas y argumentaciones y expresándolas en formas cada vez más formales.

Mason (1996) trae más detalle al pensamiento algebraico como actividad. Él ve las raíces del pensamiento algebraico en la detección de similitudes y diferencias, en hacer distinciones, en clasificar y etiquetar, o simplemente en la "búsqueda de algoritmos". La formación misma de este algoritmo en la mente del estudiante, cualquiera que sea la forma en que se conciba, podemos considerarlo como pensamiento algebraico.

El simbolismo algebraico, según Mason, es el lenguaje que da voz a este pensamiento, el lenguaje que expresa la generalidad. Dörfler (1991) sugiere que la generalización teórica necesita una cierta descripción simbólica. Sin embargo, cree que la descripción simbólica no implica necesariamente el uso de letras. Según Dörfler, estos símbolos pueden ser de naturaleza verbal, icónica, geométrica o algebraica. Esto es consistente con Sfard (1995), quien usa el término álgebra “con respecto a cualquier tipo de esfuerzo matemático relacionado con procesos computacionales generalizados, sean cuales sean las herramientas para transmitir esta generalidad” (p. 18).

Adoptamos los últimos puntos de vista, más inclusivos, sobre el pensamiento algebraico. La tarea establecida para los participantes en nuestro estudio no conduce a una notación algebraica “suave”, presentada en una fórmula “limpia” que conecta el elemento n con su ubicación en la matriz numérica.

Esto no era requerido ni esperado de este grupo de participantes. Sin embargo, al explorar patrones, los participantes se dedicaron a detectar semejanzas y diferencias, clasificar y etiquetar, buscar algoritmos, conjeturar y argumentar, establecer relaciones numéricas entre componentes o, más generalmente, en "generalizar sobre datos y relaciones matemáticas": actividades identificadas como componentes del pensamiento algebraico por Mason (1996) y Kaput (2008).

Además, nuestros participantes estaban activamente comprometidos en buscar una forma de expresar su generalización. Sus intentos de usar la notación algebraica, más allá del simple etiquetado de elementos a menudo parecían inútiles.

Finalmente, con bases en las experiencias durante la recolección y desarrollo de actividades y sus respectivos análisis, se concibe el Pensamiento Algebraico Móvil, el cual definimos como, una forma de pensar que se caracteriza por el desplazamiento transversal entre los tipos de pensamiento algebraico Factual, Contextual y Simbólico, es decir, cuando el estudiante manifiesta elementos de cada uno de ellos en una misma situación problemática sobre secuencias y reconocimiento de patrones. A partir de lo anterior, resultaría pertinente continuar investigando sobre el tema a fin de ampliar su concepto y posibles variantes.

REFERENCIAS

Andonegui, M. (2009). *La Matemática de primer año de bachillerato.* XIII Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática, Mérida, Venezuela.

Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*. Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Britt, M. and Irwin, K. (2008). Algebraic thinking with and without algebraic representation: a three-year longitudinal study. *ZDM Mathematics Education* 40, 39–53.

Borralho, A. y Barboza, E. (2009). *Exploração de Padrões e Pensamento Algébrico*. En Vale, I. y Barbosa, A. (Coord). *Patrõnes.* (pp.59-68). Portugal; Viana Do Castelo.

Barboza e Borralho (2011). Padrões e o desenvolvimento do pensamento algébrico. Comunicación presentada en la XIII CIAEM. Recife, Brasil: 26 al 30 de junio de 2011. Documento en Línea. Disponible en: http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/1111/604

Bransford, J. D., Brown, A. L., & Cocking, R. R. (2000). How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School: Expanded Edition. Washington, D. C.: National Academy Press.

Canavarro, A. P. (2009). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante 16(2),* 81-118.

Cañadas, M. C. y Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y Aprendizaje*, *34*(4), 409-425.https://doi.org/10.1174/021037011797898449

Castro, E. (2013). *Exploración de Patrones Numéricos Mediante Configuraciones Puntuales. Estudio con Escolares de Primer Ciclo de Secundaria (12-14 años).* Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Disponible: http://digibug.ugr.es/handle/10481/25009 [Consulta: 2022, noviembre 8]

Charbonneau, L. (1996). 'From Euclid to Descartes: Algebra and its relation to geometry'. En N. Bednarz, C. Kieran and Lee, L. (eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*, (pp. 15-37). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Colás, Mª. P. (1998). Métodos y técnicas cualitativas de investigación en psicopedagogía. En L.

Buendía, P. Colás y F. Hernández. *Métodos de investigación en psicopedagogía* (251-286). Madrid: Mc Graw Hill

Collis, K. (1982). La matemática escolar y los estadios de desarrollo. *Revista Infancia y aprendizaje, 20,* 39-74

Corbeta, P. (2003). *Metodología y técnicas de investigación social*. España: McGraw-Hill.

Da Ponte, J. (2009). Uma agenda para investigação sobre padrões e regularidades no ensino-aprendizagem da Matemática e na formação de professores. En I. Vale y A.Barbosa (Org.), *Padrões*: *Múltiplas Perspectivas e contextos em Educação Matemática*, (pp. 169-175). Brasil: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

D'Amore B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido*. Relime, Número especial*, 177-196.

Devlin, K. (2000). *The Math Gene.* Great Britain: Basic Books.

Devlin, K. (2003): *Mathematics: The Science of Patterns.* New York:Owl Books

Dörfler, W. (1991). 'Forms and means of generalization in mathematics'. En A.J. Bishop (ed.), *Mathematical Knowledge: Its Growth through Teaching* (pp. 63–85). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Drouhard, J.P. (2009). *Epistemography and algebra*. Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. January 28th - February 1st 2009, Lyon (France). Disponible en http://ife.ens-lyon.fr/editions/editions-electroniques/cerme6/cerme6. [Fecha de consulta: 11 enero 2023]

Duval, R. (2002). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. En F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Twenty-first Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mexico, I, 3-26

Duval, R (2017). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (2da, ed. M. Vega, Trad.). Cali: Universidad del Valle. (Originalpublicado en 1995).

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de La RSME*, Vol. 9.1 (2006), 143–168.

Duval, R. & Sáenz, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: Perspectivas semióticas seleccionadas*. Bogotá: Editorial Universidad Distrital

Ehuletche, A. y Santángelo, H. (2000). *El diseño de propuestas pedagógicas en la enseñanza no presencial, con soporte de nuevas tecnologías y redes de comunicación*. Revista Medios y Educación [Revista en línea], 15. Disponible: https://idus.us.es/xmlui/bitstream/handle/11441/45511/file_1.pdf?sequence=1&isAllowed=y [Consulta: 2019, agosto 28]

Elliot, J. (2000). *El cambio educativo desde la investigación acción*. España: Morata

Ellis, A. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. *Journal of the Learning Sciences*, 16(2), 221–262.

Fontana, A. y Frey, J. (2005). The Interview, from neutral stance to political involvement. En N. K. Denzin & Y S., Lincoln (Comp). *The Sage Handbook of Qualitative Research* (pp. 695-727). London, UK: Sage.

Fouche, K. (1997). Algebra for Everyone: Start Early. *Mathematics Teaching in the Middle School, 2(4),* 226-229.

Frege, G. (1892). *Escritos lógicos y filosóficos*. España, Madrid: Tecnos.

Freudenthal H. 1983. *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, pp. 599.

Giménez, J. (1997). *Evaluación en Matemáticas. Una integración de perspectivas*. Madrid: Síntesis, S.A.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática* Trabajo de investigación presentado para optar a la Cátedra de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Goldin, G. (2000). *A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research*. En: KELLY, A.; LESH, R. (Ed.). Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education. New York: Routledge, 2000. p. 517-545.

González, A. (2015). *Procesos del Pensamiento Algebraico en Entornos de Aprendizaje Mediados Tecnológicamente.* Tesis doctoral, Universidad Central de Venezuela

González, A. (2016). *Línea de Investigación en Didáctica del Álgebra y Pensamiento Algebraico*. Documento no publicado. UPEL, Maracay

González, A. (2017). *Aspectos conceptuales y didácticos del pensamiento algebraico*. Areté. Revista Digital del Doctorado en Educación de la Universidad Central de Venezuela. 3 (5), 7 – 38.

González, F. (1998). Metacognición y Tareas Intelectualmente Exigentes: El caso de la Resolución de Problemas Matemáticos. *Zetetiké*, 6 (9), 59 – 87.

González, F. y González, A. (2013). *Introducción al Pensamiento Algebraico:* Estudio y Reconocimiento de Patrones y Regularidades, NIEM: Trabajo no publicado.

Halmos, P. (1980). The heart of mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 87, 519-524.

Harel, G. y Tall, D. (1999) 'The general, the abstract and the generic in advanced mathematics', *For the Learning of Mathematics* 11(1), 38–42.

Hidalgo, B. y González, F. (2009). Metabolización de información: un modelo dinámico para interpretar el proceso de producción de conocimiento. *Investigación y Postgrado*, Caracas, 24 (1) Disponible en <http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1316-00872009000100002&lng=es&nrm=iso>. [Consulta: 2023, enero, 28]

International Congress on Mathematical Education (ICME 14). (2020). *Teaching and Learning of Algebra at the Secondary Level.* [Documento en línea]. Disponible: https://www.icme14.org/static/en/news/37.html?v=1626250479036 [Consulta: 2021, Junio 18]

Kaput, J. (2008). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema, & T. Romberg (Edits.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (p.p. 133-155 [216]). Mahwah [us]: Routledge; Lawrence Erlbaum Associates

Kemmis, S. (1989). *El curriculum más allá de la teoría de la reproducción*. Madrid: Morata

Kieran, C. (1989). The early leraning of algebra: A structural perspective. En S. Wagner y C. Kieran. Research agenda for mathematics education*: Reseacrh issues in the learning and teaching of algebra* (Vol. 4, p. 33-56). Hillsdale, NJ:Erlbaum

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school trhough college levels. En: Lester, F.K. (ed). *Second Handbook of research on mathematics teaching an learning.* (pp. 707-762). Reston, Virginia: NTCM e IAP

Küchemann, D. (1980). *The understanding of generalizad arithmetic (algebra) by secondary school children.* Tesis de doctorado. University of London, Institute of Education.

Lincoln, Y. & Guba, E. (1994). *"Paradigmas en pugna de la investigación cualitativa". En* Manual de Investigación Educativa. En Norman, D., Ivonna, L. (Eds). (pp 105-117),Londres: SAGE

Lupiáñez, J. (2016). Sistemas de representación. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 119-137). Granada, España: Ediciones Pirámide.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Reserach and Teaching.* London: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J. (1999). *Provoking students to use their natural power to express generality: Tunja sequences.* Revista EMA [Revista en línea], 4. Disponible: http://funes.uniandes.edu.co/1100/1/56_Mason1999Incitaci%C3%B3n_RevEMA.pdf [Consulta: 2019, marzo 19]

Mason, J., Graham, A., Pim D. y Gowar, N. (2014). *Rutas hacia el Álgebra. Raíces del Álgebra.* Colombia: Ibagué.

ME-DEB (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competencias Essenciais.* Lisboa: Ministério da Educacao, Departamento de Educación Básica

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *2*(1), 24-40

Meza, L. (s/f). *La Zona de Desarrollo Próximo*. [Documento en línea]. Disponible: https://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:HuGSCfSUf_UJ:https://www.infoamerica.org/documentos_word/vygotsky.doc+&cd=10&hl=es&ct=clnk&gl=ve [Consulta: 2019, agosto 12]

Ministerio del Poder Popular para la Educación (MPPE) (2015). *Informe Integrado de la Consulta por la Calidad Educativa* [Documento en línea]. Disponible: http://www.cerpe.org.ve/tl_files/Cerpe/contenido/documentos/Actualidad%20Educativa/Transformacion%20curricular%20EM/2 %20Consulta%20Nacional%20por%20la%20Calidad%20Educativa%20en%20BOX.pdf [Consulta: 2018, noviembre 6)]

Ministerio del Poder Popular para la Educación (MPPE) (2016). *Proceso de Transformación Curricular en Educación Media*. Caracas: Autor.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)(2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM. Disponible: https://www.nctm.org/Store/Products/Principles-and-Standards-for-School Mathematics-(Book-and-E-Standards-CD)/

Nicaud, J-F. (1993). Modélisation en EIAO, les modeles d'APLUSIX. Rapport de recherches no.859. LRI, Université de Paris Sud.

Orton, A. and Orton, J. (1999). 'Pattern and the approach to algebra', in A. Orton (ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*. Cassell, London, pp. 104–120.

Palarea, M. (1998). La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años. Tesis doctoral. Universidad de la Laguna, España.

Pérez, G. (1994). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes*. Madrid: La muralla

Piaget, J. (1926). *El lenguaje y el pensamiento del niño.* Nueva York: Harcourt Brace & Company.

Radford, L (s/f). *Aprendizaje desde la perspectiva de la Objetivación.* [Documento el Línea] Disponible: https://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/produccion/aprendizaje_desde_la_perspectiva_de_la_teoria_de_la_objetivacion.pdf [Consulta: 2020, Sepyiembre 26]

Radford, L. (2006). *Algebraic thinking and the Generalization of Patterns: a Semiotic Perspective.* Research in Mathematics Education [Revista el línea], 12(1). Disponible: http://www.luisradford.ca/pub/60_pmena06.pdf [Consulta: 2020, Diciembre 14]

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. En: *ZDM Mathematics Education, 40,* 83-96.

Radford, L. (2010). *Algebraic thinking from a Cultural Semiotic Perspective.* PME-NA 2006 Proceedings [Revista en línea], 2(1). Disponible: https://www.researchgate.net/publication/233043460_Algebraic_thinking_from_a_cultural_semiotic_perspective

Radford, L. (2013). *En torno a tres problemas de la generalización*. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3-12). Granada, España: Editorial Comares.

Radford, L (2014). *De la Teoría de la Objetivación.* Revista Latinoamericana de Etnomatemática [Revista en línea], 7(2). Disponible:https://www.google.com/search?q=Aprendizaje+desde+la+perspectiva+de+la+Teor%C3%ADa+de+la+Objetivaci%C3%B3n&rlz=1C1HLDY_esVE719VE720&oq=Aprendizaje+desde+la+perspectiva+de+la+Teor%C3%ADa+de+la+Objetivaci%C3%B3n&aqs=chrome..69i57.676j0j7&sourceid=chrome&ie=UTF-8 [Consulta: 2019, septiembre 14]

Radford (2015). *Methodological Aspects of the Theory of Objectification.* Perspectivas da Educação Matemática. [Revista en línea], 8(8). Disponible: https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/index

Rico, L., Castro, E. y Romero, I. (2000). *Sistemas de representación y aprendizajes de estructuras numéricas.* Granada, España: Universidad de Granada.

Rojas, B. (2010) *Investigación cualitativa, fundamentos y praxis.* Venezuela; Caracas.

Rojas, P. (2014). *Articulación de saberes matemáticos: Representaciones semióticas y sentidos.* Bogotá: Editorial Universidad Distrital.

Rojas, P. (2015). Objetos matemáticos, representaciones semióticas y sentidos. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(1), 151-165. doi: https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1479

Rojas, P. & Vergel, R. (2013). Procesos de generalización y pensamiento algebraico. En Gallego, A. (Ed.), *Memorias del 14° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.* Revista Científica, Edición Especial, 760-766

Rojas, P., Rodríguez, J., Romero, J. Castillo, E. y Mora, L. (1999). *La transición aritmética-álgebra*. Grupo Pretexto, Bogotá: Universidad Distrital-Gaia

Ruiz, J. I. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Bilbao: Universidad de Deusto

Socas, M. (1999). *Perspectivas de investigación en pensamiento algebraico.* En Ortega, Tomás (Ed.), Actas del III SEIEM (pp. 261-282). Valladolid: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM

Steen, L.(1998). Enseñanza agradable de las matemáticas. México: Limusa

Tamayo, O. (2006). Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Educación y Pedagogía*, vol. XVIII, nº 45.

Taylor, S. J. y Bogdan, R. (1996). *Introducción a los métodos de investigación*. Barcelona: Paidos

Trujillo, P. A., Castro, E., Molina, M. (2009). Un estudio de casos sobre el proceso de generalización. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII.* pp. 511-521. Santander: SEIEM

Universidad Pedagógica Experimental Libertador (2011). *Manual de trabajos de grado de especialización y maestría y tesis doctorales.* Caracas: Autor.

Ursini, S; Escareño, F; Montes, D. y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del Álgebra Elemental. Una propuesta alternativa*. México: Trillas, S.A.

Usiskin, Z. (1988). *Conceptions of School Algebra and Uses of Variables*. p. 8-19. En: COXFORD, A. (Ed.). The Ideas of Algebra, K-12: 1988 Yearbook. Reston (Virginia): NCTM.

Venet, M. y Correa, E. (2014). *El concepto de Zona de Desarrollo Próximo: un instrumento psicológico para mejorar su propia práctica pedagógica*. Pensando Psicología [Revista en línea], 10(17). Disponible: http://dx.doi.org/10.16925/pe.v10i17.775 [Consulta: 2019, agosto 25]

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)*. Tesis Doctoral. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Disponible: https://www.researchgate.net/publication/318904196_Formas_de_pensamiento_algebraico_temprano_en_alumnos_de_cuarto_y_quinto_grados_de_educacion_basica_primaria_9-10_anos [Consulta: 2019, marzo 20]

Vergel, R (2015). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria.* Tesis Doctoral. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Vergel, R. y Rojas, P. (2018). *Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula.* Énfasis. Libros de los énfasis del Doctorado Interinstitucional en Educación.

Villa, J. (2016). El proceso de generalización matemática: Algunas reflexiones en torno a su validación, *Revista tecnológicas* (16), 139-151

Vygotsky, L. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona, Crítica.

Warren, E. y Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics* 67, 171–185.

Zazkis, R. y Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics,* 49, 379–402.

ANEXOS

[ANEXO 1]

PROGRAMA DEL TALLER SOBRE RECONOCIMIENTO DE PATRONES

De acuerdo con los objetivos planteados en la investigación, para su fase instruccional se tomó el Programa propuesto por González y González (2013) ajustándolo en varias de sus partes quedando el siguiente el Programa del Taller:

Título: Introducción al Pensamiento Algebraico: Estudio y Reconocimiento de Patrones y Regularidades

Facilitador: Gustavo Pedriquez

1) Descripción general del Curso:

- Tema
- Audiencia
- Propósito
- Duración
- Número de participantes

Tema

Estudio y reconocimiento de patrones y regularidades como parte sustantiva del álgebra educativa

Audiencia

Estudiantes de Bachillerato.

Propósito

Con este Taller se aspira desarrollar conceptos, contenidos y procesos propios del Álgebra Educativa, considerando la actividad de reconocer patrones y regularidades como una vía que permite alcanzar la competencia para generalizar.

Duración

El Taller se desarrollará en 4 sesiones de 2 horas cada una.

Número de Participantes

15 participantes

2) Programa:

- Objetivos
- Contenidos
- Metodología
- Estrategias didáctico-pedagógicas
- Recursos

- ❖ Estrategias de evaluación
- ❖ Bibliografía

Objetivos

General

Al finalizar este Taller los participantes deberán haber desarrollado competencias prácticas que le permitirán resolver problemas que involucren el reconocimiento de patrones y regularidades representados de distintos modos.

Específicos

1. Definir: patrón regularidad y generalización
2. Clasificar los patrones de acuerdo con algún criterio.
3. Aplicar técnicas particulares de resolución de problemas para el reconocimiento de patrones y regularidades.

Contenidos

1. Regularidades y Patrones matemáticos. Definición y clasificación.
2. Técnicas para el reconocimiento de patrones y regularidades.
3. Importancia del lenguaje natural y algebraico. Uso e interpretación de los símbolos.

Metodología

Este taller se desarrollará de forma presencial. Para iniciar el Taller se presentará y discutirá todo lo relacionado con el Programa del mismo (objetivos, contenidos, actividades, recursos que se requieren, etc.). Se formarán grupos de trabajo. Luego, se facilitará un material conceptual (libro base) acerca de los patrones y regularidades, ahí encontrarán su definición, clasificación según los criterios: formas de presentación y naturaleza de la unidad de repetición. Se dará un tiempo para la discusión intragrupal e intergrupal, respectivamente. En la parte práctica se plantearán varios problemas, con distintos niveles de complejidad y distintas formas de representación. Se dará un tiempo para su resolución grupal. Luego, se recibirán las soluciones, éstas se discutirán tomando en cuenta los diferentes mecanismos empleados. Se instará a los participantes a elaborar protocolos de resolución de problemas individuales, para ello se precisarán algunas estrategias. En la última sesión, los participantes expondrán sus logros en el desarrollo de la capacidad para generalizar.

Estrategias Didáctico-pedagógicas Sugeridas.

- Generar discusiones dirigidas, por ejemplo con lluvia de ideas, para ello es importante tomar en cuenta las experiencias algebraicas de los participantes.
- Como técnica del trabajo se recomienda organizar grupos de trabajo y la generación de debates.
- El facilitador deberá estar atento a las diversas interpretaciones y discusiones que se dan en cada grupo. Esto es trascendente puesto que cada grupo tendrá su propia realidad, discutirán diferentes ideas al mismo tiempo.
- Tomar en cuenta el uso del lenguaje, tanto natural como el algebraico, en la resolución de los problemas.
- Privilegiar el establecimiento de conexiones entre las distintas representaciones de los patrones.
- Es importante prestar **mucha atención a las definiciones y al vocabulario en general**, a fin de tener seguridad de que los facilitadores y los participantes están hablando del mismo concepto. Prestar atención a los distintos errores que cometen los participantes y trabajar en función de los mismos.
- Brindar apoyo y dar orientaciones generales en todo momento.
- Llevar un registro particular de todas las actividades realizadas.

Recursos

1. Bibliografía básica: *Introducción al Pensamiento Algebraico:* Estudio y Reconocimiento de Patrones y Regularidades de González y González (2013)
2. Presentaciones
3. Documentos sobre el tema

Estrategias de Evaluación

La evaluación se llevará a cabo en función de los propósitos y objetivos del Taller, en consecuencia se propone el siguiente esquema de evaluación:

Estrategia	**Ponderación**
Elaboración de protocolo	25
Autoevaluación	25
Coevaluación	25

Evaluación del docente (Criterio: Participación activa y de calidad en cada una de las actividades propuestas)	25
Bibliografía Recomendada	

Castro, E, 1995. *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Comares. Granada.

De la Peña, J. (1999). Álgebra en todas partes. Fondo de Cultura Económica: Mexico

Devlin, K. (2003): *Mathematics: The Science of Patterns.* New York:Owl Books.

González, F. y González, A. (2013). *Introducción al Pensamiento Algebraico:* Estudio y Reconocimiento de Patrones y Regularidades, NIEM: Trabajo no publicado.

[ANEXO 2]

TRANSCRIPCIÓN DE LAS ENTREVISTAS REALIZADAS

Entrevista 1			
5:06 - 5:07	7	Profesor	*¿Tú cómo lo harías?*
5:08 - 5:24	8	Juliana	*Yo solo, digamos necesito el número 5, entonces pongo 5 y le sumo el número anterior que es 4 entonces 4+5 y me da el número de círculos y ya.*
5:25 - 5:32	9	Profesor	*¿No haces nada más?, ¿y qué hiciste tú, en qué pensaste antes parapoder llegar a lo que me estás diciendo?*
5:33 - 5:54	10	Juliana	*Pues traté de mirar cómo se podía y luego me di cuenta que en el número 1 había un círculo y el número 2, dos, entonces ya sabía que en el número siempre de abajo estaba el número que se necesitaba y luego miré el de arriba y me di cuenta que estaba el número anterior en todos entonces si lo sumaba me daba el número de círculos.*

Entrevista 2			
20:03 - 20:07	72	Profesor	*Listo, ¿por qué ustedes creen que m es cualquier posición?*
20:08 - 20:10	73	Juliana	*Porque significa cualquier número*
20:11 - 20:12	74	Profesor	*¿Qué significa cualquier número?*
20:13 - 20:18	75	Juliana	*Emm o sea …*
20:19 - 20:25	76	Profesor	*¿A quién te refieres cuando me dices que m significa cualquiernúmero?*
20:26 - 20:27	77	Juliana	*Un número*
20:28 - 20:29	78	Profesor	*Pero ¿a quién te estás refiriendo?*
20:29 - 20:30	79	Juliana	*A m*

Entrevista 3			
24:21 - 25:18	103	Juliana	*Bueno, pues yo hice la figura de círculos pues para que se supieram que sig... cuanto valía, entonces yo primero hice la figura y puse esto para que supieran que m es igual a estos círculos que en este caso yo puse que eran 6 entonces m es igual a 6 y luego puse acá al lado del 4 o sea al lado de los 4 círculos m-1 que es igual a... me equivoqué aquí no era 6 sino 5, m-1 entonces era igual a 4 y me...*

Entrevista 4			
17:05 - 17:13	50	Profesor	*No, no te estoy diciendo que esté mal el proceso que hiciste. Pero ¿Por qué necesitaste volver a dibujar?*
17:14 - 17:19	51	Juliana	*No, no, no, no, necesitaba, solo le pregunté a mi grupo y dijeronque sí.*

Entrevista 5			
20:34 - 20:44	81	Fernando	*Yo digo que m es cualquier posición porque yo tengo claro lo que me habían enseñado: que cualquier letra en minúscula significacualquier número*
20:45 - 21:02	82	Profesor	*Listo, ahora sí quiero escucharlos cómo encontraron esa respuesta y lo vamos a hacer así en el orden como están ustedesva a empezar Fernando*

Entrevista 6			
21:45 - 22:12	87	Fernando	*Sí, porque es que x es, el digamos el anterior número de m digamos m ejemplo 4, 4-1 seria x 3, x sería igual a 3, entonces ahora, 3 más esa m que es el mismo 4 entonces daría 9 que es el número.*

Entrevista 7			
22:13 - 22:19	88	Profesor	*¿Bueno, entonces aquí yo hice en esta hojita lo que tú me acabas de decir 4-1 = 3+4?*
22:27 - 22:28	91	Fernando	*Hummm*
22:28 - 22:31	92	Profesor	*¿Eso es lo que tú quieres decir, realmente?*
22:32 - 22:32	93	Fernando	*No*
22:33 - 22:33	94	Profesor	*¿En qué te equivocaste?*
22:33 - 22:47	95	Fernando	*Eeeeem... o sea hacer una operación seguida y no hacerla o seael -1 aparte del 3 + 4*

Entrevista 8			
9:53 - 10:10	25	Estudiante1	*Bueno, yo multipliqué por dos la posición y resté hasta encontrarel número 19.*
10:13 - 10:16	26	Profesor	*Multiplicaste por dos la posición…*
10:16 - 10:23	27	Estudiante1	*Y resté hasta encontrar el número 19*
10:24 - 10:39	28	Profesor	*Porque aquí lo que les preguntan es '¿qué posición tiene exactamente 19 círculos?' ¿Cómo hiciste para saber la posición?si eso es lo que te están preguntando.*
10:40 - 11:00	29	Estudiante1	*Comencé a hacer la secuencia y llegué a la respuesta de que era la posición 15 que era 19 círculos.*

Entrevista 9			
14:40 - 14:51	44	Profesor	*Pero, por ejemplo, en el punto 2 tú nos diste una forma de encontrar la figura, ¿cierto? ¿Cuál era esa forma?*
14:54 - 15:05	45	Estudiante1	*Eeeeem...Multiplicar por 2 la posición, restarle un círculo y ahí salía la cantidad.*

Entrevista 10			
7:06 - 7:07	7	Profesor	*¿Por qué elevas estos números al cuadrado?*
7:08 - 7:24	8	Kevin	*Solamente vi que si elevamos al cuadrado el número de doblecesse acerca a las marcas totales*
7:25 - 7:32	9	Profesor	*¿Y tú, cuál fue la razón?*
7:33 - 7:45	10	Juliana	*Después de las operaciones que hacía Kevin, nos pusimos a probar con números al azar y empezamos a hacer las operaciones para que nos diera estos números [señala en una tabla donde están los valores de las marcas]*
7:45 - 7:58	9	Juan	*Aunque profe, estamos haciendo una tabla para que podamos encontrar más rápido los resultados que necesitamos porque asínos estamos demorando mucho*

Entrevista 11			
8:02-8:06	11	Profesor	*Bueno, ¿Para qué les sirvió la tabla?*
8:07-8:17	12	Juliana	*Si nos sirvió profe, porque ahí se ve que si multiplicamos dosveces ellos dobleces nos da la cantidad de partes*
8:18-8:20	13	Profesor	*Muéstrame en la tabla lo que estás diciendo*
8:21-8:31	14	Daniel	*Es que mire profe [señala en la tabla la columna 4 de resultados] acá nos da 16 porque cuatro por cuatro es 16, también es igualen este valor [señala en la tabla la columna 2 de resultados] que4 es resultado de multiplicar 2 por 2*
8:31-8:42	14	Kevin	*(Interrumpe a su compañero) cuando tenemos esos resultados empezamos a hacer operaciones para poder encontrar el número que necesitamos, ahí restamos al azar.*
8:42-8:45	15	Profesor	*¿Al azar? ¿Por qué restar?*
8:45-9:00	16	Juliana	*Profe porque necesitábamos hallar las marcas de cada doblez, entonces siempre es menor este valor [señala la fila de las marcas] que estos de aquí [señala la fila de las partes]. Entonces ahí elevar al cuadrado los dobleces que hacemos y luego de restamos el mismo número que tenemos al principio*
9:00-9:05	17	Profesor	*Bueno, con lo que dice Juliana ¿pueden estar seguros de que eso siempre les va a funcionar al momento de hallar el número de marcas?*
9:06-9:17	18	Daniel	*Sí, eso es como una fórmula, digamos algo así como* $d^2 - d =$ m*, que si ponemos en* d *el valor de los dobleces nos dará el resultado de las marcas [escribe en una hoja de procedimientosla expresión encontrada]*
9:18-9:27	19	Profesor	*Yo quiero escuchar la opinión de Luis, ¿Estás de acuerdo con lo que tus compañeros han dicho hasta el momento, o qué piensas?*
9:29-9:40	20	Luis	*[Luis hace un gesto de inconformidad] Yo estaba pensando que no es posible porque sólo funciona cuando hay 1 y 2 dobleces, ahí toca restarle uno siempre*

Entrevista 12			
21:12-21:15	34	Profesor	*Chicos, después de hacer la tabla ¿pueden decirme cuántasmarcas se hacen luego de 5 dobleces?*
21:15-21:46	35	Viky	*Es que es difícil saber, digamos si podemos encontrar las partes porque se está multiplicando por dos el número anterior, entonces como cuando se hacen 4 dobleces hay 16 marcas, para 5 dobleces se multiplica el último valor [señala el número 16 que corresponde a las partes] por 2 y nos daría 32 marcas [la estudiante realiza en una hoja de procedimientos* $16 \times 2 = 32$*]. Hasta aquí nos funciona en todos los casos*
21:46-22:02	36	Profesor	*Bueno, si se dan cuenta ya están mostrando cómo hallar el número de partes teniendo siempre el valor anterior, pero ¿qué pasaría si no tuviéramos el valor anterior?*
22:02-22:06	37	Viky	*Son los números pares*
22:06-22:12	38	Profesor	*¿Segura puedes encontrar todos los números pares en la* *columna de las partes? ¿Los demás qué opinan?*
22:12-22:21	39	Humberto	*No, porque por ejemplo no está el 6, ni el 12 y el 14 tampoco; es como lo que dijo Viky antes, multiplicamos por dos las veces que sean necesarias o hasta llegar al resultado de los dobleces.*
22:21-22:28	40	Profesor	*Me podrían explicar ¿cuántas partes habría luego de realizar 7 dobleces?*
22:28-22:33	41	Viky	*Multiplicamos siete veces el número 2 y ahí encontramos elresultado, escriba usted Andrés el proceso.*
22:33-22:40	42	Andrés	*Digamos* $2 \times 2 = 4$*, aquí también sería* $2 \times 2 = 4$*, estos dos lo multiplicamos y da 4, por último, queda el dos para multiplicar* *[realiza el proceso en una hoja aparte]*

Entrevista 13			
5:05-5:07	43	Profesor	*Entonces, ¿Qué pasa cuando tienen cualquier cantidad de dobleces?*
5:08-5:17	44	Andrés	*Se multiplica el 2 las veces que sean los dobleces, por ejemplo, si fueran 8 dobleces serían 8 veces multiplicar el dos, si fueran 12 dobleces tocaría multiplicar 12 veces el número 2 y así sucesivamente.*
5:18-5:21	45	Profesor	*¿Están de acuerdo con que esa multiplicación reiterada o sucesiva les permite hallar las partes? [Todos los integrantes indican que si], ¿Qué pasa entonces con las marcas?*
5:22-5:25	46	Humberto	*Nosotros vimos que tocaba restarle siempre 1 a las partes paraque nos diera las marcas*
5:26-5:29	47	Antonio	*Si, ahí ya tocaría hacer la fórmula porque la tabla es larga*
5:30-5:31	48	Profesor	*¿Cómo sería esa fórmula que menciona Andrés?*
5:31-5:33	49	Antonio	*Con la multiplicación abreviada y luego se le resta 1 como dijoHumberto*
5:34-5:37	50	Profesor	*Esperen un momento, díganme cómo se le llama a esa multiplicación reiterada [señala el procedimiento hecho en la imagen 25] y luego si lo demás*
5:38-5:43	51	Viky	*¿No es la potenciación y la base es dos? Emmm si! Ahí el número pequeño [uno de los integrantes dice: el exponente] ese dependeo cambia según los dobleces, cuando tenemos el resultado se le resta uno*
5:44-5:45	52	Profesor	*Niños por favor escriban eso que me acaban de decir ahí en lahoja*
5:46-5:49	53	Humberto	*[Escribe en la hoja una expresión con ayuda de los demásintegrantes del grupo]*

Entrevista 14			
2:03-2:04	15	Profesor	*¿Qué han encontrado hasta el momento?*
2:04-2:10	16	Profesor	*¿Quiere decir que ya pueden encontrar cualquier valor? Por ejemplo, ¿me pueden explicar cómo hallar los estrechones que se dan 8 personas?*
2:10-2:25	17	Joey	*Profe por eso hicimos la tabla, si vemos acá [señala en la tabla los valores 7 y 8 de cantidad de personas] al multiplicar los dos números nos da 56 y la mitad de 56 es 28; así se puede hacer con cualquier otro valor, probamos con los tres primeros y nos dio el resultado, aunque dudamos con el primero*
2:25-2:30	18	Vanesa	*Para cualquier valor que tengamos debemos multiplicar por el anterior y luego dividir entre dos [la estudiante recita la expresión que construyeron]*
2:30 – 2:38	19	Profesor	*¿Cómo lograron crear esa fórmula para hallar la cantidad deestrechones?*
2:38-2:49	20	Joey	*Al principio solo empezamos a darnos saludos y vimos que se sumaban de para atrás, como si se fueran disminuyendo de 1 cada vez que saludábamos, pero como el profe nos dijo que pensáramos una forma para no hacer esa suma tan larga, hicimos la tabla; primero empezó Andrés a probar con diferentes operaciones, pero no nos daba, luego yo empecé a hacer multiplicaciones y Carlos decía que era el doble de cada estrechón*
2;50-	21	Humberto	*Ahí vimos que siempre se multiplicaba con el número anterior y se sabía la mitad del resultado*

Entrevista 15			
21:09-21:13	54	Profesor	*¿Cómo describieron la manera de hallar la cantidad total de puntos en la posición 30?*
21:13-21:22	55	Laura	*Es que empezamos a ver que la figura iba creciendo, también que en la posición no hay puntos y de ahí para adelante se van sumando una en la figura, como si fuera en la base y así en todas las líneas [señala la configuración de puntos de manera ascendente]*
21:21-21:40	56	Profesor	*Me acaban de decir cómo se está formando la configuración de puntos y creo que todos tenemos eso claro, mi pregunta va hacía cómo supieron que acá [señala la configuración de la posición 5] había 10 puntos, o mejor aún, ¿para aquellos que ustedes no conocen?*
21:40-21:43	57	Yethel	*O sea, ¿cómo sabríamos en la posición 8 o así?*
21:43-21:46	58	Laura	*Sí, pero explique primero la forma en que va creciendo*
21:46-21:52	59	Yethel	*Era como en el taller anterior profe, es una suma, pero en este caso va aumentando; yo me acuerdo en la de antes era como* 4 +3 + 2 + 1 + 0 *o bueno ahí el cero no vale, pero acá [señala la configuración de la posición 5] es al revés, pero con la misma* *suma* 1 + 2 + +3 + 4
21:52-22:05	60	Profesor	*Perfecto, eso ya es algo que les puede ayudar a encontrar de una forma más ágil la cantidad de puntos en cualquier posición,* *¿luego que más hicieron?*
22:05-22:20	61	Laura	*Como cuando hacemos la tabla con los resultados nos queda más fácil y no nos acordábamos de la fórmula anterior, entonces acá probamos con unos resultados [señala una tabla]*

Entrevista 16			
23:01-23:05	70	Profesor	*¿Con esa expresión ya pueden hallar la cantidad de puntos que tienen cualquier posición?*
23:05-23:13	71	Vanesa	*Primero debemos coger la cantidad anterior que es $n-1=m$ y se multiplica por la posición que deseamos saber n, luego con ese resultado lo dividimos por 2 para que nos de el total depuntos*
23:13-23:20	72	Profesor	*¿Qué diferencia tiene esa forma de hallar la cantidad de puntoscon la cantidad de estrechones se acuerdan? Pueden mirar sus apuntes*
23:20-23:43	73	Marena	*Yo tengo anotado en el cuaderno [Marena Fernanda saca el cuaderno y muestra la expresión construida en la tarea 4], es casi la misma profe, pero nosotros cambiamos de posición los valores que se multiplican porque en este caso los números de la suma van aumentando*
23:43-23:50	74	Vanesa	*Digamos que encontramos una forma parecida a la del taller anterior, es la misma suma y nos dan los mismos resultados y pensamos que cambiar los valores que se multiplican está bien*

[ANEXO 3]

Núcleo de Investigación en Educación Matemática “Dr. Emilio Medina” (NIEM)

Línea de Investigación: Didáctica del Álgebra y Pensamiento Algebraico (LIDALGEBRA)

INSTRUCCIONES GENERALES

Estimado estudiante: Ante todo mi agradecimiento por formar parte de este equipo de personas que participarán en una investigación que llevamos adelante sin ningún ánimo de lucro, sino con fines estrictamente académicos. Por lo tanto, es muy importante que colabores respondiendo lo máximo y mejor posible.

Es por ello, que te sugerimos seguir las siguientes instrucciones:

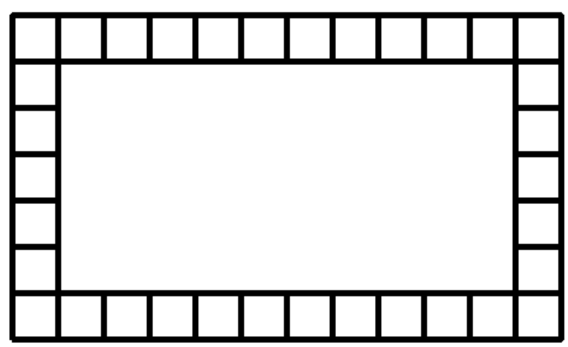
1. Presta atención a la lectura de los enunciados antes de que empieces a responder la prueba. Así sabrás a qué te enfrentas y podrás distribuir mejor el tiempo.
2. Es muy importante que expliques lo máximo que puedas tus razonamientos.
3. Si no entiendes una cuestión y decides dejarlo en blanco, por favor escribe indicando qué es lo que no has entendido.
4. Intenta escribir todo en los folios que te damos (hay espacio suficiente), aunque si te hace falta podemos darte más.
5. Debes responder cada ejercicio con bolígrafo.
6. Evita el uso de corrector. Es preferible que taches, ya que así podemos ver cuál era el razonamiento inicial que considerabas incorrecto.
7. Debes responder en el orden en que aparecen las cuestiones.
8. Si no sabes responder a una cuestión, no te agobies y pasa a la siguiente.
9. Puedes preguntar cualquier cosa que no entiendas, pero no podemos resolverte las cuestiones, solo "reformular el enunciado", es decir, solo podemos intentar que te des cuenta de lo que tienes que hacer indicándotelo con otras palabras, pero no proporcionándote datos a los que debes llegar por ti mismo.
10. Apunta con lápiz sobre la marcha en la medida de lo posible a qué ejercicio corresponde cada dibujo o anotación de los que puedas hacer en los folios aparte.

[ANEXO 4]

PRÁCTICAS DE RECONOCIMIENTO DE REGULARIDADES Y PATRONES

PRÁCTICA Nº 1

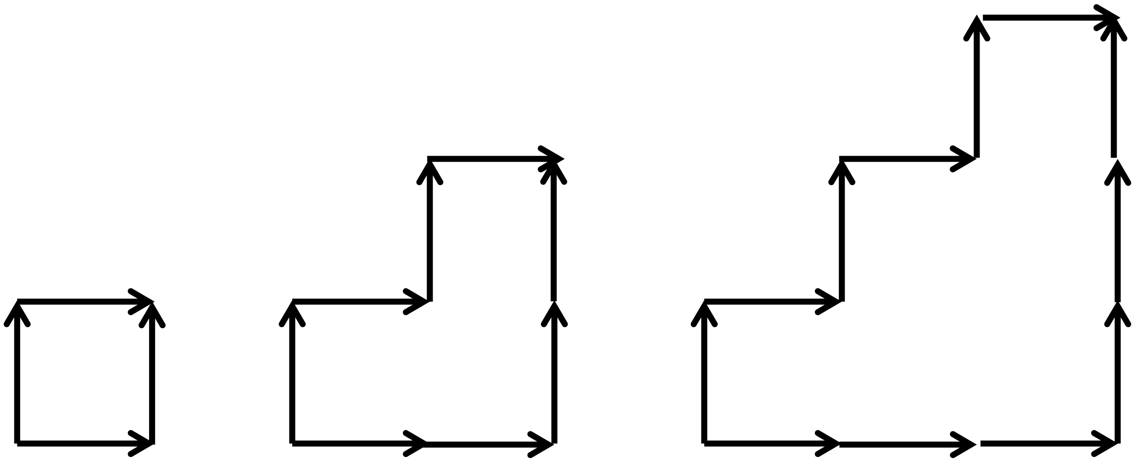
Arte Final es una empresa especializada en la elaboración de espejos enmarcados, lo cual realiza mediante la colocación de piezas cuadradas de cerámica alrededor de espejos rectangulares, tal como se muestra en la siguiente figura.



1. ¿Cuántas piezas cuadradas de cerámica fueron usadas para enmarcar el espejo que se muestra en la figura?
2. Enmarca espejos de varias dimensiones; Explica, con tus propias palabras, recurriendo a números, tablas, etc., el número de piezas cuadradas de cerámica que son necesarias para enmarcar un espejo cuyas dimensiones sean L (largo) y A (ancho)

PRÁCTICA Nº 2

En la figura, usando flechas, se muestran los escalones de unas escaleras



1 (4) 3 (12) 2(8)

1. ¿Cuántas flechas son necesarias para representar una escalera de cuatro escalones? ¿Si la escalera tuviese cinco escalones, cuántas flechas se necesitarían para representarla?
2. Explica con tus propias palabras, cómo se puede obtener el número de flechas para representar una escalera de treinta (30) escalones
3. En general, ¿cuántas flechas se necesitan para representar una escalera de n escalones?
4. Establece otra forma de presentar este patrón

Solución

Expresemos en lenguaje natural lo que observamos (los datos)

En los ejercicios de reconocimiento de patrones debemos tener claro dos números: el número que corresponde a la posición y el dato (gráfico o numérico) ubicado en esa posición

Podemos elaborar una tabla que vincule la posición con el dato de la posición

Introducir una letra que te permita simbolizar las posiciones. El uso de subíndices puede ser de una gran ayuda: En efecto, en un mismo símbolo se recoge la posición correspondiente y el dato ubicado en él, de tal manera que al ver su registro escrito se identifique cada aspecto por separado. Establece una expresión simbólica para lo que se pide.

Destacar los elementos sustantivos de una secuencia: Significa desechar aquellos aspectos que sean accesorios, los cuales fungen como elementos distractores.

Escribamos en lenguaje natural la información:

En la posición uno hay cuatro flechas

En la posición dos hay ocho flechas

En la posición tres hay doce flechas

Tratemos de escribir esta información de otra manera, por ejemplo:

Posición uno igual a cuatro flechas
Posición dos igual a ocho flechas
Posición tres igual a doce flechas

Podemos tratar de ir simplificando algunas palabras y usar símbolos para los números:

La posic 1 tiene = 4 flechas
La posic 2 tiene = 8 flechas
La posic 3 tiene = 12 flechas

Observa que aún podemos quitar algunas palabras que no son sustanciales para los datos, por ejemplo las palabras “la”, “tiene” y “flechas”:

posic 1 = 4
posic 2 = 8
posic 3 = 12

Esa manera de acortar PalabraS, POR EJEMPLO, REDUCIR posición A “posici”, se llama sincopar, diremos entonces que hemos escrito los datos en lenguaje sincopado. Como la idea es irnos aproximando a un lenguaje simbólico que nos ayude a interpretar los datos podemos suprimir el resto de la palabra “posición” y quedarnos solamente con SU INCIAL p:

P1=4
P2=8

P3=12

En este punto debemos saber emplear los subíndices, pues es lo usual en estos tipos de ejercicios, lo que haremos es colocar los números 1, 2 y 3 (indicadores de la posición) como subíndices:

$$P_1 = 4$$
$$P_2 = 8$$
$$P_3 = 12$$

Tratemos de encontrar relaciones en los datos:

Vemos que cada dato es el anterior más cuatro, también se observa que cada número de la secuencia es el producto de 4 y el subíndice correspondiente (4.1, 4.2 y 4.3). Para generalizar podemos emplear cualquier letra para denotar la posición, sin embargo el uso convencional para estos ejercicios es usar las letras n, i y j; así podemos escribir "posición n", "posición i" ó "posición j". Combinando esto último con nuestro hallazgo podemos decir que en la posición n estará el número 4. n, que en el simbolismo que hemos acordado lo escribimos:

$$P_n = 4.n$$

Ahora bien, debemos regresar al contexto del problema, entonces diremos que para una escalera de n peldaños requeriremos de 4n flechas. Así para una escalera de 4 escalones se necesitarán 4.4=16 flechas

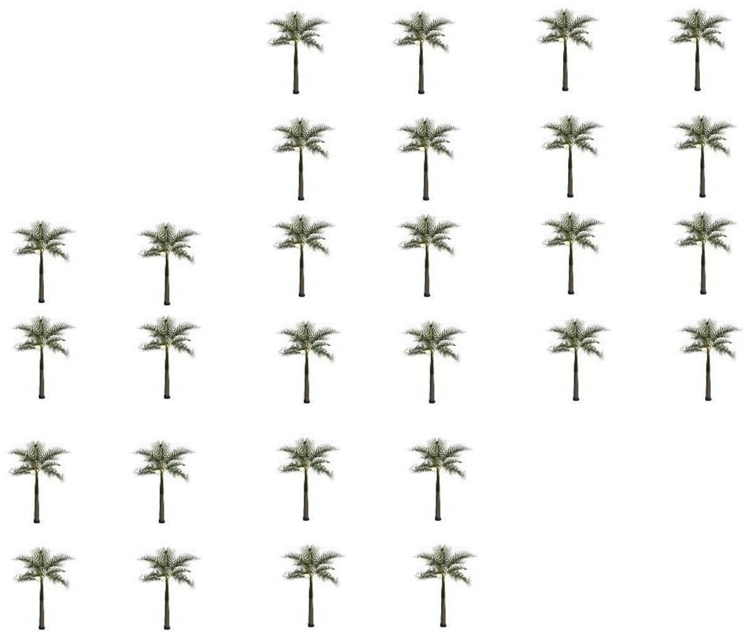
Observa que también pudimos haber escrito:

$$P_{n+1} = p_n + 4$$

Las prácticas 1, 3 y 4 pueden ser interpretadas como *aplicaciones del reconocimiento de patrones*, razón por la que creo que pudiesen ir en otro apartado, por ejemplo al final

PRÁCTICA Nº 3

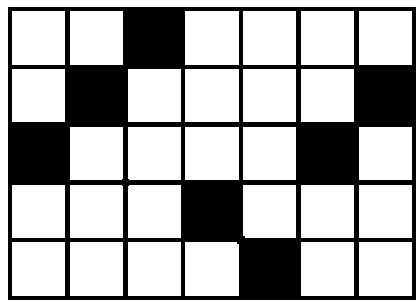
En un vivero se encuentran las palmeras en la forma como se muestra en la siguiente figura:



1. ¿Cuántas palmeras hay en el vivero?
2. Presenta diferentes formas de contarlas

PRÁCTICA Nº 4

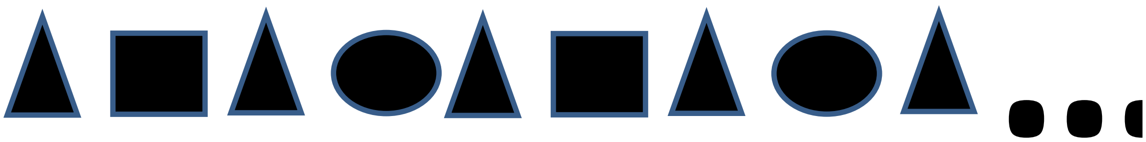
En la siguiente figura se muestra el panel de control de una industria fabricante de automóviles; el funcionamiento de los procesos se indica mediante bombillos encendidos (proceso operativo; cuadro en blanco) o bombillos apagados (proceso no operativo, cuadro oscuro)



1. ¿Cuántos procesos están operativos?
2. Formula dos expresiones numéricas que representen la cantidad de procesos operativos.

PRÁCTICA Nº 5

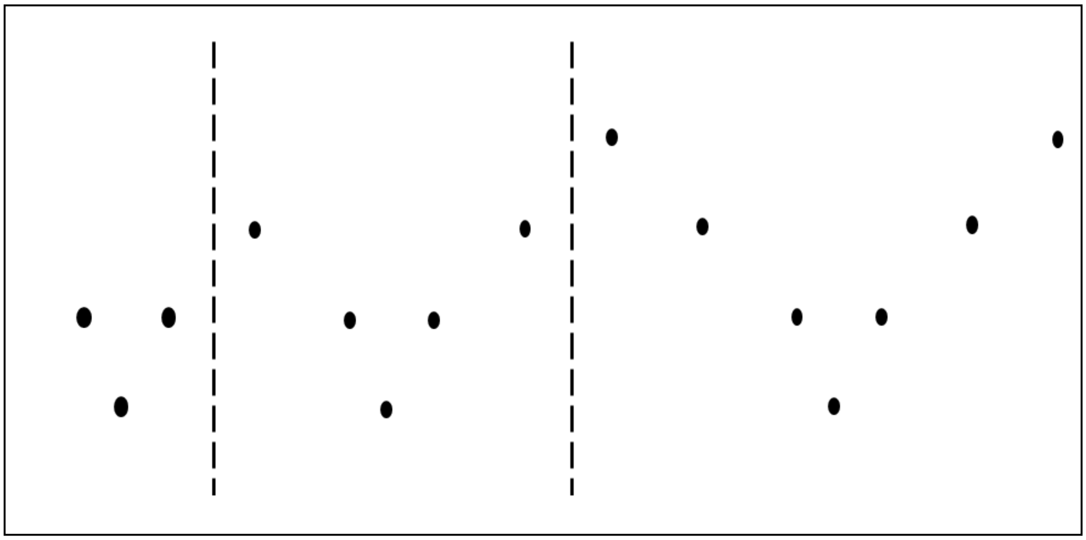
1. Continúa la secuencia que se muestra a continuación:



2. ¿Cuáles son las figuras geométricas que ocupan las tres posiciones siguientes?
3. ¿Cuál es la figura que ocupa la posición mil?
4. ¿Qué puede decirse acerca de las posiciones ocupadas por el óvalo?
5. ¿Qué puede decirse acerca de las posiciones ocupadas por el rectángulo?
6. Clasifica el patrón presentado de acuerdo con algún criterio

PRÁCTICA Nº 6

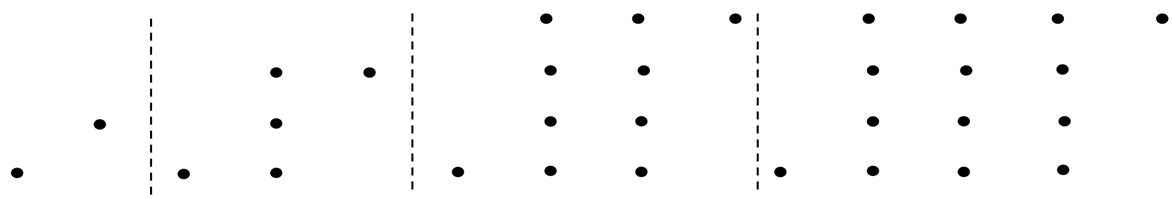
Observa cuidadosamente los tres primeros términos de la siguiente secuencia de “V de puntos”:



1. ¿Cuántos puntos habrá en la “V de puntos” de orden n”
2. ¿Habrá una “V de 102 puntos” ¿Cuál posición ocuparía en la secuencia?

PRÁCTICA Nº 7

Encuentra una expresión general que indique el número de puntos de un término cualquiera en la siguiente secuencia (usa estrategias visuales y numéricas):



PRÁCTICA Nº 8

1	2	3	4	
	8	7	6	5
9	10	11	12	
	16	15	14	13
17	18	19	20	
•••				

1. Explora el arreglo numérico que se muestra arriba, e identifica la mayor cantidad de regularidades que percibes en el mismo, denomínalas y descríbelas.
2. ¿Cómo extenderías este arreglo preservando su regularidad? Supón que este arreglo es continuado indefinidamente, ¿Existen números de los que tengas certeza de que aparecen en el arreglo? ¿Dónde estarían colocados? ¿Cómo decides eso?
3. ¿Dónde estarían colocados los números 50 y 150?
4. ¿Dónde estarían colocados los números 86, 87, 187, 392, 7386, 546?
5. En general, dado un número natural cualquiera, ¿cómo se puede predecir dónde aparecerá en el arreglo? Explica tu estrategia.

PRÁCTICA Nº 9

Estudio de la Tabla de Multiplicar 10x10

INSTRUCCIONES

A continuación se te muestra la tabla ordinaria de multiplicar 10x10, más adelante encontrarás las orientaciones para realizar un conjunto de actividades con base en la tabla dada, realízalas conforme a las indicaciones que se dan en cada caso.

TABLA DE MULTIPLICAR 10 X 10

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

ACTIVIDAD Nro. 1

- Suma los pares de números consecutivos de la columna del 1. ¿Qué observas? ¿Sucede esto para todas las columnas? ¿Qué ocurre con las filas?
- Suma la columna del 1. Busca una forma rápida para hallar la suma de cualquier columna. ¿Qué sucede con la suma de las filas?
- Suma la columna del 1 de otra forma: (1 + 10) + (2 + 9) + ... ¿Qué observas? ¿Cómo puedes sumar las demás columnas? ¿Y las filas?

ACTIVIDAD Nro. 2

- Si sumas las dos cifras de la columna o de la fila del 9, observarás algo que no sucede en las demás filas o columnas. ¿Qué es? ¿Cómo lo justificas?
- ¿Puedes justificar la distribución de los números pares e impares en la tabla
- ¿Qué observas en la diagonal principal?

ACTIVIDAD Nro. 3

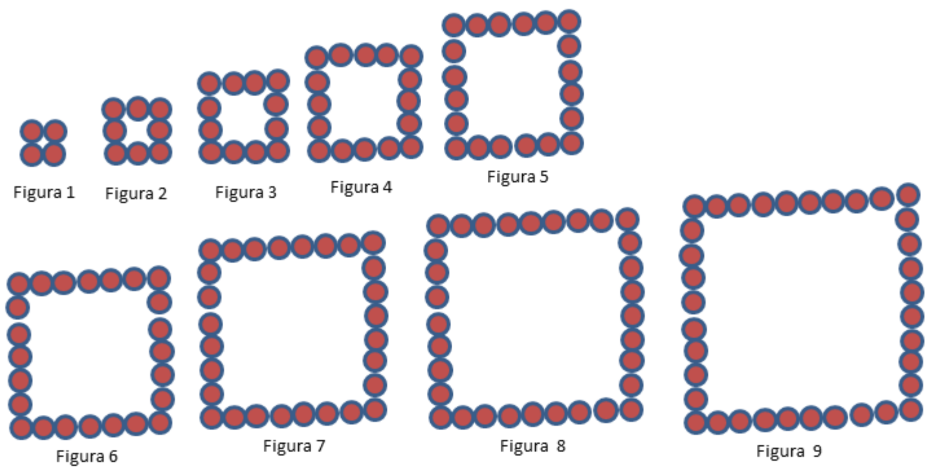
- Busca simetrías en la tabla. Ayúdate de colores
- Halla las diferencias sucesivas de cada dos números consecutivos de las paralelas a la diagonal principal. ¿Qué observas? ¿Cómo lo explicas?
- ¿Qué sucede si lo haces con las paralelas de la diagonal secundaria?

ACTIVIDAD Nro. 4

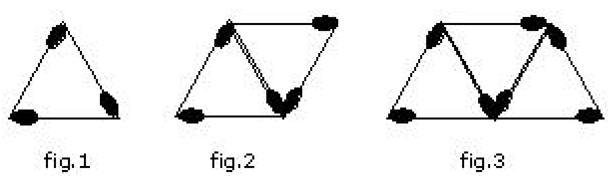
- Si realizas 1, 1 + 1, 2 + 2, 4 + 4, ... ¿Qué camino sigues? Busca otros caminos significativos a lo largo de la tabla.
- ¿Puedes buscar una estrategia para saber cuántos números distintos hay en el cuerpo de la tabla? ¿Cuál es el número que más se repite? ¿Y el que menos? Elabora una tabla con tus datos observados.
- ¿Qué observas? ¿Existe alguna relación con el número de divisores? ¿Qué números no aparecerán?
- Haz lo mismo pero con la última cifra de cada número

PRÁCTICA Nº 10

Observa cuidadosamente las siguientes figuras formadas por puntos ¿Cuántos puntos conformarán la figura que ocupa la posición 1532? ¿Habrá una figura conformada con 72 puntos? ¿Cuál sería la posición de esta figura de 72 puntos?



PRÁCTICA Nº 11

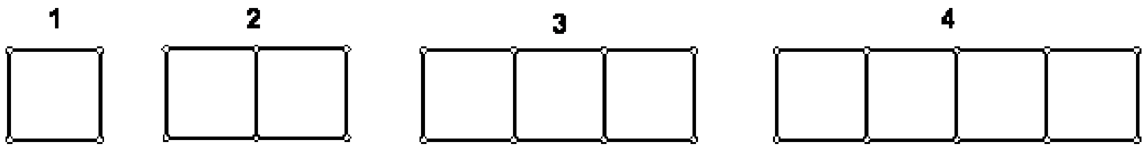


¿Cuántos palitos de fósforos se necesitan para llegar a formar la figura 23 en esta sucesión?

PRÁCTICA Nº 12

PATRONES CON NÚMEROS GEOMÉTRICOS

Supón que los siguientes cuadrados se han formado con palitos de fósforos.

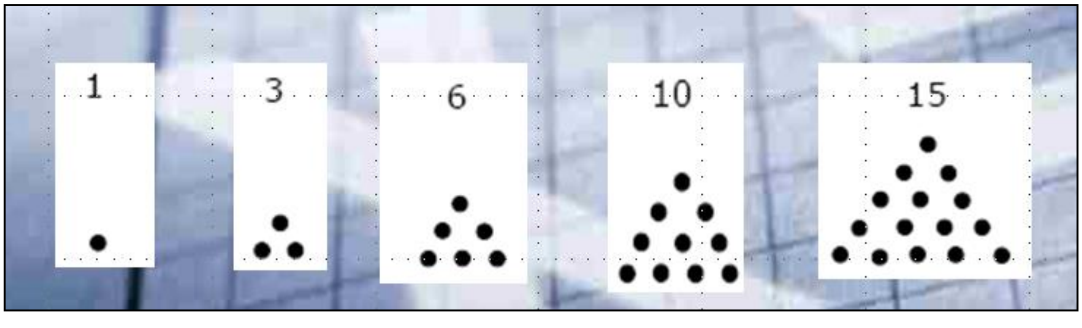


Determina la fórmula que genera la serie numérica de la *cantidad de fósforos* utilizados para construir la figura formada por n cuadrados, como se muestra en la secuencia anterior.

PRÁCTICA Nº 13

(Equivalente a la práctica 24)

En la siguiente figura se muestran los cinco primeros "números triangulares"; ¿cuántos puntos son necesarios para construir el siguiente número triangular? ¿Cuál es el vigésimo número triangular" y cuántos puntos son necesarios para construirlo?

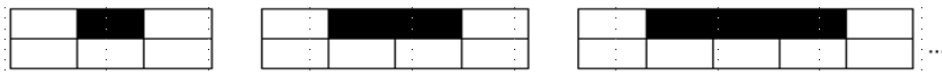


PRÁCTICA Nº 14

La siguiente tabla

n	1	2	3	4	...
b	5	6	7	8	...

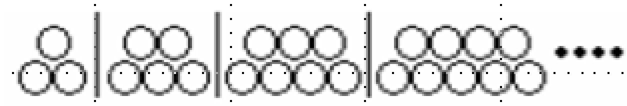
muestra el número de baldosas negras (n) y blancas (b), correspondiente a los diagramas dados:



¿Cuál es la fórmula que relaciona **n** con **b**?

PRÁCTICA Nº 15

Con los círculos se han formado la siguiente secuencia de figuras:



¿Cuáles de las siguientes son verdaderas?

I) La décima figura de la secuencia está formada por 21 círculos.

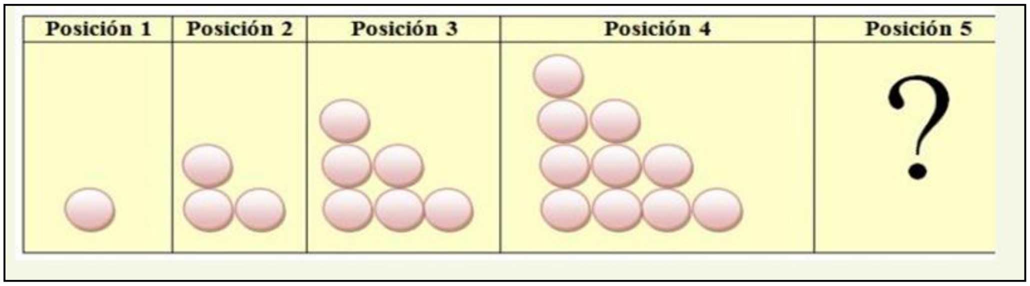
II) De acuerdo a la formación de la secuencia, cualquier figura tendrá un número impar de círculos.

III) La diferencia positiva en cuanto a la cantidad de círculos entre dos figuras consecutivas es 2.

A) Sólo I
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Sólo II y III
E) I, II, III

PRÁCTICA Nº 16

Observa cada una de las configuraciones puntuales que representan Números Triangulares en la siguiente figura:

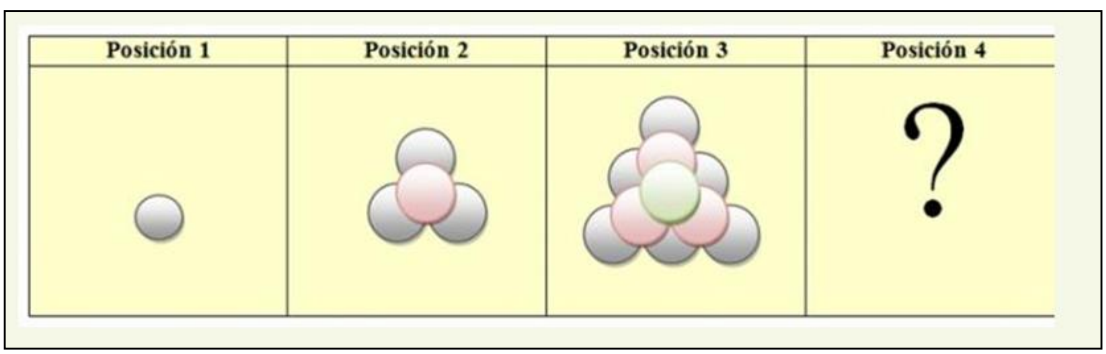


¿Cómo va cambiando el arreglo geométrico para representar las configuraciones puntuales?
¿Qué regla de construcción se puede establecer para dibujar la figura siguiente y la que ocupa la quincuagésima posición?

PRÁCTICA Nº 17

NÚMEROS TETRAÉDRICOS

A partir de los números triangulares es posible construir los números tetraédricos, de los cuales se muestran a continuación los tres primeros.



¿Cómo va cambiando el arreglo geométrico para representar las configuraciones puntuales?
¿Qué regla de construcción se puede establecer para dibujar el siguiente núemro tetraédrico?
¿Cómo se pueden obtener los números tetraédricos a partir de los números triangulares?

PRÁCTICA Nº 18

El arreglo numérico que se muestra a continuación es conocido como Triángulo de Pascal[9]. Examínalo atentamente, identifica y describe en el mismo el mayor número de regularidades que observes:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

Ejemplo. Observa la secuencia de los números naturales <u>encerrados en el círculo rojo</u>

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

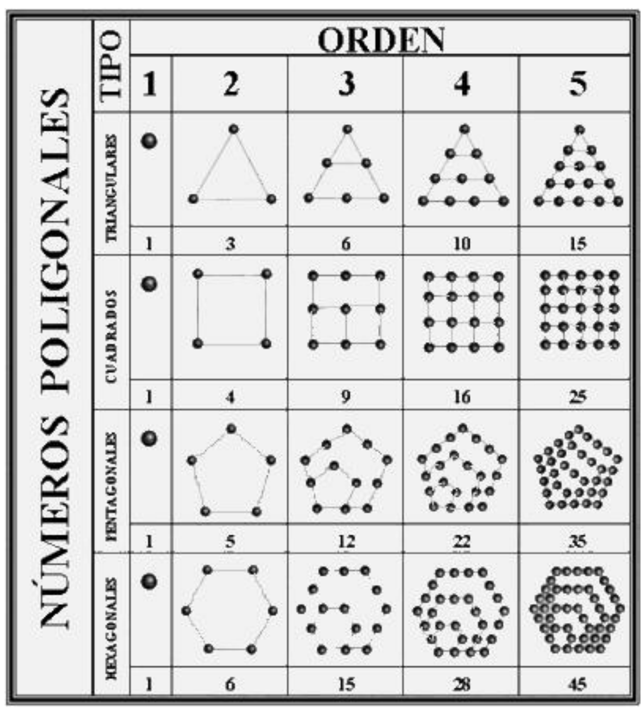
[9] En honor al matemático francés Blaise Pascal (1623-1662). También llamado de Tartaglia, en honor a Nicolo Fontana quien tenía ese sobrenombre. Estos números se corresponden con los coeficiente binomiales del desarrollo de la potencia enésima de x+y (gozan de muchas propiedades)

PRÁCTICA Nº 18-2

CURIOSIDADES EN EL TRIÁNGULO DE PASCAL.

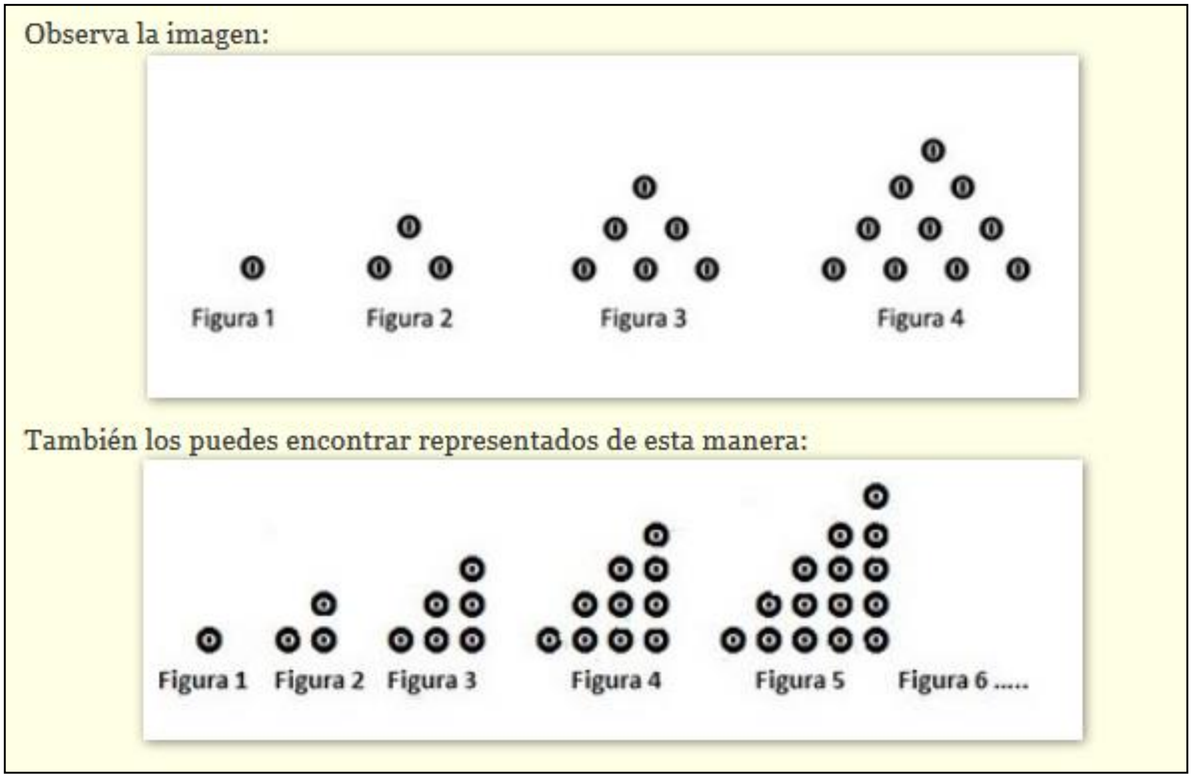
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

Números Poligonales



1. Los números poligonales son enteros del tipo $n + \frac{n(n-1)b}{2}$. Identifica en el Triángulo de Pascal, los números triangulares, cuadrados, pentagonales, etc.
2. Identifica algunas curiosidades matemáticas presentes en el Triángulo de Pascal.

PRÁCTICA Nº 19



- Trabaja con botones, monedas o tapitas.

1) Dispón los mismos formando los 3 números triangulares que siguen.

a.- ¿Cuántos botones usaste en cada caso?

b.- ¿Cómo se forma el número triangular siguiente?

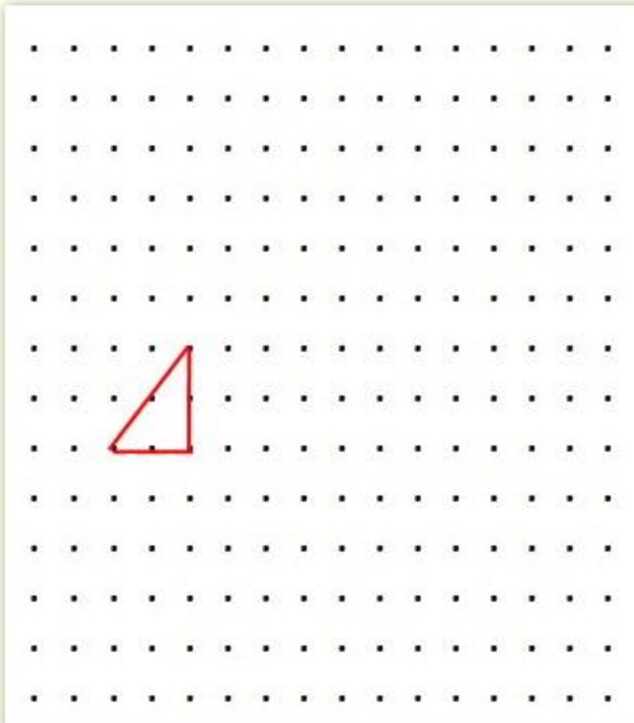
c.-¿ Existe algún patrón en la sucesión numérica de números triangulares? Explica.

d.- Serías capaz de saber en esta sucesión, ¿qué número ocupa el lugar décimo? ¿y el décimo quinto lugar?

e.- Continúa experimentando: ¿Podremos formar un número triangular con 14 tapitas? ¿y con 28 tapitas? ¿y con 23 tapitas?

f.- Tengo 56 botones, ¿cuál es el mayor número triangular que puedo formar? ¿Cuál es la mínima cantidad de botones que tengo que agregar para formar el próximo número triangular?

g.- Dibuja en papel punteado, los diagramas correspondientes a todos los números triangulares entre 20 y 45. Tienes dibujado uno como ejemplo.



h.- Ahora observa todos los números triangulares que has diagramado, ¿en qué cifras terminan? ¿En cuáles no?

PRÁCTICA Nº 20

Observa atentamente la secuencia que se muestra a continuación y responde las interrogantes que luego se formulan:

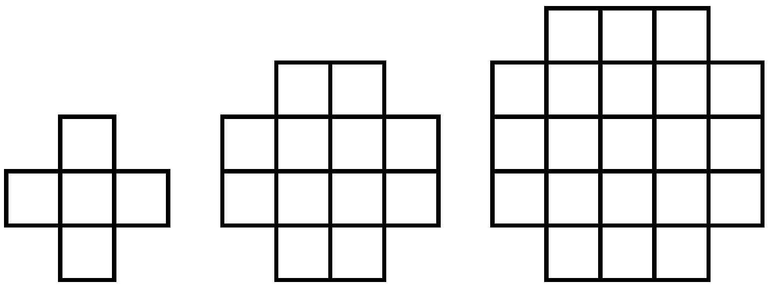
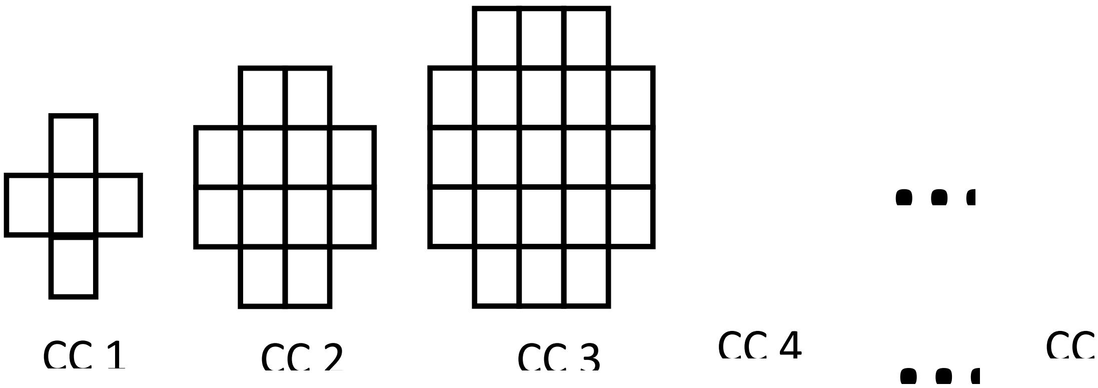


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 ... Figura 10

1. ¿Cuántos cuadrados son necesarios para formar la Fig. 4?
2. ¿Cuántos cuadrados se necesita para formar la Fig. 10?
3. Sugiere un método para calcular el número de cuadrados necesarios para formar cualquier figura en la secuencia.
4. Sugiere un método para calcular el número de cuadrados necesarios para formar la figura n-ésima en la secuencia.

PRÁCTICA Nº 20-2

Observa detenidamente la siguiente secuencia de "Cruces Cuadradas" (CC)



1. ¿Cuántos cuadrados hacen falta para dibujar la 4ª Cruz Cuadrada (CC 4)?
2. ¿Cuántos cuadrados hace falta para dibujar la 10ª Cruz Cuadrada (CC 10)?
3. Establece y demuestra una regla general para calcular el número de cuadrados que hacen falta para dibujar la n-ésima Cruz Cuadrada (CC n).

PRÁCTICA Nº 21

Observa atentamente la secuencia que se muestra a continuación y responde las interrogantes que luego se formulan:

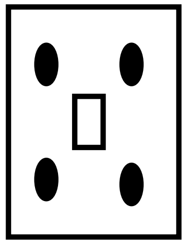


Fig. 1

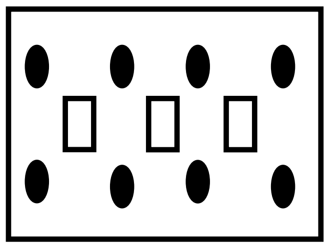


Fig. 2

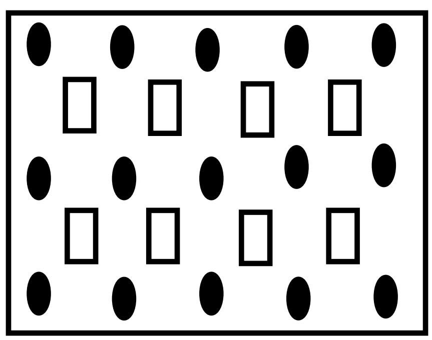


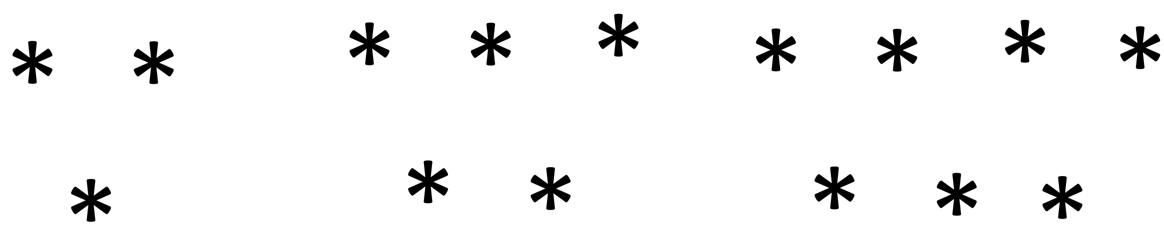
Fig.3

Fig. 4 ... Fig.

1. ¿Cuántos círculos y cuántos cuadrados habrá en un arreglo 3x6?
2. ¿Cuántos círculos y cuántos cuadrados habrá en un arreglo 4x6?
3. ¿Cuántos círculos y cuántos cuadrados habrá en un arreglo 21x31?
4. Propón un método para encontrar el número de círculos y cuadrados en un arreglo mxn. Explica y justifica tu método.

PRÁCTICA Nº 22

Observa atentamente la siguiente secuencia de arreglos de asteriscos y luego responde las preguntas que se formulan en relación con el comportamiento de dicha secuencia.



1. Continúa la sucesión gráfica hasta el término 5º
2. Expresa con números los cinco primeros términos de esta sucesión
3. ¿cuál es el número que está en la posición 10ª?
4. ¿Cuál es el número que está en la posición 25ª? ¿y en la 50ª?
5. ¿Cuál es el término que ocupa la posición n-ésima? Explica cómo lo has encontrado.

Nota: De acuerdo con lo realizado en las prácticas 6 y 22, ¿es posible establecer una conclusión?. Plantea otra forma de presentar esta práctica

[ANEXO 5]

	Núcleo de Investigación en Educación Matemática "Dr. Emilio Medina" (NIEM) Línea de Investigación: Didáctica del Álgebra y Pensamiento Algebraico (LIDALGEBRA)

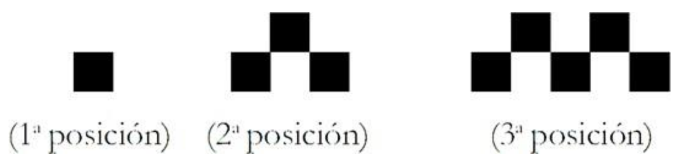
INSTRUMENTO: TAREA 0[10]

Objetivo de la Tarea

Identificar cómo los estudiantes encuentran la generalización de un patrón y cómo las representan.

Estimado estudiante:

1. Observa con detenimiento la siguiente figura.
2. Procede a realizar los ejercicios planteados.



a) Dibuja la figura correspondiente a la 4ª posición:
b) Calcula el número de cuadros de la figura correspondiente a la 9ª posición:
c) Calcula el número de cuadros de la figura de la posición 100:
d) Explica la forma como procediste para encontrar la respuesta de la pregunta anterior:
e) Escribe una expresión que sirva para encontrar la cantidad de cuadros que tiene la figura encualquier posición:
f) Si n es la posición, escribe una expresión que sirva para encontrar la cantidad de cuadritos que tienedicha posición.

[10] Tarea de indagación, tomada y modificada de Rojas et al 1999 pág. 92-93

[ANEXO 6]

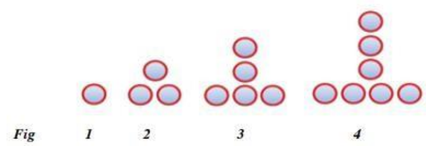
	Núcleo de Investigación en Educación Matemática “Dr. Emilio Medina” (NIEM) Línea de Investigación: Didáctica del Álgebra y Pensamiento Algebraico (LIDALGEBRA)

INSTRUMENTO: TAREA 1[11]

Estimado estudiante:

1. Observa con detenimiento la siguiente figura.

2. Procede a realizar los ejercicios planteados.



- Extiende la secuencia hasta la figura 6:
- ¿Cuántos círculos hay en la figura 5?
- ¿Cuántos círculos hay en la figura 6?
- ¿Hay alguna manera de encontrar el número de círculos de la figura 15 sin necesidad de dibujar la secuencia? Explica.
- Supón que una persona tiene una figura de esta secuencia, donde usó exactamente 19 círculos, ¿A qué número de figura corresponde? Explica la manera como procediste para encontrar tu respuesta.

[11] Tarea uno, secuencia figural apoyada por representación tabular. Tomada y modificada Tesis Doctoral Rodolfo Vergel pág. 98.

[ANEXO 7]

	Núcleo de Investigación en Educación Matemática "Dr. Emilio Medina" (NIEM) Línea de Investigación: Didáctica del Álgebra y Pensamiento Algebraico (LIDALGEBRA)

GUIÓN DE ENTREVISTA DE LA TAREA 1

Hora de inicio: ____________ Duración: _______

Fecha: _____________

Objetivo de la Tarea

-Describir el uso que los estudiantes le dan a la letra al momento de encontrar la generalidad de un patrón y su forma de operarla.

¿Para la Tarea 1 qué hiciste?

- Explica la manera como procediste para encontrar tu respuesta.
- Puedes aplicar cualquier recurso para tus explicaciones.

[ANEXO 8]

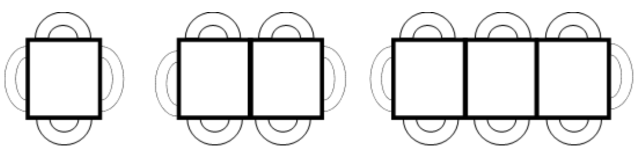
	Núcleo de Investigación en Educación Matemática “Dr. Emilio Medina” (NIEM) Línea de Investigación: Didáctica del Álgebra y Pensamiento Algebraico (LIDALGEBRA)

INSTRUMENTO: TAREA 2[12]

Estimado estudiante:

1. Observa con detenimiento la siguiente figura.
2. Procede a realizar los ejercicios planteados.

En un restaurante solo se pueden organizar las mesas en una fila alargada. Averigua el número máximo de personas que se pueden sentar con relación al número de mesas que pongamos.



1 mesa 4 sillas — *2 mesas 6 sillas* — *3 mesas 8 sillas*

a) ¿Podrías dibujar 4 mesas y sus correspondientes sillas?

b) ¿Cuántas sillas podemos colocar alrededor de 7 mesas?, ¿Y alrededor de 18 mesas?

Explica el procedimiento que utilizaste para responder las preguntas (a) y (b) anteriores.

c) Si en un cumpleaños han invitado a 42 niños, ¿cuántas mesas necesitaremos juntas en fila?

Explica cómo has encontrado el resultado.

-Explica con tus palabras una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas.

[12] Tarea dos, tomada y modificada de Rojas y Vergel 2018, pág. 90.

[ANEXO 9]

	Núcleo de Investigación en Educación Matemática “Dr. Emilio Medina” (NIEM) Línea de Investigación: Didáctica del Álgebra y Pensamiento Algebraico (LIDALGEBRA)

GUIÓN DE ENTREVISTA DE LA TAREA 2

Hora de inicio: ____________ Duración: _______

Fecha: _____________

Objetivo de la Tarea:

-Evidenciar los procesos de generalización, sin inducir el uso de la letra.

Explica el procedimiento que utilizaste para responder las preguntas (a) y (b) de la Tarea.

Explica cómo has encontrado el resultado de la parte (c)

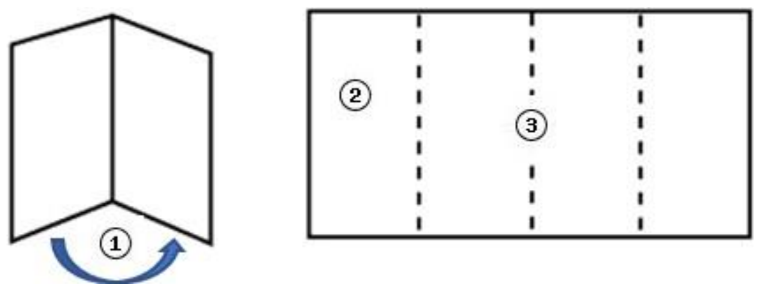
[ANEXO 10]

	Núcleo de Investigación en Educación Matemática “Dr. Emilio Medina” (NIEM) Línea de Investigación: Didáctica del Álgebra y Pensamiento Algebraico (LIDALGEBRA)

INSTRUMENTO: TAREA 3[13]

Estimado estudiante:

1. Observa con detenimiento la siguiente figura.
2. Procede a realizar los ejercicios planteados.



Realiza el doblez de una hoja tal como se indica en la imagen anterior y observa que se hace una marca en la hoja.

a) Cuántas marcas creen que aparecen si se hacen 3 dobleces?

b) ¿Cuántas marcas creen que aparecen si se hacen 7 dobleces? Expliquen claramente la manera comoprocedieron.

c) ¿Cuántas marcas creen que aparecen si se hacen 15 dobleces? Expliquen claramente la manera como procedieron?

d) ¿Cómo realizan el proceso para encontrar el número de marcas después de hacer 100 dobleces?

e) Expliquen con sus propias palabras una regla que relacione el número de dobleces con el número de marcas.

[13] Tarea tres, tomada y modificada de Rojas y Vergel 2018, pág. 77-79.

[ANEXO 11]

	Núcleo de Investigación en Educación Matemática "Dr. Emilio Medina" (NIEM) Línea de Investigación: Didáctica del Álgebra y Pensamiento Algebraico (LIDALGEBRA)

GUIÓN DE ENTREVISTA DE LA TAREA 3

Hora de inicio: ____________ Duración: _______

Fecha: _____________

Objetivo de la Tarea:

Describir las maneras como los estudiantes encuentran y representan la generalidad de un patrón por medio de la relación entre cantidades.

-Expliquen claramente la manera como procedieron.

-Propongan con sus propias palabras una regla que relacione el número de dobleces con el número de marcas.

[ANEXO 12]

	Núcleo de Investigación en Educación Matemática "Dr. Emilio Medina" (NIEM) Línea de Investigación: Didáctica del Álgebra y Pensamiento Algebraico (LIDALGEBRA)

INSTRUMENTO: TAREA 4[14] (Individual)

Estimado estudiante:

1. Observa con detenimiento la siguiente figura.
2. Procede a realizar los ejercicios planteados.

1. Imagina que te reúnes con 3 compañeros más, conformando un grupo de 4 estudiantes, cada uno de los integrantes debe dar ÚNICAMENTE un estrechón de manos con los otros integrantes: ¿Cuántos estrechones de mano se dieron en total las 4 personas? Explica detalladamente cómo hiciste para hallar el resultado.
2. Si el grupo no fuese de 4 persona sino de 7 personas, ¿cuántos estrechones de mano se dieron en total las 7 personas?
3. Explica si encuentras una relación entre el número de personas y la cantidad de estrechones de mano que se dan.
4. Si en una reunión hay 40 amigos, en la que cada quién saludó a los demás con un estrechón de manos, ¿cuántos estrechones de manos se dieron las personas que asistieron a dicha reunión? Utiliza la relación que encontraste en el punto anterior.

[14] Tarea cuatro individual, tomada y modificada de Rojas 1999 pág. 100.

[ANEXO 13]

	Núcleo de Investigación en Educación Matemática “Dr. Emilio Medina” (NIEM) Línea de Investigación: Didáctica del Álgebra y Pensamiento Algebraico (LIDALGEBRA)

GUIÓN DE ENTREVISTA DE LA TAREA 4 (Individual)

Hora de inicio: ____________ Duración: _______

Fecha: _____________

Objetivo de la Tarea

Describir las maneras como los estudiantes encuentran y representan la generalidad de un patrón desde lo concreto a lo abstracto.

[ANEXO 14]

Núcleo de Investigación en Educación Matemática "Dr. Emilio Medina" UPEL Maracay NIEM	Núcleo de Investigación en Educación Matemática "Dr. Emilio Medina" (NIEM) Línea de Investigación: Didáctica del Álgebra y Pensamiento Algebraico (LIDALGEBRA)

INSTRUMENTO: TAREA 4 (Grupal)[15]

Estimado estudiante:

1. Observa con detenimiento la siguiente figura.
2. Procede a realizar los ejercicios planteados.

1. Reúnete con 3 compañeros más, conformando un grupo de 4 estudiantes, cada uno de los integrantes debe dar un SOLO estrechón de manos con los otros integrantes: ¿Cuántos estrechones de mano se dieron en total las 4 personas? Explica detalladamente cómo hiciste para hallar el resultado.
2. Si el grupo no fuese de 4 personas sino de 9 personas, ¿cuántos estrechones de mano se darán en total las 9 personas?
3. Explica si encuentras una relación entre el número de personas y la cantidad de estrechones de mano que se dan.
4. Si en una reunión hay 40 amigos, en la que cada quién saludó a los demás con un estrechón de manos, ¿cuántos estrechones de manos se dieron las personas que asistieron a dicha reunión? Utiliza la relación que encontraste en el punto anterior.

[15] Tarea cuatro grupal, tomada y modificada de Rojas 1999 pág. 100.

[ANEXO 15]

	Núcleo de Investigación en Educación Matemática “Dr. Emilio Medina” (NIEM) Línea de Investigación: Didáctica del Álgebra y Pensamiento Algebraico (LIDALGEBRA)

GUIÓN DE ENTREVISTA DE LA TAREA 4 (Grupal)

Hora de inicio: ____________ Duración: _______

Fecha: _____________

Objetivo de la Tarea

Describir las maneras como los estudiantes encuentran y representan la generalidad de un patrón desde lo concreto a lo abstracto.

[ANEXO 16]

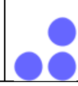
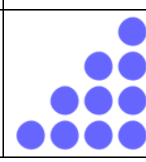
	Núcleo de Investigación en Educación Matemática “Dr. Emilio Medina” (NIEM) Línea de Investigación: Didáctica del Álgebra y Pensamiento Algebraico (LIDALGEBRA)

INSTRUMENTO: TAREA 5[16]

Estimado estudiante:

1. Observa con detenimiento la siguiente figura.
2. Procede a realizar los ejercicios planteados.

Observa la siguiente tabla:

Posición	Posición 1	Posición 2	Posición 3	Posición 4	Posición 5	…
Configuración de puntos						…

a) Cuántos puntos tiene la posición 30? Describe detalladamente la manera como llegaste a la solución y la configuración de puntos en dicha posición.

b) Describe la configuración y su respectiva posición cuando el total de puntos es 5

c) ¿Encuentras alguna relación entre la cantidad de puntos, la posición y la configuración de puntos?

[16] Tarea cinco, tomada y modificada de Gil y Arias 2016 p.170.

[ANEXO 17]

Núcleo de Investigación en Educación Matemática "Dr. Emilio Medina" UPEL Maracay	Núcleo de Investigación en Educación Matemática "Dr. Emilio Medina" (NIEM) Línea de Investigación: Didáctica del Álgebra y Pensamiento Algebraico (LIDALGEBRA)

GUIÓN DE ENTREVISTA DE LA TAREA 5

Hora de inicio: ____________ Duración: _______

Fecha: _____________

Objetivo de la Tarea

Describir las maneras como los estudiantes representan y relacionan la generalidad del patrón planteada en esta tarea con la obtenida en la tarea anterior.

Describe detalladamente la manera como llegaste a la solución y la configuración de puntos en la parte (a).

Cuéntame ¿qué hiciste en la a?

¿Encuentras alguna relación entre la cantidad de puntos, la posición y la configuración de puntos?

[ANEXO 18]

Núcleo de Investigación en Educación Matemática “Dr. Emilio Medina” (NIEM)

PLANIFICACIÓN DE LOS TALLERES

Sesión	Objetivo	Contenido	Desempeño del facilitador	Desempeño del participante	Recursos	Tiempo
1	-Presentar la idea académica de los talleres, su contenido y la metodología. -Familiarizar a los participantes con respecto a las nociones de patrones y generalización.	-Fines, contenido y metodología de los Talleres. -Nociones básicas de patrones y generalización.	-Describir el programa a los participantes. -Responder las preguntas de participantes.	-Prestar atención a la exposición del docente. -Plantear las dudas que surjan.	-Aula con aire acondicionado. -Computadora y video beam .Presentación - Material impreso.	2 horas
2	Identificar cómo los estudiantes encuentran la generalización de un patróny cómo las representan.	Generalización y representación	- Leer en voz alta cada enunciado y todas las cuestiones de la prueba antes de que empiecen a resolverla - Responder las preguntas de los participantes	-Prestar atención a la exposición del docente. -Plantear las dudas que surjan. -Responder la prueba. -Exponer sus conclusiones.	-Aula con aire acondicionado -Computadora y video beam. -Presentación. - Pizarra acrílica, marcadores. -Instrumento: Tarea 0 -Folio de papel bond y cualquier otro material que sugieran los participantes.	2 horas

3	Describir el uso que los estudiantes le dan a la letra al momento de encontrar la generalidad de un patrón y su forma de operarla.	Generalización e interpretación de las letras.	- Leer en voz alta cada enunciado y todas las cuestiones de la prueba antes de que empiecen a resolverla - Responder las preguntas de los participantes. -Sugerir a los participantes organizarse en grupos de 3 personas. -Promover la reflexión y facilitar la discusión.	-Prestar atención a la exposición del docente. -Plantear las dudas que surjan. -Responder la prueba. -Formar grupos de 3 personas. -Exponer sus conclusiones.	-Aula con aire acondicionado -Computadora y video beam. -Presentación. -Pizarra acrílica, marcadores. -Instrumento: Tarea 1 -Folio de papel bond y cualquier otro material que sugieran los participantes.	2 horas
4	Evidenciar los procesos de generalización, sin inducir el uso de la letra	Generalización e interpretación de las letras.	-Leer en voz alta cada enunciado y todas las cuestiones de la prueba antes de que empiecen a resolverla -Responder las preguntas de los participantes. -Sugerir a los participantes organizarse en grupos de 3 personas. -Promover la reflexión y facilitar la discusión.	-Prestar atención a la exposición del docente. -Plantear las dudas que surjan. -Responder la prueba. -Formar grupos de 3 personas. - Exponer sus conclusiones.	-Aula con aire acondicionado -Computadora y video beam. -Presentación. -Pizarra acrílica, marcadores. -Instrumento: Tarea 2 -Folio de papel bond y cualquier otro material que sugieran los participantes.	2 horas
5	Describir las maneras como los estudiantes encuentran y representan la generalidad de un patrón por medio de la relación entre cantidades	Generalización y relación entre cantidas.	-Leer en voz alta cada enunciado y todas las cuestiones de la prueba antes de que empiecen a resolverla -Responder las preguntas de los participantes. -Sugerir a los participantes organizarse en grupos de 3 personas. -Promover la reflexión y facilitar	-Prestar atención a la exposición del docente. -Plantear las dudas que surjan. -Responder la prueba. -Formar grupos de 3 personas. -Exponer sus conclusiones.	-Aula con aire acondicionado -Computadora y video beam. -Presentación. -Pizarra acrílica, marcadores. -Instrumento: Tarea 3 -Folio de papel bond	2 horas

			la discusión. -Fomentar la participación de todos los grupos.		y cualquier otro material que sugieran los participantes.	
6	Describir las maneras como los estudiantes encuentran y representan la generalidad de un patrón desde lo concreto a lo abstracto.	Generalización y paso de lo concreto a lo abstracto.	-Leer en voz alta cada enunciado y todas las cuestiones de la prueba antes de que empiecen a resolverla -Responder las preguntas de los participantes. -Sugerir a los participantes organizarse en grupos de 3 personas. -Promover la reflexión y facilitar la discusión. -Fomentar la participación de todos los grupos.	-Prestar atención a la exposición del docente. -Plantear las dudas que surjan. -Responder la prueba. -Formar grupos de 3 personas. -Exponer sus conclusiones.	-Aula con aire acondicionado -Computadora y video beam. -Presentación. -Pizarra acrílica, marcadores. -Instrumento: Tarea 4 -Folio de papel bond y cualquier otro material que sugieran los participantes.	2 horas
7	Describir y comparar las maneras como los estudiantes representan y relacionan la generalidad del patrón planteada en esta tarea con la obtenida en la tarea anterior.	Proceso de comparación	-Leer en voz alta cada enunciado y todas las cuestiones de la prueba antes de que empiecen a resolverla -Responder las preguntas de los participantes. -Sugerir a los participantes organizarse en grupos de 3 personas. -Promover la reflexión y facilitar la discusión. -Fomentar la participación de todos los grupos.	-Prestar atención a la exposición del docente. -Plantear las dudas que surjan. -Responder la prueba. -Formar grupos de 3 personas. - Exponer sus conclusiones.	-Aula con aire acondicionado -Computadora y video beam. -Presentación. -Pizarra acrílica, marcadores. -Instrumento: Tarea 5 -Folio de papel bond y cualquier otro material que sugieran los participantes.	2 horas